Ə.M.Əhmədov

FUNKSİONAL ANALİZ

I

Ölçü nəzəriyyəsi və Lebeq inteqralı

Azərbaycan Respublikası Təhsil nazirinin 03.05.2011-ci il tarixli 739 saylı əmri ilə dərslik kimi təsdiq edilmişdir.

Bakı - 2011

Baş elmi redaktor: akad. **C.E.Allahverdiyev**

Elmi redaktor: əməkdar elm xadimi, prof. **K.İ.Xudaverdiyev**

Rəyçilər: fiz.riy. elmləri doktoru, prof. **S.S.Mirzəyev**
fiz.riy. elmləri doktoru, prof. **M.S.Cəbrayılov**
fiz.riy. elmləri üzrə fəlsəfə doktoru, dos. **R.M.Babayev**
fiz.riy. elmləri üzrə fəlsəfə doktoru, dos. **T.B.Qasımov**

Ə.M.Əhmədov. Funksional analiz. I. Ali məktəblər üçün dərslik. Bakı: "Bakı Universiteti" nəşriyyatı, 2011, 248 s.

Təqdim olunan dərslik universitetlərin riyaziyyat fakültələrində tədris olunan funksional analiz fənninin əsas hissəsi olan ölçü nəzəriyyəsinə (müasir adı: Funksional analiz I) həsr olunmuşdur. Dərslikdə təhsildəki təkmilləşmə (tədris olunan fənn proqramlarının yenidən işlənilməsi, Boloniya prosesinə qoşulma və s.) amili də nəzərə alınmışdır.

Bu dərslikdən ali məktəb tələbələri: bakalavrlar və magistantlar, doktorantlar və ümumiyyətlə, ölçü nəzəriyyəsi və Lebeq inteqralı ilə maraqlanan mütəxəssislər istifadə edə bilər.

$Ə\frac{1602080000-005}{M-658(07)-009} - 009 - 2011$

Müqəddimə

Sovetlər ittifaqı dağıldıqdan sonra müstəqilliyə qədəm qoymuş Azərbaycanda cəmiyyətimizin bəzi sahələrində olduğu kimi elm və təhsil sahəsində də müəyyən çətinliklər ortaya çıxmışdı. Əlifba sahəsində latın qrafikasına keçid zamanı latın əlifbası ilə ədəbiyyatın olmaması orta və ali məktəblərdə tədrisin keyfiyyətini aşağı salırdı. Buna görə də latın qrafikalı əlifba ilə dərs vəsaitləri və dərsliklərin olmasına böyük zərurət yarandı. Son dövrlərdə alimlər və pedaqoqlar Azərbaycan dilində (latın qrafikası ilə) yeni dərslik və dərs vəsaitləri yazmağa başlamışlar. Ölkədəki inkişafla əlaqədar elm və təhsildə mükəmməl və keyfiyyətli, daha dəqiq desək, inkişafa xidmət edən dərs vəsaitlərinin meydana çıxması tələbi də irəli sürülür.

Təqdim olunan kitab universitetlərin riyaziyyat fakültələrində tədris olunan funksional analiz fənninin əsas hissəsi olan ölçü nəzəriyyəsinə həsr olunmuşdur. Ölçü anlayışı əvvəlcə həqiqi dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsində yaranmışdır. Lakin sonralar məlum oldu ki, bu anlayış bu və ya digər formada ehtimal nəzəriyyəsində, funksional analizdə, diferensial tənliklər nəzəriyyəsində, topoloji cəbrdə və digər sahələrdə geniş istifadə olunur.

Bu dərs vəsaitində təhsildəki təkmilləşmə (Boloniya prosesinə qoşulma, tədris olunan fənn proqramlarının yenidən işlənilməsi və s.) amili də nəzərə alınmışdır.

Kitab 9 fəsildən ibarətdir. Hər fəslin sonunda şərh olunan mövzular ətrafında tapşırıqlar verilmişdir.

I fəsildə çoxluqlar və funksiyalar nəzəriyyəsindən lazımi məlumatlara və faktlara diqqət yetirilmişdir.

II fəsil 8 bənddən ibarət olmaqla ölçü anlayışının təyininə həsr olunmuşdur. Bunun üçün cəbr və σ-cəbr, ölçülən funksiyalar, müsbət ölçü, xarici ölçü və həqiqi oxda Lebeq ölçüsü təyin olunmuşdur. Sonuncu 8-ci bənddə müvafiq misal və məsələlər verilmişdir.

III fəsildə ölçü vasitəsilə inteqral (Lebeq inteqralı) təyin olunmuş, bu inteqralın xassələri, inteqral altında limitə keçmə teoremləri və digər faktlar şərh olunmuşdur. Fəslin sonundakı tapşırıqlar mövzunu tamamlayır.

IV fəsil normalaşmış fəzaların mühüm hissəsi olan Lebeq fəzalarının (L_p, $1 \leq p \leq \infty$) təyini və tədqiqinə həsr olunmuşdur. Bu fəslin 4-cü bəndində mövzuya aid tapşırıqlar verilmişdir.

V fəsildə ölçülən funksiyalar ardıcıllığı üçün müəyyən yığılma anlayışları verilmişdir (sanki hər yerdə yığılma, L_p mənada yığılma, ölçüyə görə yığılma və s.). Burada bu yığılmalar arasında əlaqələr də şərh olunmuşdur. Sonda verilən tapşırıqlar kifayət qədər vacib misal və məsələlərdən ibarətdir.

VI fəsil ölçülən funksiyalar nəzəriyyəsinin çox mühüm hissələri olan məhdud variasiyalı və mütləq kəsilməz funksiyalara həsr olunmuşdur. Bu funksiyaların Lebeq inteqrallarının öyrənilməsində rolu geniş işıqlandırılmışdır. Sonda tapşırıqlar əlavə olunmuşdur.

VII fəsildə əvvəlki fəsillərdə öyrənilən müsbət ölçünün (əslində mənfi olmayan ölçü) davamı olan daha geniş işarəli və kompleks ölçülər təyin olunmuşdur. Bu ölçülər üçün ayrılışlar, variasiya, mütləq kəsilməzlik və sinqulyarlıq xassələri öyrənilmişdir. 6-cı bənddə L_p ($p \geq 1$) fəzasında xətti məhdud funksionalın ümumi ifadəsi tapılmışdır. Fəslin sonunda şərh olunan mövzunu dərinləşdirən tapşırıqlar verilmişdir.

VIII fəsil müəyyən konkret hallarda ölçülərin qurulmasına həsr olunmuşdur. Burada əsas diqqət həqiqi oxa yönəldilmişdir. Eyni zamanda $C_{[0,1]}$ fəzasında xətti məhdud funksionalın ümumi şəkli tapılmışdır. Bu fəslin sonuncu bəndində isə mövzuya uyğun tapşırıqlara yer ayrılmışdır.

IX fəsildə ölçü nəzəriyyəsində çox mühüm yer tutan ölçülərin hasili təyin olunmuş və son nəticədə Riyazi analizdə geniş istifadə olunan Fubini teoremi isbat edilmişdir. Son bənddə isə müvafiq tapşırıqlar verilmişdir.

Kitabda üçpilləli nömrələmədən istifadə olunur. Məsələn, 2. 2. 6 nömrəsi 2-ci fəslin 2-ci paraqrafının 6-cı bəndini göstərir. Hər bir təklif və teoremin isbatının sonunda □ işarəsi qoyulur.

Qeyd edək ki, bu dərs vəsaiti ölçü nəzəriyyəsini kifayət qədər əhatə edir. Burada hər fəslin sonunda verilən tapşırıqlar əsas mövzuların öyrənilməsində mühüm rol oynayırlar.

Bu kitab müəllifin uzun müddət Bakı Dövlət Universitetinin mexanika-riyaziyyat fakültəsində oxuduğu mühazirələr əsasında yaranmışdır. Müəllif kitabı yazarkən ölçü nəzəriyyəsi üzrə klassik və müasir ədəbiyyatdan geniş istifadə etmişdir. O, ümid edir ki, bu vəsait bir dərslik kimi uzunömürlü (xüsusən tədris üçün) ola bilər.

Müəllif müəllimi, elmi rəhbəri və eyni zamanda bu kitabın baş redaktoru akademik C.E.Allahverdiyevə bu kitabı yazmaq cəsarəti verdiyinə və əməkdar elm xadimi, prof. K.İ.Xudaverdiyevə kitabın əlyazmasını diqqətlə oxumasına və gərəkli qeydlərinə görə ürəkdən təşəkkür edir. Müəllif prof. S.S.Mirzəyev, dos. R.M.Babayev və dos. T.B.Qasımova qiymətli qeyd və təkliflərinə görə öz təşəkkürünü bildirir. Müəllif prof. N.Ş.İsgəndərova kitabın bir dərslik kimi nəşr olunmusını dəstəklədiyinə görə ona

xüsusi təşəkkür edir. BDU-nun Funksiyalar nəzəriyyəsi və funksional analiz kafedrasının əməkdaşları, dissertant və magistrları də bu kitabın ortaya çıxmasında müstəsna rol oynamışlar. Müəllif onlara da öz təşəkkürünü bildirir. Müəllif kitabın əlyazmasının kompyuter variantının hazırlanmasında böyük rol oynamış magistrant Mahirə Qarayevaya və tələbəsi gənc alim Misir vətəndaşı El-Şabravy Saad Raşada öz minnətdarlığını bildirir.

Bu kitabdan ali məktəb tələbələri, magistrlar, doktorantlar və ümumiyyətlə, riyaziyyatçı mütəxəssislər istifadə edə bilərlər.

I Fəsil

Çoxluqlar nəzəriyyəsinə giriş

1. Bəzi çoxluqlar

1.1.1. Riyaziyyatda müxtəlif növ çoxluqlara rast gəlirik. Bəzi çoxluqları onların elementlərinə nəzərən təyin etmək olur. Məsələn, $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ çoxluğunun elementləri $x_1, x_2, \cdots, x_n$ - dirlər. $\{x\}$ çoxluğu isə təkcə x elementindən ibarətdir. Adətən çoxluqlar müəyyən xassələrə görə təyin olunurlar. Məsələn, $\{x, P\}$ simvolu çoxluğun P xassəsinə malik x elementlərindən təşkil olunduğunu göstərir. $\emptyset$ simvolu boş çoxluğun işarəsidir. Ailə, sistem və külli (külliyyat) sözləri çoxluq sözünün sinonimləri olaraq qəbul edilir.

x-in A çoxluğunun elementi olması $x \in A$ kimi yazılır. Əks halda $x \overline{\in} A$ (və ya $x \notin A$). B çoxluğunun A çoxluğunun alt çoxluğu olması, yəni $\forall x \in B$ şərtindən $x \in A$ olduğunun alınması $B \subset A$ şəklində yazılır. Eyni zamanda $B \subset A$ və $A \subset B$ isə $A = B$ qəbul edilir. $B \subset A$ və $A \neq B$ isə B çoxluğuna A çoxluğunun düzgün alt çoxluğu deyilir. Qeyd edək ki, hər bir A çoxluğu üçün $\emptyset \subset A$ qəbul edilir.

$A \cup B$ və $A \cap B$ uyğun olaraq A və B çoxluqlarının birləşməsi və kəsişməsidir.

$$A \backslash B = \{x : x \in A, x \overline{\in} B\}$$

çoxluğu A və B çoxluqlarının fərqi adlanır.

A və B çoxluqlarının simmetrik fərqi dedikdə

$$A \vartriangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$$

çoxluğu başa düşülür.

Tutaq ki, X hər hansı çoxluq və $A \subset X$-dir. Bu zaman $X \backslash A$ fərqinə A alt çoxluğunun X əsas çoxluğuna tamamlanması deyilir və bəzən

$$A^c = X \backslash A$$

kimi işarə edilir.

Çoxluqlar nəzəriyyəsi və onun tətbiqlərində ikili prinsip adlandırılan aşağıdakı münasibətlər (De Morqan düsturları) mühüm rol oynayırlar:

1. Birləşmənin tamamlanması tamamlanmaların kəsişməsinə bərabərdir:

$$\left(\bigcup_{\alpha} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha} A_\alpha^c.$$

2. Kəsişmənin tamamlanması tamamlanmaların birləşməsinə bərabərdir:

$$\left(\bigcap_{\alpha} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha} A_\alpha^c.$$

$A_1, A_2, \cdots, A_n$ çoxluqlarının

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$$

Dekart hasili bir çoxluq kimi n sayda $a_i \in A$ elementlərinin nizamlanmış sistemidir, yəni

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n,$$
$$a_i \in A_i, i = 1, 2, \cdots, n.$$

Həqiqi ox R (R^1 və ya R_1-lə işarə edilir). Eyni zamanda

$$R^n = R \times R \times \ldots \times R.$$

Genişlənmiş həqiqi ədədlər sistemi R-ə $-\infty$ və ∞ simvolları əlavə edilən sistemdir. $-\infty \le a \le b \le \infty$ üçün (a, b) intervalı dedikdə

$$(a, b) = \{x : a < x < b\}$$

çoxluğu. $[a,b]$ parçası (seqmenti) dedikdə isə
$$[a,b] = \{x: a \leq x \leq b\}$$
çoxluğu nəzərdə tutulur.

$[a,b)$ və $(a,b]$ yarım intervalları uyğun olaraq
$$[a,b) = \{x: a \leq x < b\},$$
$$(a,b] = \{x: a < x \leq b\}$$
çoxluqları ilə ifadə olunurlar.

$M \subset [-\infty, x]$ və $M \neq \emptyset$ isə, onun $[-\infty, x]$-da ən kiçik yuxarı sərhədi $(\sup M)$ və ən böyük aşağı sərhədi $(\inf M)$ vardır.

$\sup M \subset M$ $(\inf M \subset M)$ olduqda $\sup M$ $(\inf M)$ əvəzinə $\max M$ $(\min M)$ işarəsindən istifadə olunur.

2. Funksiyalar və münasibətlər

1.2.1. Tutaq ki, X və Y hər hansı çoxluqlardır.
$$f: X \to Y$$
simvolu X-dən Y-ə təsir edən funksiya (və ya inikas, yaxud da çevirmə) adlanır. Başqa sözlə, f hər bir $x \in X$ elementinə bir $f(x) \in Y$ elementini qarşı qoyan inikasdır.

$A \subset X$ və $B \subset Y$ isə f vasitəsilə A çoxluğunun obrazı və B çoxluğunun proobrazı uyğun olaraq
$$f(A) = \{y: y = f(x), x \in A\}$$
$$f^{-1}(B) = \{x: f(x) \in B\}$$
kimi işarə olunurlar.

Qeyd edək ki, $f^{-1}(B)$ çoxluğu, hətta $B \neq \emptyset$ olduqda da boş ola bilər.

A çoxluğuna f funksiyasının təyin oblastı deyilir və *dom* f, yaxud da $D(f)$ kimi işarə olunur. f-in qiymətlər çoxluğu $f(A)$-dir. $f(A) = B$ olduqda, deyirlər ki, f funksiyası A-nı bütün B çoxluğuna inikas edir və qısaca ona syurektiv inikas deyilir.

İxtiyari müxtəlif x_1 və $x_2 \in A$ elementləri üçün $y_1 = f(x_1)$ və $y_2 = f(x_2)$ obrazları da müxtəlifdirlərsə, f funksiyasına inyektiv inikas deyirlər.

Syurektiv və inyektiv olan inikasa biyektiv inikas deyilir. Yəni belə inikas A və B çoxluqları arasında qarşılıqlı birqiymətli inikasdır.

Hər bir $y \in Y$ üçün $f^{-1}\{y\}$ əvəzinə $f^{-1}(y)$ işarəsini qəbul edirik. Deməli, f qarşılıqlı birqiymətli inikasdırsa, onda hər bir $y \in Y$ elementi üçün $f^{-1}(y)$ ən çoxu bir elementdən ibarət olur və f^{-1} inikası təyin oblastı

$$dom\, f^{-1} = f(X)$$

və qiymətlər çoxluğu X çoxluğu olan funksiyadır.

$f: X \to [-\infty, \infty]$ və $M \subset X$ isə $\sup f(M)$ əvəzinə $\sup_{x \in M} f(x)$ işarəsindən istifadə olunur.

$f: X \to Y$ və $g: Y \to Z$ inikasları üçün $g \circ f: X \to Z$ kompozisiyası (superpozisiyası) üçün

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) \ (x \in X)$$

düsturu qəbul olunur.

$A \subset X$ çoxluğu üçün

$$X_A(x) = \begin{cases} 1\ , \text{əgər } x \in A, \\ 0\ , \text{əgər } x \bar{\in} A \end{cases}$$

funksiyasına A çoxluğunun xarakteristik funksiyası (indikator funksiyası) deyilir.

1.2.2. A və B çoxluqları arasında biyektiv inikas varsa, onlara eyni güclü çoxluqlar deyilir və hər bir belə çoxluqların gücünü bir simvolla işarə edirlər: $card\ (A), card\ (B)$. Əgər A sonlu çoxluq isə, yəni $\{1, 2, \cdots, n\}$ n-sayda natural ədədlər çoxluğu ilə biyeksiyaya maliksə, onun gücü

$$card\ (A) = n$$

qəbul olunur.

Burada n $\{1, 2, \cdots, n\}$ tam ədədlər çoxluğunun elementlərinin sayıdır. Məsələn, $n = 100$ isə A çoxluğunun gücü

$$card\,(A) = 100$$

olur.

Verilmiş A çoxluğu N natural ədədlər çoxluğu ilə eyni gücə malikse, ona hesabi çoxluq deyilir. Məsələn, bütün tam ədədlər çoxluğu ilə N çoxluğu arasında

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0, & -1, & 1, & -2, & 2, & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \cdots \end{array}$$

qarşı qoymaq qaydasında biyektiv inikas yaratmaq olur. Yəni bütün tam ədədlər çoxluğu hesabidir.

Sonsuz hesabi A çoxluğunun nömrələnməsi dedikdə N natural ədədlər çoxluğunun A çoxluğuna f biyektiv inikası nəzərdə tutulur. Beləliklə, A-nı nömrələdikdən sonra alınan çoxluq elə $\{a_n\}$ ardıcıllığıdır ki,

a) hər bir $a_n \in A$,

və

b) ixtiyari n nömrəsi üçün A çoxluğunun hər bir elementi a_n şəklindədir: $a_n = f(n)$.

Aydındır ki, hesabi çoxluğun hər hansı alt çoxluğu ən çoxu hesabidir (ya sonludur, ya da hesabi).

1.2.3. Təklif. İki hesabi A və B çoxluqları üçün

a) $A \cup B$ hesabidir.

b) $A \times B$ Dekart hasili hesabidir.

a) hökmünü isbat edək. Tutaq ki, A və B sonsuz hesabi çoxluqlardır. Fərz edək ki, f A çoxluğunu nömrələyən funksiya, g isə B çoxluğunu nömrələyən funksiyadır. Onda

$$(m, n) \rightarrow (f(m), g(n))$$

inikası $N \times N$ hasilindən $A \times B$ hasilinə biyektiv inikasdır. Buna görə təklifin b) hissəsinin tam isbatı üçün $N \times N$-də nömrələmə qaydasını vermək lazımdır. Bunun üçün

$$h: N \to N \times N$$

nömrələmə inikasını aşağıdakı sxemlə vermək kifayətdir:

$$(1,1) \to (1,2) \to (2,1) \to (3,1) \to (2,2) \to (1,3) \to (1,4)$$
$$\to (2,3) \to\to (3,2) \cdots$$

Yəni ilk olaraq indekslərin cəmi 2 olan cütü 2-ci addımda indekslərin cəmi 3 olan cütləri və sonra indekslərin artan cəminə görə $A \times B$ çoxluğunun digər elementlərini nömrələmiş oluruq.

1.2.4. Eyni güclü çoxluqlara ekvivalent çoxluqlar deyilir.

Məsələn. A və B çoxluqları ekvivalentdirlərsə, bu münasibət $A \sim B$ kimi göstərilir.

Misallar.

1. İstənilən sonlu $[a,b]$ və $[c,d]$ parçaları ekvivalentdirlər. Doğrudan da

$$f(x) = \frac{c(b-x) + d(x-a)}{b-a}$$

inikası $[a,b]$ və $[c,d]$ parçaları arasında biyektiv inikasdır.

2. Genişlənmiş kompleks müstəvinin bütün nöqtələri çoxluğu Riman kürəsinə ekvivalentdir.

3. $(0,1)$ intervalının bütün nöqtələri çoxluğu düz xəttin bütün nöqtələri çoxluğuna ekvivalentdir. Doğrudan da

$$f(x) = \frac{1}{\pi} arctg\, x + \frac{1}{2}$$

inikası $(0;1) \to (-\infty, \infty)$ biyektiv inikasdır.

Ümumiyyətlə, göstərmək olar ki, hər bir sonsuz çoxluq özünün müəyyən alt çoxluğuna ekvivalentdir (isbat etməli).

1.2.5. Təklif. Həqiqi ədədlər çoxluğu hesabi çoxluq təşkil etmir.

Təklifin isbatı üçün əvvəlcə göstərək ki, $\Delta = [0;1]$ parçası qeyri-hesabi çoxluqdur. Əksini fərz edək. Yəni Δ hesabi çoxluq olsun. Onda Δ parçasının nöqtələrini

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

kimi nömrələmək olar. Δ parçasını üç bərabər hissəyə bölək:

$$\left[0, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Bu hissələrdən x_1-i daxilinə almayan parçalardan birini Δ_1-lə işarə edək. Δ_1-i yenə də üç bərabər hissəyə bölək. Bu hissələrdən x_2-ni daxilinə almayan hissəni Δ_2 ilə işarə edək. Bu prosesi sonsuz olaraq davam etdirsək.

$$\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \cdots \supset \Delta_n \supset \cdots$$

bir-birini daxilinə alan qapalı seqmentlər ardıcıllığını almış olarıq. Burada hər bir Δ_n parçası x_n elementini daxilinə almır.

Δ_n-nin uzunluğu $\frac{1}{3^n}$ olduğundan, n artdıqda sıfıra yaxınlaşır. Onda Kantorun məlum teoreminə əsasən $\{\Delta_n\}$ seqmentlər ardıcıllığının hər bir seqmentinə daxil olan x nöqtəsi (ədədi) vardır. Bu nöqtə Δ seqmentinə daxildir.

Ancaq qurmaya görə x nöqtəsi $\{x_n\}$ ardıcıllığına daxil deyildir. Belə olmasaydı x nöqtəsi Δ_n seqmentlərindən heç olmazsa birinə daxil olardı. Bu isə əks fərziyənin doğru olmadığını göstərir.

Yəni $\Delta = [0;1]$ seqmenti hesabi çoxluq deyildir.

Göstərmək olar ki, istənilən interval, seqment və yarım-interval qeyri-hesabi çoxluqlardır.

$f(x) = tg\,(2x-1)\frac{\pi}{2}$ funksiyası həqiqi oxla $(0;1)$ intervalı arasında biyektiv inikasdır. $(0;1)$ intervalı ilə $[0;1]$ parçasının ekvivalentliyini (isbat etməli) nəzərə alsaq, təklifi isbat etmiş oluruq. □

$[0;1]$ parçası ilə ekvivalent hər bir çoxluğa kontinuum güclü çoxluq deyilir.

1.2.6. $X \times X$ Dekart hasilinin müəyyən cütləri arasındakı əlaqə (və ya bağlılıq) bir münasibətdir. Məsələn, bundan əvvəl biz"$\sim$" simvolu ilə işarə edilən ekvivalent çoxluqlardan danışmışdıq. Yəni eyni güclü çoxluqlara ekvivalent çoxluqlar demişdik.

X çoxluğunun elementləri arasında aşağıdakı şərtləri ödəyən "$\sim$" münasibətinə ekvivalentlik münasibəti deyilir:

a) $x \sim x$ (refleksivlik),

b) $x \sim y \Longrightarrow y \sim x$ (simmetriklik),

c) $x \sim y, y \sim z \Longrightarrow x \sim z$ (tranzitivlik).

Yuxarıda çoxluqların eyni gücə malik olması (yəni ekvivalent olmaları) münasibəti ekvivalentlik münasibətidir.

Hər hansı bir çoxluqda təyin olunan ekvivalentlik münasibəti həmin çoxluğu kəsişməyən siniflərə (alt çoxluqlara) ayırır.

1.2.7. X çoxluğunun bəzi elementləri arasında aşağıdakı şərtləri ödəyən "φ" münasibətinə qismən nizamlama deyilir:

a) $a \ \varphi \ a$ (refleksivlik),

b) $a \ \varphi \ b, b \ \varphi \ a \ \Longrightarrow a = b$ (antisimmetriklik),

c) $a \ \varphi \ b, b \ \varphi \ c \ \Longrightarrow a \ \varphi \ c$ (tranzitivlik).

Qismən nizamlama münasibətini adətən " $\leqslant$ " kimi də işarə edirlər. Bu halda deyirlər ki, a b-dən böyük deyildir və ya a elementi b elementindən əvvəl gəlir. Yaxud da a elementi b elementinə tabedir.

Qismən nizamlama münasibətinə malik çoxluğa qismən nizamlanmış çoxluq deyilir.

Əgər X çoxluğunun istənilən x, y elementləri ya $x \leqslant y$, yaxud da $y \leqslant x$ qismən nizamlama münasibəti ilə bağlı olarsa, ona xətti nizamlanmış çoxluq deyilir. R həqiqi oxunda "$\leq$" münasibəti xətti nizamlama münasibətidir. X çoxluğu ən azı iki elementə malik olduqda, onun $\mathcal{P}(X)$ bütün alt çoxluqlar sistemi "$\subset$" daxil olma münasibətinə nəzərən (yəni $A, B \in \mathcal{P}(X)$ üçün $A \subset B$) qismən nizamlama münasibətidir. Bu münasibət xətti nizamlama münasibəti deyildir.

Tutaq ki, X "$\preccurlyeq$" qismən nizamlama münasibətinə malik çoxluqdur. X-də zəncir dedikdə elə $Z \subset X$ alt çoxluğu nəzərdə tutulur ki, $x, y \in Z$ olduqda ya $x \preccurlyeq y$, yaxud da $y \preccurlyeq x$ olur.

$A \subset X$ alt çoxluğunun istənilən y elementi üçün müəyyən $x \in X$ elementi $y \leq x$ şərtini ödəyərsə, x-ə A çoxluğunun yuxarı sərhədi deyilir. A çoxluğunun aşağı sərhədi oxşar qaydada təyin olunur. $x \in X$ elementinə görə istənilən $y \in X$ elementi üçün $x \leq y$ şərtindən $x = y$ alınarsa, x-ə maksimal element deyilir. Başqa sözlə, X çoxluğunda x elementindən böyük element yoxdur.

Xətti nizamlanmış X çoxluğunun istənilən boş olmayan alt çoxluğu ən kiçik elementə maliksə, (yəni hər bir boş olmayan $A \subset X$ alt çoxluğu A-ya daxil olan aşağı sərhədə maliksə) ona tamam nizamlanmış çoxluq deyilir.

Tamam nizamlanmış çoxluqlar güclərinə görə müqayisə oluna biləndirlər. Buradan belə bir sual meydana çıxır: İstənilən çoxluğu tamam nizamlamaq olarmı? Bu sualın cavabının müsbət olması istənilən güclərin müqayisə oluna bilməsi nəticəsinə gətirib çıxarır.

Bu istiqamətdə aşağıdakı teorem maraq doğurur.

Sermelo teoremi. İstənilən çoxluğu tamam nizamlamaq olar.

Bu teorem aşağıdakı fakta əsaslanır.

Seçmə aksiomu. Tutaq ki, I müəyyən α indekslər çoxluğudur və hər bir $\alpha \in I$ indeksinə görə M_α çoxluğu verilmişdir. Onda I indekslər çoxluğunda təyin olunmuş və hər bir $\alpha \in I$ indeksinə müəyyən $m_\alpha \in M_\alpha$ elementini qarşı qoyan φ funksiyası tapmaq olar.

Qeyd olunan Sermelo teoremi, seçmə aksiomu və bu sahəyə aid digər faktlar alimlər arasında müəyyən mübahisələr doğurmuş və riyaziyyatın indi istifadə etdiyimiz əsas sahələrinin inkişafında xüsusi rol oynayırlar. Maraqlıdır ki, bu faktlar bir-birinə ekvivalentdirlər. Bu təkliflərdən birini də qeyd edək.

Sorn lemması. Qismən nizamlanmış X çoxluğunun hər bir zənciri X-də yuxarı sərhədə maliksə, X çoxluğu maksimal elementə malikdir.

Seçmə aksiomunun köməyilə həqiqi oxda istənilən açıq çoxluğun strukturunu təyin etmək olur.

1.2.8. Teorem. Həqiqi oxun istənilən açıq çoxluğu ən çoxu hesabi sayda (sonlu və ya hesabi) cüt-cüt kəsişməyən intervalların birləşməsindən ibarətdir.

İsbatı. Tutaq ki, $G \subset R$ ixtiyari açıq çoxluqdur. G-nin nöqtələri arasında ekvivalentlik münasibəti təyin edək. Müəyyən $(\alpha,\beta) \subset G$ intervalı üçün $x, y \in (\alpha,\beta)$ olarsa, $x \sim y$ qəbul edəcəyik. Bu münasibət doğrudan da ekvivalentlik münasibətidir. Məsələn, tranzitivlik xassəsini göstərək. $x \sim y$ və $y \sim z$ isə, elə (α,β) və (γ,δ) intervalları vardır ki,

$$x, y \in (\alpha,\beta) \subset G \text{ və } (y,z) \in (\gamma,\delta) \subset G.$$

Bu halda $\gamma < \beta, (\alpha,\delta) \subset G$ və $x, z \in (\alpha,\delta)$. Deməli, G çoxluğu kəsişməyən U_τ siniflərinə ayrılır:

$$G = \bigcup_\tau U_\tau$$

Burada hər U_τ sinifinin nöqtələri bir-birinə ekvivalentdirlər. U_τ sinfi (a,b) şəklində intervaldır, $a = \inf U_\tau$, $b = \sup U_\tau$.

$U_\tau \subset (a,b)$ olması aşkardır. Digər tərəfdən, $x, y \in U_\tau$ isə U_τ sinfinin təyininə görə $(x,y) \subset U_\tau$. U_τ-nın a-ya sağdan yaxın və b-yə soldan yaxın nöqtələrinin varlığı şübhə doğurmur. Bu da o deməkdir ki, ucları (a,b)-yə daxil olan istənilən (a',b') intervalı U_τ-ya daxildir. Deməli, $U_\tau = (a,b)$. Bu cür cüt-cüt kəsişməyən intervalların sayı ən çoxu hesabidir. Doğrudan da seçmə aksiomunu tətbiq etsək, bu intervallarla rasional ədədlər çoxluğunun müəyyən alt çoxluğu arasında biyektiv inikas qura bilərik. □

3. Tapşırıqlar

1. Cüt ədədlər çoxluğu ilə tək ədədlər çoxluğunun kəsişməsi boş çoxluq təşkil edir.
2. Aşağıdakı çoxluqların ekvivalentliyini göstərin:
   a) Natural ədədlər çoxluğu bütün cüt ədədlər çoxluğuna ekvivalentdir;
   b) Natural ədədlər çoxluğu bütün tam ədədlər çoxluğuna ekvivalentdir.
   c) $[a,b]$ seqmenti $[c,d]$ seqmentinə ekvivalentdir.
3. Rasional ədədlər çoxluğu hesabidir.
4. Cəbri ədədlər çoxluğu hesabidir.
5. Özünün məxsusi alt çoxluğuna ekvivalent sonlu çoxluq varmı?
6. Göstərin ki, həqiqi ədədlər çoxluğu hesabi çoxluq təşkil etmir.
7. Göstərin ki, həqiqi oxda ixtiyari seqment, interval, yarım intervallar kontinuum gücə malikdirlər.
8. İsbat edin ki, hesabi çoxluğun bütün alt çoxluqlar sistemi kontinuum gücə malikdir.
9. İsbat edin ki, natural ədədlərin istənilən alt çoxluqlar sistemi kontinuum gücə malikdir.

10. İsbat edin ki, bütün yığılan və dağılan qüvvət sıraları çoxluğu kontinuum güclü çoxluqdur.
11. İsbat edin ki, həqiqi oxda hər bir məhdud qapalı F çoxluğu ya seqmentdir, yaxud da müəyyən seqmentdən ucları F-ə daxil olan və kəsişməyən ən çoxu hesabi sayda intervalları atmaqla alınan çoxluqdur.

II Fəsil

Ölçülər

1. Cəbr və σ-cəbr

2.1.1. Tərif. Tutaq ki, X ixtiyari çoxluqdur. X-in müəyyən alt çoxluqlarından ibarət $\mathcal{A}$ sistemi

a) $X \in \mathcal{A}$,

b) $\forall A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$.

c) ixtiyari sonlu sayda $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{A}$ olduqda $\Longrightarrow$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$$

şərtlərini ödəyirsə, $\mathcal{A}$ sisteminə X-də cəbr deyilir.

Başqa sözlə, $\mathcal{A}$ cəbri çoxluqların tamamlanması və istənilən sonlu sayda birləşməsinə nəzərən qapalı sistemdir. Digər tərəfdən,

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right)^c$$

münasibətinə nəzərən $\mathcal{A}$ cəbri istənilən sonlu sayda çoxluqların kəsişməsinə nəzərən də qapalıdır. Yəni c) şərtində "$\cup$" simvolunu "$\cap$" simvolu ilə də əvəz etmək olar.

Asanca görmək olar ki, $\emptyset \in \mathcal{A}$.

2.1.2. Tərif. X çoxluğunda təyin olumuş $\mathcal{A}$ cəbri c) şərti əvəzinə

c') Hesabi sayda ixtiyari $A_i\ (i = 1, 2, \cdots) \in \mathcal{A}$ olduqda $\Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ şərti doğrudursa, $\mathcal{A}$ sisteminə X-də σ-cəbr deyilir.

Asanca göstərmək olar ki, $\mathcal{A}$ σ-cəbri eyni zamanda cəbr əmələ gətirir. Doğrudan da, hər bir sonlu $A_1, A_2, \cdots, A_n$ sisteminə $A_1, A_2, \cdots, A_n, A_n, A_n, \cdots$ və ya $\emptyset \in \mathcal{A}$ olduğundan $A_1, A_2, \cdots, \emptyset, \emptyset, \cdots$ kimi də baxmaq olar.

σ-cəbrin tərifinə görə $\mathcal{A}$ sistemi tamamlama, sonsuz (hesabi) birləşməyə nəzərən qapalılıq xassəsinə malikdir.

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right)^c \quad (De\ Moran\ düsturu)$$

münasibətinə əsasən σ-cəbrin tərifində " $\cup$ " simvolunu " $\cap$ " simvolu ilə də əvəz etmək olar. Digər tərəfdən $\mathcal{A}$ sistemi boş olmadıqda, cəbr və σ-cəbrin tərifində a) şərti avtomatik ödənir.

$\mathcal{A}$ sistemi σ-cəbr olduqda X-ə ölçülən fəza, hər bir $A \in \mathcal{A}$ çoxluğuna isə ölçülən çoxluq deyilir. Tutaq ki, Y topoloji fəzası və $f: X \to Y$ funksiyası verilmişdir. İstənilən $V \subset Y$ açıq çoxluğu üçün $f^{-1}(V) \subset \mathcal{A}$ olarsa, f funksiyasına ölçülən funksiya deyilir.

Misallar

a. X hər hansı çoxluq, $\mathcal{A}$ isə onun bütün alt çoxluqlarından ibarət sistem isə, $\mathcal{A}$ σ-cəbr təşkil edir.

b. $\mathcal{A} = \{X, \emptyset\}$ olduqda, o σ-cəbrdir.

c. X sonsuz çoxluq, $\mathcal{A}$ isə X-in bütün sonlu çoxluqlarından ibarət alt çoxluqlar sistemidir. $\mathcal{A}$ cəbr (həm də σ-cəbr) təşkil etmir.

d. X sonsuz çoxluq $\mathcal{A}$ isə X-in elə A alt çoxluqlarından təşkil olunmuşdur ki, A və ya A^c sonlu çoxluqdur. Onda $\mathcal{A}$ sistemi cəbrdir, lakin σ-cəbr təşkil etmir.

e. X qeyri-hesabi çoxluqdur. $\mathcal{A}$ X-in bütün sonlu və ya hesabi alt çoxluqlarından ibarət sistemdir. $\mathcal{A}$ cəbr təşkil etmir.

f. X hər hansı çoxluq, $\mathcal{A}$ isə X-in elə A çoxluqlarından təşkil olunmuşdur ki, ya A, yaxud da A^c hesabidir. Onda $\mathcal{A}$ σ-cəbrdir.

2.1.3. Təklif. Tutaq ki, X hər hansı çoxluqdur. X-də təyin olunmuş bütün boş olmayan σ-cəbrlər ailəsinin kəsişməsi σ-cəbrdir.

İsbatı. Tutaq ki, $\mathcal{F}$ X-in boş olmayan σ-cəbrlər ailəsidir. τ ilə bu σ-cəbrlərin kəsişməsini işarə edək. X çoxluğu bütün σ-cəbrlərə daxil olduğundan τ sisteminə də daxildir. İxtiyari $A \in \tau$ çoxluğu τ sisteminin təyininə əsasən eyni zamanda bütün σ-cəbrlərə daxil olduğundan A^c-də həmin σ-cəbrlərə daxildir. Deməli, $A^c \in \tau$. Əgər hesabi sayda $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ çoxluqları τ sisteminə daxildirlərsə, bütün σ-cəbrlərə də daxildirlər. Onda τ bütün σ-cəbrlərin kəsişməsi olduğundan $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \tau$. Yəni, τ sistemi X-də σ-cəbr təşkil edir. □

2.1.4. Nəticə. Tutaq ki, X hər hansı çoxluq, $\mathcal{M}$ isə X-in müəyyən alt çoxluqlar sistemidir. Onda X-də $\mathcal{M}$ sistemini daxilinə alan ən kiçik τ σ-cəbri vardır.

Qeyd edək ki, ən kiçik τ σ-cəbri dedikdə onu nəzərdə tuturuq ki, $\mathcal{M}$ sistemini daxilinə alan hər bir σ-cəbr eyni zamanda τ σ-cəbrini də daxilinə alır.

İsbatı. $\mathcal{M}$-i daxilinə alan σ-cəbrlərin küllisini $\mathcal{P}$ ilə işarə edək. $\mathcal{P}$ ailəsi boş deyil, çünki bu sistem X-in bütün alt çoxluqlar sistemini öz daxilinə alır. $\mathcal{P}$-yə daxil olan bütün σ-cəbrlərin τ kəsişməsi 2. 1. 3 təklifinə əsasən σ-cəbr təşkil edir. Aydındır ki, τ σ-cəbri $\mathcal{M}$ sistemini də daxilinə alır. □

Bu nəticədə təyin olunan τ σ-cəbrinə $\mathcal{M}$ sisteminin doğurduğu σ-cəbr deyilir.

2.1.5. Borel çoxluqları. Tutaq ki, X topoloji fəzadır. 2. 1. 4. nəticəsinə əsasən X-də hər bir açıq çoxluğu daxilinə alan ən kiçik

$\mathcal{B}$ σ-cəbri vardır. $\mathcal{B}$-nin hər bir elementinə X-in Borel çoxluğu deyilir. Xüsusi halda, hər bir qapalı çoxluq (açıq çoxluğun tamamlanması) Borel çoxluğudur. Deməli, hesabi sayda qapalı çoxluqların birləşməsi və hesabi sayda açıq çoxluqların kəsişməsi də Borel çoxluqlarıdır. Sonuncu iki xassəyə malik çoxluqlar uyğun olaraq F_σ tipli və G_δ tipli çoxluqlar adlandırırlar.

Burada σ indeksi adətən birləşməni, δ indeksi isə kəsişməni nəzərdə tutr.

$\mathcal{B}$ sistemi σ-cəbr təşkil etdiyindən X topoloji fəzası ölçülən fəza, təyin olunmuş Borel çoxluqları isə ölçülən çoxluqların rolunu oynayırlar. $\mathcal{B}$ σ-cəbrini adətən $\mathcal{B}(X)$ kimi də işarə edirlər.

İndi bəzi, lakin çox vacib σ-cəbrlər ailələrini təyin edək.

Tutaq ki, $X = R^n$. R^n-dəki açıq çoxluqların doğurduğu Borel çoxluqlar sistemi, yəni σ-cəbr $\mathcal{B}(\mathcal{R}^n), n = 1$ olduqda isə $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ kimi işarə olunur.

2.1.6. Təklif. Aşağıdakı çoxluqlar ailələrinin hər biri Borel çoxluqların $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ σ-cəbrini doğurur:

a) R-dəki bütün qapalı çoxluqlar sistemi;

b) R-in $(-\infty, b]$ şəklində olan bütün yarımintervallar sistemi;

c) R-in $(a, b]$ şəklində olan bütün yarımintervallar sistemi.

İsbatı. Tutaq ki, $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ və $\mathcal{B}_3$ σ-cəbrləri uyğun olaraq a), b) və c) ailələrinin doğurduğu σ-cəbrlərdir. Təklifin doğruluğu üçün əvvəlcə $\mathcal{B}(\mathcal{R}) \supset \mathcal{B}_1 \supset \mathcal{B}_2 \supset \mathcal{B}_3$ və sonra isə $\mathcal{B}_3 \supset \mathcal{B}(\mathcal{R})$ olduğunu göstərmək kifayətdir. $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ σ-cəbri R-dəki bütün açıq çoxluqları və eyni zamanda onların tamamlanmalarını daxilinə aldığından $\mathcal{B}(\mathcal{R}) \supset \mathcal{B}_1$ olur.

$$(-\infty, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(b - \frac{1}{n}, \infty\right)^c$$

olduğundan $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_1$ olur. Bundan başqa,

$$(a,b] = (-\infty,b] \cap (-\infty,a]^c$$

olduğundan $\mathcal{B}_3 \subset \mathcal{B}_2$ olur. Digər tərəfdən hər bir açıq (a,b) intervalı

$$(a,b) = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a, b + \frac{1}{n}\right]$$

olduğundan $\mathcal{B}_3$-ə daxildir. R-də hər bir açıq çoxluq ən çoxu hesabi sayda (yəni sonlu və ya hesabi) (a,b) şəklindəki açıq intervalların birləşməsi şəklində göstərilə bildiyindən (1.2.8. Teoremi) açıq çoxluqlar da $\mathcal{B}_3$-ə daxildirlər. Başqa sözlə, $\mathcal{B}(R) \subset \mathcal{B}_3$. □

2.1.7. Təklif. Aşağıdakı çoxluqlar ailələrindən hər biri Borel çoxluqların $\mathcal{B}(\mathcal{R}^n)$ σ-cəbrini doğurur:

a) R^n-dəki bütün qapalı çoxluqlar sistemi;

b) Müəyyən i indeksi və b ədədi üçün R^n-in

$$\{(x_1, x_2, \cdots, x_n): x_i \le b\}$$

şəklində olan bütün yarım alt fəzalar sistemi;

c) R^n-in

$$\{(x_1, x_2, \cdots, x_n): a < x_i \le b, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

şəklində olan bütün yarım düzbucaqlılar sistemi.

Bu təklifin isbatı 2.1.6 təklifinin isbatına oxşar olaraq aparılır.

2. Ölçülən funksiya

2.2.1. Teorem. Tutaq ki, Y və Z topoloji fəzalar, $g: Y \to Z$ funksiyası isə kəsilməzdir. Onda:

a) X-topoloji fəza, $f: X \to Y$ kəsilməz funksiya isə $h = g \circ f$ $\left[h(x) = g\big(f(x)\big), x \in X\right]$ funksiyası X-dən Z-ə təsir edən kəsilməz funksiyadır;

b) X-ölçülən fəza. $f: X \to Y$ ölçülən funksiya isə $h = g \circ f$ funksiyası X-dən Z-ə təsir edən ölçülən funksiyadır.

İsbatı. Tutaq ki, $V \subset Z$ ixtiyari açıq çoxluqdur. Onda $g^{-1}(V)$ Y-də açıq çoxluq təşkil edir. Digər tərəfdən,

$$h^{-1}(V) = f^{-1}\left(g^{-1}(V)\right).$$

Aydındır ki, f kəsilməz funksiya olduqda, $h^{-1}(V)$ açıq çoxluq təşkil edir. Bu isə a) hökmünün doğruluğunu göstərir.

f ölçülən funksiya olduqda isə $h^{-1}(V)$ ölçülən çoxluq təşkil edir. □

2.2.2. Teorem. Tutaq ki, X ölçülən fəza, u və v isə X-də təyin olunmuş həqiqi ölçülən funksiyalardır. Əlavə fərz edək ki, g həqiqi müstəvidən Y topoloji fəzasına inikas edən kəsilməz funksiyadır. Hər bir $x \in X$ elementi üçün

$$h(x) = g(u(x), v(x))$$

təyin etsək, bu funksiya X-dən Y-ə təsir edən ölçülən funksiyadır.

İsbatı. $f(x) = (u(x), v(x))$ işarə edək. Aydındır ki, hər bir $x \in X$ üçün $f(x)$ həqiqi R^2 müstəvisində bir nöqtədir. $h = g \circ f$ olduğundan onun ölçülənliyini göstərmək üçün 2. 2. 1 teoreminə əsasən f-in ölçülənliyini göstərmək kifayətdir.

Tutaq ki, P tərəfləri koordinat oxlarına paralel açıq düzbucaqlıdır. Başqa sözlə,

$$P = I_1 \times I_2$$

iki I_1 və I_2 seqmentlərinin Dekart hasilindən ibarətdir. Aydındır ki,

$$f^{-1}(P) = u^{-1}(I_1) \cap v^{-1}(I_2)$$

və u, v funksiyaları ölçülən olduqlarından $f^{-1}(P)$ çoxluğu da ölçüləndir.

Digər tərəfdən müstəvinin hər bir açıq çoxluğu belə P_i düzbucaqlılarının ən çoxu hesabi sayda birləşməsi şəklində göstərilə bildiyindən (bu faktı isbat etməli) və

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{\infty} P_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(P_i)$$

olduğundan $f^{-1}(V)$ ölçülən çoxluqdur. Deməli, $f: X \to R^2$ ölçülən funksiyadır. □

2.2.3. İndi 2.2.1 və 2.2.2 teoremlərinin bəzi nəticələrini qeyd edək.

a) u və v həqiqi funksiyaları X-də ölçülən funksiyalar isə $f = u + iv$ kompleks funksiyası X-də ölçüləndir.

Bu hökm 2.2.2 teoremində $f(z) = z$ qəbul etməklə isbat olunur.

b) $f = u + iv$ X-də kompleks ölçülən funksiya isə u, v və $|f|$ funksiyaları da X-də həqiqi ölçülən funksiyalardır.

Bu hökm 2.2.1 teoremində $g(z) = Re\, z$, $Im\, z$ və $|z|$ qəbul etməklə isbat olur.

c) f və φ X-də kompleks ölçülən funksiyalar isə $f + \varphi$ və $f \cdot \varphi$ funksiyaları da ölçüləndirlər.

Bu nəticə f və φ həqiqi funksiyalar olduqda 2.2.2 teoremində

$$g(s,t) = s + t \text{ və } g(s,t) = s \cdot t$$

qəbul etməklə isbat olur. Kompleks halı isə a) və b) bəndlərindən alınır.

d) E-ölçülən çoxluğunun

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, \text{əgər } x \in E \\ 0, \text{əgər } x \notin E \end{cases}$$

xarakteristik funksiyası ölçülən funksiyadır.

2.2.4. Teorem. Tutaq ki, $\mathcal{A}$ X ölçülən çoxluğunda σ-cəbr və Y topoloji fəzadır. Fərz edək ki, $f: X \to Y$ funksiyadır. Onda

a) $\Omega = \{E: E \subset Y, f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$ Y-də σ-cəbr təşkil edir;

b) f ölçülən funksiya və $E \subset Y$ Borel çoxluğu isə

$$f^{-1}(E) \in \mathcal{A},$$

c) $Y = [-\infty, \infty]$ və hər bir həqiqi α ədədi üçün

$$f^{-1}((\alpha, \infty]) \in \mathcal{A}$$

isə f ölçülən funksiyadır.

İsbatı. a) hökmünün doğruluğu

$$f^{-1}(Y) = X\,,\, f^{-1}(Y \backslash A) = X \backslash f^{-1}(A)$$

və

$$f^{-1}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2) \cup \cdots$$

münasibətlərindən alınır.

b)-nin isbatı üçün Ω-nı a) hökmündəki kimi qəbul edək. f-in ölçülənliyi Y-in bütün açıq çoxluqlarının Ω-ya daxil olduğunu göstərir. Ω σ-cəbr olduğundan Y-in Borel çoxluqlarını da daxilinə alır.

İndi də c) bəndini isbat edək.

$$\Omega = \{E : E \subset [-\infty, \infty], f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$$

qəbul edək. Ω $[-\infty, \infty]$-da σ-cəbr təşkil etdiyindən və istənilən α həqiqi ədədi üçün $(\alpha, \infty] \in \Omega$ olduğundan

$$[-\infty, \alpha) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[-\infty, \alpha - \frac{1}{n}\right] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\alpha - \frac{1}{n}, \infty\right]^c$$

yarımintervalı və

$$(\alpha, \beta) = [-\infty, \beta) \cap (\alpha, \infty]$$

intervalı da Ω-ya daxildirlər. Digər tərəfdən genişlənmiş $[-\infty, \infty]$ həqiqi oxunda hər bir açıq çoxluq hesabi sayda yuxarıdakı tip çoxluqların birləşməsindən ibarət olduğundan Ω sistemi açıq çoxluqları da öz daxilinə alır.

Deməli, f ölçülən funksiyadır. □

2.2.1 və 2.2.2 teoremlərinə görə X ölçülən çoxluğu və $\mathcal{A}$ σ-cəbri üçün

$$f : X \to R$$

funksiyasının ölçülənliyi dedikdə hər bir həqiqi α ədədi üçün

$$A_\alpha = \{x : x \in X, f(x) > \alpha\}$$

çoxluğunun $\mathcal{A}$ σ-cəbrinə daxil olması başa düşülür.

Aşağıdakı lemma f-in ölçülənliyinin təyini üçün A_α çoxluğu əvəzinə digər ekvivalent çoxluqlardan istifadənin mümkünlüyünü göstərir.

2.2.5. Lemma. $f: X \to R$ funksiyası üçün aşağıdakı təkliflər ekvivalentdirlər:

a) hər bir $\alpha \in R$ üçün

$$A_\alpha = \{x: x \in X, f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A};$$

b) hər bir $\alpha \in R$ üçün

$$B_\alpha = \{x: f(x) \le \alpha\} \in \mathcal{A};$$

c) hər bir $\alpha \in R$ üçün

$$C_\alpha = \{x: f(x) \ge \alpha\} \in \mathcal{A};$$

d) hər bir $\alpha \in R$ üçün

$$D_\alpha = \{x: f(x) < \alpha\} \in \mathcal{A}.$$

İsbatı. B_α və A_α çoxluqları bir-birinin tamamlanması olduqlarından a) hökmü b) hökmünə ekvivalentdir. Buna oxşar c) və d) hökmləri də ekvivalentdirlər.

Tutaq ki, a) hökmü doğrudur. Onda hər n nömrəsi üçün $A_{\alpha-1/n} \in \mathcal{A}$ olur. Digər tərəfdən

$$C_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha-(1/n)}$$

olduğundan

$$C_\alpha \in \mathcal{A}.$$

Deməli, a)$\Rightarrow$c).

$$A_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\alpha+(1/n)}$$

olduğundan c)$\Rightarrow$a). □

2.2.6. Misallar.

a) Sabit funksiya ölçüləndir.

Doğrudan da istənilən $x \in X$ üçün $f(x) = c\ (const)$ isə $\alpha \geq c$ olduqda

$$\{x: x \in X, f(x) > \alpha\} = \emptyset$$

olur. $\alpha < c$ isə

$$\{x: x \in X, f(x) > \alpha\} = X .$$

b) $X = R$ və $\mathcal{A} = \mathcal{B}(R)$ Borel çoxluqlar sistemi isə hər bir kəsilməz $f: X \to X$ funksiyası Borel mənada ölçüləndir. Bu halda f funksiyasına Borel funksiyası da deyilir.

c) $X = R$ və $\mathcal{A} = \mathcal{B}(R)$ üçün hər bir monoton funksiya Borel mənada ölçüləndir. Məsələn. f monoton artan funksiyadırsa. yəni $x \leq x'$ olduqda $f(x') \geq f(x)$ isə

$$\{x: x \in R, f(x) > \alpha\}$$

çoxluğu müəyyən b ədədi üçün ya

$$\{x: x \in R, x > b\},$$

yaxud da

$$\{x: x \in R, x \geq b\}.$$

şəklindədir.

2.2.7. $f: X \to R$ funksiyası üçün

$$f^+(x) = \sup\{f(x), 0\},$$

$$f^-(x) = -\min\{f(x), 0\} = \sup\{-f(x), 0\}$$

kimi təyin olunmuş mənfi olmayan f^+ və f^- funksiyalarına baxaq. f^+ funksiyasına f-in müsbət (pozitiv) hissəsi. f^- funksiyasına isə f-in mənfi (neqativ) hissəsi deyilir. Aydındır ki.

$$f = f^+ - f^- \text{ və } |f| = f^+ + f^-$$

Buradan da

$$f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f),$$

$$f^- = \frac{1}{2}(|f| - f).$$

2.2.3. teoreminə görə f^+ və f^- funksiyalarının ölçülənliyi f-in ölçülənliyinə ekvivalentdir.

. Bəzən baxılan $f: X \to R$ funksiyasının sonsuz qiymət almasını da qəbul edəcəyik. Belə funksiyanın ölçülənliyi

$$A = \{x: x \in X, f(x) = +\infty\}$$

və

$$B = \{x: x \in X, f(x) = -\infty\}$$

çoxluqlarının $\mathcal{A}$ σ-cəbrinə daxil olması və həqiqi

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), x \notin A \cup B \\ 0, x \in A \cup B \end{cases}$$

funksiyasının ölçülənliyinə ekvivalentdir.

İndi tutaq ki, $\{a_n\} \subset [-\infty, \infty]$.

$$b_k = \sup\{a_k, a_{k+1}, \cdots\} \ (k = 1, 2, \ldots)$$

və

$$\beta = \inf\{b_1, b_2, \cdots\}$$

β-ya a_n ardıcıllığının yuxarı limiti deyilir və

$$\beta = \lim_{n\to\infty} \sup a_n \ \left(və \ ya \ \overline{\lim_{n\to\infty} a_n}\right)$$

kimi yazılır.

Aydındır ki. $b_1 \geq b_2 \geq \cdots$ və $b_k \to \beta \ (k \to \infty)$.

Eyni zamanda elə $\{a_{n_i}\} \subset \{a_n\}$ alt ardıcıllığı var ki. $a_{n_i} \to \beta \ (i \to \infty)$ və β bu xassəyə malik ən böyük ədəddir.

Ardıcıllığın aşağı limiti oxşar təyin olunur. Aşağı limiti $\lim_{n\to\infty} \inf a_n$ (və ya $\underline{\lim_{n\to\infty} a_n}$) kimi işarə edirlər. Qeyd edək ki,

$$\lim_{n\to\infty} \inf a_n = -\lim_{n\to\infty} \sup(-a_n).$$

$\{a_n\}$ yığılan ardıcıllıq isə.

$$\lim_{n\to\infty} \sup a_n = \lim_{n\to\infty} \inf a_n = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

İndi tutaq ki, $\{f_n\}$ genişlənmiş (yəni sonsuz qiymətlər ala bilən) həqiqi funksiyalar ardıcıllığıdır. Onda $\sup_n f_n$ və $\lim_{n\to\infty} \sup f_n$ funksiyaları X-də aşağıdakı kimi təyin olunurlar:

$$\left(\sup_n f_n\right)(x) = \sup_n\left(f_n(x)\right)$$

$$\left(\lim_{n\to\infty} \sup f_n\right)(x) = \lim_{n\to\infty} \sup\left(f_n(x)\right).$$

$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in X$ isə

f-ə $\{f_n\}$ ardıcıllığının nöqtəvi limiti deyilir.

2.2.8. Teorem. $f_n: X \to [-\infty, \infty]$ $(n = 1, 2, \dots)$ funksiyaları ölçülən və

$$g = \sup_{n\geq 1} f_n \text{ , } h = \lim_{n\to\infty} \sup f_n$$

isə g və h funksiyaları da ölçüləndirlər.

İsbatı. Aydındır ki,

$$g^{-1}((\alpha, \infty]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((\alpha, \infty]).$$

2.2.5. teoreminə (a) bəndi) əsasən g ölçülən funksiyadır. Bu nəticə inf sup-la əvəz edildikdə də doğrudur.

$$h = \inf_{k\geq 1}\left\{\sup_{i\geq k} f_i\right\}$$

olduğundan h-da ölçüləndir. □

Bəzi nəticələri qeyd edək.

a) Kompleks ölçülən funksiyalar ardıcıllığının limiti də ölçülən funksiyadır;

b) $f, g: X \to [-\infty, \infty]$ funksiyaları ölçüləndirlərsə, $\max\{f, g\}$ və $\min\{f, g\}$ funksiyaları və xüsusi halda

$$f^+ = \max\{f, 0\} \text{ və } f^- = -\min\{f, 0\}$$

funksiyaları da ölçüləndirlər.

3. Sadə funksiyalar

2.3.1. Tərif. Sonlu sayda qiymətlərə malik funksiyaya sadə funksiya deyilir.

Tutaq ki, X ölçülən fəza, $s: X \to [0, \infty)$ sadə funksiya, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ isə bu funksiyanın müxtəlif qiymətləridir.

$$A_i = \{x: s(x) = \alpha_i\}$$

işarə edək. Aydındır ki,

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$$

olar. Burada χ_{A_i} funksiyası A_i çoxluğunun xarakteristik funksiyasıdır.

Qeyd edək ki, S sadə funksiyasının ölçülən olması üçün zəruri və kafi şərt A_i, çoxluqlarının ölçülən olmasıdır. Diqqət etmək lazımdır ki, hər bir α ədədi üçün

$$\{x: x \in X; \chi_{A_i}(x) > \alpha\}$$

çoxluğu ya X, ya A_i, yaxud da $\emptyset$ çoxluqdur.

2.3.2. Teorem. Tutaq ki, $f: X \to [0, \infty]$ ölçülən funksiyadır. Onda

a) $0 \le S_1 \le S_2 \le \cdots \le f$.

b) $S_n(x) \to f(x)\ (n \to \infty)$, $x \in X$

xassələrinə malik $\{S_n\}$ ölçülən sadə funksiyalar ardıcıllığı vardır.

İsbatı. $n = 1, 2, \ldots$ və $i = 1, 2, \ldots, n \cdot 2^n$ nömrələri üçün

$$E_{n,i} = f^{-1}\left(\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right)\right), F_n = f^{-1}([n, \infty]) \qquad (1)$$

çoxluqlarını təyin edək.

Axtarılan S_n funksiyalarını aşağıdakı kimi təyin edək.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i}} + n\chi_{F_n} \qquad (2)$$

2.2.4. teoreminə əsasən $E_{n,i}$ və F_n çoxluqları ölçüləndirlər.

Asanca göstərmək olar ki, (2) funksiyaları a) şərtini ödəyirlər.

İndi tutaq ki, x elə elementdir ki, $f(x) < \infty$. Bu halda S_n-in ifadəsindən n-in böyük qiymətlərində

$$S_n(x) \geq f(x) - 2^{-n}$$

olduğunu görərik.

$f(x) = \infty$ olduqda isə $S_n(x) = n$ olar. Sonuncu mühakimə teoremin b) şərtini isbat etmiş olur. Onu da qeyd edək ki,

f məhdud funksiya olduqda $\{S_n\}$ ardıcıllığı f funksiyasına müntəzəm yığılır.

4. Ümumi halda ölçülən funksiyalar

Tutaq ki, f funksiyası X ölçülən fəzasından Y ölçülən fəzasına təsir edir.

X-dəki σ-cəbri $\mathcal{A}$, Y-dəki σ-cəbri isə $\mathcal{B}$ ilə işarə edək.

Əgər istənilən $E \in \mathcal{B}$ çoxluğuna görə $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ olarsa, f funksiyasına $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ölçülən, bəzən elə sadəcə ölçülən funksiya deyilir. Aydındır ki, ölçülən funksiyanın əvvəl verdiyimiz tərifi, yəni Y-topoloji fəza, $\mathcal{B}$ Y fəzasındakı açıq çoxluqlar sistemi olduqda, funksiyanın ölçülənliyinin indiki tərifinin xüsusi halıdır.

5. Müsbət ölçü

2.5.1. Tərif. X çoxluğunun $\mathcal{A}$ σ-cəbrində təyin olunmuş və qiymətləri $[0, \infty]$ genişlənmiş yarım oxuna daxil olan μ funksiyası hesabi sayda istənilən dizyunkt (cüt-cüt kəsişməyən) $A_i \in \mathcal{A}$ çoxluqları üçün

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \qquad (1)$$

şərtini ödəyərsə, ona müsbət ölçü və ya sadəcə ölçü deyilir. Tərifdə istənilən i nömrəsi üçün $\mu(A_i) \geq 0$ olduğundan (1)-in sağ tərəfindəki sıranın cəmi ya müəyyən bir müsbət ədəd, yaxud da $+\infty$-dur. Bu tərifdə heç olmazsa, bir i nömrəsi üçün $\mu(A_i) < \infty$ olduğunu qəbul edəcəyik.

Bundan sonra ölçülən fəza dedikdə, onun σ-cəbrinin ölçülən çoxluqlarında təyin olunmuş müsbət ölçüyə malik fəzanı nəzərdə tutacağıq. Təyin etdiyimiz μ ölçüsünü hesabi additiv (və ya σ-additiv) ölçü də adlandırırlar.

İndi başqa bir ölçü anlayışını verək. Fərz edək ki, $\mathcal{A}$ çoxluqlar sistemi X əsas çoxluğunda cəbr təşkil edir (σ-cəbr olmaya da bilər). $\mathcal{A}$ cəbrində təyin olunmuş və qiymətləri $[0, \infty]$ daxil olan μ funksiyası istənilən sonlu sayda dizyunkt $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{A}$ çoxluqları üçün

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \qquad (2)$$

şərtini ödəyərsə, ona sonlu additiv ölçü deyilir. Aydındır ki, hər bir hesabi additiv ölçü sonlu additivdir. Doğrudan da istənilən sonlu $A_1, A_2, \cdots, A_n$ ardıcıllığını $i > n$ nömrələri üçün $A_i = \emptyset$ qəbul etməklə

$$A_1, A_2, \cdots, A_n, \emptyset, \emptyset, \ldots$$

sonsuz ardıcıllığına genişləndirmək olar.

Qeyd edək ki, istər sonlu additiv, istərsə də hesabi additiv μ ölçüsü üçün

$$\mu(\emptyset) = 0 .$$

İsbatı oxucuya tapşırılır.

Bu faktın tərsi doğru olmaya da bilər. Buna misal göstərək.

Tutaq ki, $X = N$, yəni natural ədədlər çoxluğudur. $\mathcal{A}$ sistemini aşağıdakı kimi təyin edək:

$$\mathcal{A} = \{A: A \subset X, \text{ya } A, \text{yaxud da } A^c \text{sonlu çoxluqdur}\}$$

$\mathcal{A}$ cəbrdir, lakin σ-cəbr deyildir.

$\mu: \mathcal{A} \to [0, \infty]$ funksiyası $A \in \mathcal{A}$ üçün

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & A \text{ sonsuz çoxluqdur,} \\ 0, & A \text{ sonlu çoxluqdur.} \end{cases}$$

olsun. Göstərin ki, μ sonlu additiv ölçüdür. Bu ölçü hesabi additiv deyildir. Əksini fərz edək.

$A_k = \{k\}$ qəbul etməklə, A sisteminin doğurduğu σ-cəbrdə

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu(X) = 1$$

və

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = 0$$

olduğunu görərik.

Elə təsəvvür yarana bilər ki, ölçünün sonlu additivliyi hesabi additivlikdən daha təbiidir. Lakin tətbiq nöqteyi-nəzərindən hesabi additiv ölçü daha çox istifadə olunur (məsələn, inteqral nəzəriyyəsində). Bundan sonra biz ölçü dedikdə hesabi additiv ölçünü nəzərdə tutacağıq.

Misallar

1. X ixtiyari çoxluq olsun. A ilə bu çoxluqda təyin olunmuş σ-cəbri işarə edək.

$\mu: \mathcal{A} \to [0, \infty]$ funksiyasını $A \in \mathcal{A}$ üçün

$$\mu(A) = \begin{cases} n, & \text{əgər } A \text{ } n \text{ elementdən ibarətdirsə} \\ \infty, & \text{əgər } A \text{ sonsuz çoxluqdursa} \end{cases}$$

kimi təyin edək. μ-ölçüdür. Bu ölçüyə hesabi ölçü deyilir.

2. Tutaq ki, $X \neq \emptyset$, $\mathcal{A}$ ilə X-dəki σ-cəbri işarə edək. $x_0 \in X$ üçün $\delta_{x_0}: \mathcal{A} \to [0, \infty)$ funksiyasını istənilən $A \in \mathcal{A}$ çoxluğu üçün

$$\delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1, \text{əgər } x_0 \in A \\ 0, \text{əgər } x_0 \notin A \end{cases}$$

kimi təyin edək. δ_x ölçüdür. Bu ölçüyə x_0 nöqtəsində təmərküzləşmiş vahid kütlə deyilir.

3. Tutaq ki, X ixtiyari çoxluq , $\mathcal{A}$ isə X-də hər hansı σ-cəbrdir. $\mu: \mathcal{A} \to [0, \infty]$ funksiyasını ixtiyari $A \in \mathcal{A}$ üçün

$$\mu(A) = \begin{cases} \infty, \text{əgər } A \neq \emptyset \\ 0, \text{əgər } A = \emptyset \end{cases}$$

kimi təyin edək. μ ölçüdür.

4. Tutaq ki, X ən azı iki elementdən ibarət çoxluqdur. $\mathcal{A}$ sistemi X-ın bütün alt çoxluqlarından ibarət σ-cəbr olsun. $\mu: \mathcal{A} \to [0, \infty]$ funksiyasını istənilən $A \in \mathcal{A}$ üçün

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, \text{əgər } A \neq \emptyset \\ 0, \text{əgər } A = \emptyset \end{cases}$$

kimi təyin edək. μ nə hesabi additivlik, nə də sonlu additivlik xassəsinə malik deyildir. Yəni μ ölçü deyildir. Doğrudan da $A_1 \neq \emptyset, A_2 \neq \emptyset$ $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ və $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ isə $\mu(A_1 \cup A_2) = 1$ olur. Lakin

$$\mu(A_1) + \mu(A_2) = 2 .$$

2.5.2. Teorem. Tutaq ki, μ $\mathcal{A}$ σ-cəbrində təyin olunmuş ölçüdür. Onda bu ölçü aşağıdakı xassələrə malikdir:

a) $\mu(\emptyset) = 0$;

b) İstənilən sonlu sayda dizyunkt $A_i \in \mathcal{A}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ çoxluqları üçün

$$\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \dots + \mu(A_n);$$

c) $A, B \in \mathcal{A}$ və $A \subset B$ isə $\mu(A) \leq \mu(B)$;

d) $A_n \in \mathcal{A}$ $(n = 1, 2, \dots)$ $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ və

$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \cdots$ isə,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A) ;$$

e) $\quad A_n \in \mathcal{A}\ (n = 1, 2, \dots)$, $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, $A_1 \supset A_2 \cdots \supset A_n \supset \cdots$

və müəyyən n nömrəsi üçün $\mu(A_n) < \infty$ isə

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A) .$$

İsbatı. a) və b) bəndlərinin isbatını əvvəlcədən vermişik.

c) bəndini isbat edək. $B = A \cup (B \setminus A)$ və $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ olduğundan

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

d) bəndinin isbatı üçün

$$B_1 = A_1 \ , B_n = A_n \setminus A_{n-1} \ , (n = 2, 3, \dots)$$

qəbul edək. Aydındır ki,

$$B_n \in \mathcal{A} \ , B_i \cap B_j \neq \emptyset \ , i \neq j,$$

$$A_n = B_1 \cup \cdots \cup B_n \ \ və \ A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i .$$

Onda

$$\mu(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i)$$

və

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i)$$

olar. Buradan isə sıranın cəminin tərifinə əsasən d)-nin doğruluğunu alarıq.

e) bəndinin isbatı. Tutaq ki, $\mu(A_n) < \infty$ Ümumiliyi pozmadan $n = 1$ qəbul edək. Hər k nömrəsi üçün

$$C_k = A_1 \setminus A_k$$

çoxluqlarını daxil edək. Aydındır ki,

$$C_1 \subset C_2 \subset \cdots C_n \subset \cdots,$$
$$\mu(C_k) = \mu(A_1) - \mu(A_k),$$

$A_1 \backslash A = \bigcup_k C_k$ olar. Onda d) bəndinə əsasən

$$\mu(A_1) - \mu(A) = \mu(A_1 \backslash A) = \lim_{k\to\infty} \mu(C_k) = \mu(A_1) -$$
$$-\lim_{k\to\infty}(A_k). \square$$

2. 5. 3. Bəzi anlayışlar daxil edək.

Tutaq ki, μ $(X, \mathcal{A})$ ölçülən fəzasında ölçüdür. $\mu(X) < \infty$ olduqda μ-yə sonlu ölçü deyilir. Bu halda $(X, \mathcal{A}, \mu)$ üçlüyünə sonlu ölçüyə malik fəza deyilir.

Əgər $A_i \in \mathcal{A}, \mu(A_i) < \infty$ $(i = 1, 2, \dots)$

və

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$

isə μ ölçüsünə σ-sonlu ölçü deyilir. Bu halda $(X, \mathcal{A}, \mu)$-yə σ-sonlu ölçüyə malik fəza deyilir.

Qeyd edək ki, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-sonlu ölçülən fəza isə X $\mathcal{A}$-ya daxil olan hesabi sayda dizyunkt $\{B_i\}$ sonlu ölçüyə malik çoxluqların birləşməsindən ibarətdir. B_i çoxluqlarını σ-sonlu ölçünün tərifindəki A_i çoxluqlarının köməyi ilə düzəltmək olar:

$$B_1 = A_1,\ B_i = A_i \backslash \bigcup_{j=1}^{i-1} A_i \quad (i > 1)$$

$\left(R^n, \mathcal{B}(R^n)\right)$ ölçülən fəzasında təyin olunmuş ölçüyə Borel ölçüsü deyilir. X çoxluğu R^n-də Borel çoxluq və $\mathcal{A}$ σ-cəbri X dəki bütün Borel çoxluqlarını daxilinə alırsa, $(X, \mathcal{A})$ -dakı ölçüyə X-də Borel ölçüsü deyilir.

İndi fərz edək ki, $(X, \mathcal{A})$ istənilən $x \in X$ elementi üçün $\{x\} \in \mathcal{A}$ şərtini ödəyən ölçülən fəzadır.

Sonlu və ya σ-sonlu μ ölçüsü hər bir $x \in X$ üçün

$$\mu(\{x\}) = 0$$

olarsa, bu ölçüyə $(X,\mathcal{A})$ fəzasında kəsilməz və müəyyən hesabi $\mathcal{D} \subset X$ çoxluğu üçün

$$\mu(\mathcal{D}^c) = 0$$

olduqda isə μ ölçüsünə diskret ölçü deyilir.

6. Xarici ölçü

Bu hissədə R^n də Lebeq ölçüsünün qurulmasından bəhs edəcəyik. Əvvəl ümumi hala baxaq.

Tutaq ki, X hər hansı çoxluq, $\mathcal{P}$ isə onun bütün alt çoxluqlar sistemidir.

Fərz edək ki, $\mu^*: \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ funksiyası aşağıdakı xassələrə malikdir:

a) $\mu^*(\emptyset) = 0$,

b) $A \subset B \subset X$ olduqda

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$$

və

c) $\{A_n\} \subset X$ üçün

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Bu halda μ^*-a X-də xarici ölçü deyilir.

Deməli, X-də xarici ölçü elə monoton artan və hesabi yarım additiv

$$\mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$$

funksiyadır ki, $\emptyset$-da qiyməti 0-dır. Qeyd edək ki, μ^*ölçü olmaya da bilər. X-də ölçü təyin oblastı, ancaq $\mathcal{P}(X)$ olduqda xarici ölçü olur.

Bəzi misallara baxaq.

1. X ixtiyari çoxluq və $A \in \mathcal{P}(X)$ üçün

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0 \text{ , əgər } A = \emptyset \\ 1 \text{ , əgər } A \neq \emptyset \end{cases}$$

xarici ölçüdür.

2. X ixtiyari çoxluq və $A \in \mathcal{P}(X)$ üçün

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0 \text{ , əgər } A \text{ hesabi çoxluq} \\ 1 \text{ , əgər } A \text{ qeyri} - \text{hesabi çoxluq} \end{cases}$$

xarici ölçüdür.

3. X-ixtiyari sonsuz çoxluq, $A \in \mathcal{P}(X)$ üçün

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0 \text{ , əgər } A \text{ sonlu çoxluq} \\ 1 \text{ , əgər } A \text{ sonsuz çoxluq} \end{cases}$$

funksiyası hesabi yarım additivlik xassəsinə malik deyildir. Başqa sözlə μ^* xarici ölçü deyildir.

4. R həqiqi oxunda Lebeq ölçüsü aşağıdakı kimi təyin olunur. Hər $A \subset R$ alt çoxluğu üçün $\mathcal{F}_A$ elə hesabi sayda məhdud açıq intervallardan ibarət çoxluqlar ailəsi olsun ki.

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i) .$$

Onda

$$\lambda^*(A) = \inf\left\{\sum_i (b_i - a_i) : \{(a_i, b_i)\} \in \mathcal{F}_A\right\}$$

funksiyası R həqiqi oxunda xarici ölçüdür və bu ölçüyə həqiqi oxda Lebeq xarici ölçüsü deyilir.

Göstərmək olar ki, R həqiqi oxunda Lebeq xarici ölçüsü hər bir məhdud intervala onun uzunluğunu qarşı qoyur.

Misal 4-də təyin olunmuş Lebeq xarici ölçüsünü R^n fəzasına ümumiləşdirsək, alınan ölçü hər n-ölçülü

$$P = \{x : x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n), \alpha_i < \xi_i < \beta_i \text{ , } \alpha_i, \beta_i \in R \text{ , } \alpha_i, \xi_i, \beta_i \in R, i = 1, 2, \dots, n\}$$

paralelopipedinə onun həcmini qarşı qoyduğunu görərik.

7. R-də Lebeq ölçüsü

Əvvəlcə 2. 6. 4. misalında $\mathcal{R}$ həqiqi oxunda təyin olunan Lebeq xarici ölçüsünün bəzi mühüm xassələrini qeyd edək.

2.7.1. Teorem. $\mathcal{R}$-dəki λ^* xarici ölçüsü aşağıdakı xassələrə malikdir:

a) $A \subset B$ isə $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$.

b) Hər bir hesabi çoxluğun xarici ölçüsü sıfırdır.

c) $\lambda^*(\emptyset) = 0$.

d) λ^* xarici ölçüsü yerdəyişməyə nəzərən invariantdır. Başqa sözlə, hər bir $x_0 \in R$ nöqtəsi və $A \subset R$ üçün

$$\lambda^*(A + x_0) = \lambda^*(A) ,$$

burada

$$A + x_0 = \{x: x = a + x_0, a \in A\},$$

e) λ^* hesabi yarım additivdir.

f) hər bir $I \subset R$ intervalı üçün

$$\lambda^*(I) = l(I) .$$

burada l I intervalının (açıq, qapalı, yarımaçıq) uzunluğudur.

İsbatı.

a)-nın isbatı trivialdır.

b)-ni isbat edək. Tutaq ki,

$$A = \{x_k: k \in N\}$$

hesabi çoxluqdur. Tutaq ki, $\varepsilon > 0$ və $\{\varepsilon_k\}$ elə müsbət ədədi ardıcıllıqdır ki,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k = \frac{\varepsilon}{2} .$$

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} (x_k - \varepsilon_k, x_k + \varepsilon_k)$$

olduğundan

$$\lambda^*(A) \le \varepsilon .$$

Bu da o deməkdir ki, $\lambda^*(A) = 0$, yəni b) hökmü doğrudur.

c)-nin isbatı a) və b) hökmlərindən çıxır.

A çoxluğunun açıq intervallarla örtüyü $A + x_0$ çoxluğu üçün eyni uzunluğa malik açıq intervalların örtüyünü doğurduğundan

$$\lambda^*(A + x_0) \le \lambda^*(A) \ (1)$$

olur.

Digər tərəfdən A çoxluğu $A + x_0$ çoxluğunun yerdəyişməsi olduğundan

$$\lambda^*(A) \le \lambda^*(A + x_0) \ (2)$$

olur. (1) və (2) d)-nin doğruluğunu göstərir.

$A_i \subset R \ (i = 1, 2, \cdots)$ çoxluqları üçün

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^*(A_i) = \infty$$

olduqda e)-nin isbatı trivialdır.

Fərz edək ki,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^*(A_i) < \infty .$$

Tutaq ki, $\varepsilon > 0$ Onda hər bir i nömrəsi üçün elə $\{I_k^i\}$ açıq intervallar ardıcıllığı vardır ki,

$$A_i \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^i$$

və

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k^i) < \lambda^*(A_i) + {}^{\varepsilon}/_{2^i} .$$

İndi fərz edək ki, $\{I_k^i\}$ ikiindeksli elə açıq intervallar ardıcıllığıdır ki,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^i$$

və

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k^i) < \sum_{i=1}^{\infty}\left(\lambda^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^*(A_i) + \varepsilon .$$

Deməli, $\lambda^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^*(A_i) + \varepsilon$. $\varepsilon > 0$ ixtiyari olduğundan e)-ni isbat etmiş oluruq.

f)-i isbat etmək üçün əvvəlcə $I = [a, b]$ halına baxaq. Yəni sonlu a və b ədədləri üçün $[a, b]$ qapalı və məhdud çoxluqdur. $\varepsilon > 0$ və $\{\varepsilon_k\}$ elə müsbət ədədi ardıcıllıq olsun ki,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k = \frac{\varepsilon}{4}.$$

$$[a, b] \subseteq (a, b) \bigcup_{k=1}^{\infty}(a - \varepsilon_k, a + \varepsilon_k) \bigcup_{k=1}^{\infty}(b - \varepsilon_k, b + \varepsilon_k)$$

$\lambda^*(I) \leq b - a + \varepsilon$ olduğundan

$$\lambda^*(I) \leq \ell(I)$$

olduğunu görərik. $\{I_k\}$ ardıcıllığı I-ni örtən açıq intervallar olsun. I kompakt olduğundan bu örtükdən sonlu örtük seçmək olar. Ümumiliyi pozmadan $\{I_k\}$ ardıcıllığından elə $\{J_i : 1 \leq i \leq n\}$ intervallarını seçə bilərik ki,

$$a \in J_1 = (a_1, b_1)\ , b_1 \in J_2 = (a_2, b_2)\ ,$$
$$b_2 \in J_3 = (a_3, b_3), \cdots, b_{n-1} \in J_n = (a_n, b_n)$$

və $b_{n-1} \leq b \leq b_n$.

Buradan isə

$$b - a \leq b_n - a_1 = \sum_{i=2}^{n}(b_i - b_{i-1}) + (b_1 - a_1) <$$

$$< \sum_{i=2}^{n}(b_i - a_i) + (b_1 - a_1) = \sum_{i=1}^{n} \ell(J_i) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k)$$

olur. Deməli,

$$\ell(I) \leq \lambda^*(I).$$

$I = [a, b]$ seqmenti üçün f) hökmü isbat olundu.

İndi tutaq ki, $I = (a, b)$ açıq və məhdud intervaldır. Onda yuxarıdakına oxşar olaraq

$$\lambda^*(I) \leq \ell(I)$$

və e) və b) xassələrinə əsasən

$$b - a = \lambda^*[a, b] \leq \lambda^*\big((a, b)\big) + (\{a\}) + \lambda^*(\{b\}) =$$
$$= \lambda^*\big((a, b)\big).$$

Deməli,

$$\ell(I) \leq \lambda^*(I).$$

Yarım açıq intervallar üçün isbat oxşardır.

İndi tutaq ki, I sonsuz intervaldır (açıq, qapalı və ya yarım açıq interval). $M > 0$ ədədi üçün elə $J \subseteq I$ məhdud intervalı vardır ki,

$$\lambda^*(J) = \ell(J) = M.$$

Buradan isə

$$\lambda^*(I) \geq \lambda^*(J) = M.$$

olur.
$M > 0$ ixtiyari olduğundan

$$\lambda^*(I) = \infty = \ell(I)$$

olur. □

2.7.2. İndi R-də çoxluğun Lebeq mənada ölçülənliyi və Lebeq ölçüsü anlayışlarını verək.

Hər bir $A \subseteq R$ çoxluğu üçün

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c)$$

münasibəti ödənərsə, $E \subseteq R$ çoxluğuna Lebeq mənada ölçülən çoxluq deyilir.

Aydındır ki,

$$\lambda^*(A) \leq \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c) \ (1)$$

bərabərsizliyi xarici ölçünün yarım additivliyindən alınır. Lebeq mənada ölçülənliyin yoxlanılması üçün yuxarıdakı (1) bərabərsizliyinin əks bərabərsizliyinin göstərilməsi kifayətdir.

E çoxluğu A çoxluğunu iki dizyunkt $A \cap E$ və $A \cap E^c$ hissələrinə ayırır. Tərifə görə E çoxluğunun Lebeq mənada ölçülənliyi bu çoxluğun istənilən A çoxluğunu elə hissələrə bölməsidir ki, bu çoxluğun xarici ölçüsü hissələrinin xarici ölçülərinin cəminə bərabər olsun. Bu paraqrafın qalan hissəsində hər hansı çoxluğun ölçülənliyi dedikdə onun Lebeq mənada ölçülənliyini nəzərdə tutacağıq.

2.7.3. ***Teorem.*** Ölçülən çoxluqlar aşağıdakı xassələrə malikdirlər:

a) O çoxluq və R ölçüləndirlər.

b) E ölçüləndirsə, E^c-də ölçüləndir.

c) $\mu^*(E) = 0$ isə, E ölçüləndir.

d) E_1 və E_2 ölçüləndirlərsə,

$E_1 \cup E_2$ və $E_1 \cap E_2$ çoxluqları da ölçüləndirlər.

e) E ölçüləndirsə, $E + x_0$ çoxluğu da ölçüləndir, $x_0 \in R$.

İsbatı. a), b) və c) bəndlərinin isbatı asandır. d)-nin isbatı üçün $A \subseteq R$ olsun.

Qeyd edək ki,

$$A \cap (E_1 \cap E_2) = (A \cap E_1) \cup (A \cap E_1^c \cap E_2).$$

De Morqan düsturuna və xarici ölçünün yarım additivliyinə əsasən

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E_1) + \lambda^*(A \cap E_1^c) = \lambda^*(A \cap E_1) +$$
$$+\lambda^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + \lambda^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c) \geq$$

$$\geq \lambda^*\big(A \cap (E_1 \cup E_2)\big) + \lambda^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^c).$$

Deməli, $E_1 \cup E_2$ ölçülən çoxluqdur.

$E_1 \cap E_2 = (E_1^c \cup E_2^c)^c$ olduğundan $E_1 \cap E_2$ çoxluğu da ölçüləndir.

e)-ni isbat edək. $A \subseteq R$ çoxluğu üçün

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c) =$$
$$= \lambda^*\big((A \cap E) + x_0\big) + \lambda^*\big((A \cap E^c) + x_0\big) =$$
$$= \lambda^*\big((A + x_0) \cap (E + x_0)\big) + \lambda^*\big((A + x_0) \cap (E + x_0)^c\big).$$

Buradan isə

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A - x_0) = \lambda^*\big(A \cap (E + x_0)\big) +$$
$$+\lambda^*\big(A \cap (E + x_0)\big)$$

olduğundan $E + x_0$ çoxluğu ölçüləndir. □.

2.7 4. Nəticə. Hər bir interval ölçüləndir.

İsbatı oxucuya tapşırılır.

2.7.5. Teorem. $\{E_i\}$ ölçülən çoxluqlar ardıcıllığı isə $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ və $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$ çoxluqları da ölçüləndirlər.

İsbatı. $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ olsun.

$$G_1 = E_1\,,\; G_n = E_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i \;(n \geq 2)$$

qəbul edək. $\{G_n\}$ dizyunkt ölçülən çoxluqlar ardıcıllığıdır və

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$$

və hər bir n nömrəsi üçün

$$E^c \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{n} G_i\right)$$

olduğundan istənilən $A \subseteq R$ çoxluğu üçün

$$\lambda^*\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A\cap G_i)\right)=\lambda^*\left(A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}G_i\right)\right)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\lambda^*(A\cap G_i)$$

olduğundan (niyə?)

$$\lambda^*(A)=\lambda^*\left(A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}G_i\right)\right)+\lambda^*\left(A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}G_i\right)^c\right)\geq$$
$$\geq\sum_{i=1}^{n}\lambda^*(A\cap G_i)+\lambda^*(A\cap E^c)$$

olur.

Buradan isə

$$\lambda^*(A)\geq\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^*(A+G_i)+\lambda^*(A\cap E^c)$$

olduğunu görərik.

$$A\cap E=\bigcup_{i=1}^{\infty}(A\cap G_i)$$

olduğundan hesabi yarım additivlik xassəsinə əsasən

$$\lambda^*(A\cap E)+\lambda^*(A\cap E^c)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^*(A\cap G_i)+$$
$$+\lambda^*(A\cap E^c)\leq\lambda^*(A)$$

Və deməli, E ölçülən çoxluqdur.

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i=\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i^c\right)^c$$

olduğundan $\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i$ çoxluğu da ölçüləndir. □

2.7.6. *Nəticə.* İstənilən $\{E_i\}$ dizyunkt ölçülən çoxluqları üçün

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) .$$

İsbatı oxucuya tapşırılır.

2.7.7. *Nəticə.* Həqiqi oxda açıq və qapalı çoxluqlar ölçüləndirlər.

İsbatı aşkardır.

Belə təsəvvür yarana bilər ki, istənilən çoxluq ölçülən çoxluq olmalıdır. Lakin bu həmişə doğru deyildir. Ölçülməyən çoxluğun varlığının isbatı üçün seçmə aksiomu mühüm rol oynayır.

2.7.8. *Teorem.* Həqiqi oxda ölçülməyən çoxluq vardır.

İsbatı. R-də x və y-in fərqi, yəni $x - y$ rasional ədəd olduqda, deyəcəyik ki, x və y bir-biri ilə bağlıdırlar, yəni $x \sim y$. Bu münasibət ekvivalentlik münasibətidir. Məlumdur ki, ekvivalentlik münasibəti R-i kəsişməyən siniflərə ayırır. Bu halda hər sinif hər bir x üçün $Q + x$ şəklində olur.

Burada $Q \subseteq R$ rasional ədədlər çoxluğudur. Hər bir belə sinif $[0; 1]$ intervalı ilə kəsişdiyindən seçmə aksiomunun köməyilə $[0, 1]$-in elə E alt çoxluğunu düzəltmək olar ki, özündə hər sinifdən bir nöqtə saxlayar. Göstərəcəyik ki, E çoxluğu ölçülən deyildir.

$[-1, 1]$ intervalındakı rasional ədədlər çoxluğunu $\{r_n\}$-lə işarə edək. Hər n nömrəsi üçün $E_n = E + r_n$ çoxluğuna baxaq.

$\{E_n\}$ çoxluqları aşağıdakı xassələrə malikdir:

a) $\{E_n\}$ çoxluqları dizyunktdurlar.

b) $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset [-1, 2]$,

c) $[0, 1] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

$E_m \cap E_n \neq \emptyset$ isə, elə $e, e' \in E$ elementləri vardır ki,

$e + r_n = e' + r_n$, yəni $e \sim e'$ və deməli, $e = e'$ və $n = m$. Bu da a)-nın doğruluğunu göstərir.

b)-nin doğruluğu $\{r_n\} \subset [0,1]$ və $E \subset [0,1]$ münasibətlərindən çıxır.

İndi c) xassəsini isbat edək. Tutaq ki, $x \in [0,1]$ ixtiyari ədəddir və $e \in E$ elə elementdir ki, $x \sim e$. Onda $x - e$ rasional ədəddir və $[-1,1]$ intervalına daxildir (yada salaq ki, x və e ədədləri $[0,1]$ intervalındandırlar). Deməli, müəyyən n nömrəsi üçün $x \in E_n$ və c) bəndi doğrudur. $E_n = E + r_n$ çoxluğu da ölçüləndir. a) bəndindəki xassədən istifadə etsək,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

olduğunu alarıq.

$$\mu(E_n) = \mu(E)$$

və

$$[0;1] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq [-1;2]$$

olduğundan

$$1 \le \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E) = 3\,.$$

Bu isə mümkün deyil (nə üçün?). Deməli, E çoxluğu ölçülən deyildir.

Ümumiyyətlə, isbat etmək olar ki, hər bir müsbət ölçülü $A \subset R$ çoxluğu ölçülməyən alt çoxluğa malikdir.

İndi çox maraqlı bir misala baxaq. Əvvəlcə bəzi mühüm anlayışları verək.

$E \subseteq R$ çoxluğu hər bir nöqtəsi limit nöqtəsi olmaqla qapalı isə ona mükəmməl çoxluq deyilir.

$E \subset R$ çoxluğunun $\bar{E}$ qapanması heç bir açıq intervala malik deyilsə, ona heç yerdə sıx olmayan çoxluq deyilir.

Göstərmək olar ki, hər bir boş olmayan mükəmməl çoxluq qeyri-hesabidir (isbat edin!). E qapalı çoxluq isə $E = M \cup H$ kimi (M-mükəmməl və H hesabi çoxluğun birləşməsi şəklində) göstərmək olar.

Misal üçün

$X = [0; 1] \backslash Q$ (Q rasional ədədlər çoxluğudur) çoxluğu $(0, 1)$ intervalındakı irrasional ədədlər çoxluğudur.

$\mu(X) = 1$ olduğundan elə $K \subseteq X$ qapalı çoxluğu tapmaq olar ki,

$$\mu(K) > \frac{1}{2}.$$

$K = M \cup H$ (M mükəmməl, H isə hesabi çoxluqdur) kimi yazsaq, görərik ki, M rasional ədədlərə malik olmayan mükəmməl çoxluqdur. M çoxluğu qapalı olmaqla heç bir rasional ədədlərə malik olmadığından, heç yerdə sıx deyildir.

2.7.9. Kantor çoxluğu

İndi daha mühüm misala baxaq.

$K_0 = [0; 1]$ parçasına baxaq. Bu parçanı üç bərabər hissəyə bölək və orta hissəni ataq.

$$K_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

olsun. İndi bu yeni parçaların hər birini yenə üç bərabər hissəyə bölməklə orta hissələri ataq. Alınan çoxluğu K_2 hərfi ilə işarə edək, yəni

$$K_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Bu prosesi davam etdirsək, n-ci addımda hər birinin uzunluğu 3^{-n} olan 2^n sayda cüt-cüt kəsişməyən (dizyunkt) qapalı intervallar alarıq.

K_n belə qapalı intervalların birləşməsi şəklindədir. K_{n+1}-i qurmaq üçün K_n-i təşkil edən hər bir intervalı üç bərabər hissəyə bölüb orta hissəni atmaq lazımdır. Bu prosesi sonsuz davam etdirsək, hər sonrakı əvvəlkinə daxil olan qapalı $\{K_n\}$ intervallar ardıcıllığı almış olarıq. Aydındır ki, K_n çoxluqları kompakt çoxluqlardır və $\mu(K_n) = \frac{2^n}{3^n}$.

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$$

işarə edək. Aydındır ki, $K \neq \emptyset$, qapalıdır və

$$\mu(K) = \lim_{n\to\infty} \mu(K_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 .$$

Digər tərəfdən K_n-ə daxil olan parçaların uc nöqtələri K-ya daxildirlər. K çoxluğunu Kantor çoxluğu adlandırırlar.

2.7.10. Teorem. K Kantor çoxluğu boş olmayan, mükəmməl heç yerdə sıx olmayan ölçüsü sıfır olan çoxluqdur.

İsbatı. $\mu(K) = 0$ olduğundan K çoxluğu heç bir intervala malik deyildir. Deməli, K heç yerdə sıx deyildir. K-nın mükəmməl çoxluq olduğunu göstərmək üçün K-nın hər bir nöqtəsinin limit nöqtəsi olduğunu göstərmək kifayətdir.

Tutaq ki, $x \in K$ və $\delta > 0$. n nömrəsini elə seçək ki, $3^{-n} < \delta$ olsun. $x \in K$ üçün uzunluğu 3^{-n} olan elə qapalı I intervalı vardır ki,

$$x \in I \subseteq K_n .$$

I parçasının uc nöqtələrindən birini a ilə işarə edək. Aydındır ki, $a \in K, x \neq a$ və $0 < |x-a| < \delta$. Deməli, x nöqtəsi K çoxluğunun limit nöqtəsidir. □

K çoxluğunun strukturuna baxaq. Aydındır ki,

$$0, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, \cdots$$

nöqtələri atılan intervalların uc nöqtələri kimi K-ya daxildirlər. Lakin K çoxluğuna təkcə bu nöqtələr daxil deyildirlər. Doğrudan da, $[0;1]$ parçasının K-ya daxil olan nöqtələrini aşağıdakı kimi xarakterizə etmək olar.

Hər bir x $(0 \le x \le 1)$ ədədini üçlük sistemdə yazaq:

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \cdots + \frac{a_n}{3^n} + \cdots$$

Burada a_n-lər 0, 1 və 2 qiymətlərini ala bilər. Onluq kəsrlərdə olduğu kimi bu cür ədədlər iki cür göstərilə bilər. Məsələn,

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{0}{3^2} + \cdots + \frac{0}{3^n} + \cdots,$$

$$\frac{1}{3} = \frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots + \frac{2}{3^n} + \cdots$$

Göstərmək olar ki, K çoxluğuna elə x $(0 \le x \le 1)$ nöqtələri daxildir ki, heç olmazsa bir üçlük kəsrlə göstərilə bilsin və $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ ardıcıllığında 1 rəqəmi olmasın.
Beləliklə, hər bir $x \in K$ nöqtəsinə

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots \tag{1}$$

ardıcıllığı qarşı qoyulur və burada a_n ya sıfır, ya da 2-dir. Belə ardıcıllıqlar çoxluğu kontinuum güclü çoxluqdur. Bunun üçün (1) ardıcıllığına

$$b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots \tag{2}$$

($a_n = 0$ olduqda $b_n = 0$ və $a_n = 2$ olduqda $b_n = 1$) ardıcıllığını qarşı qoymaq kifayətdir.

(2) ardıcıllığına müəyyən $y \in [0;1]$ ədədinin ikilik kəsrinin ifadəsi kimi baxmaq olar.

Beləliklə, K çoxluğunun bütün $[0,1]$ parçasına birqiymətli inikasını təyin etmiş oluruq. Bu inikas qarşılıqlı birqiymətli deyildir. Çünki eyni bir ədəd müxtəlif kəsrlərlə göstərilə bilər. Onda K çoxluğunun gücü kontinuum gücdən kiçik deyildir. $K \subset [0;1]$

olduğundan onun gücü kontinuum gücdən böyük deyildir. Deməli, K kontinuum gücə malik çoxluqdur.

Digər maraqlı fakt bundan ibarətdir ki, atılan intervalların uzunluqları cəmi

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\cdots=1\,.$$

2.7.11. Ölçünün tamlığı və requlyarlığı

Əvvəlcə ölçüsü sıfır olan çoxluqların oynadığı mühüm rolu qeyd edək.

Tutaq ki, $(X,\mathcal{A},\mu)$ ölçülən fəzası verilmişdir. Biz əvvəllər $(X,\mathcal{A})$ cütünə də ölçülən fəza demişdik. Lakin əsas X çoxluğunda konkret $\mathcal{A}$ σ-cəbri məlum olduqda və müəyyən xassələrin isbatında ancaq $\mathcal{A}$ σ-cəbrindən istifadə edirdiksə, ümumiliyi pozmadan X çoxluğunu ölçülən fəza adlandırırdıq. İndiki halda əlavə olaraq μ ölçüsü təyin olunubsa, bu halda da σ-cəbr və ölçü təyin olunmuşlarsa, sadəlik xatirinə X-in özünə ölçülən fəza deyəcəyik.

Qeyd edək ki, hər hansı $x \in X$ nöqtəsi müəyyən P xassəsinə malik ola da bilər, olmaya da bilər.

Məsələn, P xassəsi verilmiş f funksiyası üçün" $f(x)>0$ ". Əgər μ $\mathcal{A}$ σ-cəbrində təyin olunmuş ölçü və $B\in\mathcal{A}$ isə "P xassəsi B çoxluğunda sanki hər yerdə ödənir" təklifi (qısaca "P xassəsi B çoxluğunda *s. h.* ödənir) göstərir ki, $\exists B_0\in\mathcal{A}$ çoxluğu vardır ki, $B_0\subset B$, $\mu(B_0)=0$ və P xassəsi $B\backslash B_0$ çoxluğunun hər bir nöqtəsində ödənir.

Aydındır ki, *s. h.* anlayışı ancaq μ ölçüsündən asılıdır.

Məsələn, f və g ölçülən funksiyalar və

$$\mu\{x: f(x)\neq g(x)\}=0$$

isə deyəcəyik ki, *s. h.* $f(x)=g(x)$ və ya $f\sim g$ . .

Əlbəttə, bu münasibət ekvivalentlik münasibətidir. Tranzitivlik xassəsi ($f\sim g$ və $g\sim h$ münasibətindən $f\sim h$ alınır) ölçüsü sıfır olan iki çoxluğun birləşməsinin ölçüsünün sıfır olması faktından çıxır.

Elə təsəvvür yarana bilər ki, ölçüsü sıfır olan çoxluğun istənilən alt çoxluğunun ölçüsü də sıfır olur. Bu həmişə doğru deyil. Çünki ölçülən, yəni $\mathcal{A}$ σ-cəbrindən olan çoxluğun istənilən alt çoxluğu ölçülməyən ola bilər, yəni $\mathcal{A}$ σ-cəbrinə daxil olmaya da bilər.

Lakin $\mathcal{A}$ σ-cəbrini elə genişləndirmək olar ki, yeni σ-cəbrdə təyin olunan ölçü yuxarıda qeyd olunan qüsura malik olmasın.

2.7.12. Teorem (*Ölçünün tamamlanması*).

Tutaq ki, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçülən fəzadır. Onda

a) $\mathcal{A}^* = \left\{ \begin{matrix} E : E \subset X, \exists A, B \in \mathcal{A}, A \subset E \subset B \text{ və} \\ \mu(B \setminus A) = 0 \end{matrix} \right\}$ X-də σ-cəbrdir.

b) $\lambda(E) = \mu(A)$ qəbul etsək, λ $\mathcal{A}^*$-da ölçüdür.

Qeyd. λ ölçüsü μ ölçüsünün $\mathcal{A}$ σ-cəbrindən $\mathcal{A}^*$ σ-cəbrinə davamıdır. Aydındır ki, λ ölçüsü tam ölçüdür, yəni ölçüsü sıfır olan çoxluğun (bu halda λ ölçüsünə nəzərən) istənilən alt çoxluğu ölçüləndir (buradan isə alt çoxluğun ölçüsünün sıfır olması çıxır).

İsbatı. $\mathcal{A}^*$ ailəsinin σ-cəbr olmasını göstərək.

1) $X \in \mathcal{A}$ olduğundan $X \in \mathcal{A}^*$ olur.

2) $A \subset E \subset B$ olduğundan $B^c \subset E^c \subset A^c$ və $A^c \setminus B^c = B \setminus A$ olur, yəni $E \in \mathcal{A}^*$ isə, $E^c \in \mathcal{A}^*$.

İndi fərz edək ki,

$A_i \subset E_i \subset B_i$, $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ və $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$.

Onda $A \subset E \subset B$ və $B \setminus A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (B_i \setminus A_i)$.

Buradan

$$\mu(B_i \setminus A_i) = 0 \ (i = 1, 2, \cdots)$$

olduqda,

$$\mu(B \setminus A) = 0$$

olur.

İndi göstərək ki, $\lambda(E) = \mu(A)$ kimi təyin olunan λ ölçüsü $\mathcal{A}^*$ σ-cəbrində korrekt təyin olunmuşdur.

Doğrudan da,

$A \subset E \subset B$, $A_1 \subset E \subset B_1$ və $\mu(B \backslash A) = \mu(B_1 \backslash A_1)$ isə

$$A \backslash A_1 \subset B_1 \backslash A_1$$

və

$$\mu(A \backslash A_1) \leq \mu(B_1 \backslash A_1) = 0,$$

yəni

$$\mu(A \backslash A_1) = 0$$

olur. Eyni qaydada göstərmək olar ki,

$$\mu(A_1 \backslash A) = 0.$$

Deməli,

$$\mu(A) = \mu(A_1 \cap A) = \mu(A_1).$$

λ ölçüsünün $\mathcal{A}^*$ σ-cəbrində hesabi additivlik xassəsinə malik olmasını göstərmək oxucuya tapşırılır. ::.

İndi bəzi misallara baxaq.

Tutaq ki, $X = R$ və μ^* xarici ölçüdür. $\mathcal{A}_{\mu^*}$ μ^*-ölçülən, yəni elə $B \subset R$ çoxluqlar küllisi olsun ki, istənilən $A \subset R$ çoxluğu üçün

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^C)$$

olsun. Göstərmək olar ki,

a) $\mathcal{A}_{\mu^*}$ σ-cəbrdir.

b) μ^* xarici ölçüsünün $\mathcal{A}_{\mu^*}$ σ-cəbrinə daralması $\mathcal{A}_{\mu^*}$ -də ölçüdür.

Bu halda $\mathcal{A}_{\mu^*}$-nun hər bir elementi X-də Lebeq mənada ölçülən çoxluq olur.

2.7.13. Teorem. R-də hər bir Borel çoxluğu Lebeq mənada ölçüləndir.

İsbatı. Əvvəlcə göstərək ki, hər bir $(-\infty, b)$ intervalı Lebeq mənada ölçüləndir. $B = (-\infty, b)$ işarə edək. Bunun üçün

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c)$$

göstərmək kifayətdir. Burada $\mu^*(A) < \infty$ qəbul edirik. Tutaq ki, A belə çoxluqdur. $\varepsilon > 0$ ixtiyari ədədi üçün fərz edək ki, $\{(a_n, b_n)\}$ açıq intervallar ardıcıllığı A çoxluğunu örtür və

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n) < \mu^*(A) + \varepsilon .$$

Hər bir n nömrəsi üçün $(a_n, b_n) \cap B$ və $(a_n, b_n) \cap B^c$ çoxluqları dizyunkt intervallardır. Onda elə (c_n, d_n) və (e_n, f_n) intervalları seçə bilərik ki,

$$(a_n, b_n) \cap B \subset (c_n, d_n) ,$$
$$(a_n, b_n) \cap B^c \subset (e_n, f_n)$$

və

$$d_n - c_n + f_n - e_n \leq b_n - a_n + {}^{\varepsilon}/_{2^n} .$$

Deməli, $\{(c_n, d_n)\}$ açıq intervallar ardıcıllığı $A \cap B$ çoxluğunu $\{(e_n, f_n)\}$ ardıcıllığı isə $A \cap B^c$ çoxluğunu örtür.
Deməli,

$$\mu^*(A \cap B) \leq \sum_n (d_n - c_n)$$

və

$$\mu^*(A \cap B^c) \leq \sum_n (f_n - e_n) .$$

Bu iki münasibətdən

$$\mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c) \leq \sum_n (b_n - a_n) + \varepsilon << \mu^*(A) + 2\varepsilon$$

olduğunu görürük.

ε ixtiyari olduğundan sonuncu bərabərsizlik B çoxluğunun Lebeq mənada ölçülənliyini göstərir. $\mathcal{A}_\mu$ σ-cəbri $(-\infty, b)$ kimi intervalları daxilinə aldığından $\mathcal{B}(R)$ ailəsi əvvəllər göstərildiyi kimi bu intervalları daxilinə alan ən kiçik σ-cəbrdir. Başqa sözlə, $\mathcal{B}(R) \subset \mathcal{A}_{\mu^*}$. ⊡

2. 7. 14. Teorem. $(R, \mathcal{A}_{\mu^*})$ ölçülən fəzasının Lebeq ölçüsü $(R, \mathcal{B}(R))$-dəki Lebeq ölçüsünün tamamlanmasıdır.

Bu teoremin isbatını vermək üçün əvvəlcə yeni bir anlayış verək. Tutaq ki, A R-də Lebeq mənada ölçülən çoxluqdur. Onda göstərmək olar ki,

a) $\lambda(A) = \inf\{\mu(U): U \text{ açıq çoxluqdur}, A \subset U\}$

və

b) $\lambda(A) = \sup\{\mu(K): K \text{ kompakt çoxluqdur}, K \subset A\}$

μ ölçüsü bu xassələrə malik olduğuna görə ona requlyar ölçü deyilir.

İndi ***2. 7. 14. teoremini isbat*** edək.

İsbatı. Əvvəl fərz edək ki, $A \subset R$ ölçülən çoxluqdur və $\lambda(A) < \infty$. Ölçünün requlyarlığına əsasən hər bir n nömrəsi üçün elə K_n kompakt çoxluğu tapmaq olar ki, $K_n \subset A$,

$$\lambda(A) - \frac{1}{n} \le \lambda(K_n)$$

və elə açıq U_n çoxluğu tapmaq olar ki,

$$A \subset U_n, \lambda(U_n) \le \lambda(A) + \frac{1}{n}.$$

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \text{ və } F = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$$

olsun. Onda E və $F \in \mathcal{B}(R)$ və $E \subset A \subset F$. Həmçinin istənilən n üçün

$$\lambda(F \backslash E) \le \lambda(U_n - K_n) = \lambda(U_n \backslash A) + \lambda(A \backslash K_n) \le \frac{2}{n}$$

olur. Deməli, $\lambda(A) < \infty$ halında

$$\lambda(F \backslash E) = 0 \ (1)$$

İndi A ixtiyari Lebeq mənada ölçülən çoxluq isə onu Lebeq ölçüləri sonlu olan $\{A_n\}$ çoxluqlarının birləşməsi şəklində göstərmək olar (bunu isbat etməli.). Buradan da (1) münasibətini ümumi halda isbat etmiş oluruq.

İndi λ $\left(R, \mathcal{B}(R)\right)$-dəki Lebeq ölçüsü. $\overline{\lambda}$ λ ölçüsünün tamamlanması və λ_m isə $\left(R, \mathcal{A}_{\mu^*}\right)$-dəki Lebeq ölçüsü olsun. Aydındır ki, $\mathcal{A}_{\mu^*}$ σ-cəbri μ ölçüsünə nəzərən $\mathcal{B}(R)$ σ-cəbrinə daxildir və λ_m isə $\bar{\mu}$-nün $\mathcal{A}_{\mu^*}$ σ-cəbrinə daralmasıdır. Göstərək ki, $\mathcal{B}(R)$-in tamamlanmasına daxil olan hər bir A çoxluğu μ ölçüsünə nəzərən Lebeq mənada ölçülən çoxluqdur. Belə A çoxluğu üçün elə Borel E və F çoxluqları vardır ki,

$$E \subset A \subset F$$

və

$$\mu(F \backslash E) = 0 .$$

$$A \backslash E \subset F \backslash E$$

və

$$\lambda_m(F \backslash E) = \lambda(F \backslash E) = 0$$

olduğundan $\mathcal{A}_{\mu^*}$-da Lebeq ölçüsünün tamlığından $A \backslash E \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ olduğu alınır. Deməli,

$$A = (A \backslash E) \cup E \in \mathcal{A}_{\mu^*} . \,::$$

2.7.19. İndi çox maraqlı bir faktı göstərək. Yəni R-də elə çoxluq vardır ki, Lebeq mənada ölçüləndir, lakin Borel mənada ölçülən deyildir.

Bunun üçün əvvəl daxil etdiyimiz Kantor çoxluğunu yada salaq. Bunun üçün $K_0 = [0; 1]$ və hər bir n nömrəsi üçün kompakt K_n çoxluğunu özündən əvvəlki K_{n-1} çoxluğunu üç bərabər hissəyə bölüb orta açıq hissəni (intervalı) atmaqla təyin etdik. Alınan kompakt çoxluqların kəsişməsini Kantor çoxluğu adlandırırlar:

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n .$$

Kantor çoxluğu ilə əlaqədar olaraq Kantor funksiyasını təyin edək.

Hər n nömrəsi üçün E_n ilə

$$([0;1]\backslash K_n) \cup \{0;1\}$$

çoxluğunun qapanmasını işarə edək. E_n çoxluğu $2n-1$ sayda qapalı çoxluqlardan ibarətdir. İndi f funksiyasını təyin edək.

Hər bir $x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ üçün $f(x) = 1/2$. Yəni f $[0;1]$ parçasından K_1 çoxluğunu təyin edərkən atılan $1/3$ uzunluqlu orta intervalın hər bir nöqtəsində təyin olunmuşdur. Sonra K_2 çoxluğunu təyin edərkən K_1 -dən atılan $\frac{1}{3}$ uzunluqlu intervalın hər nöqtəsində $f(x) = \frac{1}{4}$ qəbul edək.

Yəni $x \in \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ üçün $f(x) = {}^1/_4$ və $x \in \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ üçün $f(x) = {}^3/_4$ qəbul edək. Bu prosesi davam etdirərək, K_n çoxluğunu təyin edərkən K_{n-1} -dən atılan intervallarda f -in qiymətlərini

$${}^1/_{2^n}, {}^3/_{2^n}, {}^5/_{2^n}, \dots$$

kimi təyin edək. Qeyd edək ki, f funksiyası

a) $[0;1]\backslash K$ açıq çoxluğunda təyin olumuşdur;

b) azalmayan funksiyadır;

c) qiymətlər çoxluğu $[0;1]\backslash K$-yə daxildir.

Bu funksiyanı $f(0) = 0$ və $x \in K$ $(x \neq 0)$ olduqda

$$f(x) = \sup\{f(t): t \in [0;1]\backslash K \text{ və } t < x\}$$

qəbul etməklə bütün $[0;1]$ parçasına davam etdirək. Davamdan sonra alınan funksiyanı yenə də f-lə işarə edək. Asanca görmək olar ki, f azalmayan, kəsilməz,

$$f(0) = 0 \text{ və } f(1) = 1$$

xassələrinə malik funksiyadır. Onda riyazi analizdən məlum olan orta qiymət haqqındakı teoremə əsasən hər bir $y \in [0;1]$ üçün ən azı bir $x \in [0;1]$ vardır ki, $f(x) = y$. Buna görə də $g: [0;1] \to [0;1]$ və $g(y) = \inf\{x: x \in [0;1], f(x) = y\}$ kimi təyin olunmuş g funksiyasını təyin edə bilərik. f-in kəsilməzliyinə görə ixtiyari $y \in [0;1]$ üçün $f(g(y)) = y$ olur.

Yəni g inyektiv inikasdır. g funksiyasının bütün qiymətləri K Kantor çoxluğuna daxildir.

f azalmayan funksiya olduğundan g -də azalmayandır. Buradan isə f-in Borel mənada ölçülənliyi alınır. Doğrudan da, əgər $I \subset R$ müəyyən interval (açıq və ya qapalı) və $f: I \to R$ hər hansı azalmayan funksiya isə onda, hər bir t ədədi üçün

$$\{x: x \in R, f(x) < t\}$$

Borel çoxluğudur. Bu çoxluq boş, hər hansı interval, yaxud da bir nöqtədən ibarət ola bilər.

2.7.20. Teorem. R həqiqi oxunda Lebeq mənada ölçülən, lakin Borel mənada ölçülməyən çoxluq vardır.

İsbatı. Tutaq ki, g yuxarıda təyin olunmuş funksiya, A isə $[0,1]$ parçasının Lebeq mənada ölçülməyən alt çoxluğudur. $B = g(A)$ işarə edək. Onda B Kantor çoxluğunun alt çoxluğudur və Lebeq mənada ölçüləndir. Yada salaq ki, $\lambda(K) = 0$ və Lebeq mənada ölçülən çoxluqların σ-cəbrində təyin olunmuş Lebeq ölçüsü tam ölçüdür. $\mathcal{B}$ Borel çoxluğu isə $g^{-1}(B)$-də Borel çoxluğudur (bunu əvvəllər göstərmişik). Bununla birlikdə g-nin inyektiv olması $g^{-1}(B) = A$ olduğunu göstərir ki, bu da onun Lebeq mənada ölçülməyən və eyni zamanda Borel çoxluğu olmamasını göstərir. Deməli, Lebeq mənada ölçülən B çoxluğu Borel çoxluğu deyildir. □

2.7.21. İndi R-də təyin olunmuş həqiqi kəsilməz funksiyalarla Lebeq mənada ölçülən funksiyalar arasındakı əlaqəni araşdıraq.

Tutaq ki, $E \subset R$ ölçülən çoxluğu və $f: E \to R$ funksiyası verilmişdir.

Aydındır ki, f ölçülən funksiyadırsa, onun

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$$

və

$$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

müsbət və mənfi hissələri də ölçüləndirlər:

$$f = f^+ - f^-$$

Eyni hökm $|f| = f^+ + f^-$ funksiyası üçün də doğrudur.

Biz əvvəllər göstərmişdik ki, $f \geq 0$ ölçülən funksiyası üçün, ona E-də nöqtəvi yığılan $S_n \geq 0$ sadə funksiyalar ardıcıllığı vardır. f eyni zamanda məhdud isə həmin yığılma E-də müntəzəm olur.

f ixtiyari işarəli ölçülən həqiqi funksiya olduqda onun yuxarıda göstərilən $f^+ \geq 0$ və f^- funksiyaları vasitəsilə ifadəsinə görə qeyd olunan yığılma xassələri bu halda da doğru olacaqdır.

İndi funksiyanın kəsilməzliyi ilə ölçülənliyi arasındakı bir əlaqəni verək. Bunu əvvəlcə ölçülən sadə funksiyalar üçün göstərək.

2.7.22. *Lemma.* Tutaq ki, $S: (a, b) \to R$ sadə ölçülən funksiyadır. Onda istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə qapalı

$E \subset (a, b)$ çoxluğu vardır ki, $S|_E$ (S funksiyasının E qapalı çoxluğuna daralması)funksiyası E çoxluğunda kəsilməzdir və

$$\lambda\big((a, b)\backslash E\big) < \varepsilon .$$

İsbatı. $I = (a, b)$ işarə edək və

$$S = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}$$

S sadə funksiyasının kanonik göstərilişi olsun. Hər i nömrəsi üçün elə qapalı $E_i \subseteq A_i$ çoxluğu seçmək olar ki,

$$\lambda(A_i \backslash E_i) < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

olar (bunu isbat edin). Eyni zamanda elə qapalı $E_{n+1} \leq I \backslash \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ çoxluqları seçmək olar ki,

$$\lambda\left(\left(I \backslash \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \backslash E_{n+1}\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

olar. Aydındır ki,

$$E = \bigcup_{i=1}^{n+1} E_i$$

çoxluğu qapalıdır və

$$\lambda(I \backslash E) < \varepsilon$$

İndi $x \in E$ elementi üçün j indeksini elə seçək ki, $x \in E_j$ olsun. E_i çoxluqları qapalı və dizyunkt olduqlarından elə açıq M intervalı vardır ki,

$$M \cap E = M \cap E_j$$

S funksiyası $M \cap E$ çoxluğunda sabitdir və deməli, $S|_E$ funksiyası x nöqtəsində kəsilməzdir. $x \in E$ ixtiyari olduğundan $S|_E$ funksiyası E çoxluğunda kəsilməzdir. □

2.7.23. Lemma. Tutaq ki, $f: (a, b) \to R$ ölçülən funksiyadır. Onda istənilən $\varepsilon > 0$ ədədinə görə elə qapalı $F \subset (a, b)$ çoxluğu vardır ki, $f|_F$ funksiyası F-də kəsilməzdir və

$$\lambda((a, b) \backslash F) < \varepsilon$$

İsbatı. Məlumdur ki, (a, b) intervalında f-ə nöqtəvi yığılan $\{S_n\}$ sadə funksiyalar ardıcıllığı vardır. Tutaq ki, $\varepsilon > 0$. Hər n nömrəsi üçün bundan əvvəlki lemmaya əsasən elə qapalı $E_n \subset (a, b)$ çoxluğu vardır ki, $S_n|_{E_n}$ funksiyası E_n-də kəsilməzdir və

$$\lambda((a,b)\backslash E_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ olsun. Aydındır ki,

$$\lambda((a,b)\backslash E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda((a,b)\backslash E_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Yenə də göstərmək olar ki, elə qapalı $M \subset E$ çoxluğu vardır ki,

$$\lambda(E\backslash F) < \frac{\varepsilon}{2}$$

və ardıcıllığı F çoxluğunda f funksiyasına müntəzəm yığılır və $\{S_n|_F\}$

$$\lambda\big((a,b)\backslash F\big) \leq \lambda\big((a,b)\backslash E\big) + \lambda(E\backslash F) < \varepsilon$$

$S_n/_F$ F-də kəsilməz olmaqla müntəzəm yığıldığından $f/_F$ limit funksiyası F-də kəsilməzdir. ::.

2.7.24. Luzin teoremi. Tutaq ki, $f: R \to R$ ölçülən funksiyadır. Onda istənilən $\varepsilon > 0$ ədədinə görə elə qapalı F çoxluğu və $g: R \to R$ kəsilməz funksiyası vardır ki,

$$\lambda(R\backslash F) < \varepsilon$$

və istənilən $x \in F$ üçün

$$f(x) = g(x)$$

İsbatı. Tutaq ki, $\{I_n\}$ $(p, p+1)$ şəklində olan açıq intervallar ardıcıllığıdır. Burada p müsbət tam ədəddir. $\varepsilon > 0$ ədədi üçün bundan əvvəlki lemmaya əsasən hər n nömrəsinə görə elə $F_n \subset I_n$ qapalı çoxluğu vardır ki, $f/_{F_n}$ funksiyası F_n-də kəsilməzdir və

$$\lambda(I_n\backslash F_n) < {}^{\varepsilon}/_{2}$$

$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ olsun. F qapalı çoxluqdur.

$$\lambda(R\backslash F) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n\backslash F_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

və $f|_F$ funksiyası F-də kəsilməzdir. $f|_F$ funksiyasını kəsilməz olaraq bütün R-ə kəsilməz davam etdirmək olar. Bu davam g funksiyası olacaq. □

F-i ümumiliyi pozmadan həqiqi oxun hər iki istiqamətində (müsbət və mənfi) qeyri-məhdud götürmək olar. Belə olmasa $x > \sup F$ üçün

$$f(x) = f(\sup F)$$

və $x < \inf F$ üçün

$$f(x) = f(\inf F)$$

qəbul etmək olar. Tutaq ki, $\{(a_n, b_n)\}$ elə açıq intervallardır ki,

$$R \backslash F = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$$

Hər bir $x \in F$ üçün $g(x) = f(x)$ və $x \in (a_n, b_n)$ üçün

$$g(x) = \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}(x - a_n) + f(a_n)$$

qəbul etsək teoremi isbat etmiş olarıq. □.

Luizin teoremini aşağıdakı kimi də ifadə edirlər.

2.7.25. Luizin teoremi. Tutaq ki, $f: E \to R$ ölçülən funksiyadır. Onda istənilən $\varepsilon > 0$ ədədinə görə elə ölçülən $H \subset E$ çoxluğu vardır ki,

$$\lambda(E \backslash H) < \varepsilon$$

və $f/_H$ funksiyası H çoxluğunda kəsilməzdir.

8. Tapşırıqlar

1. R həqiqi oxunda bütün bir nöqtəli çoxluqlardan ibarət ailənin doğurduğu σ-cəbri tapın.

2. $\mathcal{B}(R)$ σ-cəbrini sağ ucu r rasional ədədlərindən ibarət $(-\infty, r]$ yarımintervallar ailəsinin doğurduğunu göstərin.

3. Tutaq ki, $\mathcal{A}$ müəyyən çoxluqların təşkil etdiyi cəbrdir. Əlavə fərz edək ki, $A_n \in \mathcal{A}, A_n \cap A_m = \emptyset \quad (n \neq m, n, m = 1, 2, \cdots$ olduqda, $\cup_n A_n \in \mathcal{A}$. Göstərin ki, $\mathcal{A}$ σ-cəbrdir.

4. R-də R-i daxilində saxlayan elə sonsuz alt çoxluqlar sistemi tapın ki, hesabi birləşməyə və hesabi kəsişməyə nəzərən qapalı olmaqla bərabər σ-cəbr təşkil etməsin.

5. R-də nə F_σ, nə də G_δ olmayan alt çoxluqlara misal göstərin.

Tutaq ki, $f: R \to R$ hər hansı funksiya və L bütün elə nöqtələr çoxluğudur ki, həmin nöqtələrdə f kəsilməz funksiyadır. L-in G_δ tipli çoxluq olduğunu göstərin.

6. Göstərin ki,

$$[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right).$$

Deməli, $\mathcal{R}$ həqiqi oxun bütün intervallarını daxilinə alan alt çoxluqlarının təşkil etdiyi σ-cəbr bütün seqmentlərini də daxilinə alır. Həmçinin

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right]$$

olduğundan bütün seqmentləri daxilinə alan σ-cəbr intervalları da daxilinə alır.

7. Göstərin ki, R həqiqi oxun $\mathcal{B}(R)$ Borel çoxluqlar sistemi, yəni Borel σ-cəbri R-də olan bütün $[a, b]$ seqmentlərinin doğurduğu σ-cəbrdir.

Eyni zamanda $\mathcal{B}(R)$ σ-cəbrini bütün $(a, b]$ yarımintervalları da doğurur. $\mathcal{B}(R)$ σ-cəbrini doğuran digər çoxluqlar sistemi bütün yarımşüalar $\{x: x \in R, x > a, a \in R\}$ ailəsidir.

8. Göstərin ki, X çoxluğunun σ-cəbrlərinin birləşməsi σ-cəbr təşkil etməyə də bilər.

9. R-in sonsuz sayda elə alt çoxluqlar sistemini tapın ki, R-i daxilinə almaqla bərabər hesabi sayda birləşməyə nəzərən və hesabi sayda kəsişməyə nəzərən qapalı olsun, lakin σ-cəbr təşkil etməsin.

10. N natural ədədlər çoxluğunda bütün σ-cəbrləri təyin edin.

11. Elə ölçülməyən $f: X \to R$ funksiyası tapın ki, $|f|, f^2$ funksiyaları ölçülən olsunlar.

12. f funksiyası $(X, \mathcal{A})$ ölçülən fəzasında təyin olunmuş kompleks qiymətli funksiyadır. f funksiyasının ölçülən olması üçün zəruri və kafi şərt istənilən a, b, c və d həqiqi ədədləri üçün

$$\{x: x \in X, a < Re\, f(x) < b, c < Im\, f(x) < d\} \in \mathcal{A}$$

olmasıdır. Başqa sözlə, f-in ölçülən olması üçün zəruri və kafi şərt kompleks müstəvinin istənilən açıq G çoxluğu üçün

$$f^{-1}(G) \in \mathcal{A}$$

olmasıdır.

13. Göstərin ki, ölçülən kompleks funksiyalar ardıcıllığının limiti ölçüləndir.

14. Tutaq ki, μ $(X, \mathcal{A})$ ölçülən fəzasında ölçüdür. Göstərin ki,
a) ixtiyari $A, B \in \mathcal{A}$ çoxluqları üçün

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

b) ixtiyari A, B *və* $C \in \mathcal{A}$ çoxluqları üçün

$$\mu(A \cup B \cup C) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) - \mu(A \cap B) - \\ -\mu(A \cap C) - \mu(B \cap C) - \mu(A \cap B \cap C).$$

b) bəndindəki düsturu n sayda ölçülən çoxluqlar üçün ümumiləşdirin.

15. $(\mathrm{R}, \mathcal{B}(\mathrm{R}))$ ölçülən fəzasında A çoxluğunun ölçüsünü aşağıdakı kimi təyin edək:

$$\mu(A) = \{A \text{ çoxluğundakı rasional ədədlərin sayı}\}.$$

Aydındır ki, A sonsuz çoxluq olduqda $\mu(A) = \infty$ olur. Göstərin ki, μ ölçüsü σ-sonlu ölçüdür.

16. Tutaq ki, $\mathcal{A}$ ailəsi N natural ədədlər çoxluğunun bütün alt çoxluqlarının təşkil etdiyi σ-cəbrdir. μ burada hesabi ölçü olsun. $\mathcal{A}$ ailəsindən elə monoton azalan $\{A_k\}$ çoxluqlar ardıcıllığı seçin ki,

$$\mu\left(\bigcap_k A_k\right) \neq \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)\,.$$

Yəni 2.5.2. teoreminin e)bəndindəki ölçünün sonluluğu şərtini atmaq olmaz.

17. Göstərin ki, $\mu(\emptyset) = 0$.

18. Tutaq ki, $(X, \mathcal{A})$ ölçülən fəza və $x, y \in X$.

Göstərin ki, δ_x və δ_y vahid kütlələri (bax 2. 5. 2. misalı) x və y elementləri ancaq və ancaq eyni çoxluğa daxil olduqda bərabərdirlər.

19. Tutaq ki, $(X, \mathcal{A})$ ölçülən fəzadır. Göstərin ki,

a) $\{\mu_n\}$ ardıcıllığı $(X, \mathcal{A})$-da artan ölçülər ardıcıllığı isə (yəni istənilən $A \in \mathcal{A}$ və hər bir n nömrəsi üçün $\mu_n(A) \leq \mu_{n+1}(A)$),

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A)$$

düsturu $(X, \mathcal{A})$-da ölçü təyin edir.

b) $\{\mu_n\}$ ixtiyari ölçülər ardıcıllığı üçün

$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A)$ $(X, \mathcal{A})$-da ölçüdür.

20. Tutaq ki, $\{x_n\}$ həqiqi ədədlər ardıcıllığıdır. Onda $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{x_n}$ $\big(R, \mathcal{B}(R)\big)$-də ölçüdür. Göstərin ki, μ ölçüsü R həqiqi oxun məhdud alt intervallarında ancaq və ancaq

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = \infty$$

olduqda sonlu qiymətlər alır.

Aşağıda baxılan çoxluqlar R həqiqi oxunda yerləşirlər.

21. Tutaq ki, $\mu(E) = 0$.
İsbat edin ki, $\mu(x^2: x \in E) = 0$.

22. Tutaq ki, A və B ölçülən çoxluqlardır.
İsbat edin ki,

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

23. Tutaq ki, $f: R \to R$ funksiyası verilmişdir.

$$U = \begin{Bmatrix} x: x \in R, \\ f \text{ funksiyası x nöqtəsində kəsilməzdir} \end{Bmatrix}$$

çoxluğunun G_δ tipli çoxluq olduğunu göstərin.

İsbatı. Doğrudanda ixtiyari $u \in U$ və n nömrəsi üçün elə δ_n^u ədədi vardır ki, $|x - u| < \delta_n^u$ olduqda,

$$|f(x) - f(u)| < \frac{1}{n}$$

olar. Hər bir n üçün

$$V_n = \bigcup_{u \in U} \{x: |x - u| < \delta_n^u\}$$

və

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$$

çoxluqlarına baxaq. V_n çoxluqlarının hər biri açıq olduğundan A çoxluğu G_δ tipli çoxluqdur. İsbatı axıra çatdırmaq üçün $A = U$ olduğunu göstərək.

Hər bir n nömrəsi üçün $U \subseteq V_n$ olduğundan $U \subseteq A$. Tutaq ki, $a \in A$. $A \in U$ olduğunu göstərmək üçün f-in a nöqtəsində kəsilməz olduğunu göstərmək kifayətdir. $\varepsilon > 0$ ixtiyari ədədi üçün p tam ədədini elə seçək ki, ${}^{1}/_{p} < {}^{\varepsilon}/_{2}$ olsun. A-nın təyininə əsasən $a \in V_p$.

Bu o deməkdir ki, müəyyən $u \in U$ üçün

$$a \in \{x: |x - u| < \delta_p^u\}.$$

Bu çoxluq açıq olduğundan

$$\{x: |x - a| < \delta\} \subseteq \{x: |x - u| < \delta_p^u\}.$$

$|x - a| < \delta$ olduqda

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f(u)| + |f(u) - f(a)| < \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \varepsilon.$$

Deməli, f a nöqtəsində kəsilməzdir, yəni $a \in U$. Başqa sözlə, $A \subseteq U$. □

24. Tutaq ki, $\mu(E) < \infty$. Göstərin ki, elə $A \subset E$ ölçülən çoxluğu vardır ki,

$$\mu(A) = \frac{1}{2}\mu(E).$$

25. Tutaq ki, $\{A_n\} \subset [a, b]$ ölçülən çoxluqlar ardıcıllığıdır. Aşağıdakı çoxluqları daxil edək:

$$\lim_{n\to\infty} \sup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k,$$

$$\lim_{n\to\infty} \inf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

İsbat edin ki,

$\mu(\lim_{n\to\infty} \inf A_n) \leq \lim_{n\to\infty} \inf \mu(A_n) \leq \lim_{n\to\infty} \sup \mu(A_n) \leq \leq$

$\mu \lim n\to\infty \sup An.$

26. Tutaq ki, E 2.7.8-də təyin olunmuş ölçülməyən çoxluqdur. İsbat edin ki, E çoxluğunun istənilən ölçülən alt çoxluğunun ölçüsü sıfırdır.

27. A və B çoxluqları arasında

$$d(A, B) = \inf\{|a - b|: a \in A, b \in B\}$$

məsafəsini təyin edək. Tutaq ki, A və B ixtiyari çoxluqlardır və

$$d(A, B) > 0.$$

İsbat edin ki,

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

28. $\mathcal{B}(R)$ σ-cəbrinin (Borel çoxluqlar sisteminin) sıfır nöqtəsində təmərküzləşən vahid kütləyə (ölçüyə) nəzərən tamamlanmasını tapın.

29. Tutaq ki, μ və ν $(X, \mathcal{A})$ ölçülən fəzasında sonlu ölçülərdirlər. Elə misal göstərin ki, $\mathcal{A}_\mu$ və $\mathcal{A}_\nu$ σ-cəbrləri bir-birindən fərqli olsunlar.

30. Göstərin ki, R^2 müstəvisinin elə Lebeq mənada ölçülən çoxluğu vardır ki, o çoxluğun R həqiqi oxuna

$$(x, y) \to x$$

proyeksiyası Lebeq mənada ölçülən olmaya da bilər.

31. Tutaq ki, X hər hansı bir çoxluq, $\{A_k\}$ isə X-in alt çoxluqlar ardıcıllığıdır.

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \ , C = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} A_k$$

çoxluqları üçün

a) $\lim_{m\to\infty} \inf \chi_{A_m} = \chi_B$

və

b) $\lim_{m\to\infty} \sup \chi_{A_m} = \chi_C$

olduğunu göstərin. Burada liminf $\underline{lim}$-aşağı limiti, limsup $\overline{lim}$-yuxarı limitin başqa cür işarələridir. χ_A isə A çoxluğunun xarakteristik funksiyasıdır.

32. $f: R \to R$ funksiyası R-də hər yerdə diferensiallanandırsa, onun f' törəməsi Borel mənada ölçüləndir (isbat edin).

33. Tutaq ki, f və g R-də həqiqi kəsilməz funksiyalardır. λ ölçüsünə nəzərən $f \overset{s.h}{=} g$ isə $f \equiv g$ olur.

34. f və $g: R \to R$ funksiyaları aşağıdakı kimi təyin olunmuşlar:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{əgər } x \in Q (\text{rasional ədədlər çoxluğu}) \\ 0, \text{əgər } x \notin Q (\text{rasional ədədlər çoxluğu}) \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, \text{əgər } x = \frac{p}{q}, p \text{ və } q \text{ sadə ədədlər və } q > 0 \\ 0, \text{əgər } x = 0 \text{ və ya } x \notin Q \end{cases}$$

Göstərin ki, f funksiyası heç bir nöqtədə kəsilməz deyildir. g funksiyası isə λ ölçüsünə nəzərən sanki hər yerdə kəsilməzdir.

35. Tutaq ki, D ölçülən çoxluq, $f: E \to R$ və D R-də sıx çoxluqdur. Göstərin ki, f-in ölçülən olması üçün zəruri və kafi şərt istənilən $t \in D$ ədədi üçün

$$\{x: x \in E, f(x) > t\}$$

ölçülən olmasıdır.

36. Tutaq ki, $f: E \to R$ ölçülən funksiyadır. İsbat edin ki, hər t ədədi üçün

$$\{x: x \in E, f(x) = t\}$$

çoxluğu ölçülən çoxluqdur. Bu faktın tərsi də doğrudurmu?

37. Tutaq ki, $f: R \to R$ monoton funksiya və $g: E \to R$ ölçülən funksiyadır. İsbat edin ki, $f \circ g$ funksiyası ölçüləndir.

38. Tutaq ki, $f: R \to R$ hər hansı kəsilməz funksiyadır. İsbat edin ki, f və $\chi_{(0,\infty)}$ funksiyaları R-də sanki hər yerdə bərabər deyildirlər. $f(0) = a$ və $a \geq \frac{1}{2}$ olsun. f 0-da kəsilməz olduğundan elə $\delta > 0$ ədədi vardır ki,

$x \in (-\delta, \delta)$ üçün $f(x) > \frac{1}{3}$. Onda bütün $x \in (-\delta, 0)$ üçün

$$\chi_{(0,\infty)}(x) = 0 < \frac{1}{3} < f(x)$$

Deməli, $\lambda\{x: x \in R, f(x) \neq \chi_{(0,\infty)}\} \geq \delta$ $a < \frac{1}{2}$ halı üçün oxşar olaraq isbat olunur.

39. İsbat edin ki, Luzin teoreminin tərsi də doğrudur.

III Fəsil

İnteqrallar

1. Sadə ölçülən funksiyanın inteqralı

Bu fəsildə biz əvvəlcə mənfi olmayan sadə funksiyalar, sonra isə ixtiyarı mənfi olmayan genişlənmiş həqiqi qiymətli (yəni $+\infty$ qiymətini də ala bilən) ölçülən funksiyalar üçün inteqral anlayışını daxil edəcəyik. Biz əvvəlki fəsildə sadəlik üçün "mənfi olmayan" ifadəsi əvəzinə "müsbət" ifadəsini işlədirdik.

R həqiqi oxunun genişlənməsini $\bar{R}$ ilə işarə edək. X çoxluğu üçün σ-cəbr $\mathcal{A}$ olsun. $\mathcal{A}$-da təyin olunmuş ölçünü μ ilə işarə edəcəyik. Fəsil boyu ölçülən fəza dedikdə $(X,\mathcal{A},\mu)$ üçlüyünü nəzərdə tutacağıq. $\mathcal{A}$ σ-cəbrindən $\bar{R}$-ə təsir edən bütün ölçülən funksiyalar çoxluğunu $M(X,\mathcal{A}), \mathcal{A}$-dan $\bar{R}$-ə təsir edən bütün mənfi olmayan ölçülən funksiyalar çoxluğunu isə

$M^+ = M^+(X,\mathcal{A})$ ilə işarə edək. M^+-dən olan hər bir funksiyanın inteqralını μ ölçüsünə nəzərən təyin edəcəyik.

Biz əvvəlki fəsildə mənfi olmayan ölçülən sadə funksiyanı təyin etmişdik. Lakin bu tərifi həqiqi qiymətli ölçülən sadə funksiyalar üçün də vermək olar. Burada

$$S = S^+ - S^-$$

ayrılışından istifadə edə bilərik.

3.1.1. Tərif. Həqiqi qiymətli ölçülən funksiya sonlu sayda qiymətlər alarsa, ona sadə ölçülən funksiya deyilir.

Bu halda S sadə funksiyası $a_1, a_2, \cdots, a_n$ qiymətlərini uyğun olaraq ölçülən E_i çoxluqlarında alırsa,

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i} \qquad (1)$$

göstərilişi alınır. Burada a_i ədədləri sonlu ədədlərdir və ümumiliyi pozmadan onları müxtəlif qəbul edirik. Bəzən (1) ifadəsinə S sadə funksiyasının standart göstərilişi də deyirlər.

Qeyd edək ki,

$$E_i = \{x: S(x) = a_i\} \ (i = 1, 2, \cdots, n)$$

ölçülən çoxluqları dizyunktdurlar və

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$$

3.1.2. Tərif. Tutaq ki, $s \in M^+(X, \mathcal{A})$ sadə funksiyası (1) göstərilişinə malikdir. $E \in \mathcal{A}$ çoxluğu üzrə S funksiyasının μ ölçüsünə nəzərən inteqralı dedikdə aşağıdakı genişlənmiş ədədi nəzərdə tutacağıq.

$$\int_E s d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E \cap E_i) \quad (2)$$

Qeyd. Biz burada $0 \cdot \infty = 0$ qəbul edirik. Ümumiyyətlə, daha ümumi halları əhatə etmək üçün baxılan funksiyaların ∞ qiymətini də ala biləcəyini istisna etmirik. Bu halda aşağıdakı əməlləri qəbul edirik.

$0 \leq a \leq \infty$ üçün $a + \infty = \infty + a = \infty$ və

$$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \begin{cases} \infty, \text{əgər } 0 < a \leq \infty \\ 0, \text{əgər } a = 0 \end{cases}.$$

$0 \cdot \infty = 0$ qəbul etməyimiz qeyri-adi görünür. Lakin asanca görmək olar ki, genişlənmiş yarımoxda kommutativlik, assosiativlik və distributivlik xassələri ödənir. Ancaq nəzərdə tutaq ki, $a + b = a + c$ münasibətindən $b = c$ olması ancaq $a < \infty$ və $ab = ac$ münasibətindən $b = c$ olduğunu almaq ancaq $0 < a < \infty$ olduqda mümkündür.

(2) münasibətilə təyin olunan tərifdə ola bilər ki, müəyyən i nömrəsi üçün $a_i = 0$ və $\mu(E \cap E_i) = \infty$ olsun.

Qeyd edək ki, $s \in M^+$ sadə funksiyası üçün yuxarıda təyin olunan inteqral nə s-in a_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ qiymətlərindən, nə də bu qiymətləri aldığı $E_i \in \mathcal{A}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ çoxluqlarından asılı deyildir. Bu inteqral ancaq s funksiyasından asılıdır.

Doğrudan da fərz edək ki, $s \in M^{+}$ funksiyası (1) kanonik göstərilişindən başqa

$$S = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{B_j}$$

ayrılışına da malikdir. Burada $b_j \geq 0, B_j \in \mathcal{A}$ və

$$B_j = \{x: s(x) = b_j\} \, (j = 1, 2, \cdots, m),$$
$$B_j \cap B_l = \emptyset \, (j \neq l).$$

Aydındır ki,

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \bigcup_{j=1}^{m} B_j. \tag{3}$$

μ ölçüsünün additivlik xassəsini və $E_i \cap E_j \neq \emptyset$ olduqda $a_i = b_j$ olduğunu nəzərə alsaq,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i \cap E) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i \mu\left(\left(E_i \cap B_j\right) \cap E\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_i \mu\left(\left(E_i \cap B_j\right) \cap E\right) =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(B_j \cap E).$$

Deməli, $\int_E s d\mu$ inteqralı (2) göstərilişindən asılı deyildir.

$s \in M^{+}$ sadə funksiyası üçün yuxarıda təyin olunmuş inteqralın bəzi xassələrini qeyd edək.

3.1.3. Teorem. Tutaq ki, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçülən fəza, $s, t \in M^{+}$. Onda

a) istənilən $\alpha \geq 0$ ədədi üçün

$$\int_E \alpha s d\mu = \alpha \int_E s d\mu,$$

b)

$$\int_E (s+t)d\mu = \int_E sd\mu + \int_E td\mu,$$

c) $s \leq t$ isə.

$$\int_E sd\mu \leq \int_E td\mu$$

və

d)

$$\int_E sd\mu = \int_X \chi_E sd\mu.$$

İsbatı. Tutaq ki. s funksiyasının qiymətləri $a_i \geq 0$ və $E_i = \{x: s(x) = a_i\}$. $E_i \cap E_l = \emptyset\ (i \neq j)$. $i, k = 1, 2, \cdots, n$ və t funksiyasının qiymətləri $\mathrm{b_j} \geq 0$ və
$B_j = \{x: t(x) = b_j\}$. $\mathrm{B_j} \cap B_k \neq \emptyset\ (j \neq k)$. $j, k = 1, 2, \cdots, m$.
Aydındır ki.

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = X = \bigcup_{j=1}^{m} B_j.$$

Teoremin a) və b) bəndlərinin hökmləri aşağıdakı hesablamalardan alınır.

$$\int_E \alpha d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha a_i \mu(E_i \cap E) = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i \cap E),$$

$$\int_E (s+t)d\mu = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_i + b_j)\,\mu\left((E_i \cap B_j) \cap E\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i \mu\Big(\big(E_i \cap B_j\big) \cap E\Big) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_j \mu\Big(\big(E_i \cap B_j\big) \cap E\Big) =$$

$$= \int_E s d\mu + \int_E t d\mu .$$

İndi tutaq ki, $s(x) \le t(x)$, $x \in X$. Onda $t - s \in M^+$ və c) bəndinin doğruluğu

$$\int_E t d\mu = \int_E \big(s + (t - s)\big) d\mu = \int_E s d\mu + \int_E (t - s) d\mu \ge \int_E s d\mu$$

münasibətindən alınır.

d) xassəsinin isbatı bilavasitə χ_E xarakteristik funksiyasının tərifindən alınır. □

Teoremin d) xassəsi göstərir ki, hər hansı $E \in \mathcal{A}$ çoxluğu üzrə təyin olunan inteqralı elə əsas çoxluq olan X üzrə də təyin etmək olar.

3.1.4. Teorem. Tutaq ki, $s \in M^+$ sadə funksiya və $\{s_n\} \in M^+$ azalmayan sadə funksiyalar ardıcıllığıdır və

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x) \ , x \in X .$$

Onda

$$\int_X s d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n d \mu .$$

İsbatı. Bundan əvvəlki teoremə əsasən (c) xassəsi

$$\int_X s_1 \, d\mu \le \int_X s_2 d\mu \le \cdots \le \int_X s d\mu$$

və deməli, $\lim_{n\to\infty} \int_X s_n d\mu$ var və

$$\lim_{n\to\infty} \int_X s_n d\mu \le \int_X s d\mu \ (4)$$

İndi (4)-ün tərsini isbat edək. Elə azalmayan $\{t_n\} \subset M^+$ ardıcıllığı seçək ki, hər bir n nömrəsi üçün $t_n \leq s_n$ və istənilən $0 < \varepsilon < 1$ ədədi üçün

$$\lim_{n \to \infty} \int_X t_n \, d\mu = (1 - \mathcal{E}) \int_X s d\mu$$

olsun.

$$\int_X t_n \, d\mu \leq \int_X s_n \, d\mu$$

olduğundan

$$(1 - \varepsilon) \int_X s d\mu \leq \lim_{n \to \infty} \int_X s_n \, d\mu$$

və $0 < \varepsilon < 1$ ixtiyari olduğundan

$$\int_X s d\mu \leq \lim_{n \to \infty} \int_X s_n \, d\mu \ (5)$$

münasibətini almış olarıq.

İndi $\{t_n\}$ ardıcıllığını quraq. s funksiyasının qiymətləri $a_i \neq 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$ olsun və
$E_i = \{x : s(x) = a_i\}$, $E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j$,

$$s = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \chi_{E_i} .$$

Hər bir m və i nömrələri üçün

$$E(m, i) = \{x : x \in E_i \,, s_m \geq (1 - \varepsilon) a_i\}$$

çoxluqlarını təyin edək. Aydındır ki, bütün m və i nömrələri üçün

$$E(n, i) \in \mathcal{A} .$$

Digər tərəfdən hər bir i nömrəsi üçün $\{E(m, i)\}_{m=1}^{\infty}$ azalmayan çoxluqlar ardıcıllığıdır və

$$E_i = \bigcup_m E(m, i).$$

Eyni zamanda

$$t_m = \sum_{i=1}^{k}(1-\varepsilon)a_i\chi_{E(m.i)} \in M^+ .$$

və

$$t_m \le s_m .$$

Onda ölçünün azalamayan ölçülən çoxluqlar ardıcıllığının ölçülərinin limitinin o çoxluqların birləşməsinin ölçüsünün limitinə bərabər olması xassəsinə görə

$$\lim_{m\to\infty}\int_X t_n d\mu = \lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{k}(1-\varepsilon)a_i\,\mu\big(E(m.i)\big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k}(1-\varepsilon)a_i\mu(E_i) = (1-\varepsilon)\int_X s d\mu \ .\square$$

2. Ölçülən funksiyanın inteqralı (ümumi hal)

İndi X-in $\mathcal{A}$ σ-cəbrində təyin olunmuş və $[0,+\infty]$ qiymətli ölçülən f funksiyası üçün inteqral anlayışını verək.

3.2.1. Tərif. $f:\mathcal{A} \to [0,\infty]$ funksiyasının hər hansı $E \in \mathcal{A}$ ölçülən çoxluğu üzrə inteqralı dedikdə

$$\int_E f d\mu = sup\{\int_E s d\mu : s \in M^+ , s \le f\}$$

ədədini başa düşəcəyik.

Aydındır ki, f xüsusi halda M^+-dən olan mənfi olmayan sadə funksiya olduqda inteqral üçün yuxarıda verdiyimiz tərif indiki tərif1ə üst-üstə düşür.

İndi yeni daxil etdilmiş inteqralın bəzi xassələrini qeyd edək.

Əvvəlcə 3. 1. 4 teoreminin bir ümumiləşməsini verək.

3.2.2. Teorem. Tutaq ki, $(X,\mathcal{A},\mu)$ ölçülən fəza və $f:\mathcal{A} \to [0,\infty]$ ölçülən funksiyadır. Əlavə fərz edək ki, $\{s_n\} \in M^+$ sadə azalmayan funksiyalar ardıcıllığı hər bir $x \in X$ nöqtəsində f funksiyasına yığılır.

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x).$$

Onda

$$\lim_{n\to\infty} \int_X S_n d\mu = \int_X f d\mu .$$

İsbatı. Aydındır ki,

$$\int_X s_1\, d\mu \le \int_X s_2\, d\mu \le \cdots \le \int_X s\, d\mu$$

və

$$\lim_{n\to\infty} \int_X s_n d\mu$$

var. Onda

$$\lim_{n\to\infty} \int_X s_n\, d\mu \le \int_X f d\mu \; (6)$$

İndi (6) bərabərsizliyinin tərsini isbat edək.

$\int_X f d\mu$ inteqralının təyininə görə bunu $s \le f$ və

$$\int_X s d\mu \le lim \int_X s_n\, d\mu$$

şərtlərini ödəyən $\forall s \in M^+$ funksiyası üçün göstərmək kifayətdir. Onda $inf\{s, s_n\} \in M^+$ və bu ardıcıllıq azalmayandır. Həmçinin $\lim_{n\to\infty} inf\{s, s_n\} = s$ və

$$\lim_{n\to\infty} \int_X inf\{s, s_n\} d\mu = \int_X s d\mu ,$$

$$\int_X inf\{s, s_n\} d\mu \le \int_X s_n d\mu$$

olduğundan

$$\int_X s d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X s_n d\mu$$

olur ki, bu da (6) bərabərsizliyi ilə birlikdə teoremi isbat etmiş olur . □

İndi 3.1.3 teoreminin analoqunu $f: \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ölçülən funksiyaları üçün də verək.

3.2.3. Teorem. Tutaq ki, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçülən fəza. f və $g: \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ölçülən funksiyalar və $\alpha \geq 0$. Onda aşağıdakı xassələr doğrudur.

a)

$$\int_E \alpha f d\mu = \alpha \int_E f d\mu ,$$

b)

$$\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu ,$$

c) $f \leq g$ isə

$$\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$$

və

d)

$$\int_E f d\mu = \int_X \chi_E \cdot f d\mu .$$

İsbatı. Əvvələr isbat etmişik ki, $f \geq 0$ ölçülən funksiyası üçün ona yığılan azalmayan sadə $\{s_n\} \subset M^+$ funksiyalar ardıcıllığı vardır:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = f.$$

Eyni təklif $g \geq 0$ funksiyası üçün də doğrudur. Yəni elə $\{s_n'\} \subset M^+$ sadə azalmayan ardıcıllığı vardır ki,

$$\lim_{n\to\infty} s`_n = g .$$

Onda $\{\alpha s_n\} \subset M^+$ və $\{s_n + s_n'\} \subset M^+$ azalmayan ardıcıllıqlardır.

$$\lim_{n\to\infty} \alpha s_n = \alpha f$$

və

$$\lim_{n\to\infty} (s_n + s_n') = f + g .$$

Onda 3.1.3. teoremindən istifadə edərək inteqralın bircinslik və additivlik xassəsinə görə a) və b) xassələrinin doğruluğunu göstərmiş oluruq.

c)-nin isbatı üçün $f \leq g$ olduğundan $h \in M^+$ və $h \leq f$ şərtini ödəyən h funksiyalar sinifi $\grave{h} \in M^+$ və $\grave{h} \leq g$ şərtini ödəyən funksiyalar sinifinə daxildir. Buradan da c) bəndini isbat etmiş oluruq. d) bəndinin isbatı aşkardır.

3.2.4. İndi tutaq ki, $f: \mathcal{A} \to [-\infty, \infty]$ ölçülən funksiyadır və $\int_E f^+ d\mu$ və $\int_E f^- d\mu$ $(E \in \mathcal{A})$ inteqralları sonludurlar. Burada $f = f^+ - f^-$. Onda deyəcəyik ki, f funksiyası E ölçülən çoxluğu üzrə inteqrallanandır (yaxud μ-inteqralanandır, yaxud da cəmlənəndir) və onun inteqralı olaraq

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$$

ifadəsi qəbul olunur.

Əgər

$$\int_E f^+ d\mu \text{ və } \int_E f^- d\mu$$

inteqrallarından heç olmazsa biri sonlu isə $\int_E f d\mu$ inteqralının varlığı qəbul edilir. Əvvəl daxil edilən inteqrallarda olduğu kimi

$$\int_E f d\mu = \int_X \chi_E \cdot f d\mu$$

xassəsi doğrudur.

$X = R$ və ya $\mathbb{R}^n$ olduqda təyin edilən inteqrallar Lebeq inteqralları adlandırılır. $X = \mathbb{R}$ halında inteqralı adətən

$$\int_E f(x)dx$$

kimi də yazırlar.

3.2.5. Teorem. Tutaq ki, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçülən fəza, f və $g: \mathcal{A} \to [-\infty, \infty]$ və α ixtiyari həqiqi ədəddir. Onda

a) αf və $f + g$ inteqralanandırlar.

b)

$$\int_X \alpha f d\mu = \alpha \int_X f d\mu ,$$

c)

$$\int_X (f + g)d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$$

d) $f \leq g$ isə

$$\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu .$$

İsbatı. $\alpha = 0$ olduqda a) xassəsinin isbatı trivialdır. İndi tutaq ki, $\alpha > 0$. Onda

$$(\alpha f)^+ = \alpha f^+ \text{ və } (\alpha f)^- = \alpha f^- .$$

Buna görə də $(\alpha f)^+, (\alpha f)^-$ və deməli, αf funksiyaları inteqrallanandırlar və

$$\int_X \alpha f d\mu = \int_X (\alpha f)^+ d\mu - \int_X (\alpha f)^- d\mu =$$

$$= \alpha \int_X f^+ d\mu - \alpha \int_X f^- d\mu = \alpha \int_X f d\mu$$

olur. Əgər $\alpha < 0$ isə, $(\alpha f)^+ = -\alpha f^-$ və $(\alpha f)^- = -\alpha f^+$.

Bu halda yenə də

$$\int_X \alpha f d\mu = \alpha \int_X f d\mu$$

olur.

İndi $f + g$ funksiyasına baxaq. Qeyd edək ki, $(f + g)^+ \leq f^+ + g^+$ və $(f + g)^- \leq f^- + g^-$.
Onda

$$\int_X (f + g)^+ d\mu \leq \int_X f^+ d\mu + \int_X g^+ d\mu < \infty$$

və

$$\int_X (f + g)^- d\mu \leq \int_X f^- d\mu + \int_X g^- d\mu < \infty$$

olur. Başqa sözlə, $f + g$ inteqrallanandır.

$$f + g = (f + g)^+ - (f + g)^- = f^+ + g^+ - (f^- + g^-)$$
olduğundan

$$\int_X (f + g) d\mu = \int_X (f^+ + g^+) d\mu - \int_X (f^- + g^-) d\mu$$

və eyni zamanda

$$\int_X (f+g)d\mu = \int_X fd\mu + \int_X gd\mu$$

olur.

$f(x) \leq g(x)$ $(x \in X)$ olduğundan $g - f$ mənfi olmayan inteqrallanan funksiyadır və deməli ,

$$\int_X (g-f)d\mu \geq 0 .$$

Buradan isə

$$\int_X gd\mu - \int_X fd\mu = \int_X (g-f)d\mu \geq 0$$

olur. □

3.2.6. Teorem. Tutaq ki, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçülən fəza və $f: \mathcal{A} \to [-\infty, \infty]$. Onda f funksiyası ancaq və ancaq $|f|$ funksiyası inteqrallanan olduqda inteqrallanandır. f və $|f|$ funksiyaları inteqrallanandırlarsa,

$$\left|\int_X fd\mu\right| \leq \int_X |f|d\mu .$$

İsbatı. Tərifə görə f funksiyası ancaq və ancaq f^+ və f^- funksiyaları inteqrallanan olduqda inteqrallanandır. Digər tərəfdən $|f| = f^+ - f^-$ olduğundan $|f|$ funksiyasının inteqrallanan ola bilməsi f^+ və f^- funksiyalarının inteqrallanan ola bilməsi ilə eynigüclüdür. Deməli, f və $|f|$ funksiyalarının inteqrallanan ola bilmələri eynigüclüdür.

Buradan isə

$$\left|\int_X f d\mu\right| = \left|\int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu\right| \le \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu$$

$$= \int_X |f| d\mu$$

münasibətini alırıq. □

Qeyd edək ki, elə həqiqi ölçülməyən və deməli, inteqrallanmayan funksiya vardır ki, onun mütləq qiymətinin inteqrallanandır.

3.2.7. Teorem. Tutaq ki, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçülən fəza və f və $g: \mathcal{A} \to [-\infty, \infty]$ ölçülən funksiyaları sanki hər yerdə üst-üstə düşürlər. Əgər

$$\int_X f d\mu \ \ v\partial \ \int_X g d\mu$$

inteqrallarından biri varsa, onda digəri də var və

$$\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$$

İsbatı. Əvvəlcə f və g-nin mənfi olmayan funksiyalar olaraq qəbul edək. $A = \{x: x \in X, f(x) \neq g(x)\}$ çoxluğuna və

$$h(x) = \begin{cases} +\infty, \text{əgər } x \in A \\ 0, \text{əgər } x \notin A \end{cases}$$

funksiyasına baxaq.

3.2.2. teoremini $h_n = n\chi_A$ funksiyalarına tətbiq etsək,

$$\int_X h d\mu = 0$$

olar. $f \le g + h$ münasibətini və 3. 2. 3 teoremini nəzərə alsaq,

$$\int_X f d\mu \le \int_X g d\mu + \int_X h d\mu = \int_X g d\mu$$

şərtini ödəyən bütün kompleks ölçülən f funksiyalar çoxluğunu $\mathcal{L}_1$ ilə işarə edək. Qeyd edək ki, f-in ölçülənliyindən $|f|$-in ölçülənliyi alınır. Yəni yuxarıdakı inteqralın mənası var. $\mathcal{L}_1$-in elementlərinə həqiqi funksiyalar halında olduğu kimi Lebeq mənada inteqrallanan (μ ölçüsünə nəzərən) və ya cəmlənən funksiyalar deyilir.

3.3.8. Tərif. Tutaq ki, $f = u + iv, u$ və v həqiqi ölçülən funksiyalar və $f \in \mathcal{L}_1$ isə istənilən $E \in \mathcal{A}$ çoxluğu üçün

$$\int_E f d\mu = \int_E u^+ d\mu - \int_E u^- d\mu + i \int_E v^+ d\mu - i \int_E v^- d\mu \quad (20)$$

təyin edək.

Burada $u = u^+ - u^-$, $v = v^+ - v^-$. (20)-nin sağ tərəfindəki dörd inteqral ölçüləndirlər, həqiqidirlər və mənfi deyildirlər. Deməli, (20)-nin sağ tərəfindəki inteqrallar vardır və

$$u^+ \leq |u| \leq |f|,\ v^+ \leq |v| \leq |f|$$

olduğundan bu inteqrallar sonludurlar. Buna görə də (20)-nin sol tərəfi ümumiyyətlə, qiyməti kompleks ədəd olan inteqral təyin edir.

3.3.9. Teorem. Tutaq ki, f və $g \in \mathcal{L}_1$ və α və β kompleks ədədlərdir. Onda $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}_1$ və

$$\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X d\mu \quad (21)$$

İsbatı. $\alpha f + \beta g$-nin ölçülənliyi aşkardır. Mənfi olmayan funksiyanın inteqralının xassələrinə və sıraların inteqrallanması haqqındakı teoremə əsasən

$$\int_X |\alpha f + \beta g|\, d\mu \leq \int_X (|\alpha| \cdot |f| + |\beta||g|) d\mu =$$

$$= |\alpha| \int_X |f|\, d\mu + |\beta| \int_X |g| d\mu < \infty$$

Deməli, $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}_1$.

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu .$$

İndi tutaq ki, (14), (15) və (16) şərtləri X-də sanki hər yerdə ödənir. Qeyd edək ki,

$$\int_X g d\mu < \infty$$

şətrlərindən (16) şərtinin sanki hər yerdə ödənməsi alınır.

N ilə $\mathcal{A}$ σ-cəbrinin teoremin şərtlərindən heç olmazsa birinin ödənmədiyi nöqtələr çoxluğunu işarə edək və $\mu(N) = 0$ olsun. $N^c = X\backslash N$ ölçülən çoxluğunu işarə edək. Onda $f\chi_{N_c}$ və $\{f_n\chi_{N_c}\}$ ardıcıllığı teoremin isbatının birinci hissəsindəki şərtləri ödəyir və buna görə də

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\chi_{N_c} d\mu = \int_X f\chi_{N_c} d\mu \tag{19}$$

$f_n\chi_{N_c}$ funksiyası hər n nömrəsi üçün sanki hər yerdə f_n funksiyası ilə və $f\chi_{N_c}$ funksiyası sanki hər yerdə f funksiyası ilə sanki hər yerdə üst-üstə düşdüyündən (19) münasibəti və 3. 3. 2 teoremindən

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

olduğunu alırıq. □

3.3.7. İndi kompleks qiymətli (qısaca kompleks) ölçülən funksiyalar üçün inteqral anlayışı verək.

Tərif. Tutaq ki, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçülən fəzadır.

$$\int_X |f|\, d\mu < \infty$$

Tutaq ki, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçülən fəza və $g: \mathcal{A} \to [0, \infty]$ inteqrallanan funksiyadır. Əlavə fərz edək ki, $f, f_1, f_2, \dots : \mathcal{A} \to [-\infty, \infty]$ ölçülən funksiyalardır və sanki hər bir $x \in X$ üçün

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) \qquad (14)$$

və

$$|f_n(x)| \le g(x) \ (n = 1, 2, \dots) \qquad (15)$$

Onda f və f_n $(n = 1, 2, \dots)$ funksiyaları inteqrallanandırlar və

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu .$$

İsbatı. f və f_n $(n = 1, 2, \dots)$ funksiyalarının inteqrallanan olmaları g funksiyasının inteqrallanmasından alınır (bax 3. 2. 6 teoremi, 3. 2. 7 teoremi və 3. 2. 3 teorminin c) bəndi).

Əvvəlcə fərz edək ki, (14), (15) şərtləri və

$$g(x) < \infty \qquad (16)$$

şərti hər bir $x \in X$ üçün ödənir. Aydındır ki, $(g + f_n): \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ölçülən funksiyalardır və

$$\lim_{n \to \infty} (g + f_n)(x) = (g + f)(x) \ (x \in X) .$$

Onda Fatu lemmasına görə

$$\int_X (g + f) d\mu \le \lim_{n \to \infty} inf \int_X (g + f_n) d\mu .$$

Buradan isə

$$\int_X f d\mu \le \lim_{n \to \infty} inf \int_X f_n d\mu \qquad (17)$$

olduğunu görürük.

İndi oxşar mühakiməni $\{g - f_n\}$ ardıcıllığı üçün aparsaq,

$$\lim_{n \to \infty} sup \int_X f_n d\mu \le \int_X f d\mu \qquad (18)$$

və (17) ilə (18)-dən alırıq ki,

$$\varphi(E) = \int_E f d\mu \ (E \in \mathcal{A}) . \tag{11}$$

Onda φ $\mathcal{A}$ -da ölçüdür və hər ölçülən $g: X \to [0, \infty]$ funksiyası üçün

$$\int_X g d\varphi = \int_X g f d\mu . \tag{12}$$

İsbatı. Tutaq ki, E_j $(j = 1, 2, \cdots)$ dizyunkt ölçülən çoxluqlar və

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j .$$

Aydındır ki,

$$\chi_E f = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{E_j} f$$

və

$$\varphi(E) = \int_X \chi_E f d\mu \, , \varphi(E_j) = \int_X \chi_{E_j} f d\mu .$$

Onda B. Levi teoreminə görə

$$\varphi(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(E_j) \tag{13}$$

$\varphi(\emptyset) = 0$ olduğundan (13) münasibəti göstərir ki, φ ölçüdür.

Nəhayət, (11) göstərir ki, (12) münasibəti müəyyən $E \in \mathcal{A}$ və $g = \chi_E$ funksiyası üçün doğrudur. Deməli, (12) hər bir sadə ölçülən g funksiyası üçün də doğrudur. Ümumi halın isbatı monoton yığılma teoremindən alınır.

3.3.6. Teorem *(Lebeqin majorant yığılma haqqında teoremi).*

$s_i \to f_1 + f_2$.

Onda 3. 1. 3 teoremi və 3. 2. 3 teoreminə əsasən

$$\int_X (f_1 + f_2)d\mu = \int_X f_1 d\mu + \int_X f_2 d\mu \qquad (8)$$

İndi $g_m = f_1 + f_2 + \cdots + f_m$ qəbul edək. Hər m üçün g_m funksiyaları ölçüləndirlər və azalmayan ardıcıllıq əmələ gətirir və

$$\lim_{m \to \infty} g_m = f .$$

Buna görə də f ölçülən funksiyadır.

Riyazi induksiya üsulunu (8)-ə tətbiq etsək, alarıq:

$$\int_X g_m d\mu = \sum_{n=1}^{m} \int_X f_n \, d\mu .$$

Monoton yığılma teoremini yenidən tətbiq etsək, (7) münasibətinin doğruluğunu göstərmiş olarıq. □

***3.3.4. Teorem** (Fatu lemması).* Tutaq ki, $f_n: X \to [0, \infty]$ funksiyaları hər bir n nömrəsi üçün ölçüləndirlər. Onda

$$\int_X \left(\lim_{n \to \infty} inf\, f_n\right) d\mu \le \lim_{n \to \infty} inf \int_X f_n d\mu \qquad (9)$$

İsbatı.

$$g_k(x) = \inf_{i \ge k} f_i\,(x) \ \ (k = 1, 2, \dots;\ x \in X).$$

Aydındır ki, $g_k \le f_k$ və

$$\int_X g_k \, d\mu \le \int_X f_k d\mu \ (k = 1, 2, \dots) \qquad (10)$$

g_k funksiyaları ölçüləndirlər, $0 \le g_1 \le g_2 \le \cdots$ və

$$\lim_{k \to \infty} g_k(x) = \lim_{n \to \infty} inf\, f_n(x) .$$

Monoton yığılma haqqındakı teoremə əsasən (10)-un sol tərəfi $k \to \infty$ olduqda (9)-un sol tərəfinə yaxınlaşır. Buna görə də (9) münasibəti (10)-dan alınır. □

3.3.5. Teorem. Tutaq ki, $f: X \to [0, \infty]$ ölçüləndir və

$$\int_X f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq c \int_E s d\mu \ (n = 1, 2, \ldots). \qquad (3)$$

(3) münasibətindəki axırıncı inteqrala 3.3.1 teoremini tətbiq edək və ölçünün azalmayan ölçülən çoxluqlar haqındakı xassəsindən istifadə edərək $n \to \infty$ qəbul edək. Onda

$$\alpha \geq c \int_X s d\mu \qquad (4)$$

olar.

(4) bərabərsizliyi istənilən $c < 1$ ədədi üçün doğru olduğundan

$$\alpha \geq \int_X s d\mu. \qquad (5)$$

Burada (5) bərabərsizliyi istənilən ölçülən və $0 \leq s \leq f$ şərtini ödəyən s sadə funksiyası üçün doğru olduğundan

$$\alpha \geq \int_X f d\mu \qquad (6)$$

olur. Teoremin hökmü (1), (2) və (6) münasibətlərindən alınır. ::

***3.3.3. Təklif** (Beppo Levi).*

Tutaq ki, $f_n: X \to [0, \infty]$ $(n = 1, 2, \cdots)$ ölçülən funksiyalardır və

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \ (x \in X).$$

Onda

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu \qquad (7)$$

İsbatı. Qeyd edək ki, f_1 və f_2 ölçülən funksiyaları üçün məlum teoremə əsasən elə sadə mənfi olmayan ölçülən s_i' və s_i'' funksiyaları vardır ki, $s_i' \to f_1$ və $s_i'' \to f_2$. $s_i = s_i' + s_i''$ isə,

a) $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq \infty, x \in X$,

b) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), x \in X$.

Onda f ölçüləndir və

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

İsbatı. f funksiyası ölçülən f_n funksiyalarının nöqtəvi limiti olduğundan ölçüləndir.

$$\int_X f_n d\mu \leq \int_X f_{n+1} d\mu$$

olduğundan elə $\alpha \in [0,\infty]$ vardır ki,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \alpha \tag{1}$$

$f_n \leq f$ olduğundan hər bir n üçün (1)-ə əsasən

$$\alpha \leq \int_X f d\mu \tag{2}$$

olur.

İndi tutaq ki, $s \in M^+$ sadə funksiyası elədir ki, $s \leq f$. $0 < c < 1$ şərtini ödəyən c sabiti üçün

$$E_n = \{x: f_n(x) \geq cs(x)\} \ (n = 1, 2, \cdots)$$

çoxluqlarını təyin edək.

E_n çoxluqları ölçüləndirlər.

$$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n \subset \cdots$$

və

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n .$$

$f(x) = 0$ olduqda $x \in E_1$ və $f(x) > 0$ isə $cs(x) < f(x)$ olar. Burada $c < 1$ olduğunu nəzərə almışıq. Deməli, müəyyən n nömrəsi üçün $x \in E_n$. Həmçinin

3. Limit teoremləri

Bu hissədə inteqral nəzəriyyəsinin əsas limit teoremlərini (əsasən inteqral altında limitə keçmək teoremlərini) isbat edəcəyik. Bu teoremlər Lebeq inteqralı nəzəriyyəsinin mühümlüyünü göstərir.

Əvvəlcə çox vacib bir teoremi isbat edək.

3.3.1. Teorem. Tutaq ki, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçülən fəzadır və $s \in M^+$ sadə funksiyası verilmişdir. Onda istənilən $E \in \mathcal{A}$ çoxluğu üçün

$$\varphi(E) = \int_E s d\mu$$

$\mathcal{A}$-da təyin olunmuş ölçüdür.

İsbatı. Aydındır ki, $\varphi: \mathcal{A} \to [0, \infty]$ və $\varphi(\emptyset) = 0$.
Fərz edək ki, $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ $\mathcal{A}$ sisteminin dizyunkt elementləri (X-in ölçülən çoxluqları) və

$$E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m .$$

s -in qiymətlərini $a_i \ (i = 1, 2, \cdots, n)$ ilə işarə edək. $A_i = \{x: s(x) = a_i\}$ qəbul edək.

μ ölçüsü hesabi additiv olduğundan

$$\varphi(E) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i \cap E) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{m=1}^{\infty} (A_i \cap E_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i \cap E_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(E_m) .$$

Deməli, $\varphi: \mathcal{A} \to [0, \infty]$ funksiyası hesabi aditiv ölçüdür. □

3.3.2. Teorem (*Monoton yığılma haqqında Lebeq teoremi*).
Tutaq ki, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçülən fəza və $f_n: \mathcal{A} \to [0, \infty] \ (n = 1, 2, \cdots$ ölçülən funksiyalar ardıcıllığıdır. Əlavə fərz edək ki,

$$\int_X |f| d\mu = 0$$

isə f funksiyası sanki hər yerdə sıfır funksiyadır. Qısaca,

$$f \overset{s.h}{=} 0 .$$

İsbatı. 3. 2. 8 teoremini $|f|$ funksiyasına tətbiq etsək, hər bir n üçün

$$\mu\left(\left\{x: x \in X, |f(x)| \geq \frac{1}{n}\right\}\right) \leq n \int_X |f| d\mu = 0$$

olur.

$$\{x: x \in X, f(x) \neq 0\} = \bigcup_n \left\{x: x \in X, |f(x)| \geq \frac{1}{n}\right\}$$

və μ ölçüsünün hesabi additivliyi

$$\mu = (\{x: x \in X, f(x) \neq 0\}) = 0$$

olduğunu göstərir. Deməli, $f \overset{s.h}{=} 0$. ::

3.2.10. Nəticə. Tutaq ki, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçülən fəza və $f: \mathcal{A} \to [-\infty, \infty]$ funksiyası inteqrallanandır. Onda sanki hər bir $x \in X$ üçün $|f(x)| < \infty$ olur.

İsbatı. Nəticənin isbatı

$$\mu(\{x: x \in X, |f(x)| \geq n\}) \leq \frac{1}{n} \int_X |f| d\mu$$

və

$$\mu(\{x: x \in X, |f(x)| = \infty\}) \leq \mu(\{x: x \in X, |f(x)| \geq n\})$$

$$\leq \frac{1}{n} \int_X |f| d\mu$$

münasibətlərindən alınır. :

olduğunu görərdik. Oxşar olaraq göstərmək olar ki,

$$\int_X g d\mu \le \int_X f d\mu$$

və buradan da

$$\int_X f d\mu = \int_X g d\mu .$$

İndi əgər f və g ixtiyari işarəli funksiyalar isə, $f = f^+ - f^-$ və $g = g^+ - g^-$ ayrılışları teoremi tam isbat etmiş olur. □

3.2.8. Teorem. Tutaq ki, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçülən fəza və $f: \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ölçülən funksiyadır. $t > 0$ ədədi üçün

$$A_t = \{x: x \in X, f(x) \ge t\}$$

çoxluğunu təyin edək. Onda $A_t \in \mathcal{A}$ və

$$\mu(A_t) \le \int_{A_t} f d\mu \le \frac{1}{t}\int_X f d\mu$$

İsbatı. $0 \le t\,\chi_{A_t} \le f \cdot \chi_{A_t} \le f$ münasibəti və 3.2.3 teoreminin c) bəndindən

$$\int_X t\,\chi_{A_t} d\mu \le \int_{A_t} f d\mu \le \int_X f d\mu$$

olduğunu alarıq.

$$\int_X t\,\chi_{A_t} d\mu = t\,\mu(A_t)$$

olduğundan əvvəlki münasibət teoremin doğruluğunu göstərir. □

3.2.9. Nəticə. Tutaq ki, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçülən fəza və $f: \mathcal{A} \to [-\infty, \infty]$ ölçülən funksiyadır.

(21)-i isbat etmək üçün kifayətdir ki,

$$\int_X (f+g)d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$$

və

$$\int_X (\alpha f)d\mu = \alpha \int_X f d\mu$$

olduğunu göstərək. Axırıncı münasibətləri f, g həqiqi qiymətli və α həqiqi ədəd olduqları halda əvvəllər göstərmişdik. İndi tutaq ki, $\alpha = i$ və $f = u + iv$. Onda

$$\int_X (if)d\mu = \int_X (iu - v)d\mu$$

$$= \int_X (-v)d\mu + i\int_X u d\mu = -\int_X v d\mu +$$

$$+i\int_X u d\mu = i\left(\int_X u d\mu + i\int_X v d\mu\right) = i\int_X f d\mu\,.\square$$

3.3.10. Teorem. $f \in \mathcal{L}_1$ isə

$$\left|\int_X f d\mu\right| \leq \int_X |f|\, d\mu\,.$$

İsbatı. $z = \int_X f\, d\mu$ işarə edək. z kompleks ədəd olduğundan elə α kompleks ədədi vardır ki, $|\alpha| = 1$ və $\alpha z = |z|$. $u = Re(\alpha f)$ olsun. Onda

$$u \leq |\alpha f| = |f|$$

və

$$\left|\int_X f d\mu\right| = \alpha\int_X f\, d\mu = \int_X \alpha f\, d\mu = \int_X u d\mu \leq \int_X |f|\, d\mu$$

olur. Sonuncu münasibətin üçüncü bərabərliyi

$$\int_X \alpha f \, d\mu$$

inteqralının həqiqi olmasından alınır.

3.3.11. İndi kompleks funksiyalar üçün Lebeqin majorant teoremini verək.

Teorem. Tutaq ki, $\{f_n\}$ ölçülən kompleks funksiyalar ardıcıllığı X-də təyin olunmuşdur və

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \ (x \in X).$$

Əlavə fərz edək ki, g elə funksiyadır ki, $g \in \mathcal{L}_1$

$$|f_n(x)| \le g(x) \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Onda

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0 \tag{22}$$

və

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu . \tag{23}$$

İsbatı. Aydındır ki, f ölçüləndir və $|f| \le g$ olduğundan $f \in \mathcal{L}_1$. Digər tərəfdən $|f_n - f| \le 2g$ olduğu üçün Fatu lemmasını $2g - |f_n - f|$ funksiyasına tətbiq etsək,

$$\int_X 2g d\mu \le \lim_{n\to\infty} inf \int_X (2g - |f_n - f|) d\mu = \int_X 2g d\mu +$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \inf \left(- \int_X |f_n - f| \, d\mu \right)$$

$$= \int_X 2g d\mu - \lim_{n\to\infty} sup \int_X |f_n - f| d\mu$$

olar. $\int_X 2gd\mu$ inteqeralı sonlu olduğundan sonuncu münasibətdən

$$\lim_{n\to\infty} sup \int_X |f_n - f| d\mu = 0$$

olur. Bu sonuncu və 3. 3. 10 teoremi hazırki teoremi tam isbat etmiş olur. □

3.3.12. Teorem. Tutaq ki f_n $(n = 1, 2, \dots)$ ölçülən kompleks funksiyaları X-də sanki hər yerdə təyin olunmuşdur. Əgər

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f(x)| \, d\mu < \infty \tag{24}$$

isə

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{25}$$

sırası sanki hər bir $x \in X$ üçün yığılır, $f \in \mathcal{L}_1$ və

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu \tag{26}$$

İsbatı. f_n funksiyasının təyin olunduğu çoxluğu S_n ilə işarə edək. Onda $\mu(S_n') = 0$. Hər bir $x \in S = \bigcap S_n$ üçün

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|.$$

Aydındır ki, $\mu(S^c) = 0$.

(24) şərti və həqiqi halda sıranın inteqrallanması haqqındakı teoremə əsasən

$$\int_S \varphi d\mu < \infty \tag{27}$$

olur. İndi əgər $E = \{x \colon x \in S, \varphi(x) < \infty\}$ isə (27)-dən $\mu(E^c) = 0$ olduğu alınır. (25) sırası hər bir $x \in E$ üçün təyin olunmuşdur, $|f(x)| \le \varphi(x)$ $(x \in E)$ olduğundan (27)-yə əsasən $f \in \mathcal{L}_1$ olur.

Əgər $g = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ isə, $|g_n| \leq \varphi$, $g_n(x) \to f(x)$ $(x \in E)$ və 3. 3. 11 teoreminə əsasən (26) münasibəti X əvəzinə E çoxluğu üçün doğru olur. Bu isə (26)-nın X çoxluğu üçün də doğru olduğunu göstərir, çünki $\mu(E^c) = 0$. □

Qeyd edək ki, isbat etdiyimiz teoremdə f_n funksiyaları X-in, hətta hər bir nöqtəsində təyin olunsalar da (25) sırasının, ancaq sanki hər yerdə yığılması haqqında hökm etmək olur.

3.3.13. Teorem.

a) Tutaq ki, $f: X \to [0, \infty]$ ölçülən funksiya, $E \in \mathcal{A}$ və

$$\int_E f d\mu = 0$$

Onda $f \stackrel{s.h}{=} 0$ $(x \in E)$.

b) Tutaq ki, $f \in \mathcal{L}_1$ və ixtiyari $E \in \mathcal{A}$ üçün

$$\int_E f d\mu = 0$$

Onda $f \stackrel{s.h}{=} 0$ $(x \in X)$.

İsbatı.

a)

$$A_n = \left\{x: x \in E, f(x) > \frac{1}{n}\right\}, n = 1, 2, \ldots$$

onda

$$\frac{1}{n}\mu(A_n) \leq \int_{A_n} f d\mu \leq \int_E f d\mu = 0 ,$$

buradan isə $\mu(A_n) = 0$ olur.

$$\{x: x \in E, f(x) > 0\} = \cup A_n$$

olması a)-nın doğruluğunu göstərir.

b) $f = u + iv$ və $E = \{x: u(x) \geq 0\}$ olsun. Onda $\int_E f d\mu$ -nin həqiqi hissəsi $\int_E u^+ d\mu$ olur.

Deməli,

$$\int_E u^+ d\mu = 0$$

və buradan a) hökmünə görə $u^+ \overset{s.h}{=} 0$. Oxşar olaraq sanki hər yerdə

$$u^- = v^+ = v^- = 0$$

olur. Bu da o deməkdir ki, sanki hər yerdə
$f = u + iv = u^+ - u^- + i(v^+ - v^-) = 0$. □

4. Riman inteqralı ilə Lebeq inteqralının müqayisəsi

Biz bu hissədə Lebeq inteqralı ilə əsasən riyazi analizdə öyrənilən Riman inteqralı arasındakı əlaqəni və müqayisəni verəcəyik.

Əvvəlcə Riman inteqralının tərifini yada salaq.

$[a, b] \subset \mathbb{R}$ parçasını sonlu $\{a_i\}_{i=0}^k$ həqiqi ədədləri (nöqtələri) vasitəsilə hissələrə bölək:

$$a = a_0 < a_1 < \cdots a_k = b$$

Əgər $\{a_i\}_{i=0}^k$ və $\{b_i\}_{i=0}^j$ $[a, b]$ parçasının bölgüləri və birinci bölgünün hədləri ikinci bölgünün hədləri içərisində olarsa, $\{b_i\}_{i=0}^j$ bölgüsünə $\{a_i\}_{i=0}^k$ bölgüsünə nəzərən daha kiçik bölgü deyilir.

Hər hansı bölgünü ya $\mathcal{P}$, yaxud da $\mathcal{P}_k$ ilə işarə edəcəyik.

İndi tutaq ki, f funksiyası $[a, b]$ parçasında həqiqi funksiyadır. $\mathcal{P}$ $[a, b]$ parçasının $\{a_i\}_{i=0}^k$ bölgüsü, $m_i = inf\{ f(x): x \in [a_{i-1}, a_i]\}$ və $M_i = sup\{ f(x): x \in [a_{i-1}, a_i]\}$ $(i = 1, 2, \dots k)$ olduqda, f və $\mathcal{P}$-yə nəzərən

a) aşağı cəm dedikdə

$$l(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{k} m_i\,(a_i - a_{i-1})$$

ifadəsini ,

b) yuxarı cəm dedikdə

$$u(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{k} M_i\,(a_i - a_{i-1})$$

ifadəsini nəzərdə tutacağıq.

Asanca yoxlamaq olar ki, əgər $\mathcal{P}$ $[a,b]$ parçasının ixtiyari bölgüsü isə

$$l(f,\mathcal{P}) \le u(f,\mathcal{P})$$

və $\mathcal{P}_1$ və $\mathcal{P}_2$ $[a,b]$ parçasının bölgüləri olmaqla $\mathcal{P}_2$ bölgüsü $\mathcal{P}_1$ bölgüsünə nəzərən kiçik bölgü isə

$$l(f,\mathcal{P}_1) \le l(f,\mathcal{P}_2)$$

və

$$u(f,\mathcal{P}_2) \le u(f,\mathcal{P}_1)$$

olur. Həmçinin $\mathcal{P}_1$ və $\mathcal{P}_2$ $[a,b]$ parçasının ixtiyarı bölgüləri isə

$$l(f,\mathcal{P}_1) \le\ u(f,\mathcal{P}_2)$$

Aydındır ki, f funksiyasının bütün aşağı cəmləri çoxluğu yuxarıdan məhduddur (əslində f funksiyasının hər bir yuxarı cəmi ilə məhduddur).

Bu çoxluğun yuxarı sərhədinə f funksiyasının $[a,b]$ parçası üzrə aşağı inteqralı deyilir və

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \text{ və ya } \underline{\int_a^b} f$$

kimi işarə edilir. Aşağı inteqral hər bir $u(f,\mathcal{P})$ yuxarı cəmi üçün

$$\underline{\int_a^b} f \le u(f,\mathcal{P})$$

bərabərsizliyini ödəyir. Onda bu bərabərsizlik bütün yuxarı cəmlər çoxluğunun dəqiq aşağı sərhədi üçün də doğrudur. Bu dəqiq aşağı sərhədə f funksiyasının $[a,b]$ parçası üzrə yuxarı inteqralı deyilir və

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \text{ və ya } \overline{\int_a^b} f$$

kimi işarə edilir.

Aydındır ki,

$$\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f.$$

$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ olduqda f funksiyasına Riman mənada inteqrallanan funksiya deyilir. Bu halda aşağı və ya yuxarı inteqralların hər hansı birinin qiymətinə f funksiyasının Riman inteqralı deyilir və bu qiymət

$$\int_a^b f(x)dx \text{ və ya } \int_a^b f$$

kimi işarə edilir.

Göstərmək olar ki, $[a,b]$ parçasında təyin olunmuş məhdud f funksiyası ancaq və ancaq istənilən $\varepsilon > 0$ ədədinə görə $[a,b]$ parçasının

$$u(f,\mathcal{P}) - l(f,\mathcal{P}) < \varepsilon$$

şərtini ödəyən $\mathcal{P}$ bölgüsü olduqda Riman mənada inteqrallanandır.

İndi tutaq ki, f funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməzdir və deməli, məhduddur. Eyni zamanda müntəzəm kəsilməzdir. Yəni istənilən $\varepsilon > 0$ ədədinə görə $\delta > 0$ ədədi vardır ki, $|x-y| < \delta$ $(x,y \in [a,b])$ olduqda

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

olur. Əgər bu cür ε və δ ədədləri üçün $\mathcal{P}$ $[a, b]$ parçasının elə bölgüsüdürsə, hər bölgü parçasının uzunluğu δ-dan kiçik olarsa,

$$u(f, \mathcal{P}) - l(f, \mathcal{P}) \leq \varepsilon(b - a)$$

olur. Başqa sözlə, $[a, b]$ parçasında təyin olunmuş hər bir kəsilməz funksiya Riman mənada inteqrallanandır.

Misal. $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$ funksiyası $[0, 1]$ parçasında olan rasional ədədlər çoxluğunun xarakteristik funksiyası olsun. Aydındır ki, f Lebeq mənada inteqrallanandır və

$$\int_{[0,1]} f d\lambda = 0.$$

Buna baxmayaraq, f funksiyasının hər bir aşağı cəmi sıfıra və hər bir yuxarı cəmi isə vahidə bərabərdir. Deməli, f funksiyası Riman mənada inteqrallanan deyildir.

3.4.1. Teorem. Tutaq ki, $f: [a, b] \to (-\infty, \infty)$ məhdud funksiyadır. Onda

a) f funksiyası $[a, b]$ parçasında sanki hər yerdə kəsilməz olduqda Riman mənada inteqrallanandır.

b) f funksiyası Riman mənada inteqrallanan isə Lebeq mənada da inteqrallanandır və f funksiyasının Riman və Lebeq inteqralları üst-üstə düşürlər.

İsbatı. Tutaq ki, f Riman mənada inteqrallanandır. Onda hər n nömrəsi üçün $[a, b]$ parçasının elə $\mathcal{P}_n$ bölgüsünü seçmək olar ki,

$$u(f, \mathcal{P}) - l(f, \mathcal{P}) < {}^1/_n .$$

Ümumiliyi pozmadan fərz etmək olar ki, hər n nömrəsi üçün $\mathcal{P}_{n+1}$ bölgüsü $\mathcal{P}_n$ bölgüsünə nəzərən kiçik bölgüdür. g_n və f_n elə funksiyalar olsun ki, $[a, b]$-də təyin olunsunlar, $f_n(a) = g_n(a) = f(a)$ və $\mathcal{P}_n$ bölgüsünün hər bir $[a_{i-1}, a_i]$ hissəsində sabit olsunlar.

Aydındır ki,

$$inf\{f(x): a_{i-1} \leq x \leq a_i\}$$

və

$$sup\{f(x): a_{i-1} \leq x \leq a_i\}$$

ədədləri vardır.

Onda $\{g_n\}$ ardıcıllığı $g_n \leq f$ və hər bir n üçün

$$\int_{[a,b]} g_n d\lambda = l(f,\mathcal{P}_n)$$

münasibətini ödəyən artan sadə Borel funksiyalar ardıcıllığıdır. f məhdud olduğundan $\{g_n\}$ ardıcıllığı da məhduddur.

Əgər $\{h_n\}$ ardıcıllığı $h_n \geq f$ və hər bir n üçün

$$\int_{[a,b]} h_n d\lambda = u(f,\mathcal{P}_n)$$

münasibətini ödəyərsə, o azalan sadə Borel funksiyalar ardıcıllığıdır. f məhdud olduğundan $\{h_n\}$ ardıcıllığı da məhduddur.

$$g = \lim_{n\to\infty} g_n$$

və

$$h = \lim_{n\to\infty} h_n$$

funksiyalarını təyin edək.

Onda g və h funksiyaları Borel mənada ölçüləndirlər və majorant yığılma haqqındakı teoremə əsasən

$$\int_{[a,b]} g d\lambda = \lim_{n\to\infty} l(f,\mathcal{P}_n) = \int_{[a,b]} h d\lambda = \lim_{n\to\infty} u(f,\mathcal{P}_n) = \int_a^b f\, d\lambda.$$

Deməli,

$$\int_{[a,b]} (h-g) d\lambda = 0\,.$$

$h - g \geq 0$ olduğundan

$$g(x) \overset{s.h}{=} h(x)\,,\; x \in [a,b] \tag{1}$$

(1) münasibətinin iki mühüm nəticəsi vardır.

Qeyd edək ki, əgər $x \in [a,b]$ nöqtəsi $\mathcal{P}_n$ bölgüsündəki bölgü nöqtələrinin heç biri ilə üst-üstə düşmürsə və $f(x) = g(x)$ isə f həmin nöqtədə kəsilməzdir. Deməli, (1) göstərir ki, f funksiyası sanki hər yerdə kəsilməzdir. Bununla a) bəndinin ilk yarısını isbat etmiş oluruq. $g \leq f \leq h$ olduğundan (1)-ə görə $f \overset{s.h}{=} g$.

Bu da onu göstərir ki, f Lebeq mənada ölçülən və Lebeq mənada inteqrallanandır(bax 3. 2. 7 teoremi).

Deməli, f funksiyasının Riman və Lebeq inteqralları eynidirlər ki, bu da b) bəndinin doğruluğunu göstərir.

İndi a) bəndinin ikinci yarısını isbat edək.

Tutaq ki, f $[a, b]$ parçasında sanki hər yerdə kəsilməzdir.

Əlavə fərz edək ki, hər bir n üçün $\mathcal{P}_n$ bölgüsü $[a, b]$ parçasını eyni uzunluğa malik 2^n hissələrə bölür. Bu bölgüyə nəzərən isbatın əvvəlində olduğu kimi g_n və h_n funksiyalarını təyin edək.

Aydındır ki,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} h_n(x)$$

münasibətləri f-in kəsilməz olduğu bütün $x \in [a, b]$ nöqtələrində və deməli, $[a, b]$ parçasının sanki bütün nöqtələrində ödənir.

Deməli, sanki hər yerdə

$$\lim_{n\to\infty}(h_n - g_n) = 0,$$

$$\int_{[a,b]} g_n d\lambda = l(f, \mathcal{P}_n)$$

və

$$\int_{[a,b]} h_n d\lambda = u(f, \mathcal{P}_n)$$

olduğundan majorant yığılma haqqındakı Lebeq teoreminə əsasən

$$\lim_{n\to\infty}\big(u(f, \mathcal{P}_n) - l(f, \mathcal{P}_n)\big) = 0$$

Deməli, $\varepsilon > 0$ ədədinə görə $[a, b]$ parçasının elə $\mathcal{P}$ bölgüsü vardır ki,

$$u(f, \mathcal{P}_n) - l(f, \mathcal{P}_n) < \varepsilon .$$

Bu da o deməkdir ki, f Riman mənada inteqrallanandır. □

Qeyd edək ki, qeyri-məhdud həqiqi funksiya Riman mənada ineqrallanan olmasa da Lebeq mənada inteqrallanan ola bilər.

Xüsusi halda, $f(x) \geq 0$ funksiyasının hər bir $\varepsilon > 0$ ədədi üçün

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

Riman inteqralı varsa və $\varepsilon > 0$ olduqda limiti $\varepsilon \to 0$ sonludursa, f funksiyası $[a,b]$ parçasında Lebeq mənada inteqrallanandır və

$$\int_{[a,b]} f d\lambda = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} |f(x)|dx = \infty$$

olduqda

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{[a+\varepsilon,b]} f d\lambda$$

qeyri-məxsusi inteqralı Lebeq mənada yoxdur. Çünki f funksiyası cəmlənən olduqda məlum xassəyə əsasən $|f|$-də cəmlənən olmalıdır.

Məsələn,

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}dx$$

inteqralı şərti yığılan qeyri-məxsusi Riman inteqralı kimi var, lakin $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ funksiyası $[0, 1]$ parçasında Lebeq mənada inteqrallanan deyildir.

Əgər funksiya bütün oxda (və ya yarımoxda) təyin olunmuşsa, onun Riman inteqralı, ancaq qeyri-məxsusi mənada ola bilər. Yenə də əgər belə funksiyanın qeyri-məxsusi Riman inteqralı mütləq yığılırsa, onda uyğun Lebeq inteqralı da var və hər iki inteqralın qiymətləri bərabərdir. Məsələn,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx=\infty$$

olduğundan $\frac{\sin x}{x}$ funksiyası həqiqi oxda Lebeq mənada inteqrallanan deyildir. Buna baxmayaraq

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

qeyri-məxsusi Riman inteqralı vardır və π ədədinə bərabərdir.

5. Tapşırıqlar

1. Elə Lebeq mənada inteqrallanmayan $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funksiyası göstərin ki, $|f|$ funksiyası inteqrallanan olsun.

(Göstəriş. Müəyyən A və $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ çoxluqları üçün $f=\chi_A-\chi_B$ qəbul edin)

2. $(X,\mathcal{A},\mu)$ ölçülən fəza və $f:\mathcal{A}\to[0,\infty]$ ölçülən funksiyası üçün göstərin ki,

a) f-in qiymətləri ya mənfi olmayan tam ədədlər, yaxud da $+\infty$ isə

$$\int_X f d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(\{x: f(x)\geq n\}),$$

b) f-in qiymətləri $[0,\infty]$-da istənilən ədədlər və μ ölçüsü sonlu isə f funksiyası, ancaq və ancaq

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(\{x: x\in X, |f(x)|\geq n\})$$

sırası yığıldıqda inteqrallanandır.

3. Tutaq ki, $X=N$ (natural ədədlər çoxluğu). $\mathcal{N}$ ailəsi N-in bütün alt çoxluqlarından təşkil olunmuş σ-cəbr, μ isə burada hesabi ölçüdür. Əgər $f:\mathcal{N}\to[0,\infty]$ funksiya isə, $f\in M^+(N,\mathcal{N})$ və

$$\int\limits_{N} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

4. Tutaq ki, $X = \mathbb{R}, \mathcal{B}$ burada Borel çoxluqlar sistemi və λ $\mathcal{B}$ -də Lebeq ölçüsüdür. $f_n = \chi_{[0,n]}$ isə, $\{f_n\}$ ardıcıllığı $f = \chi_{[0,\infty]}$ funksiyasına artaraq yaxınlaşır. Həmçinin $\{f_n\}$ ardıcıllığı 1-lə (vahidlə) müntəzəm məhduddur və f_n-lərin hamısı sonlu qiymətli funksiyalardır. Digər tərəfdən

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f dx = \infty .$$

Burada monoton yığılma haqqında teoremi tətbiq etmək olarmı?

5. Tutaq ki, $X = \mathbb{R}, \mathcal{B}$ Borel çoxluqlar sistemi və λ $\mathcal{B}$-də Lebeq ölçüsüdür. Onda $f_n = (1/n) \cdot \chi_{[n,\infty]}$ monoton azalan ardıcıllığı müntəzəm olaraq $f = 0$ funksiyasına yığılır və

$$0 = \int\limits_{\mathbb{R}} f d\lambda \neq \lim \int\limits_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = +\infty.$$

6. $f_n = (1/n) \cdot \chi_{[0,n]}$ və $f = 0$ funksiyalarına baxaq.

Göstərin ki, $\{f_n\}$ ardıcıllığı f funksiyasına müntəzəm yığılır, ancaq

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f d\lambda \neq \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$$

Bu fakt monoton yığılma haqqındakı teoremlə ziddiyyət təşkil edirmi?

7 . $g_n = n\chi_{[\frac{1}{n},\frac{2}{n}]}$, $g = 0$ olsun.

Göstərin ki,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} g d\lambda \neq \lim \int\limits_{\mathbb{R}} g_n d\lambda .$$

$\{g_n\}$ ardıcıllığı g funksiyasına müntəzəm yığılırmı?

8. Tutaq ki. $X = [a, b] \subset \mathbb{R}, a, b < \infty$.

X-dən olan bütün Borel çoxluqlar ailəsini B ilə işarə edək. λ B-də təyin olunmuş Lebeq ölçüsü olsun. f B-də mənfi olmayan funksiya isə

$$\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f(x)dx$$

olduğunu göstərin. Burada sağ tərəfdəki inteqral Riman inteqralıdır.

9. $f_n = (-\frac{1}{n})\chi_{[0,n]}$ olsun. Onda $\{f_n\}$ ardıcıllığı $[0, \infty]$-da $f = 0$ funksiyasına müntəzəm yığılır. Digər tərəfdən,

$$\int_{[0,\infty)} f_n d\lambda = -1\,, \quad \int_{[0,\infty)} f d\lambda = 0$$

və deməli,

$$\lim_{n\to\infty} inf \int_{[0,\infty)} f_n d\lambda = -1 < 0 = \int_{[0,\infty)} f d\lambda$$

yəni $f_n \geq 0$ və $f_n \xrightarrow{münt.} f$ olduğuna baxmayaraq Fatu lemmasının hökmü bu ardıcıllıq üçün doğru deyildir.

10. Tutaq ki. $f \in \grave{M}^+(X, \mathcal{A})$ və

$$\int_X f d\mu < +\infty\,.$$

Onda

$$\mu\{x: x \in X, f(x) = +\infty\} = 0$$

(Göstəriş. $E_n = \{x: f(x) \geq n\}$ isə $n\chi_{E_n} \leq f$)

11. Fərz edək ki. $f_n \in \grave{M}^+(X, \mathcal{A})$.

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f$$

və

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu < +\infty .$$

İsbat etməli ki, istənilən $E \in \mathcal{A}$ üçün

$$\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

Göstərin ki,

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu < +\infty$$

şərti ödənmədikdə yuxarıdakı bərabərlik doğru olmaya da bilər.

IV Fəsil

Lebeq fəzaları

Biz bu fəsildə analizdə çox mühüm rol oynayan p (≥ 1) dərəcədən inteqrallanan ölçülən funksiyaların təşkil etdiyi fəzalardan söhbət açacağıq.

1. Normalaşmış fəzalar

4.1.1. Tərif. Tutaq ki, E həqiqi xətti (və ya vektor) fəzadır. $N: E \to [0, \infty)$ birqiymətli funksiyası

a) İstənilən $x \in E$ elementi üçün $N(x) \geq 0$;

b) $N(x) = 0$ bərabərliyi? ancaq və ancaq $x = 0$ olduqda olur;

c) İstənilən $x \in E$ elementi və ixtiyari α həqiqi ədədi üçün $N(\alpha x) = |\alpha| N(x)$;

d) İstənilən $x, y \in E$ elementləri üçün
$N(x + y) \leq N(x) + N(y)$

şərtlərini ödəyərsə, ona x elementinin norması deyilir. $N(x)$ norması adətən $\|x\|$ kimi işarə edilir. Tərifdəki b) şərti atılarsa, $N(x)$-ə E fəzasında yarımnorma və ya psevdonorma deyilir.

Bu hallara uyğun olaraq E normalaşmış (normalı) fəza, psevdonormalaşmış fəza adlanır.

Misallar

1. Ədədin mütləq qiyməti $\mathcal{R}$-də normadır.
2. $\mathcal{R}^n$-də hər bir $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$ elementi üçün

$$N_1(x) = |\xi_1| + |\xi_2| + \cdots + |\xi_n| ,$$

$$N_p(x) = \{|\xi_1|^p + \cdots + |\xi_n|^p\}^{1/p} , p \geq 1 ,$$

$$N_\infty(x) = max\{|\xi_1|, \cdots, |\xi_n|\}.$$

təyin edək.

Asanca yoxlamaq olr ki, N_1 və N_∞ R^n-də normalardır. N_p-nin a), b) və c) şərtlərin ödəməsi aşkardır. d) şərtinin ödəməsi isə məlum Minkovski bərabərsizliyinin köməyilə isbat olunur (biz bunu növbəti paraqrafda yerinə yetirəcəyik).

3. l_1 fəzası, yəni

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| < \infty$$

şərtini ödəyən $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)$ elementlər çoxluğunun təşkil etdiyi xətti fəza

$$N_1^\infty(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|$$

normasına nəzərən normalaşmış fəzadır.

4. l_p $(1 \le p < \infty)$ fəzasında $(x = (\xi_n), \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty)$

$$N_p^\infty(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p\right)^{1/p}$$

normadır.

5. X çoxluğunda təyin olunmuş bütün məhdud həqiqi funksiyaların xətti fəzasında

$$N(f) = sup\{|f(x)|: x \in X\}$$

normadır. Xüsusi halda, $X = [a, b]$ parçasında təyin olunmuş kəsilməz funksiyaların xətti fəzasında

$$N'(f) = \max\{|f(x)|: x \in X\}.$$

İndi yarımnormaya malik xətti fəzalara misallar göstərək.

6. $\mathcal{R}^n$-də

$$N_0(x) = \max\{|\xi_2|, \cdots, |\xi_n|\}, x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

yarımnormadır. Burada $N_0(x) = 0$, ancaq və ancaq $\xi_2 = \cdots = \xi_n = 0$ olduqda mümkündür.

7. $C_{[0,1]}$ fəzasında həqiqi f funksiyası üçün

$$N_0(f) = max\left\{|f(x)|: 0 \le x \le \frac{1}{2}\right\}$$

yarımnormadır. $N_0(f) = 0$ ancaq və ancaq $0 \le x \le \frac{1}{2}$ üçün $f(x) = 0$ olduqda mümkündür.

8. $[a, b]$ parçasında təyin olunmuş kəsilməz törəməyə malik həqiqi funksiyaların xətti fəzasında

$$N_0(f) = max\{|f'(x)|: a \le x \le b\}$$

yarım normadır. $N_0(f) = 0$, ancaq və ancaq $x \in [a, b]$ üçün f sabit olduqda mümkündür.

9. Tutaq ki, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçülən fəzadır. Hər bir f inteqrallanan funksiyası üçün

$$N_\mu(f) = \int_X |f| d\mu$$

$\mathcal{L}_1$-də yarımnormadır. Yada salaq ki, $\mathcal{L}_1$ X-də inteqrallanan, yəni

$$\int_X |f| d\mu < \infty$$

şərtini ödəyən ölçülən funksiyalar fəzasıdır. 3.3.9-da göstərmişdik ki, $\mathcal{L}_1$ xətti fəzadır. Qeyd edək ki, $N_\mu(f) = 0$, ancaq və ancaq $f \overset{s.h}{=} 0$ olduqda mümkündür. Yəni normanın tərifinin b) bəndi ödənmir. Bunun ödənməsi üçün sanki hər yerdə üst-üstə düşən iki funksiyanı eyniləşdirmək kifayətdir.

4.1.2. Tərif. $\mathcal{L}_1$-ə daxil olan iki funksiya μ ölçüsünə nəzərən sanki hər yerdə üst-üstə düşürlərsə, onlara μ ölçüsünə nəzərən ekvivalent funksiyalar deyilir. Aydındır ki, funksiyalar arasındakı bu münasibət doğrudan da ekvivalentlik münasibətidir. Buna görə də təyin edilən bu münasibət $\mathcal{L}_1$-i cüt-cüt kəsişməyən ξ_f, ξ_g və bu kimi siniflərə bölür. Burada ξ_f sinfi f funksiyasına μ ölçüsünə nəzərən ekvivalent funksiyalardan ibarətdir.

2. L_p , $1 \le p < \infty$, fəzaları

İndi biz ölçülən funksiyaların ekvivalent siniflərindən ibarət digər normalaşmış fəzaları təyin edəcəyik.

4.2.1. Tərif. $1 \le p \le \infty$ olduqda $L_p = L_p(X, \mathcal{A}, \mu)$ fəzası μ ölçüsünə nəzərən ölçülən və

$$\int_X |f|^p < \infty$$

şərtini ödəyən həqiqi qiymətli funksiyaların ekvivalent siniflərindən ibarət fəzadır. Bu halda iki funksiya μ ölçüsünə nəzərən sanki hər yerdə üst-üstə düşürsə, onlara ekvivalent funksiyalar deyilir. Bu fəzada norma

$$\|f\|_p = \left\{ \int_X |f|^p \, d\mu \right\}^{1/p}$$

kimi təyin olunur.

$p = 1$ olduqda əvvəl daxil etdiyimiz L_1 fəzasını almış oluruq.

L_1 fəzası halında olduğu kimi ümumi L_p fəzasının xətti fəza olduğunu göstərmək üçün toplama əməlini

$$\xi_f + \xi_g = \xi_{f+g}$$

və α ədədinə vurma əməlini

$$\alpha \cdot \xi_f = \xi_{\alpha f}$$

kimi qəbul etmək kifayətdir.

Göstərəcəyik ki, (1) L_p-də norma təşkil edir və bu normaya nəzərən tam fəzadır.

Biz tam fəzanın tərifini verəcəyik. Belə normallaşmış fəzaları Banax fəzaları adlandırırlar.

(1)-in norma olduğunu göstərmək üçün aşağıdakı mühüm bərabərsizlikləri qeyd edək.

4.2.2. Hölder bərabərsizliyi. Tutaq ki, $f \in L_p, g \in L_q$ $p > 1$ və ${}^1/_p + {}^1/_q = 1$. Onda $fg \in L_1$ və $\|fg\|_1 \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q$.

İsbatı. Tutaq ki, α ədədi $0 < \alpha < 1$ şərtini ödəyən ədəddir. $t \ge 0$ üçün

$$\varphi(t) = \alpha t - t^{\alpha}$$

funksiyasına baxaq. Asanca göstərmək olar ki, $0 < t < 1$ olduqda $\varphi'(t) < 0$ və $t > 1$ olduqda isə $\varphi'(t) > 0$ olur. Onda orta qiymət haqqındakı teoremə əsasən $\varphi(t) \ge \varphi(1)$ və $\varphi(t) = \varphi(1)$ bərabərsizliyi, ancaq və ancaq $t = 1$ olduqda doğrudur.

Buna görə də

$$t^{\alpha} \le \alpha t + (1 - \alpha)\,, t \ge 0 \tag{2}$$

(2) bərabərsizliyində $t = {}^{a}/_{b}$ $(a \ge 0, b > 0)$ qəbul edək və onun hər tərəfini b-yə vursaq, alarıq:

$$a^{\alpha} b^{1-\alpha} \le \alpha \cdot a + (1 - \alpha) b\,. \tag{3}$$

Sonuncu bərabərsizlik, ancaq və ancaq $a = b$ olduqda bərabərliyə çevrilir.

İndi tutaq ki, $1 < p < \infty$ və ${}^1/_p + {}^1/_q = 1$.

$\alpha = \frac{1}{p}$ olsun. Onda (3)-dən

$$a^{1/p} \cdot b^{1/q} \le \frac{1}{p} a + \frac{1}{q} b$$

və $A = a^{1/p}$ və $B = b^{1/q}$ işarə etsək,

$$AB \le \frac{1}{p} A^p + \frac{1}{q} B^q \tag{4}$$

olar. Sonuncu bərabərsizlik istənilən $A \geq 0$ və $B \geq 0$ ədədləri üçün doğrudur və (4), ancaq və ancaq $A^p = B^q$ olduqda bərabərliyə çevrilir.

Fərz edək ki, $f \in L_p$ və $g \in L_q$. Əlavə fərz edək ki, $\|f\|_p \neq 0$ və $\|g\|_q \neq 0$.

Aydındır ki, fg hasili ölçülən funksiyadır və (4)-də

$$A = {|f(x)|}/{\|f\|_p}, \; B = {|g(x)|}/{\|g\|_q}$$

qəbul etsək,

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_q} \leq \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q\|g\|_q^q} \tag{5}$$

olar. Sağ tərəfdəki hər iki toplanan inteqrallanan funksiyalar olduğundan sol tərəf də inteqrallanandır. (5)-i inteqrallasaq,

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p\|g\|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

və bununla da Hölder bərabərsizliyini isbat etmiş oluruq. □

Qeyd edək ki, Hölder bərabərsizliyindəki p və q ədədlərinə (yəni $p > 1$ və $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, yaxud da $p + q = pq$ şərtlərini ödəyən p və q ədədlərinə) qoşma ədədlər deyilir. Aydındır ki, $p = 2$ olduqda $q = 2$ olur. Bu halda bu ədədlərə öz-özünə qoşma ədədlər deyilir. Deməli, L_2-dən olan iki funksiyanın hasili L_1-ə daxildir. Başqa bir maraqlı cəhəti də qeyd edək. L_p fəzasının μ ölçüsü hesabi ölçü, $L_p = N$ (natural ədədlər çoxluğu), $\mathcal{A}$ σ-cəbri N-in bütün alt çoxluqlarından ibarət olduqda l_p $(p \geq 1)$ ardıcıllıqlar fəzasını almış oluruq. Bu halda l_p-nin hər bir sinifi, ancaq bir elementdən ibarət olur.

4.2.3. Koşi-Bunyakovski–Şvars bərabərsizliyi

Əgər f və $g \in L_2$ isə onda $fg \in L_1$ və

$$\left|\int_X fg d\mu\right| \leq \int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 .$$

4.2.4. Minkovski bərabərsizliyi .

Əgər f və $g \in L_p, p \geq 1$ isə onda $f + g \in L_p$ və

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. (6)$$

İsbatı. $p = 1$ halı aşkardır. Buna görə də $p > 1$ qəbul edək. Aydındır ki. $f + g$ ölçülən funksiyadır

$$|f + g|^p \leq (2\sup\{|f|, |g|\})^p \leq 2^p sup\{|f|^p, |g|^p\} .$$

Onda inteqralın xassələrindən

$$|f + g|^p = |f + g||f + g|^{p-1} \leq$$
$$\leq |f||f + g|^{p-1} + |g||f + g|^{p-1} \qquad (7)$$

olduğunu görərik.

$f + g \in L_p$ olduğundan $|f + g|^p \in L_1$, həmçinin $p = (p-1)q$ olduğunu nəzərə alsaq,
$|f + g|^{p-1} \in L_q$. Hölder bərabərsizliyini tətbiq edərək

$$\int_X |f||f + g|^{p-1} d\mu \leq \|f\|_p \left\{\int_X |f + g|^{(p-1)q} d\mu\right\}^{1/q} =$$
$$= \|f\|_p \cdot \|f + g\|^{p/q} .$$

Eyni cür işi (7)-nin ikinci toplananı üçün etsək, (7)-dən

$$\|f + g\|_p^p \leq \|f\|_p\|f + g\|_p^{p/q} + \|g\|_p\|f + g\|_p^{p/q} =$$
$$= \{\|f\|_p + \|g\|_p\}\|f + g\|_p^{p/q} \qquad (8)$$

olduğunu görərik. $\|f + g\| = 0$ isə (6) münasibəti trivialdır. $\|f + g\| \neq 0$ isə (8)-dən Minkovski bərabərsizliyinin isbatını bitiririk. Burada $p - \frac{p}{q} = p\left(1 - \frac{1}{q}\right) = p \cdot \frac{1}{p} = 1$ olduğu nəzərə alınmışdır. □

Aydındır ki, L_p xətti fəzadır və (1) bu fəzada normadır. Burada trivial olmayan normanın sonuncu aksiomudur. Bu da Minkovski bərabərsizliyindən bilavasitə alınır.

4.2.5. Tərif. Tutaq ki, $\{f_n\} \subset L_p$ hər hansı ardıcıllıqdır. İstənilən $\varepsilon > 0$ ədədinə görə elə $M(\varepsilon)$ varsa ki, $m, n \geq M(\varepsilon)$ üçün

$$\|f_m - f_n\| < \varepsilon$$

olarsa, $\{f_n\}$ ardıcıllığına L_p fəzasında fundamental və ya Koşi ardıcıllığı deyilir. $\varepsilon > 0$ ədədinə görə elə $n_0(\varepsilon)$ nömrəsi varsa ki, $n \geq n_0(\varepsilon)$ üçün

$$\|f_n - f\|_p \leq \varepsilon$$

olarsa, onda deyirlər ki, $\{f_n\}$ ardıcıllığı L_p fəzasında f funksiyasına yığılır və

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f$$

kimi yazılır.

Normalaşmış fəzada istənilən Koşi ardıcıllığı yığılarsa, həmin fəzaya tam fəza deyilir. Çox vaxt tam normalaşmış fəzanı Banax fəzası adlandırlar.

4.2.6. Lemma. $\{f_n\}$ ardıcıllığı L_p fəzasında f-ə yığılırsa, bu ardıcıllıq Koşi ardıcıllığıdır.

İsbatı. $n \geq n_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ olsun. Onda

$$\|f_m - f\| < \frac{\varepsilon}{2}, \|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur.

Deməli,

$\|f_m - f_n\|_p \leq \|f_m - f\|_p + \|f_n - f\|_p < \varepsilon$. □

İndi göstərək ki, L_p fəzasında ixtiyari Koşi ardıcıllığı L_p-nin müəyyən elementinə yığılır.

4.2.7. L_p-də tamlıq teoremi.

$1 \leq p < \infty$ isə L_p

$$\|f\|_p = \left\{ \int_X |f|^p \right\}^{1/p}$$

normasına nəzərən tam normalaşmış fəza təşkil edir.

İsbatı. Əvvəl göstərmişik ki, L_p normalaşmış fəzadır. L_p-nin tamlığını göstərmək üçün bu fəzada ixtiyari $\{f_n\}$ Koşi ardıcıllığına baxaq. Tərifə görə, istənilən $\varepsilon > 0$ üçün elə $M(\varepsilon)$ ədədi vardır ki, $n, m > M(\varepsilon)$ olduqda

$$\int_X |f_m - f_n|^p d\mu \leq \|f_m - f_n\|_p^p < \varepsilon^p \tag{9}$$

olur. Aydındır ki, elə $\{g_k\} \subset \{f_n\}$ alt ardıcıllığı vardır ki, hər bir $k \in N$ üçün

$$\|g_{k+1} - g_k\|_p < 2^{-k} .$$

g funksiyasını təyin edək:

$$g(x) = |g_1(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |g_{k+1}(x) - g_k(x)| . \tag{10}$$

Aydındır ki, $g(x)$ ölçülən funksiyadır və $g(x) \geq 0$, $x \in X$. Fatu lemmasına görə

$$\int_X |g|^p d\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_X \left\{ |g_1| + \sum_{k=1}^{n} |g_{k+1} - g_k|^p \right\} d\mu. \tag{11}$$

Minkovski bərabərsizliyini (11)-ə tətbiq etsək alarıq:

$$\left\{ \int_X |g|^p d\mu \right\}^{1/p} \leq \varliminf_{n\to\infty} \left\{ \|g_1\|_p + \sum_{k=1}^{n} \|g_{k+1} - g_k\|_p \right\} \leq$$

$\leq \|g_1\|_p + 1$.

Buna görə də $E = \{x: x \in X, g(x) < \infty\}$ isə $E \in \mathcal{A}$ və $\mu(X \backslash E) = 0$.

Deməli, (10) sırası sanki hər yerdə yığılır və $g \cdot \mathcal{X}_E \in L_p$.

İndi X-də f funksiyasını təyin edək.

$$f(x) = g_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(g_{k+1}(x) - g_k(x)\right), x \in E$$

və

$$f(x) = 0, x \overline{\in} E .$$

$$|g_k| \leq \sum_{j=k}^{\infty}\left|g_{j+1} - g_j\right| \leq g \text{ və } g_k \overset{s.h}{\to} f$$

olduğundan majorant yığılma haqqındakı teoremə əsasən $f \in L_p$.

$$|f - g_k|^p \leq 2^p g^p$$

olduğundan mojarant yığılma haqqındakı teoremə əsasən

$$\lim_{k\to\infty} \|g_k - f\|_p = 0 .$$

(9)-a əsasən $m \geq M(\varepsilon)$ və K kifayət qədər böyük ədəd isə

$$\int_X |f_m - g_k|^p d\mu < \varepsilon^p$$

olur.

Fatu lemmasını tətbiq etsək, $m \geq M(\varepsilon)$ üçün

$$\int_X |f_m - g_k|^p d\mu \leq \lim_{k\to\infty} \inf \int_X |f_m - g_k|^p d\mu \leq \varepsilon^p .$$

Yəni $\{f_n\}$ ardıcıllığı L_p normasına nəzərən f funksiyasına yığılır. □

3. L_∞ fəzası

L_p fəzaları ilə əlaqəli bir fəzanı da qeyd edək.

4.3.1. Tərif. $L_\infty = L_\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ fəzası ölçülən və sanki hər yerdə məhdud həqiqi funksiyaların təşkil etdiyi bütün ekvivalent siniflərdən ibarət fəzadır. Burada iki funksiya μ ölçüsünə nəzərən sanki hər yerdə üst-üstə düşürlərsə, onlar ekvivalent olurlar və eyni sinifə daxil edilirlər.

$f \in L_\infty$, $E \in \mathcal{A}$ və $\mu(E) = 0$ isə

$$S(E) = \sup\{|f(x)| : x \notin E\}$$

təyin edək.

$$\|f\|_\infty = \inf\{S(E) : E \in \mathcal{A}, \mu(E) = 0\} \quad (12)$$

olsun.

L_∞ - un hər bir elementinə mühüm məhdud funksiya deyilir.

3.2. Teorem. (12) düsturuna nəzərən L_∞ tam normalaşmış fəza təşkil edir.

İsbatı. Aydındır ki, L_∞ xətti fəzadır. Bundan başqa $\|f\|_\infty \geq 0$, $\|0\|_\infty = 0$ və $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha| \cdot \|f\|_\infty$.

$\|f\|_\infty = 0$ isə, elə $E_k \in \mathcal{A}$ ölçülən çoxluqları vardır ki, $\mu(E_k) = 0$, belə ki, $|f(x)| < \frac{1}{k}$, $x \in E_k$ $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ olsun. Onda $E \in \mathcal{A}$, $\mu(E) = 0$ və $|f(x)| = 0$.

$x \notin E$. Deməli, sanki bütün x-lər üçün $f(x) = 0$.

$f, g \in L_\infty$ isə elə $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$ vardır ki, $\mu(E_1) = \mu(E_2) = 0$, belə ki,

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty, x \notin E_1,$$

$$|g(x)| \leq \|g\|_\infty, x \notin E_2.$$

Buna görə də

$$|f(x) + g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty, x \notin (E_1 \cup E_2).$$

Buradan isə

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

olur.

İndi göstərək ki, L_∞ tamdır. Tutaq ki, $\{f_n\}$ L_∞-da ixtiyari Koşi ardıcıllığıdır.

Fərz edək ki, $M \in \mathcal{A}$ elə çoxluqdur ki, $\mu(M) = 0$, belə ki, $x \notin M$ üçün

$$|f_n(x)| \leq \|f\|_\infty, n = 1, 2, \cdots,$$

və

$$|f_n(x) + f_m(x)| \le \|f_n - f_m\|_\infty ,$$

$x \notin M$, $m, n = 1, 2, \dots$. Onda $\{f_n\}$ ardıcıllığı $X \backslash M$ çoxluğunda müntəzəm yığılır.

$$f(x) = \lim f_n(x) , x \notin M$$

və

$$f(x) = 0 , x \in M$$

qəbul etsək, görərik ki, f ölçüləndir və

$$\|f_n - f\|_\infty \to 0 \ (n \to \infty) .$$

Başqa sözlə, L_∞ fəzası (12) normasına nəzərən tamdır. □

4 . Tapşırıqlar

1. $[0, 1]$ parçasında təyin olunmuş kəsilməz funksiyaların xətti fəzasında hər bir f funksiyası üçün $N_0(f) = |f(0)|$ yarım norma təyin edir. Bunu göstərin.

2. Tapşırıq 1-dəki xətti fəzada

$$N_1(f) = \int_0^1 |f(x)| \, dx \ \textit{(Riman inteqralı)}$$

yarım normadır.

İndi $n \ge 1$ üçün

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 , 0 \le x \le (1 - 1/n)/2 \\ 1 , \dfrac{1}{2} \le x \le 1 \\ \text{xətti funksiyadır}, (1 - 1/n)/2 \le x \le \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

təyin edək. Göstərin ki, $\{f_n\}$ Koşi ardıcıllığıdır. Bu ardıcıllıq N_1 yarım normasına nəzərən heç bir kəsilməz funksiyaya yığılmır.

3. $f \in L_1$ və $\varepsilon > 0$ ədədinə görə elə sadə ölçülən φ funksiyası vardır ki, $\|f - \varphi\| < \varepsilon$.

Bu nəticəni L_p $(1 \le p < \infty)$ üçün də isbat edin.

Bu fakt L_∞ fəzası üçün də doğrudurmu?

4. $f \in L_p, 1 \le p < \infty$ isə

$$E = \{x : x \in X, |f(x)| \neq 0\}$$

çoxluğu σ-sonludur.

5. $f \in L_p, 1 \le p < \infty$ və

$$E_n = \{x : x \in X, |f(x)| \ge n\}$$

Göstərin ki, $\mu(E_n) \to 0 \ (n \to \infty)$.

6. Tutaq ki, $X = N$ və μ N-dəki σ-cəbrdə hesabi ölçüdür.

$$f(n) = \frac{1}{n}$$

qəbul etsək, $f \notin L_1$. Lakin $1 < p \le \infty$ üçün $f \in L_p$.

7. Tutaq ki, $X = N$, λ N-dəki σ-cəbrdə $\lambda(n) = \frac{1}{n^2}$ olan ölçüdür, daha dəqiq desək,

$$\lambda(E) = \sum \left\{ {}^{1}/_{n^2} : n \in E \right\}.$$

Göstərin ki, $\lambda(X) < \infty$.

İndi tutaq ki,

$$f(n) = \sqrt{n}$$

Göstərin ki, $f \in L_p$, ancaq və ancaq $1 \le p < 2$ üçün doğrudur.

8. Tutaq ki, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçülən fəza və $\mu(X) < \infty$. Olavə fərz edək ki, f ölçülən funksiyadır və

$$E_n = \{x : x \in X, (n-1) \le |f(x)| < n\}.$$

Göstərin ki, $f \in L_1$, ancaq və ancaq

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\mu(E_n) < \infty$$

olduqda mümkündür.

Daha ümumi halda, $f \in L_p \ (1 \le p < \infty)$, ancaq və ancaq

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p \mu(E_n) < \infty$$

olduqda mümkündür.

9. $X = N$ və μ hesabi ölçü olsun. $f \in L_p$ isə $f \in L_s$, $1 \leq p \leq s < \infty$ və

$$\|f\|_s \leq \|f\|_p .$$

10. $X = (0, \infty)$ və μ X-də Lebeq ölçüsü olsun. $f(x) = x^{-1/2}(1 + |\log x|)^{-1}$ funksiyası üçün $f \in L_p$, ancaq və ancaq $p = 2$ olduqda mümkündür.

11. Tutaq ki, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçülən fəza və $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$ üçün $f \in L_{p_1}$ və $f \in L_{p_2}$. İsbat edin ki, $p_1 \leq p \leq p_2$ şərtini ödəyən p üçün $f \in L_p$.

12. $f \in L_p, 1 \leq p \leq \infty$ və $g \in L_\infty$ isə $fg \in L_p$ və $\|fg\|_p \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_\infty$.

13. $L_\infty(X, \mathcal{A}, \mu) \subset L_1(X, \mathcal{A}, \mu)$ münasibəti, ancaq və ancaq $\mu(X) < \infty$ olduqda mümkündür. $\mu(X) = 1$ və $f \in L_\infty$ isə

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|f\|_p .$$

V Fəsil

Yığılmalar

1. Bəzi mühüm yığılmalar

Biz indiyə kimi ölçülən funksiyalar ardıcıllıqları üçün bir neçə yığılmaya rast gəldik və müəyyən anlarda onlardan istifadə etdik. İndi daha iki mühüm yığılmaya da baxacağıq və ardıcıllığın müxtəlif yığılmaları arasındakı əlaqələri verməyə çalışacağıq.

Bu fəsildə biz, ancaq müəyyən $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçülən fəzasında təyin olunmuş həqiqi qiymətli (sadəcə həqiqi) funksiyalara diqqət yetirəcəyik.

Asanlıq üçün əvvəldən bildiyimiz bəzi yığılmaları yada salaq.

Tutaq ki, $\{f_n\}$ ardıcıllığı və f funksiyası verilmişdir.

1^0. İstənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün müəyyən $N(\varepsilon)$ natural ədədinin varlığından $n \geq N(\varepsilon)$ və $x \in X$ üçün

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

olarsa, f funksiyasına $\{f_n\}$ ardıcıllığının müntəzəm limiti deyilir. Bu cür yığılmanı

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) \overset{m}{=} f(x)$$

kimi də işarə edirlər.

2^0. İstənilən $\varepsilon > 0$ ədədi və $x \in X$ elementi üçün müəyyən $N(\varepsilon, x)$ natural ədədinin varlığından $n \geq N(\varepsilon, x)$ üçün

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

olarsa, f funksiyasına $\{f_n\}$ ardıcıllığının nöqtəvi limiti deyilir.

3^0. İstənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün $\mu(E) = 0$ şərtini ödəyən müəyyən $E \subset X$ çoxluğunun və $N(\varepsilon, x)$ natural ədədinin varlığından ixtiyari $x \in X \backslash E$ və $n \geq N(\varepsilon, x)$ üçün

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

olarsa, f-ə $\{f_n\}$ ardıcıllığının sanki hər yerdə limiti deyilir. Başqa sözlə,

$$\mu\left\{x : x \in X, \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x)\right\} = 0$$

olarsa, onda deyirlər ki, $\{f_n\}$ ardıcıllığı f funksiyasına sanki hər yerdə yığılır.

Adətən bu yığılmanı simvolik olaraq

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \ (s.h.)\ (x \in X)$$

kimi də işarə edirlər.

Qeyd edək ki, ardıcıllığın öz limitinə müntəzəm yığılmasından həmin limitə nöqtəvi yığılması, nöqtəvi yığılmasından isə sanki hər yerdə yığılması bilavasitə alınır. Lakin bu dediklərimizin tərsi həmişə doğru deyildir.

Lakin X sonlu çoxluq isə (yəni sonlu sayda nöqtələrdən ibarət isə), nöqtəvi yığılmadan müntəzəm yığılma alınır. X-də ancaq ölçüsü sıfır çoxluq, ancaq boş çoxluq isə sanki hər yerdə yığılmadan nöqtəvi yığılma alınır.

İndi çox vacib daha bir neçə yığılmaları təyin edək.

4^0. Tutaq ki, $\{f_n\} \subset L_p(X, \mathcal{A}, \mu)$ $(p \geq 1)$ və $f \in L_p$. İstənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün müəyyən $N(\varepsilon)$ ədədinin varlığından $n \geq N(\varepsilon)$ üçün

$$\|f_n - f\|_p = \left(\int |f_n - f|^p \, d\mu\right)^{1/p} < \varepsilon$$

olarsa, f funksiyasına $\{f_n\}$ ardıcıllığının L_p mənada limiti deyilir. Bəzən də deyirlər ki, $\{f_n\}$ ardıcıllığı f-ə p-dərəcədən orta yığılır. $p = 1$ olduqda isə sadəcə "orta mənada yığılır" ifadəsi işlənilir.

5^0. Tutaq ki, $\{f_n\}$ ölçülən həqiqi funksiyalar ardıcıllığı və f həqiqi ölçülən funksiyası $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçülən fəzasında verilmişdir. $\forall\, \sigma > 0$ ədədi üçün

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{x : x \in X, |f_n(x) - f(x)| \geq \sigma\} = 0$$

olduqda f funksiyasına $\{f_n\}$ ardıcıllığının ölçüyə (μ ölçüsünə) görə limiti deyilir və

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \;\; (\mu \text{ ölçüsünə görə}) \; (x \in X)$$

kimi işarə edilir.

Aydındır ki, $\{f_n\}$ ardıcıllığı f-ə müntəzəm yığılırsa,

$$\{x : x \in X, |f_n(x) - f(x)| \geq \sigma\}$$

çoxluğu müəyyən (böyük) n nömrəsi üçün boş çoxluq təşkil edir. Yəni müntəzəm yığılmadan ölçüyə görə yığılma çıxır.

Onu da qeyd edək ki, $\{f_n\}$ ardıcıllığının L_p-də $f \in L_p$ funksiyasına müntəzəm (və deməli, nöqtəvi və s. h.) yığılmasından L_p mənada yığılması çıxmaya da bilər.

İndi yuxarıda verilən yığılmaları ayrıca və əlaqəli analiz edək. Bir tərif də bizə lazım olacaqdır.

6^0. İstənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün $\mu(E) = 0$ şərtini ödəyən müəyyən $E \subset X$ çoxluğunun və $N(\varepsilon, x)$ natural ədədin varlığından ixtiyari $x \in X \backslash E$ və $n, m < N(\varepsilon, x)$ üçün $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ olarsa, $\{f_n\}$ ardıcıllığına ölçüyə görə Koşi və ya ölçüyə görə fundamental ardıcıllıq deyilir.

2. Sanki hər yerdə yığılma

5.2.1. Teorem. $\{f_n(x)\}$ ölçülən funksiyalar ardıcıllığı $f(x)$ funksiyasına sanki hər yerdə yığılırsa, $f(x)$ funksiyası da ölçüləndir.

İsbatı. Tutaq ki, A elə ölçülən çoxluqdur ki, istənilən $x \in A$ üçün

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Şərtə görə $\mu(X \setminus A) = 0$. Aydındır ki, $f(x)$ funksiyası A çoxluğunda ölçüləndir. Digər tərəfdən, ölçüsü sıfır olan çoxluqda istənilən həqiqi funksiya ölçülən olduğundan $f(x)$ funksiyası da $X \setminus A$ çoxluğunda ölçülən olacaqdır. Buradan isə $f(x)$-ın bütün X-də ölçülənliyi çıxır. □

Misal. $f_n(x) = (-x)^n$ funksiyaları $[0,1]$ parçasında təyin olunmuş ölçülən funksiyalardır. Bununla birlikdə bu ardıcıllıq $A = [0,1)$ yarım intervalında sıfıra yığılır. $[0;1] \setminus A = \{1\}$ çoxluğunda isə bu ardıcıllıq yığılmır: $f_n(1) = (-1)^n$.

Deməli,

$$f_n(x) \overset{s.h.}{\longrightarrow} 0$$

və

$$\mu([0,1] \setminus A) = \mu\{1\} = 0$$

3. L_p $(p > 1)$ mənada yığılma

5.3.1. Tərif. $\{f_n\} \subset L_p$ ardıcıllığı istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün $N(\varepsilon)$ natural ədədinin varlığından $m, n \geq N(\varepsilon)$ üçün

$$\|f_m - f_n\|_p = \left\{ \int_X |f_m(x) - f_n(x)|^p d\mu \right\}^{1/p} < \varepsilon$$

şərtini ödəyərsə, ona L_p-də Koşi (və ya fundamental) ardıcıllığı deyilir.

2.2. Teorem. Tutaq ki, $\mu(X) < \infty$ və $\{f_n\} \subset L_p$ müntəzəm olaraq X-də f funksiyasına yığılır. Onda $f \in L_p$ və $\{f_n\}$ ardıcıllığı f-ə L_p mənada yığılır.

İsbatı. Tutaq ki, $\varepsilon > 0$ və $N(\varepsilon)$ elə natural ədədlir ki, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $(n \geq N(\varepsilon)$ $x \in X)$ $n \geq N(\varepsilon)$ isə

$$\|f_n - f\|_p = \left\{\int\limits_X |f_n(x) - f(x)|^p d\mu\right\}^{1/p} \leq \left\{\int\limits_X \varepsilon^p d\mu\right\}^{1/p} =$$

$$= \varepsilon\mu^{\frac{1}{p}}(X),$$

yəni $\{f_n\}$ ardıcıllığı L_p-mənada f-ə yığılır. Aydındır ki, $f \in L_p$. ▫

Ola bilər ki, $\{f_n\} \subset L_p$ nöqtəvi olaraq (eyni zamanda sanki hər yerdə) $f \in L_p$ funksiyasına yığılsın, lakin $\mu(X) < \infty$ olsa da belə L_p-mənada yığılmasın.

Aşağıdakı teorem maraq kəsb edir.

5.3.2 Teorem. Tutaq ki, $\{f_n\} \subset L_p$ ardıcıllığı f ölçülən funksiyasına sanki hər yerdə yığılır.
Əgər müəyyən $g \in L_p$ funksiyası üçün

$$|f_n(x)| \leq g(x)\,, x \in X\,, n \in N \tag{1}$$

olarsa, $f \in L_p$ və $\{f_n\}$ ardıcıllığı f-ə L_p-mənada yığılır.

İsbatı. (1) bərabərsizliyinə görə $|f(x)| \leq g(x)$ sanki hər yerdə doğrudur. $g \in L_p$ olduğundan $f \in L_p$ olur. Digər tərəfdən, sanki hər yerdə bütün $x \in X$ üçün

$$|f_n(x) - f(x)|^p \leq 2^p g^p(x). \tag{2}$$

(2)-yə əsasən

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)|^p \overset{s.h}{=} 0$$

və $2^p g^p \in L_1$ olduğundan Lebeqin majorant yığılma haqqındakı teoremə görə

$$\lim_{n\to\infty}\int_X |f_n - f|^p d\mu = 0 .$$

Deməli, $\{f_n\}$ ardıcıllığı L_p mənada f-ə yığılır. □

2.4. Nəticə. Tutaq ki, $\mu(X) < \infty$ və $\{f_n\} \subset L_p$ ardıcıllığı sanki hər yerdə f funksiyasına yığılır.

Əgər müəyyən K sabit ədədi üçün

$$|f_n(x)| \le K , x \in X , n \in N ,$$

olarsa, onda $f \in L_p$ və $\{f_n\}$ ardıcıllığı f funksiyasına L_p mənada yığılır.

İsbatı. $\mu(X) < \infty$ olduğundan sabit funksiyalar, $g(x) = K(= const), L_p$ fəzasına daxildirlər. □

Belə düşünmək olar ki, L_p mənada yığılmadan sanki hər yerdə yığılma alınır. Lakin bu doğru olmaya da bilər.

5.3.3. Misal. $X = [0; 1]$. $\mathcal{A}$ σ-cəbri bu çoxluqda Borel çoxluqlar sistemi və λ burada Lebeq ölçüsü olsun. Aşağıdakı parçalara baxaq.

$$[0,1], \left[0,\frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2},1\right], \left[0,\frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right], \left[\frac{2}{3},1\right],$$
$$\left[0,\frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right], \left[\frac{3}{4},1\right], \left[0\frac{1}{5}\right], \cdots$$

f_n ilə n-ci parçanın xarakteristik funksiyasını işarə edək. f eyniliklə sıfır funksiyası olsun.

$$n \ge \frac{m(m+1)}{2} \; (= 1 + 2 + \cdots + m)$$

isə f_n funksiyası ölçüsü ən çoxu $\frac{1}{m}$ olan parçanın xarakteristik funksiyası olacaqdır.

Onda

$$\|f_n - f\|_p^p = \int_{[0,1]} |f_n - f|^p d\lambda = \int_{[0,1]} |f_n|^p d\lambda = \int_{[0,1]} f d\lambda \leq \frac{1}{m}$$

olduğundan $\{f_n\}$ ardıcıllığı L_p mənada f-ə yığılır. İndi tutaq ki, $x \in [0;1]$ hər hansı nöqtədir. Onda $\{f_n(x)\}$-in elə alt ardıcıllığı vardır ki, hədləri ancaq vahid, digər alt ardıcıllığı vardır ki, hədləri ancaq sıfırdır. Yəni $\{f_n\}$ ardıcıllığı $[0;1]$ parçasının heç bir nöqtəsində yığılmır. (Lakin $\{f_n\}$-dən elə $\{f_{n_k}\}$ alt ardıcıllığı seçmək olar ki,

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)\,, x \in X).$$

4. Ölçüyə görə yığılma

5.4.1. Tərif. $\{f_n\}$ ölçülən həqiqi funksiyalar ardıcıllığı istənilən $\sigma > 0$ ədədi üçün

$$\lim_{m,n\to\infty} \mu(\{x: x \in X, |f_m(x) - f_n(x)| \geq \sigma\}) = 0$$

olarsa, bu ardıcıllığa ölçüyə görə Koşi (fundamental) ardıcıllığı deyilir.

Göstərmək olar ki, ardıcıllığın nöqtəvi yığılmasından (eyni zamanda sanki hər yerdə yığılmasından) ölçüyə görə yığılması mümkün olmaya da bilər. Lakin L_p mənada yığılma ölçüyə görə yığılmanı doğurur. Doğrudan da

$$E_n(\sigma) = \{x: x \in X, |f_n(x) - f(x)| \geq \sigma\}$$

isə

$$\int_X |f_n(x) - f|^p d\mu \geq \int_{E_n(\sigma)} |f_n(x) - f|^p d\mu \geq \sigma^p \mu\big(E_n(\sigma)\big)\,.$$

$\alpha > 0$ olduğundan $\|f_n - f\|_p \to 0\ (n \to \infty)$. Bu da o deməkdir ki, $\mu(E_n(\sigma)) \to 0\ (n \to \infty)$, yəni $\{f_n\}$ ardıcıllığı f funksiyasına ölçüyə görə yığılır.

5.3.3. misalında göstərdik ki, funksiyalar ardıcıllığı öz limitinə ölçüyə görə yığılmasına baxmayaraq, heç bir nöqtədə yığılmaya da bilər. Buna baxmayaraq F. Riss isbat etmişdir ki, $\{f_n\}$ ardıcıllığı f-ə ölçüyə görə yığılırsa, ondan f funksiyasına sanki hər yerdə yığılan alt ardıcıllıq seçmək olar. Biz bundan daha ümumi bir faktı isbat edəcəyik.

5.4.3. Teorem. Tutaq ki, $\{f_n\}$ ölçülən həqiqi funksiyalar ardıcıllığı ölçüyə görə Koşi ardıcıllığıdır. Onda bu ardıcıllığın ölçülən həqiqi f funksiyasına sanki hər yerdə və ölçüyə görə yığılan alt ardıcıllığı vardır.

İsbatı. $\{f_n\}$-dən elə $\{g_k\}$ alt ardıcıllığı seçək ki,

$$E_k = \{x: x \in X, |g_{k+1}(x) - g_k(x)| \geq 2^{-k}\}$$

çoxluğu üçün

$$\mu(E_k) < 2^{-k}$$

olsun.

Tutaq ki,

$$F_k = \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j$$

elə çoxluqdur ki, $F_k \in \mathcal{A}$ və $\mu(E_k) < 2^{-(k-1)}$.

Əgər $i \geq j \geq k$ və $x \notin F_k$ isə

$$|g_i(x) - g_j(x)| \leq |g_i(x) - g_{i-1}(x)| + \cdots + |g_{j+1}(x) - g_j(x)|$$

$$\leq\leq \frac{1}{2^{i-1}} + \cdots + \frac{1}{2^j} < \frac{1}{2^{j-1}} \quad (3)$$

olur.

$$F = \cap_{k=1}^{\infty} F_k,\ F \in \mathcal{A} \text{ və } \mu(F) = 0$$

qəbul edək.

Aydındır ki, $\{g_j\}$ ardıcıllığı $X\backslash F$-də yığılır. f-i aşağıdakı kimi təyin edək.

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{j\to\infty} g_j(x)\ , \text{əgər } x \notin F \\ \quad 0\ , \text{əgər } x \in F \end{cases}.$$

Təyininə görə

$$\lim_{j\to\infty} g_j(x) = f(x)\ \ (s.h.)$$

(3)-də $i \to \infty$ limitə keçək, $j \geq k$ və $x \notin F_k$ olduğunu nəzərə alsaq,

$$|f(x) - g_j(x)| \leq \frac{1}{2^{j-1}} \leq \frac{1}{2^{k-1}}\,. \qquad (4)$$

Bu da onu göstərir ki, $\{g_j\}$ ardıcıllığı f-ə F_k-nın tamamlanmasında müntəzəm yığılır.

İndi göstərək ki, $\{g_j\}$ ardıcıllığı f funksiyasına ölçüyə görə yığılır. Tutaq ki, ε və σ müsbət ədədlərdir. k nömrəsini elə böyük seçək ki,

$$\mu(F_k) < 2^{-(k-1)} < inf(\sigma, \varepsilon)$$

olsun.

$j \geq k$ isə (4) qiymətləndirilməsi göstərir ki,

$$\{x : x \in X, |f(x) - g_j(x)| \geq \sigma\} \subseteq$$
$$\subseteq \{x : x \in X, |f(x) - g_j(x)| > 2^{-(k-1)}\} \subseteq F_k\,.$$

Deməli,

$$\mu\left(\left\{\{x : x \in X,\}|f(x) - g_j(x)| \geq \sigma\right\}\right) \leq \mu(F_k) < \varepsilon\ , j \geq k$$

yəni $\{g_j\}$ ardıcıllığı f-ə ölçüyə görə yığılır. □

5.4.4. Nəticə. Tutaq ki, $\{f_n\}$ ölçüyə görə Koşi ardıcıllığı təşkil edən ölçülən həqiqi funksiyalar ardıcıllığıdır. Onda elə ölçülən həqiqi f funksiyası vardır ki, $\{f_n\}$ ardıcıllığı f-ə ölçüyə görə yığılır. f limit funksiyası sanki hər yerdə yeganədir.

İsbatı. Biz bundan əvvəl göstərdik ki, f-ə ölçüyə görə yığılan $\{f_{n_k}\}$ alt ardıcıllığı vardır. $\{f_n\}$ ardıcıllığının ölçüyə görə yığılmasını göstərək.

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x) - f_{n_k}(x)| + |f_{n_k}(x) - f_n(x)|$$

münasibətindən

$$\{x: x \in X, |f(x) - f_n(x)| \geq \sigma\} \subseteq$$
$$\subseteq \left\{x: x \in X, |f(x) - f_{n_k}(x)| \geq \frac{\sigma}{2}\right\} \cup$$
$$\cup \left\{x: x \in X, |f_{n_k}(x) - f_n(x)| \geq \frac{\sigma}{2}\right\}$$

olduğunu görürük. Buradan isə $\{f_n\}$ ardıcıllığının f funksiyasına ölçüyə görə yığıldığı alınır.

İndi fərz edək ki, $\{f_n\}$ ardıcıllığı iki f və g funksiyalarına ölçüyə görə yığılır.

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - g(x)|$$

münasibətindən

$$\{x: x \in X, |f(x) - g(x)| \geq \sigma\} \subseteq$$
$$\subseteq \left\{x: x \in X, |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{\sigma}{2}\right\} \cup$$
$$\cup \left\{x: x \in X, |f_n(x) - g(x)| \geq \frac{\sigma}{2}\right\}$$

münasibəti alınır ki, buradan da istənilən σ üçün

$$\mu(\{x: x \in X, |f(x) - g(x)| \geq \sigma\}) = 0$$

olur. $\sigma = 1\backslash n, n \in N$ qəbul etsək, $f \overset{s.h}{=} g$.

5.4.5. Teorem. Tutaq ki, $\{f_n\} \subset L_p$ funksiyalar addıcıllığı f funksiyasına ölçüyə görə yığılır və $g \in L_p$ elə funksiyadır ki, sanki hər yerdə

$$|f_n(x)| \leq g(x)$$

olur. Onda $f \in L_p$ və $\{f_n\}$ ardıcıllığı f funksiyasına L_p mənada yığılır.

İsbatı. Əgər $\{f_n\}$ ardıcıllığı L_p mənada f funksiyasına yığılmırsa, $\{f_n\}$-in elə $\{g_k\}$ alt ardıcıllığı və $\varepsilon > 0$ vardır ki,

$$\|g_k - f\|_p > \varepsilon , k \in N . \qquad (5)$$

$\{g_k\}$ ardıcıllığı $\{f_n\}$ -in alt ardıcıllığı olduğundan $\{g_k\}$ ardıcıllığı f-ə ölçüyə görə yığılır. Onda 5. 4. 3 teoreminə görə $\{g_k\}$ -nın elə $\{h_r\}$ alt ardıcıllığı vardır ki, müəyyən bir h funksiyasına sanki hər yerdə və ölçüyə görə yığılır.

5.4.4. nəticəsinə görə $h \overset{s.h}{=} f_0$ $\{h_r\}$ ardıcıllığı f funksiyasına sanki hər yerdə yığıldığından və g funksiyası bu ardıcıllıq üçün majorant olduğundan 5. 3. 2. teoreminə görə

$$\|h_r - f\|_p \to 0 \ (r \to \infty) .$$

Bu isə (5) münasibətinə ziddir. ▫

5. Sanki müntəzəm yığılma

5.4.3. teoremində qeyd olundu ki, Koşi ardıcıllığı təşkil edən hər bir ölçülən həqiqi funksiyalar ardıcıllığından elə alt ardıcıllıq seçmək olar ki, bu sonuncu ardıcıllıq ölçüsü kifayət qədər kiçik müəyyən çoxluğun tamamlanmasında müntəzən yığılar. Belə görünə bilər ki, müntəzəm yığılma ölçüsü sıfır olan çoxluqdan kənarda baş verə bilər. lakin bu həmişə doğru deyildir.

5.5.1. Tərif. Tutaq ki, $\{f_n\}$ ölçülən həqiqi funksiyalar ardıcıllığı və f ölçülən funksiyadır. Əgər hər bir $\sigma > 0$ ədədi üçün elə $E_\delta \in \mathcal{A}$ çoxluğu varsa ki, $\mu(E_\delta) < \delta$ olduqda $\{f_n\}$ ardıcıllığı f funksiyasına $X \backslash E_\delta$ çoxluğunda müntəzəm yığılırsa, onda deyirlər ki, $\{f_n\}$ ardıcıllığı f funksiyasına sanki müntəzəm yığılır.

Əgər hər bir $\sigma > 0$ ədədi üçün elə $E_\delta \in \mathcal{A}$ çoxluğu varsa ki, $\mu(E_\delta) < \delta$ olduqda, $\{f_n\}$ ardıcıllığı $X \backslash E_\delta$ çoxluğunda müntəzəm yığılırsa, $\{f_n\}$ ardıcıllığına sanki müntəzəm Koşi (və ya fundamental) ardıcıllığı deyilir.

5.5.1. Lemma. Tutaq ki, $\{f_n\}$ sanki müntəzəm Koşi ardıcıllığıdır. Onda elə f ölçülən funksiyası vardır ki, $\{f_n\}$ ardıcıllığı f funksiyasına sanki müntəzəm və sanki hər yerdə yığılır.

İsbatı. k nömrəsi üçün E_k elə ölçülən çoxluq olsun ki, $\mu(E_\delta) < 2^{-k}$. Fərz edək ki, $\{f_n\}$ ardıcıllığı $X\backslash E_k$ çoxluğunda müntəzəm yığılır. Tutaq ki,

$$F_k = \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j \ , \ F_k \in \mathcal{A} \text{ və } \mu(F_k) < 2^{-(k-1)} .$$

Qeyd edək ki, $\{f_n\}$ ardıcıllığı $X\backslash F_k \subseteq X\backslash E_k$ çoxluğunda müntəzəm yığılır. g_k funksiyasını aşağıdakı kimi təyin edək.

$$g_k(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \ , \text{əgər } x \notin F_k \\ \qquad 0 \ , \text{əgər } x \in F_k \end{cases}$$

Aydındır ki, $\{F_k\}$ ardıcıllığı azalandır və $F_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$ isə $F \in \mathcal{A}$ və $\mu(F) = 0$.

$$h \le k \ , \ g_h(x) = g_k(x) \ . \ (x \in F_k) \ .$$

Deməli, $\{g_k\}$ ardıcıllığı bütün X-də müəyyən ölçülən f funksiyasına ölçüyə görə yığılır. $x \notin F_k$ isə

$$f(x) = g_k(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \ .$$

Başqa sözlə,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), x \in X\backslash F \ .$$

Yəni

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \overset{s.h}{=} f(x) \ .$$

İndi tutaq ki, $\varepsilon > 0$ və k elə böyük nömrədir ki, $g^{-(k-1)} < \varepsilon$. Onda $\mu(F_k) < \varepsilon$ və deməli, $\{f_n\}$ ardıcıllığı $g_k = f$ funksiyasına $X\backslash F_k$ çoxluğunda müntəzəm yığılır.

5.5.2. Teorem. $\{f_n\}$ ardıcıllığı f funksiyasına sanki müntəzəm yığılırsa, həmin limitə ölçüyə görə də yığılır. Tərsinə, $\{h_n\}$ ardıcıllığı h funksiyasına ölçüyə görə yığılırsa, bu ardıcıllıqdan elə alt ardıcıllıq seçmək olar ki, h funksiyasına sanki müntəzəm yığılar.

İsbatı. Tutaq ki, $\{f_n\}$ ardıcıllığı f funksiyasına sanki müntəzəm yığılır. Fərz edək ki, σ və ε müsbət ədədlərdir. Onda elə $E_\varepsilon \in \mathcal{A}$ çoxluğu vardır ki, $\mu(E_\varepsilon) < \varepsilon$ və $\{f_n\}$ ardıcıllığı f funksiyasına $X\backslash E_\varepsilon$ çoxluğuna müntəzəm yığılır. Deməli, n kifayət qədər böyük natural ədəd isə $\{x: x \in X, |f_n(x) - f(x)| \geq \sigma\}$ çoxluğu E_ε çoxluğuna daxil olmalıdır. Bu isə o deməkdir ki, $\{f_n\}$ ardıcıllığı f funksiyasına ölçüyə görə yığılır.

Tərsinə, fərz edək ki, $\{h_n\}$ ardıcıllığı h funksiyasına ölçüyə görə yığılır. 5.4.3. teoreminə görə $\{h_n\}$-in elə $\{g_k\}$ altardıcıllığı vardır ki, g funksiyasına ölçüyə görə yığılır və 5. 4. 3. teoreminin isbatı göstərdi ki, bu yığılma sanki müntəzəm yığılmadır. $\{g_k\}$ ardıcıllığı ölçüyə görə h və g funksiyalarına yığıldığından 5. 4. 4 nəticəsinə görə $h \overset{s.h}{=} g$.

Deməli, $\{h_n\}$ ardıcıllığın $\{g_k\}$ altardıcıllığı h funksiyasına sanki müntəzəm yığılır. □

Qeyd edək ki, 5.5.2. teoreminə görə hər hansı bir ardıcıllıq L_p mənada yığılırsa, onda onun elə altardıcıllığı vardır ki, həmin limitə sanki müntəzəm yığılır.

Onun tərsi, həmişə doğru deyildir. Yəni sanki müntəzəm yığılma L_p mənada yığılma doğurmaya da bilər. Əgər ardıcıllıq L_p funksiyası ilə məhduddursa, onda bu hal mümkündür.

5.5.1. lemmasının bir hökmü də budur ki, sanki müntəzəm yığılma sanki hər yerdə yığılmanı doğurur. Lakin bunun tərsi həmişə doğru deyildir.

Aşağıdakı fakt maraq kəsb edir.

5.5.3. Yeqorov teoremi. Tutaq ki, $\mu(X) < \infty$ və $\{f_n\}$ ölçülən həqiqi funksiyalar ardıcıllığı ölçülən həqiqi f funksiyasına sanki hər yerdə yığılır. Onda $\{f_n\}$ ardıcıllığı f funksiyasına həm sanki müntəzəm və həm də ölçüyə görə yığılır.

İsbatı. Ümumiliyi pozmadan fərz edək ki, $\{f_n\}$ ardıcıllığı X-in hər bir nöqtəsində yığılır.

$m, n \in N$ nömrələri üçün

$$E_n(m) = \bigcup_{k=n}^{\infty} \left\{ x : x \in X, |f_k(x) - f(x)| \geq \frac{1}{m} \right\}$$

çoxluqlarını təyin edək. $E_n(m) \in \mathcal{A}$ və $E_{n+1}(m) \subseteq E_n(m)$.

$f_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty, x \in X)$ olduğundan

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n(m) = \emptyset .$$

$\mu(X) < \infty$ şərtindən isə $\mu\big(E_n(\mu)\big) \to 0$ $(n \to \infty)$ olur. $\delta > 0$ isə k_m-i elə seçək ki,

$$\mu\left(E_{k_m}(m)\right) < {}^{\delta}/_{2^m}$$

olsun.

$E_\delta = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_{k_m}(m)$ çoxluğuna baxaq. Onda $E_\delta \in \mathcal{A}$ və $\mu(E_\delta) < \delta$ olur.

$x \notin E_\delta$ isə, $x \notin E_{k_m}(m)$ və deməli,

$$|f_k(x) - f(x)| \geq \frac{1}{m} , k \geq k_0 .$$

Deməli, $\{f_k\}$ ardıcıllığı E_δ-nın tamamlanmasında müntəzəm yığılır. ▫

3 . Tapşırıqlar

Aşağıdakı tapşırıqlarda $(R, \mathcal{B}(R), \lambda)$ ölçülən fəzası R həqiqi oxunun $\mathcal{B}(R)$ Borel çoxluqlar sistemində λ Lebeq ölçüsü təyin olumuş fəzadır. Bundan başqa $1 \leq p < \infty$.

1. Tutaq ki, $f_n = n^{-1/p}\chi_{[0,n]}$. Bu ardıcıllığın sıfır funksiyasına müntəzəm yığıldığını, lakin $L_p(R,\mathcal{B}(R),\lambda)$ mənada yığılmadığını göstərin.
2. Tutaq ki, $f_n = n\chi_{\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right]}$. Bu ardıcıllığın sıfır funksiyasına sanki hər yerdə yığıldığını, lakin $L_p(R,\mathcal{B}(R),\lambda)$ mənada yığılmadığını göstərin.
3. Göstərin ki, 1 və 2-dəki ardıcıllıqların hər biri öz limitlərinə ölçüyə görə yığılırlar.
4. Tutaq ki, $\{f_n\}$ ölçülən həqiqi funksiyalar ardıcıllığı müəyyən f funksiyasına sanki hər yerdə yığılır. Göstərin ki, $\{f_n\}$ ardıcıllığının $g(x)$ ölçülən həqiqi funksiyasına sanki hər yerdə yığılması üçün zoruri və kafi şərt $f \overset{s.h}{=} g$ olmasıdır.
5. İsbat edin ki, 4 tapşırığı ölçüyə görə yığılma halı üçün də doğrudur.
6. $\{f_n\}$ ardıcıllığı f funksiyasına və bu ardıcıllığın hər bir altardıcıllığı g funksiyasına sanki hər yerdə yığılırlarsa, $f \overset{s.h}{=} g$.
7. Tutaq ki, $f_n = n\chi_{[0,n]}$. Göstərin ki, Yeqorov teoremindəki əsas X çoxluğunun $\mu(X) < \infty$ şərtini atmaq olmaz.
8. Göstərin ki, Fatu lemmasında sanki hər yerdə yığılmanı ölçüyə görə yığılma ilə əvəz etmək olar.
9. Göstərin ki, Lebeqin majorant yığılma haqqındakı teoremində sanki hər yerdə yığılmanı ölçüyə görə yığılma ilə əvəz etmək olar.
10. Tutaq ki, $(X,\mathcal{A},\mu)$ ölçülən fəza və $\mu(X) < \infty$. f ölçülən funksiyası üçün

$$d(f) = \int_X \frac{|f|}{1+|f|}\,d\mu$$

işarə edək. Göstərin ki, $\{f_n\}$ ölçülən həqiqi funksiyalar ardıcıllığının f funksiyasına ölçüyə görə yığılması üçün zəruri və kafi şərt

$$d(f_n - f) \to 0 \ (n \to \infty)$$

olmasıdır.

11. Tutaq ki, $\{f_n\}$ ölçülən həqiqi funksiyalar ardıcıllığı f ölçülən funksiyasına sanki hər yerdə yığılır və $\varphi: R \to R$ kəsilməz funksiyadır.

    Onda $\{\varphi^\circ f_n\}$ ardıcıllığı $\varphi^\circ f$ funksiyasına sanki hər yerdə yığılır.
12. Göstərin ki, 11 tapşırığında φ funksiyasının kəsilməzliyini müntəzəm kəsilməzliklə və $\{f_n\}$ ardıcıllığının sanki hər yerdə yığılmasını sanki müntəzəm və ölçüyə görə yığılmalarla əvəz etmək olar.

VI Fəsil

Məhdud variasiyalı və mütləq kəsilməz funksiyalar

Bu fəsildə riyazi analiz kursundan məlum olan aşağıdakı mühüm bərabərliklərin Lebeq mənada cəmlənən funksiyalar üçün doğru olub olmamasını araşdıracağıq:

$$\int_a^x F'(t)dt = F(x) - F(a)\ \forall t \in [a,b], (1)$$

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)\,. (2)$$

Burada f funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməz, F isə bu parçada kəsilməz törəməsi olan funksiyadır.

Ümumiyyətlə,

$$\phi(x) = \int_a^x f(t)dt\ (3)$$

Lebeq inteqralının bir funksiya kimi yuxarı sərhədə görə xassələrini öyrənmək üçün bir vacib halı qeyd edək. Fərz edək ki, $f:[a,b] \to [0,\infty)$. Aydındır ki, bu halda $\phi(x)$ azalmayan funksiya olacaqdır. Digər tərəfdən hər bir cəmlənən funksiya iki mənfi olmayan cəmlənən funksiyanın fərqi şəklində göstərilə bildiyindən, yəni $f = f^+ - f^-$ olduğundan (3) inteqralı iki azalmayan funksiyanın fərqi şəklində göstərilir. Bu da o deməkdir ki, Lebeq inteqralının bir funksiya kimi yuxarı sərhədə nəzərən tədqiqi əvəzinə bu tip monoton funksiyanın öyrənilməsi kifayət ola bilər.

1 . Monoton funksiyalar

6.1.1. Tərif. $[a,b]$ parçasında təyin olunmuş f funksiyası istənilən $x_1 \le x_2$ üçün
$$f(x_1) \le f(x_2)$$
olarsa, ona azalmayan (monoton azalmayan) funksiya deyilir.

İndi tutaq ki, f həqiqi oxda təyin olunmuş funksiyadır. Əgər aşağıdakı limit
$$\lim_{h\to 0^+} f(x_0+h)\ (h \to 0^+ \Leftrightarrow h > 0 \text{ və } h \to 0)$$
varsa, ona f funksiyasının x_0 nöqtəsində sağ limiti deyilir və $f(x_0+0)$ kimi işarə edilir. Yəni
$$f(x_0+0) = \lim_{h\to 0^+} f(x_0+h)\,.$$

Analoji olaraq f funksiyasının x_0 nöqtəsində $f(x_0-0)$ sol limiti təyin edilir:
$$f(x_0-0) = \lim_{h\to 0^-} f(x_0-h)\,.$$
$f(x_0-0) = f(x_0+h)$ münasibəti f funksiyasının x_0 nöqtəsində ya kəsilməzliyini, ya da aradan qaldırıla bilən kəsilənliyə malik olduğunu göstərir. Sağ və sol limitlərin varlığı şərtilə
$$f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$$
olduqda, x_0 nöqtəsinə 1-ci cins kəsilmə nöqtəsi deyilir. $f(x_0-0) - f(x_0+0)$ fərqinə isə f funksiyasının x_0 nöqtəsində sıçrayışı deyilir. $f(x_0) = f(x_0-0)$ olarsa, f funksiyasına x_0 nöqtəsində soldan kəsilməz, $f(x_0) = f(x_0+0)$ olduqda isə bu funksiyaya x_0 nöqtəsində sağdan kəsilməz funksiya deyilir.

Monoton funksiyanın bəzi əsas xassələrini qeyd edək. Ümumiliyi pozmadan azalmayan funksiyaya diqqət yetirəcəyik.

6.1.2. Teorem. $[a,b]$ parçasında təyin olunmuş hər bir azalmayan f funksiyası ölçülən və məhdud funksiyadır. Başqa sözlə, bu cür funksiya cəmlənəndir.

İsbatı. f azalmayan funksiya olduğundan

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b).$$

Bundan başqa, ixtiyari c sabit ədədi üçün

$$A_c = \{x: f(x) < c\}$$

çoxluğu ya parça, ya yarım interval olur (boş çoxluq da ola bilər). Tutaq ki, $A_c \neq \emptyset$ və $d = \sup A_c$. Onda A_c ya $[a,d]$ parçası, yaxud da $[a,d)$ yarım intervalı olacaqdır. □

6.1.3. Teorem. Monoton funksiya, ancaq 1-ci cins kəsilmə nöqtələrinə malik ola bilər.

İsbatı. Tutaq ki, $x_0 \in [a,b]$ və $x_n \to x_0$, $x_n < x_0$. Onda

$$f(a) < f(x_n) < f(b)$$

(ümumiliyi pozmadan f-i azalmayan qəbul etmişik). Yəni $\{f(x_n)\}$ ardıcıllığı aşağıdan və yuxarıdan məhduddur. Buna görə də bu ardıcıllıq heç olmazsa bir limit nöqtəsinə malikdir. Digər tərəfdən monoton ardıcıllığın bir neçə limit nöqtəsinə malik olması mümkün deyil. Deməli, $f(x_0 - 0)$ vardır. Eyni qayda üzrə göstərilir ki, $f(x_0 + 0)$ sağ limit də vardır. □

6.1.4. Teorem. Monoton funksiyanın kəsilmə nöqtələri ən çoxu hesabi çoxluq təşkil edir.

İsbatı. Doğrudan da f monoton funksiyanın $[a,b]$ parçasında istənilən sonlu sayda sıçrayışlarının cəmi $f(a) - f(b)$ ədədini aşmır. Deməli, istənilən n ədədi üçün qiyməti $\frac{1}{n}$-dən böyük olan sıçrayışların sayı sonludur. Onda sıçrayışların ümumi sayı sonlu və ya hesabi olacaqdır. □

6.1.5. Tərif. Tutaq ki, $x_n \in [a,b]$ $(n = 1, 2, \dots)$ və hər bir x_n nöqtəsinə

$$\sum_{n} h_n < \infty \ (4)$$

şərtini ödəyən $h_n > 0$ ədədi cavab verir. $[a, b]$ parçasında təyin olunmuş

$$h(x) = \sum_{x_n < x} h_n$$

funksiyasına sıçrayış funksiyası deyilir. Bu funksiyanın bəzi xassələrini qeyd edək.

1^0. $h(x)$ monoton azalmayan funksiyadır.

2^0. $h(x)$ hər bir $x \in [a, b]$ nöqtəsində soldan kəsilməzdir.

1^0 xassəsi aşkardır. 2^0 xassəsinin doğru olduğunu göstərək.

Qeyd edək ki, h funksiyasını

$$h(x) = \sum_{x_n \leq x} h_n$$

kimi təyin etsək, o sağdan kəsilməz funksiya olacaqdır.

İndi (4) şərti ilə təyin olunmuş $h(x)$ funksiyasını araşdırsaq,

$$h(x - 0) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} h(x - \varepsilon) = \lim \sum_{x_n < x - \varepsilon} h_n \qquad (5)$$

olduğunu görərik.

Digər tərəfdən $x_n < x$ isə kifayət qədər kiçik $\varepsilon > 0$ ədədi üçün $x_n < x - \varepsilon$ münasibəti də ödənəcəkdir. Buna görə də (5) münasibətinə görə

$$h(x - 0) = \lim \sum_{x_n < x} h_n = h(x)$$

olacaqdır. Bu isə 2^0 xassəsinin doğruluğunu göstərir. Əgər x nöqtəsi x_n nöqtələrindən biri ilə üst-üstə düşərsə, məsələn, $x = x_{n_0}$ olarsa,

$$h(x_{n_0}+0)=\lim_{\varepsilon\to 0^+} h(x+\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\sum_{x_n<x_{n_0}+\varepsilon} h_n =$$

$$=\sum_{x_n\le x} h_n \qquad (6)$$

(5) və (6)-ya görə

$$h(x_{n_0}+0)-h(x_{n_0}-0)=h_{n_0}.$$

Bu axırıncı isə o deməkdir ki, $h(x)$ funksiyasının kəsilmə nöqtələri çoxluğu $\{x_n\}$ çoxluğu ilə üst-üstə düşür və x_n nöqtəsində onun sıçrayışı h_n-ə bərabərdir.

Aydındır ki, istənilən n nömrəsi üçün $x\neq x_n$ olarsa, x nöqtəsində h sıçrayış funksiyası kəsilməzdir (isbat edin).

Bəzi misallara baxaq.

a) Kəsilmə nöqtələrini $x_1<x_2<\cdots<x_n<$ kimi düzdükdə, bu kəsilmə nöqtələrinə malik pilləvari funksiya sıçrayış funksiyasıdır.

b) Tutaq ki, $\{x_n\}$ çoxluğu $[a,b]$ parçasındakı bütün rasional nöqtələrindən ibarətdir. $h_n={}^1/_{2^n}$ olduqda

$$h(x)=\sum_{x_n<x}\frac{1}{2^n} \qquad (7)$$

funksiyası sıçrayış funksiyasıdır. Göstərmək olar ki, bu funksiya rasional nöqtələrdə kəsilən, irrasional nöqtələrdə isə kəsilməzdir. Bir mühüm teoremi qeyd edək.

6.1.6. Teorem. Soldan kəsilməz hər bir monoton (azalmayan) funksiyanı kəsilməz monoton funksiya və (soldan kəsilməz) sıçrayış funksiyasının cəmi şəklində göstərmək olar. Bu ayrılış yeganədir.

İsbatı. Tutaq ki, f soldan kəsilməz azalmayan funksiya, $x_1,x_2,\dots,x_n,\dots$ bu funksiyanın kəsilmə nöqtələri və $h_1,h_2,\dots,h_n,\dots$ onun bu nöqtələrdə sıçrayışlarıdır.

$$H(x) = \sum_{x_n < x} h_n$$

olsun. Aydındır ki, $\varphi = f - H$ azalmayan kəsilməz funksiyadır. Doğrudan da, $x' < x''$ üçün

$$\varphi(x'') - \varphi(x') = [f(x'') - f(x')] - [H(x'') - H(x')] .$$

Bu ifadənin sağ tərəfi $[x', x'']$ parçasında f funksiyasının tam artımı ilə onun bu parçadakı sıçrayışlarının cəminin fərqindən ibarətdir. Bu ifadə mənfi deyildir, yəni

$$\varphi(x'') - \varphi(x') \geq 0 .$$

Başqa sözlə, φ funksiyası azalmayandır. İndi tutaq ki, x ixtiyari nöqtədir. Onda

$$\varphi(x-0) = f(x-0) - H(x-0) = f(x-0) - \sum_{x_n < x} h_n,$$

$$\varphi(x+0) = f(x+0) - H(x+0) = f(x+0) - \sum_{x_n < x} h_n .$$

Deməli,

$$\varphi(x+0) - \varphi(x-0) = f(x+0) - f(x) - h' = 0 .$$

Burada h' ədədi H funksiyasının x nöqtəsində sıçrayışıdır. f və H soldan kəsilməz olduqlarından (6) münasibəti φ funksiyasının kəsilməzliyini göstərir. □

2 . Monoton funksiyanın diferensiallanması

Monoton funksiyanın törəməsinin varlığını araşdıraq. Bunun üçün bəzi mühüm anlayışları təyin edək.

Məlumdur ki, f funksiyasının x_0 nöqtəsində törəməsi $x \to x_0$ olduqda

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1)$$

nisbətinin limiti ilə təyin olunur. Bu limit olmaya da bilər. Ancaq aşağıdakı kimi təyin olunan 4 kəmiyyətin həmişə mənası vardır. Bu kəmiyyətlər sonsuz qiymətlər də ala bilərlər.

6.2.1. Tərif. Tutaq ki, $f: [a,b] \to R$.

$$\mathcal{D}^{+} f(x_0) = \lim_{\delta \to 0^{+}} \sup \left\{ \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} : x_0 < y < x_0 + \delta \right\}$$

ədədinə (yuxarı limitə) f funksiyasının $x_0 \in [a,b)$ nöqtəsində yuxarı sağ törəməsi,

$$\mathcal{D}_{+} f(x_0) = \lim_{\delta \to 0^{+}} \inf \left\{ \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} : x_0 < y < x_0 + \delta \right\}$$

ədədinə (aşağı limitə) isə f funksiyasının aşağı sağ törəməsi deyilir. Oxşar olaraq, yuxarı sol və aşağı sol törəmələri də təyin olunur.

$$\mathcal{D}^{-} f(x_0) = \lim_{\delta \to 0^{+}} \sup \left\{ \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} : x_0 - \delta < y < x \right\},$$

$$\mathcal{D}_{-} f(x_0) = \lim_{\delta \to 0^{+}} \inf \left\{ \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} : x_0 - \delta < y < x \right\}$$

ədədlərinə isə f funksiyasının x_0 nöqtəsində ($x_0 \in [a,b)$) uyğun olaraq yuxarı sol törəməsi və aşağı sol törəməsi deyilir.

Oxucuya funksiyanın bir tərəfli törəmələri məlumdur.

$$\mathcal{D}^{+} f(x_0) = \mathcal{D}_{+} f(x_0)$$

olduqda f funksiyasının x_0 nöqtəsində sağ törəməsi vardır. Bu da aydındır ki, funksiyanın hər hansı bir nöqtədə bir tərəfli törəmələrinin varlığından onun bu nöqtədə diferensiallanan olması çıxmır. Məsələn, $f(x) = |x|$ funksiyası $x_0 = 0$ nöqtəsində diferensiallanan deyil. Lakin

$$f'(0-0) = -1 \, , f'(0+0) = 1 \, .$$

$F(x) = \begin{cases} x sin(1/x), əgər\ x \neq 0 \\ 0\, , əgər\ x = 0 \end{cases}$ funksiyasına baxaq.

Burada $x_0 = 0$. $\mathcal{D}^+F(0) = 1$. $\mathcal{D}^-F(0) = -1$ və hər bir x üçün

$$\mathcal{D}_+F(x) \le \mathcal{D}^+F(x)\,,$$
$$\mathcal{D}_-F(x) \le \mathcal{D}^-F(x)\,.$$

İndi əsas məqsədimizi ifadə edən teoremi qeyd edək.

6.2.2. Teorem (*Lebeq*). $[a,b]$ parçasında təyin olunmuş azalmayan f funksiyasının bu parçada sanki hər yerdə sonlu törəməsi vardır.

Bu teoremin isbatı Vitali lemması adlandırılan bir lemmaya əsaslanır. Əvvəlcə bir anlayış daxil edək.

6.2.3. Tərif. Tutaq ki, $E \subseteq R$ və $\mathcal{J}$ müəyyən intervallardan ibarət ailədir. Hər bir $x \in E$ və $\varepsilon > 0$ üçün

$$\mu(\mathrm{I}) < \varepsilon$$

və $x \in \mathrm{I}$ şərtlərini ödəyən $\mathrm{I} \in \mathcal{J}$ intervalı varsa, $\mathcal{J}$ ailəsinə E çoxluğunun Vitali örtüyü deyilir.

6.2.4. Lemma (*Vitali örtüyü haqqında*). Tutaq ki, $E \subseteq R$ və $\mu^*(E) < \infty$. $\mathcal{J}$ ailəsi E çoxluğunun Vitali örtüyüdürsə, onda hər bir $\varepsilon > 0$ üçün $\mathcal{J}$ ailəsində elə sonlu sayda dizyunkt $\{\mathrm{I}_k : 1 \le k \le n\}$ intervallar küllisi vardır ki,

$$\mu^*\left(E \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{I}_k\right) < \varepsilon\,.$$

Əlavə $\mathcal{J}$ ailəsində elə $\{\mathrm{I}_k\}$ (dizyunkt) intervallar ardıcıllığı vardır ki,

$$\mu^*\left(E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{I}_k\right) = 0\,.$$

İsbatı. Ümumiliyi pozmadan $\mathcal{J}$ ailəsinin hər bir I elementini qapalı və ölçüsü sonlu olan elə açıq V çoxluğunun varlığını qəbul etmək olar ki, $\mathrm{I} \subset V$ olsun.

Tutaq ki, $I_1, I_2, \ldots, I_n \in \mathfrak{I}$ və $I_m \cap I_n = \emptyset, m \neq n$. $E \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ olarsa, teoremi isbat olunmuş hesab etmək olar. Belə olmasa,

$$\mathfrak{I}_n = \left\{ I : I \in, I \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} I_k \right) = \emptyset \right\},$$

$$\alpha_n = \sup\{\mu(I) : I \in \mathfrak{I}_n\}$$

qəbul edək.

$\bigcup_{k=1}^{n} I_k$ qapalı çoxluq olduğundan, $\mathfrak{I}_n \neq \emptyset$ və deməli, $\alpha_n > 0$. $I_{n+1} \in \mathfrak{I}_n$ elə seçək ki, $\mu(I_{n+1}) > \alpha_n/2$ olsun. Bu prosesi davam etdirək. Bu halda ya müəyyən n nömrəsi üçün

$$E \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} I_k$$

olacaqdır ki, bu da teoremin isbatı deməkdir. Yaxud da $\mathfrak{I}$ ailəsinin dizyunkt parçalardan ibarət $\{I_k\}$ ardıcıllığını təyin edəcəyik. Bu halda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} I_k \right) \leq \mu(V) < \infty$$

olduğundan

$$\lim_{k \to \infty} \mu(I_k) = 0$$

və müəyyən n nömrəsi üçün

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(I_k) < \frac{\varepsilon}{5} \; (\varepsilon > 0)$$

olacaqdır.

$A = E \setminus \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ işarə edək. Göstərək ki, $\mu^*(A) < \varepsilon$. Hər bir $k > n$ üçün $\mathfrak{I}_k$ ilə parçasının mərkəzi ilə üst-üstə düşən və $\mu(\mathfrak{I}_k) = 5\mu(I_k)$ (burada μ parçanın uzunluğudur) olan parçanı işarə edək. Onda

$$\mu\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} \mathcal{I}_k\right) \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(\mathcal{I}_k) = \sum_{k=n+1}^{\infty} 5\mu(\mathrm{I}_k) < \varepsilon.$$

Lemmanın isbatı üçün

$$A \subseteq \bigcup_{k=n+1}^{\infty} \mathrm{I}_k$$

olduğunu göstərmək kifayətdir.

Tutaq ki, $x \in A$. $\mathcal{I}$ ailəsi E çoxluğu üçün Vitali örtüyü olduğundan elə $\mathrm{I}_x \in \mathcal{I}$ parçası vardır ki, $x \in \mathrm{I}_x$. Müəyyən $k > n$ üçün $\mathrm{I}_x \cap \mathrm{I}_k \neq \emptyset$. Doğrudan da belə olmasa bütün k nömrələri üçün $\alpha_k \ge \mu(\mathrm{I}_x)$ olacaqdır ki, bu da

$$0 \le \lim_{k\to\infty} \alpha_k \le \lim_{k\to\infty} 2\mu(\mathrm{I}_{k+1}) = 0$$

faktına ziddir.

Tutaq ki, m elə kiçik nömrədir ki, $\mathrm{I}_x \cap \mathrm{I}_m \neq 0$ və $m > n$. $\mathrm{I}_x \in \mathcal{I}_{m-1}$ olduğundan

$$\mu(\mathrm{I}_x) \le \alpha_{m-1} < 2\mu(\mathrm{I}_m).$$

c I_m parçasının mərkəzi isə

$$|x - c| \le \mu(\mathrm{I}_x) + 0.5\mu(\mathrm{I}_m) < 2.5\mu(\mathrm{I}_m)$$

olur. Bu da o deməkdir ki, $x \in \mathcal{I}_m$. Bu isə lemmanın ilk hökmünün doğruluğunu göstərir.

Yuxarıdakı mühakiməyə görə

$$E \backslash \bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{I}_k \subseteq \bigcup_{k=n+1}^{\infty} \mathcal{I}_k$$

olduğundan

$$\mu^*\left(E \backslash \bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{I}_k\right) \le \mu\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} \mathcal{I}_k\right) \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(\mathcal{I}_k)$$

olur. Sonuncu münasibət istənilən n nömrəsi üçün doğrudur. $\sum_{k=n}^{\infty} \mu(\mathcal{I}_k)$ sırası yığıldığından $E \backslash \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{I}_k$ çoxluğunun ölçüsü sıfır olacaqdır. Bununla da teorem isbat olundu. □

İndi Vitali örtüyü haqqındakı lemmanın köməkliyi ilə yuxarıda qeyd etdiyimiz Lebeq teoremini isbat edə bilərik.

Bunun üçün aşağıdakı lemmanı da isbat edək.

6.2.5. Lemma. Tutaq ki, f $[a,b]$ parçasında azalmayan funksiyadır. Onda $[a,b]$ parçasında sanki hər yerdə bütün dörd $\mathcal{D}^+ f(x), \mathcal{D}_+ f(x)$ və $\mathcal{D}^- f(x), \mathcal{D}_- f(x)$ törəmələri vardır.

İsbatı. Qeyd olunan törəmələr mənfi olmadıqlarından sanki hər yerdə $[a,b]$ parçasında $\mathcal{D}^+ f(x) < \infty$ və $\mathcal{D}^- f(x) < 0$ olduğunu göstərmək kifayətdir. Bunun üçün $\mathcal{D}^+ f$ törəməsinə baxacağıq. Digər halların isbatı buna oxşardır. Tutaq ki,

$$A = \{x : x \in [a,b) : \mathcal{D}^+ f(x) = \infty\}$$

və $\mu^*(A) = \alpha > 0$.

$M > 0$ ədədini elə seçək ki, $M\,{}^{\alpha}/_{2} > f(b) - f(a)$ olsun.

Hər bir $x \in A$ üçün elə azalan $\{y_n^x\}$ ardıcıllığı vardır ki, $y_n^x \to x\ (n \to \infty)$ və

$$\frac{f(y_n^x) - f(x)}{y_n^x - x} \geq M\ (\forall n)$$

olur. Asanca görmək olar ki,

$$\{[x, y_n^x] : x \in A, n > 0 \text{ tam ədədlərdir}\}$$

küllisi A çoxluğunun Vitali örtüyüdür. Onda Vitali örtüyü haqqındakı lemmaya əsasən elə dizyunkt $\{[x_i, y_i] : 1 \leq i \leq n\}$ parçalar küllisi vardır ki,

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) > {}^{\alpha}/_{2}.$$

Lakin onda

$$\sum_{i=1}^{n} \big(f(y_i) - f(x_i)\big) \geq \sum_{i=1}^{n} M(y_i - x_i) > M \cdot {}^{\alpha}/_{2} >> f(b) - f(a)$$

olcaqdır ki, bu da ziddiyət təşkil edir. Deməli, $\mu^*(A) = 0$. □

İndi Lebeq teoremini isbat edə bilərik.

6.2.2. Lebeq teoreminin isbatı. Aydındır ki, f funksiyasının diferensiallanan ola bilməsi üçün qeyd olunan dörd törəmə sonlu və bərabər olmalıdır. Bunun üçün əvvəlki lemmaya əsasən bu dörd törəmənin sanki hər yerdə bərabər olmasını göstərmək kifayətdir. Biz göstərəcəyik ki,

$$A = \{x: x \in (a,b), \mathcal{D}_+ f(x) < \mathcal{D}^+ f(x)\}$$

çoxluğunun ölçüsü sıfırdır. Digər törəmələrin uyğun kombinasiyaları üçün isbat oxşardır. Tutaq ki, $\mu^*(A) > 0$. Onda elə p və q rasional ədədləri vardır ki,

$$B = \{x: x \in A, \mathcal{D}_+ f(x) < p < q < \mathcal{D}^+ f(x)\}$$

çoxluğunun xarici ölçüsü, yəni $\mu^*(B) = \beta > 0$ olacaqdır. Tutaq ki, $\varepsilon > 0$. Onda elə $V \subseteq (a,b)$ açıq çoxluğu vardır ki, $B \subseteq V$ və $\mu(V) < \mu + \varepsilon$ (isbat edin). Hər bir $x \in B$ və n nömrəsi üçün elə y_n^x vardır ki, $x < y_n^x < x + 1/n$, $[x, y_n^x] \subseteq V$ və

$$\frac{f(y_n^x) - f(x)}{y_n^x - x} < p .$$

Aydındır ki, $\{[x, y_n^x]: x \in B, n > 0\}$ küllisi B çoxluğu üçün Vitali örtüyüdür. Vitali örtüyü haqqındakı lemmaya əsasən bu cür parçaların elə dizyunkt $\{[x_i, y_i]: 1 \le i \le m\}$ küllisi vardır ki,

$$\mu^*\left(B \setminus \bigcup_{i=1}^{m} [x_i, y_i]\right) < \varepsilon .$$

Buradan isə

$$\sum_{i=1}^{m} \left(f(y_i) - f(x_i)\right) < p \sum_{i=1}^{m} (y_i - x_i) \le p\mu(V) < p(\beta + \varepsilon)$$

olur.

Tutaq ki, $C = B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{m} (x_i, y_i)\right)$ və qeyd edək ki, $\mu^*(C) > \beta - \varepsilon$. Hər bir $u \in C$ və n nömrəsi üçün elə v_n^u vardır ki, müəyyən i nömrəsi üçün

$$u < v_n^u < u + 1/n \ , [u, v_n^u] \subseteq (x_i, y_i)$$

və

$$\frac{f(v_n^u) - f(u)}{v_n^u - u} > q$$

olur.

$\{[u, v_n^u]: u \in C, n > 0\}$ küllisi C çoxluğunun Vitali örtüyüdür. Vitali örtüyü haqqındakı lemmaya əsasən bu cür intervalların elə dizyunkt $\{[u_j, v_j]: 1 \le j \le n\}$ küllisi vardır ki,

$$\sum_{j=1}^{n}(v_j - u_j) > \mu^*(C) - \varepsilon$$

olur. Bu halda

$$\sum_{j=1}^{n}\left(f(v_j) - f(u_j)\right) > q\sum_{j=1}^{n}(v_j - u_j) > q(\mu^*(C) - \varepsilon) >$$

$$> q(\beta - 2\varepsilon)\,.$$

Hər bir $1 \le i \le m$ üçün $\pi_i = \{j: [u_j, v_j] \subseteq (x_i, y_i)\}$ işarə edək. f azalmayan funksiya olduğundan

$$q(\beta - 2\varepsilon) < \sum_{j=1}^{n}\left(f(v_j) - f(u_j)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in\pi_i}\left(f(v_j) - f(u_j)\right) \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{m}\left(f(y_i) - f(x_i)\right) < p(\beta + \varepsilon)$$

olur. $\varepsilon > 0$ ixtiyari olduğundan $q\beta \le p\beta$ olur ki, bu da $p < q$ şərtinə ziddir. Teorem isbat olundu. □

3 . Məhdud variasiyalı funksiyalar

Əvvəllər qeyd etdiyimiz kimi Lebeq inteqralının yuxarı sərhədə görə diferensiallanması monoton funksiyaların fərqi şəklində göstərilən funksiyalar sinifinin öyrənilməsinə gətirib çıxarır. İndi bu funksiyalar sinifini monotonluq anlayışına əsaslanmadan öyrənəcəyik.

6.3.1 Tərif. Tutaq ki, f funksiyası $[a,b]$ parçasında təyin olunmuşdur. $[a,b]$ parçasını

$$a = c_0 < d_0 < c_1 < d_1 \dots < c_n < d_n = b$$

nöqtələri ilə nə cür bölünməsindən asılı olmayaraq

$$\sum_{k=1}^{n} |f(d_i) - f(c_i)| \leq C \qquad (1)$$

bərabərsizliyini ödəyən C ədədi varsa, f funksiyasına məhdud variasiyalı (məhdud dəyişən) funksiya deyilir.

Aydındır ki, monoton funksiya məhdud variasiyalıdır. Çünki (1)-in sol tərəfi bölmənin seçimindən asılı deyildir və $f(b) - f(a)$ -ya bərabərdir. Həmçinin məhdud variasiyalı funksiya məhduddur.

6.3.2. Tərif. Tutaq ki, f məhdud variasiyalı funksiyadır. $[a,b]$ parçasının bütün mümkün sonlu bölünmələri üzrə (1) cəminin dəqiq yuxarı sərhədinə f funksiyasının tam variasiyası (tam dəyişməsi) deyilir və

$$V(f,[a,b]) = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} |f(d_i) - f(c_i)|\right\}$$

kimi işarə olunur. Xüsusi halda, f funksiyası bütün həqiqi oxda təyin olunmuşsa, $\{V(f,[a,b])\}$ küllisi məhdud olduqda f funksiyasına məhdud variasiyalı funksiya deyilir və

$$\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}} V(f,[a,b]) = V\big(f,(-\infty,\infty)\big)$$

ədədinə f funksiyasının $(-\infty,\infty)$-da tam variasiyası deyilir. Tam variasiyalı funksiyanın bəzi xassələrini qeyd edək.

6.3.3. $[a,b]$ parçasında təyin olunmuş f funksiyasının tam variasiyası aşağıdakı xassələrə malikdir:

1) istənilən α sabit ədədi üçün

$$V(\alpha f,[a,b]) = |\alpha| V(f,[a,b])\,.$$

2) f və g funksiyaları məhdud variasiyalı isə $f+g$ funksiyaları da məhdud variasiyalıdır və

$$V(f+g,[a,b]) \le V(f,[a,b]) + V(g,[a,b])\,.$$

3) $a<c<b$ isə

$$V(f,[a,c]) + V(f,[c,b]) = V(g,[a,b])\,.$$

4) $v(x) = V(f,[a,x])$ funksiyası monoton azalmayandır.

5) f funksiyası x_0 nöqtəsində soldan kəsilməz isə v funksiyası da həmin nöqtədə soldan kəsilməzdir.

1)-in isbatı bilavasitə $V(f,[a,b])$-nin tərifindən alınır.

2) xassəsinin isbatı $[a,b]$ parçasının hər bir bölgüsü üçün doğru olan

$$\sum_i |f(d_i)+g(d_i)-f(c_i)-g(c_i)| \le$$
$$\le \sum_i |f(d_i)-f(c_i)| + \sum_i |g(d_i)-g(c_i)|$$

münasibətindən və

$$\sup(A+B) \le \sup A + \sup B$$

bərabərsizliyindən alınır.

1) və 2) xassələri göstərir ki, monoton funksiyalardan fərqli olaraq məhdud variasiyalı funksiyalar çoxluğu xətti fəza təşkil edir.

3) xassəsini isbat etmək üçün əvvəlcə fərz edək ki, c nöqtəsi $[a,b]$ parçasının bölgü nöqtələrindən biridir, məsələn, $c_r = c$. Onda

$$\sum_{i=1}^{n}|f(d_i)-f(c_i)|=\sum_{i=1}^{r}|f(d_i)-f(c_i)|+$$

$$+\sum_{i=r+1}^{r}|f(d_i)-f(c_i)|\le V(f,[a,c])+V(f,[c,d]). \quad (2)$$

İndi $[a,b]$ parçasının ixtiyari sonlu bölgüsünə baxaq. Aydındır ki, bölgü nöqtələrinə daha bir bölgü nöqtəsinin əlavə olunması (1) cəminin artmasına səbəb ola bilər. Buna görə də (2) bərabərsizliyi $[a,b]$ parçasının ixtiyari bölgüsü üçün də doğrudur. Yəni

$$V_a^b(f,[a,b])\le V(f,[a,c])+V(f,[c,b]). \quad (3)$$

Digər tərəfdən, istənilən $\varepsilon>0$ ədədi üçün $[a,c]$ $[c,b]$ parçalarının elə bölgüləri vardır ki,

$$\sum_i\left|f\left(d_i'\right)-f(c_i')\right|>V(f,[a,c])-\frac{\varepsilon}{2}$$

və

$$\sum_j\left|f\left(d_j''\right)-f(c_j'')\right|>V(f,[c,b])-\frac{\varepsilon}{2}$$

olacaqdır. Bu iki bölgünü birləşdirsək, $[a,b]$ parçasının yeni bölgüsünü alarıq ki,

$$\sum_{i=1}^{n}|f(d_i)-f(c_i)|=\sum_i\left|f\left(d_i'\right)-f(c_i')\right|+$$

$$+\sum_j\left|f\left(d_j''\right)-f\left(c_j''\right)\right|>V(f,[a,c])+V(f,[c,b])-\varepsilon$$

olar. $\varepsilon>0$ ixtiyari olduğundan

$$V(f,[a,b])\ge V(f,[a,c])+V(f,[c,b]) \quad (4)$$

olar. (3) və (4) 3) xassəsini isbat etmiş olur.

İxtiyari parçada istənilən funksiyanın tam variasiyası mənfi olmadığından 3) xassəsindən 4) xassəsi alınır.

İndi 5) xassəsini isbat edək. Tutaq ki, $\varepsilon > 0$. $\delta > 0$ elə seçək ki, $x_0 - \delta < x \le x_0$ olduqda

$$|f(x_0) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olsun. $[a, x_0]$ parçasının elə bölgüsünə baxaq ki,

$$V(f, [a, x_0]) - \sum_{i=1}^{n} |f(d_i) - f(c_i)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (5)$$

olsun. Burada $x_0 - c_n < \delta$ qəbul edə bilərik (əks halda bölgüyə bir nöqtə də artıra bilərik ki, bu da (5) münasibətinin sol tərəfindəki fərqi, ancaq azalda bilər). Buna görə də

$$|f(x_0) - f(c_n)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olar. Deməli,

$$V(f, [a, x_0]) - \sum_{i=1}^{n-1} |f(d_i) - f(c_i)| < \varepsilon .$$

Buradan isə

$$V(f, [a, x_0]) - V(f, [a, c_n]) < \varepsilon$$

olur. Bu isə

$$\mathcal{V}(x_0) - \mathcal{V}(c_n) < \varepsilon$$

deməkdir. $\mathcal{V}$ monoton azalmayan funksiya olduğundan $c_n \le x \le x_0$ şərtini ödəyən bütün x-lər üçün

$$\mathcal{V}(x_0) - \mathcal{V}(x) < \varepsilon$$

deməkdir. Başqa sözlə, $\mathcal{V}$ funksiyası x_0 nöqtəsində soldan kəsilməzdir.

f x_0 nöqtəsində sağdan kəsilməz isə analoji olaraq göstərmək olar ki, $\mathcal{V}$ funksiyası da bu nöqtədə sağdan kəsilməzdir. Ümumiyyətlə, f $[a, b]$ parçasının hər hansı nöqtəsində (yaxud bütün $[a, b]$-də) kəsilməz isə $\mathcal{V}$ funksiyası da bu cür kəsilməzdir.

Aşağıdakı teorem də maraq doğurur.

6.3.4. Teorem. Məhdud variasiyalı hər bir funksiya iki monoton azalmayan funksiyanın fərqi şəklində göstərilir.

İsbatı. Tutaq ki, f $[a,b]$ parçasında ixtiyari məhdud variasiyalı funksiya və v onun $[a,x]$ parçasındakı tam variasiyasıdır.

$$\varphi = v - f$$

funksiyasına baxaq. Bu funksiya azalmayan funksiyadır. Doğrudan da, $x' \le x''$ isə

$$\varphi(x'') - \varphi(x') = [v(x'') - v(x')] - [f(x'') - f(x')] \quad (6)$$

olur. Digər tərəfdən

$$|f(x'') - f(x')| \le v(x'') - v(x') = V(f,[x',x''])$$

olduğundan (6)-nın sağ tərəfi və buna görə də sol tərəfi mənfi deyildir. Yəni $f = v - \varphi$. v və φ funksiyaları azalmayan funksiyalardır.

Bunun tərsi də doğrudur. Doğrudan da iki monoton funksiyanın fərqi şəklində göstərilən hər bir funksiya məhdud variasiyalıdır. Deməli, əvvəlki paraqrafda öyrəndiyimiz iki monoton funksiyanın fərqi şəklində göstərilən funksiyalar sinifi məhdud variasiyalı funksiyalar sinifi ilə üst-üstə düşür.

6.3.4. teoremindən və monoton funksiyanın törəməsinin varlığı haqqındakı Lebeq teoremindən bilavasitə aşağıdakı teorem alınır.

6.3.5. Teorem. Məhdud variasiyalı hər bir funksiya sanki hər yerdə sonlu törəməyə malikdir.

4 . Törəməsinə görə funksiyanın təyini Mütləq kəsilməz funksiyalar

Bundan əvvəlki mühakimələr bu fəsilin əvvəlində qarşıya qoyduğumuz iki məsələdən biri, yəni istənilən cəmlənən funksiya üçün $[a,b]$ parçasında

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \ (sanki \ hər \ yerdə)$$

bərabərliyi isbat olundu.

İndi elementar analizdən kəsilməz diferensiallanan funksiyalar üçün məlum fundamental Nyuton-Leybnis düsturunun Lebeq inteqralı halına ümumiləşməsi ilə məşğul olaq:

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt \,. \tag{1}$$

Aydındır ki, sanki hər yerdə diferensiallanan F funksiyalarından istifadə etməliyik (çünki, əks halda (1)-in mənası olmaz). Bu da məlumdur ki, məhdud variasiyalı funksiyalar belə funksiyalardandır. Digər tərəfdən, (1)-in sağ tərəfində duran funksiya məhdud variasiyalıdır. Buna görə də daha geniş siniflərə baxa bilmərik. Məhdud variasiyalı hər bir funksiya iki azalmayan funksiyanın fərqi şəklində göstərildiyindən diqqəti monoton funksiyalara yönəldəcəyik. Lakin (1) bərabərliyi istənilən monoton funksiya üçün doğru olmaya da bilər. Ancaq aşağıdakı teorem maraq kəsb edir.

6.4.1. Teorem. Monoton azalmayan F funksiyasının F' törəməsi cəmlənəndir və

$$\int_a^b F'dx \le F(b) - F(a) \,. \tag{2}$$

İsbatı. Tərifə görə, F funksiyasının x nöqtəsində törəməsi

$$\varphi_h(x) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \quad (3)$$

nisbətinin $h \to 0$ olduqda limitidir. Aydındır ki, $F(x+h)$ -ın mənası olması üçün $x > b$ olduqda $F(x) = F(b)$ və $x < a$ olduqda isə $F(x) = F(a)$ qəbul etmək lazımdır.

f-in monotonluğundan onun cəmlənən olması alınır. Deməli, φ_h funksiyası da hər bir h üçün cəmlənəndir. Buna görə də (3) bərabərliyini inteqrallamaq olar.

$$\int_a^b \varphi_h(x)\,dx = \frac{1}{h}\int_a^b F(x+h)dx - \frac{1}{h}\int_a^b f(x)dx =$$

$$= \frac{1}{h}\int_b^{b+h} F(x)dx - \frac{1}{h}\int_a^{a+h} F(x)dx\,.$$

Sonuncu bərabərliyin sağ tərəfi $h \to 0^+$ olduqda $F(b) - F(a+0)$ ədədinə yaxınlaşır (bunu göstərin) .

Fatu lemmasını tətbiq etsək, f'-in inteqralının varlığını və

$$\int_a^b F'(x)\,dx \le \varliminf_{h\to 0}\int_a^b \varphi_n(x)dx = F(b) - F(a+0) \le\le F(b) - F(a)$$

olduğunu görərik. □

Misal göstərmək olar ki, (2) bərabərsizliyi ciddi bərabərsizliyə çevrilə bilər.

Misal.

$$F(x) = \begin{cases} 0, əgər\ 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ 1, əgər\ \dfrac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}.$$

Qeyd edək ki, (2) bərabərsizliyini ciddi bərabərsizliyə çevirən kəsilməz monoton funksiyalar da var (Kantor pilləkanı).

(1) bərabərliyini təmin edən f funksiyalar sinifini təyin edək.

6.4.2. Tərif. Tutaq ki, f funksiyası $[a,b]$ parçasında təyin olunmuşdur. İstənilən $\varepsilon > 0$ ədədinə görə elə $\delta > 0$ ədədi varsa ki, $[a,b]$ parçasının cüt-cüt kəsişməyən və

$$\sum_{i=1}^{n}(d_i - c_i) < \delta$$

şərtini ödəyən (c_i, d_i) intervalları üçün

$$\sum_{i=1}^{n}|f(d_i) - f(c_i)| < \varepsilon$$

olarsa, f funksiyasına mütləq kəsilməz funksiya deyilir.

Aydındır ki, məhdud variasiyalı funksiya məhdud və mütləq kəsilməz funksiya müntəzəm kəsilməzdir. Bu faktların tərsi doğru olmaya da bilər. $[0;1]$ parçasında Q rasional ədədlər çoxluğuna baxaq. Bu çoxluğun χ_Q xarakteristik funksiyasını araşdıraq.

Qeyd edək ki, χ_Q məhduddur, lakin məhdud variasiyalı deyildir. Doğrudan da hər bir n nömrəsi üçün $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ intervalından irrasional a_n ədədini qeyd edək. Onda hər bir N müsbət tam ədədi üçün

$$\sum_{n=1}^{N}\left|\chi_Q\left(\frac{1}{n}\right) - \chi_Q(a_n)\right| = \sum_{n=1}^{N} 1 = N$$

olacaqdır. Aydındır ki,

$$V(\chi_Q, [0;1]) = \infty .$$

İndi $[0;1]$ parçasında

$$F(x) = x\sin(\pi/x) \quad (x \neq 0)$$

və $F(0) = 0$ şərtlərini ödəyən F funksiyasına baxaq. Bu funksiya $[0;1]$ parçasında müntəzəm kəsilməzdir (yoxlayın!).

Hər bir n nömrəsi üçün $a_n = {}^{2}/_{4n+1}$ və $b_n = {}^{2}/_{4n}$ qəbul edək. Tutaq ki,

$$M < N, \frac{1}{M} < \delta \text{ və } \sum_{n=M}^{N} a_n > 1$$

olsun. Onda $\{[a_n, b_n]: M \le n \le N\}$ ailəsi cüt-cüt kəsişməyən elə parçalar küllisidir ki.

$$\sum_{n=M}^{N} (b_n - a_n) < \delta .$$

Ancaq

$$\sum_{n=M}^{N} |F(b_n) - F(a_n)| = \sum_{n=M}^{N} a_n > 1 .$$

Bu da onu göstərir ki, F funksiyası $[0; 1]$ parşasında mütləq kəsilməz deyildir.

Qeyd edək ki, mütləq kəsilməz funksiyanın tərifindəki bölgü intervallarını həm sonlu, həm də hesabi sayda da götürmək olar.

İndi mütləq kəsilməz funksiyanın bəzi xassələrini qeyd edək.

6.4.2. Teorem.

1) Hər bir mütləq kəsilməz funksiya məhdud variasiyalıdır.

2) Mütləq kəsilməz funksiyaların cəmi və hər belə funksiyanın ədədə hasili mütləq kəsilməzdir.

3) Hər bir mütləq kəsilməz funksiya iki azalmayan mütləq kəsilməz funksiyanın fərqi şəklində göstərilə bilir.

İsbatı. f funksiyası $[a,b]$ parçasında mütləq kəsilməz olduğundan istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $\delta > 0$ ədədi vardır ki, uzunluğu δ-dan kiçik hər bir parçada funksiyanın tam variasiyası ε-dan böyük olmaz. $[a,b]$ parçası uzunluqları δ-dan kiçik sonlu parçalara bölünə bildiyindən f-in $[a,b]$-də tam variasiyası sonlu olacaqdır. Bu da 1) xassəsinin doğruluğunu göstərir. 2) xassəsinin isbatı oxşardır. 1) və 2) xassələri mütləq kəsilməz funksiyaların məhdud variasiyalı funksiyaların xətti fəzasında xətti alt fəza (xətti çoxobrazlı) təşkil etdiyini göstərir.

İndi 3) xassəsinin doğruluğunu göstərək. Hər bir mütləq kəsilməz funksiya 1) xassəsinə görə məhdud variasiyalı funksiya olduğundan

$$f = v - g$$

şəklində göstərilə bilir. Burada

$$v(x) = V(f, [a, x])$$

və

$$g(x) = v(x) - f(x)$$

azalmayan funksiyalardır. Bu funksiyaların mütləq kəsilməz funksiyalar olduğunu göstərək. Aydındır ki, bunu v funksiyası üçün göstərmək kifayətdir. Tutaq ki, $\varepsilon > 0$. Mütləq kəsilməzliyin tərifinə uyğun $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ədədini seçək. Uzunluqları cəmi δ-dan kiçik olan (c_i, d_i) $(i = 1, 2, \dots, n)$ bölgü intervallarına baxaq.

Aydındır ki,

$$\sum_{i=1}^{n}\left(v(d_i) - v(c_i)\right) = \sup \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}\left|f\left(d_{j,i}\right) - f\left(c_{j,i}\right)\right| . (4)$$

Burada sup $(c_1, d_1), \dots, (c_n, d_n)$ intervallarının bütün mümkün

$$c_1 = c_{1,1} < d_{1,1} < c_{1,2} < d_{1,2} < \cdots < c_{1,m_1} < d_{1,m_1} = d_1,$$
$$c_2 = c_{2,1} < d_{2,1} < c_{2,2} < d_{2,2} < \cdots < c_{2,m_2} < d_{2,m_2} = d_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$c_n = c_{n,1} < d_{n,1} < c_{n,2} < d_{n,2} < \cdots < c_{n,m_n} < d_{n,m_n} = d_n$$

bölgüləri üzrə götürülür. (4)-ün sağ tərəfindəki cəmdəki $\left(c_{j,i}, d_{j,i}\right)$ intervalların uzunluqları cəmi $\delta > 0$ ədədindən böyük olmadığından (6)-nın sağ tərəfindəki hər bir cəm ε-dan böyük deyildir.

Bütün xassələr isbat olundu. □

Biz artıq analizdən məlum Fundamental teoremin Lebeq inteqralı halına ümumiləşməsi ilə məşğul ola bilərik. Riman inteqralı halında bu fakt belə deyilir:

$f:[a,b] \to R$ funksiyası $[a,b]$-də inteqrallanan və

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (x \in [a,b])$$

isə F kəsilməzdir (əslində mütləq kəsilməzdir) və f-in kəsilməz olduğu nöqtələrdə $F' = f$ (sanki bütün $x \in [a,b]$ üçün $F' = f$).

Bu teorem Lebeq inteqralı halında da doğrudur.

6.4.3. Teorem. Tutaq ki, $f:[a,b] \to R$ məhdud ölçülən funksiyadır. Hər bir $x \in [a,b]$ üçün

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

isə F $[a,b]$-də mütləq kəsilməz funksiyadır və $[a,b]$ parçasının sanki bütün nöqtələrində $F' = f$.

İsbatı. Tutaq ki, $|f(x)| \leq M, x \in [a,b]$. f məhdud olduğundan, asanca göstərmək olar ki, F $[a,b]$ parçasında mütləq kəsilməz və deməli, bu parçada sanki hər yerdə diferensiallanandır. $x > b$ üçün $F(x) = F(b)$ qəbul etməklə F-i davam etdirək və

$$f_n(x) = n\left[F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x)\right] \quad (n \; natural \; ədəddir)$$

funksiyasına baxaq. Aydındır ki, $\{f_n\}$ ardıcıllığı $[a,b]$ parçasında sanki hər yerdə F'-ə yığılır və

$$|f_n(x)| = n\left|\int_x^{x+\frac{1}{n}} f\right| \leq n\int_x^{x+\frac{1}{n}} M = M$$

olduğundan $[a,b]$-də müntəzəm məhduddur. Onda inteqral altında limitə keçmək haqqındakı Lebeq teoremini (Yeqorov teoremindən istifadə etməklə) tətbiq etsək, alarıq ki,

$$\int_a^b F' = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n \quad x \in [a,b].$$

F $[a,b]$ -də kəsilməz olduğundan analizin Fundamental teoreminə əsasən

$$F(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x F = \lim_{n\to\infty} n\left(\int_a^{x+\frac{1}{n}} F - \int_a^x F\right).$$

Nəticədə hər bir $x \in [a,b]$ üçün

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} n\left(\int_a^{x+\frac{1}{n}} F - \int_a^x F\right) - \lim_{n\to\infty} n\left(\int_a^{a+\frac{1}{n}} F - \int_a^a F\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\int_{a+\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} F - \int_a^x F\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\int_a^x \left[F\left(t + \frac{1}{n}\right) - F(t)dt\right]\right) = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n = \int_a^x F'.$$

Deməli,

$$\int_a^x \left(F' - f\right) = \int_a^x F' - \int_a^x f = F(x) - F(x) = 0$$

və $F' = f$ sanki hər yerdə bütün $x \in [a,b]$. □

6.4.4. Tutaq ki, $f: [a,b] \to R$ Lebeq mənada inteqrallanan funksiyadır. Hər bir $x \in [a,b]$ üçün

$$F(x) = \int_a^x f$$

isə F $[a,b]$ parçasında mütləq kəsilməzdir və $[a,b]$-də sanki hər yerdə $F' = f$.

Bu teoremi isbat etmək üçün əvvəlcə aşağıdakı teoremi isbat edək.

6.4.5 Teorem *(Lebeq inteqralının mütləq kəsilməzliyi).* $f:[a,b] \to R$ Lebeq mənada inteqrallanan isə istənilən $\varepsilon > 0$ görə elə $\delta > 0$ ədədi vardır ki, $\mu(E) < \delta$ şərtini ödəyən hər bir ölçülən $E \subset [a,b]$ çoxluğu üçün

$$\int_E |f| < \varepsilon .$$

İsbatı. f məhdud olduqda isbat asandır. Tutaq ki, f qeyri-məhdud funksiyadır.

$$A_n = \{x: x \in E, n \le |f(x)| < n+1\}$$

və

$$B_N = \bigcup_{n=0}^{N} A_n \,, C_N = A \backslash B_N .$$

$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i = j$ və $\int_A |f(x)|d\mu$ ölçü olduğundan

$$\int_A |f(x)|d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n} |f(x)|d\mu$$

olur.

N-i elə seçək ki,

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \int |f(x)|d\mu = \int_{C_N} |f(x)|d\mu < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Tutaq ki. $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2(N+1)}$ və $\mu(E) < \delta$. Onda

$$\left|\int_E f(x)d\mu\right| \le \int_E |f(x)|d\mu = \int_{E\cap B_N} + \int_{B\cap C_N}.$$

Sağdakı 1-ci inteqral $\varepsilon/2$-dən böyük deyildir. 2-ci inteqral da $\varepsilon/2$-dən böyük deyildir ($B \cap C_N \subset C_n$). Yəni

$$\int_E |f(x)|d\mu < \varepsilon . \square$$

6.4.4. Teoreminin isbatı. Əvvəlki teoremdə göstərdik ki. F mütləq kəsilməz funksiyadır. Sanki hər yerdə $F' = f$ olduğunu göstərmək üçün əvvəlcə $f \ge 0$ qəbul edək. Bu halda F azalmayan funksiyadır və $F' \ge 0$. Hər bir n natural ədədi üçün $f_n(x) = \min\{f(x), n\}$ qəbul edək. Aydındır ki, $\{f_n\}$ azalmayan ardıcıllıqdır və $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. $f - f_n \ge 0$ olduğundan

$$F(x) - \int_a^x f_n = \int_a^x (f - f_n)$$

$[a,b]$-də azalmayan funksiyadır. Yəni bu funksiyanın mənfi olmayan törəməsi vardır. Onda 6. 4. 3 teoreminə əsasən bu funksiyanın törəməsi (sanki hər yerdə) $F'(x) = f_n(x)$ olacaqdır. Başqa sözlə, sanki hər yerdə bütün $x \in [a,b]$ üçün $F' - f_n \ge 0$. Bu hər bir n üçün olduğundan

$$\int_a^b \left(F' - f\right) = \int_a^b F' - \int_a^b f \le F(b) - F(a) - \int_a^b f = 0 .$$

Deməli, $F' = f$ (sanki hər yerdə). İndi əgər f ixtiyari cəmlənən funksiya isə

$$F(x) = \int_a^x f^+ - \int_a^x f^-$$

olduğundan sanki hər yerdə bütün $x \in [a, b]$ üçün

$$F'(x) = f^+(x) - f^-(x) = f(x)$$

olur. Teorem isbat olundu. □

İsbat edilən teoremə əsasən F mütləq kəsilməz funksiya isə $F(x) - F(a)$ və $\int_a^x F'$ sanki hər yerdə bütün $x \in [a, b]$ üçün eyni törəməyə malik olmaqla $x = a$ nöqtəsində bərabərdirlər. Buradan demək olarmı ki, onlar bütün x-lər üçün bərabərdirlər. Başqa cür desək, əgər hər hansı funksiyanın törəməsi sanki hər yerdə bütün $x \in [a, b]$ üçün sıfırdırsa, həmin funksiya sabitdirmi?

Müəyyən F funksiyasının törəməsi $[a, b]$ parçasında sanki hər yerdə sıfır, yəni $F'(x) = 0$ isə ona sinqulyar funksiya deyilir. Orta qiymət teoreminə əsasən $[a, b]$ parçasının hər bir nöqtəsində törəməsi sıfır olan funksiya sabitdir. Lakin ixtiyari sinqulyar funksiya bu xassəyə malik olmaya da bilər. Belə bir sinqulyar funksiyanı qeyd edək.

Kantor funksiyası. Yada salaq ki, $[0; 1]$ parçasında Kantor çoxluğu aşağıdakı kimi təyin olunur. Əvvəlcə aşağıdakı çoxluqlara baxaq.

$$K_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right],$$

$$K_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right],$$

$$K_3 = \left[0, \frac{1}{27}\right] \cup \left[\frac{2}{27}, \frac{3}{27}\right] \cup \left[\frac{6}{27}, \frac{7}{27}\right] \cup \left[\frac{8}{27}, \frac{9}{27}\right] \cup$$

$$\cup\left[\frac{18}{27},\frac{19}{27}\right]\cup\left[\frac{20}{27},\frac{21}{27}\right]\cup\left[\frac{24}{27},\frac{25}{27}\right]\cup\left[\frac{26}{27},1\right],\dots$$

Hər bir K_n çoxluğu 2^n sayda cüt-cüt kəsişməyən uzunluğu 3^{-n} olan qapalı parçaların birləşməsindən ibarətdir və $\mu(K_n) = {2^n}/{3^n}$.

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$$

çoxluğuna Kantor çoxluğu deyilir. $C \neq \emptyset$, qapalı və ölçünün məlum xassəsinə əsasən

$$\mu(C) = \lim_{n\to\infty} \mu(K_n) = 0$$

və mükəmməl çoxluq təşkil edir.

İndi yuxarıda qeyd etdiyimiz sinqulyar funksiyanı quraq.

Hər bir n nömrəsi üçün E_n ilə $([0;1]\backslash K_n)\cup\{0,1\}$ çoxluğunun qapanmasını işarə edək. Daha doğrusu

$$E_1 = \{0\}\cup\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]\cup\{1\},$$

$$E_2 = \{0\}\cup\left[\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right]\cup\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right]\cup\{1\},\dots$$

Hər bir n üçün f_n ilə $[0,1]$ parçasında kəsilməyən, azalmayan və aşağıdakı kimi təyin olunmuş funksiyanı işarə edək:

a) $f_n(0) = 0, f_n(1) = 1$;

b) f_n funksiyası E_n-in hər bir alt hissəsində sabit və uyğun olaraq artma istiqamətində düzülmüş

$$\frac{1}{2^n},\frac{2}{2^n},\dots,\frac{(2^n-1)}{2^n}$$

qiymətlərini alır;

c) f_n funksiyası E_n-in tamamlanmasını təşkil edən qapalı parçalarda xətti funksiyadır. Qeyd edək ki, bütün $m > n$ üçün

$$f_m(x) = f_n(x)\,,x\in E_n$$

və E_n-ə daxil olan parçalarda f_n funksiyası sabitdir.

$f = \lim_{n\to\infty} f_n$ funksiyasına Kantor funksiyası deyilir.

6.4.6. Teorem. f funksiyası $[0;1]$ parçasında azalmayan kəsilməz funksiyadır. Bundan əlavə f funksiyası $[0;1]\backslash C$ çoxluğunun hər bir parçasında sabitdir və $f(C) = [0;1]$.

İsbatı. Aydındır ki, bütün n nömrələri və hər bir $x \in [0;1]$ üçün

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \le 2^{-n}.$$

Bu isə o deməkdir ki, $\{f_n\}$ ardıcıllığı f funksiyasına müntəzəm yığılır. Buradan isə teoremin hökmünün doğru olduğu alınır. □

Asanca görmək olar ki, f Kantor funksiyası sinqulyar funksiyadır və törəməsi $[0;1]$ parçasında sanki hər yerdə sıfırdır. Lakin qurmaya görə sabit funksiya deyildir. Lakin (mütləq kəsilməz) funksiyanın törəməsinin s. h. sıfır olması onun sabit funksiya olmasını təmin edir.

6.4.7. Teorem. Tutaq ki, $F: [a,b] \to R$ mütləq kəsilməz funksiyadır. F' $[a,b]$ parçasında sanki hər yerdə sıfır isə o, $[a,b]$-də sabitdir.

İsbatı. Teoremin isbatı üçün istənilən $c \in (a,b]$ üçün $F[c] = F(a)$ olduğunu göstərmək kifayətdir. Tutaq ki, $c \in (a,b]$. $E = \left\{x \in (a,c): F'(x) = 0\right\}$ və $\varepsilon, \eta > 0$ olsun. F mütləq kəsilməz olduğundan elə $\delta > 0$ ədədi vardır ki, bir-birini örtməyən (kəsişməyən),

$$\sum_{i=1}^{n} (d_i - c_i) < \delta$$

şərtini ödəyən sonlu sayda $\{[c_i, d_i]: 1 \le i \le n\}$ parçaları

$$\sum_{i=1}^{n} |F(d_i) - F(c_i)| < \varepsilon$$

şərtini ödəyir.

$$\mathcal{J} = \bigcup_{x \in E} \left\{ [x, y]: x < y < c, \left| \frac{F(y) - F(x)}{y - x} \right| < \varepsilon \right\}$$

çoxluğuna baxaq. Asanca görmək olar ki, $\mathcal{J}$ çoxluğu E-ni daxilinə alır. $\mathcal{J}$-yə bəzən Vitali örtüyü də deyilir. Bu elə örtükdür ki, $\mathcal{J}$ çoxluğu müəyyən $[x, y]$ parçalarından ibarətdir və elə dizyunkt

$$\{[x_i, y_i]: 1 \le i \le n\} \subset \mathcal{J}$$

sistemi vardır ki,

$$\mu\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{n} [x_i, y_i]\right) < \delta .$$

Ümumuliyi pozmadan fərz edə bilərik ki,

$a < x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < x_n < y_n < c$.

Onda

$$\mu\left((a, c) \setminus \bigcup_{i=1}^{n} [x_i, y_i]\right) < \delta$$

olacaqdır. Biz burada

$$\mu\big((a, c) \setminus E\big) = 0$$

və

$$\mu\left((a, c) - \bigcup_{i=1}^{n} [x_i, y_i]\right) = (x_1 - a) +$$

$$+ \sum_{i=2}^{n} (x_i - y_{i-1}) + (c - y_n)$$

olduğunu nəzərə almışıq. Onda

$$|F(c)-F(a)| \le \sum_{i=1}^{n}\left|F(y_i)-F(x_i)\right| + |F(x_1)-F(a)| +$$

$$+\sum_{i=2}^{n}\left|F(x_i)-F(y_{i-1})\right| + \left|F(c)-F(y_n)\right| < \eta\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i) +$$

$$+\varepsilon \le \eta(c-a)+\varepsilon .$$

$\varepsilon, \eta > 0$ ixtiyari olduqlarından $F(c) = F(a)$ olur. Teorem isbat olundu. □

6.4.8. Teorem. $F:[a,b] \to R$ funksiyası $[a,b]$ parçasında mütləq kəsilməz isə F' törəməsi $[a,b]$ parçasında Lebeq mənada inteqrallanandır və hər $x \in [a,b]$ üçün

$$\int_a^x F' = F(x) - F(a) .$$

İsbatı. 6. 4. 6 teoremınə görə

$$G(x) = \int_a^x F'$$

$[a,b]$ parçasında mütləq kəsilməzdir və $[a,b]$-də sanki hər yerdə $G' = F'$. F və G funksiyaları mütləq kəsilməz olduqlarından 6. 4. 7 teoremınə görə $F = G + p$ olur. Burada $p = const$. Asanca görmək olar ki, $p = F(a)$, çünki $G(a) = 0$. Deməli,

$$\int_a^x F' = F(x) - F(a) , x \in [a,b] . \square$$

6.4.6 və 6.4.8 teoremlərindən bilavasitə aşağıdakı teorem alınır.

6.4.9. Teorem. Tutaq ki, $F:[a,b] \to R$. $[a,b]$ parçasında sanki hər yerdə $F' = f$ şərtini ödəyən mütləq kəsilməz $F:[a,b] \to R$ funksiyanın varlığı f funksiyasının Lebeq mənada inteqrallanan olması üçün zəruri və kafi şərtdir.

5. Tapşırıqlar

1. Tutaq ki, $F: [a, b] \to R$ funksiyası $[a, b]$ parçasında diferensiallanandır. Əlavə fərz edək ki, F' $[a, b]$-də məhduddur. Göstərin ki, F $[a, b]$-də mütləq kəsilməzdir.

2. Tutaq ki, $F(x) = x^2 \sin(\pi/x)$, $G(x) = x^2 \sin\left(\pi/x^2\right)$ $(x \neq 0$ və $F0=G0=0$. Göstərin ki, F $0;1$ parçasında mütləq kəsilməz funksiya, lakin G bu parçada mütləq kəsilməz deyildir.

3. Göstərin ki, Kantor funksiyası $[0, 1]$ parçasında mütləq kəsilməz deyildir.

4. F funksiyasının mütləq kəsilməzliyinin tərifindəki şərtləri aşağıdakı kimi də vermək olar:

a) ε bərabərsizliyini

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\left(F(d_i) - F(c_i)\right)\right| < \varepsilon$$

və ya

$$\sum_{i=1}^{n} V(F, [c_i, d_i]) < \varepsilon$$

bərabərsizliyi ilə əvəz etmək olar.

b) sonlu sayda intervallar əvəzinə hesabi sayda intervallar da götürmək olar.

5. Məhdud variasiyalı iki funksiyanın kompozisiyası (superpozisiyası) məhdud variasiyalı olmaya da bilər.

6. Mütləq kəsilməz iki funksiyanın kompozisiyası mütləq kəsilməz olmaya da bilər.

(5 və 6 tapşırıqlarının yerinə yetirilməsi üçün göstəriş. $F(x) = \chi_{(0,1)}$ funksiyası $[-1, 1]$ parçasında, $G(x) = x^2 \sin(\pi/x)$ $(x \neq 0)$ və $G(0) = 0$ kimi təyin olunan $G(x)$ funksiyası $[0; 1]$

parçasında məhdud variasiyalı funksiyalardır. Lakin $F°G$ funksiyası $[0;1]$ parçasında məhdud variasiyalı deyildir. $f(x)=\sqrt{x}$ funksiyası və $g(x)=|x^2\sin(^{\pi}/_{x})|$ $(x\neq 0)$ və $g(0)=0$ kimi təyin olunan $g(x)$ funksiyası $[0;1]$ parçasında mütləq kəsilməzdirlər. Lakin $f°g$ $[0;1]$ parçasında mütləq kəsilməz deyildir.)

7. Artan mütləq kəsilməz funksiyanın tərsi mütləq kəsilməzdirmi?

8. Müntəzəm yığılan mütləq kəsilməz funksiyalar ardıcıllığının limiti mütləq kəsilməzdirmi?

9. Tutaq ki, $\{F_k\}$ mütləq kəsilməz funksiyalar ardıcıllığı $[a,b]$ parçasında təyin olunmuşdur. Fərz edək ki, $\sum_{k=1}^{\infty}F_k(a)$ və $\sum_{k=1}^{\infty}V(F_k,[a,b])$ sıraları yığılırlar. İsabat edin ki, $F=\sum_{k=1}^{\infty}F_k$ funksiyası $[a,b]$ parçasında mütləq kəsilməzdir.

10. Tutaq ki, $F:[a,b]\to R$ funksiyası $[a,b]$ parçasında Lebeq mənada inteqrallanandır və hər bir $x\in[a,b]$ üçün

$$F(x)=\int_a^x f\,.$$

Olavə fərz edək ki, f funksiyası $c\in[a,b]$ nöqtəsində kəsilməzdir. İsbat edin ki, $F'(c)=f(c)$.

11. İsbat edin ki, hər bir azalmayan funksiya mütləq kəsilməz və sinqulyar funksiyanın cəmindən ibarətdir.

12. Tutaq ki, $F:[a,b]\to R$ $[a,b]$ parçasında kəsilməz və məhdud variasiyalı funksiyadır. Olavə fərz edək ki, hər bir $c\in(a,b)$ üçün F funksiyası $[a,c]$ parçasında mütləq kəsilməzdir. İsbat edin ki, F $[a,b]$-də mütləq kəilməzdir.

13. Tutaq ki, $F:[a,b]\to R$ $[a,b]$ parçasında məhdud variasiyalı funksiyadır. G funksiyasını $[a,b]$ parçasında aşağıdakı kimi təyin edək:

$$G(a)=0\,,$$

$$G(x) = V(F, [a, x]), x \in (a, b].$$

Olavə fərz edək ki, F $c \in [a, b]$ nöqtəsində kəsilməzdir. İsbat edin ki, G funksiyası c nöqtəsində kəsilməzdir.

14. Tutaq ki, $F: [a, b] \to R$ funksiyası $[a, b]$ parçasında mütləq kəsilməzdir. G funksiyasını $[a, b]$ parçasında aşağıdakı kimi təyin edək:

$$G(a) = 0,$$
$$G(x) = V(F, [a, x]), x \in (a, b].$$

İsbat edin ki,

$$G(x) = \int_a^x |F'|, x \in [a, b].$$

Xüsusi halda, G $[a, b]$-də mütləq kəsilməzdir və $[a, b]$-də sanki hər yerdə $G' = |F'|$.

VII Fəsil

Ölçülərin ayrılışı

Biz indiyə kimi əsasən müsbət (əslində mənfi olmayan) ölçülərdən istifadə edirdik. Lakin əvvəlki fəsillərdə ötəri olsa da həqiqi və kompleks ölçülərini də qeyd etmişdik.

1 . İşarəli və kompleks ölçülər

7.1.1. Tutaq ki, $(X, \mathcal{A})$ ölçülən fəzası verilmişdir. Burada X əsas çoxluq, $\mathcal{A}$ isə bu çoxluqda σ-cəbrdir. $\lambda: \mathcal{A} \to [-\infty, \infty]$ funksiyası $\mathcal{A}$-ya daxil olan hər bir $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizyunkt ardıcıllığı üçün

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i)$$

münasibətini ödəyərsə, λ-ya hesabi additiv ölçü deyilir. Hesabi additiv həqiqi qiymətli λ ölçüsü $\lambda(\emptyset) = 0$ şərtini ödəyərsə, λ-ya işarəli (ingiliscə charge, rusca zaryad) ölçü deyilir.

Biz bu fəsildə işarəli və kompleks ölçünün müsbət ölçü ilə bağlılığını da araşdıracağıq.

Fərz edək ki, λ $(X, \mathcal{A})$ ölçülən fəzasında işarəli ölçüdür. Hər bir $A \in \mathcal{A}$ üçün

$$\lambda(A) + \lambda(A^c) = \lambda(X)$$

olmalıdır. Burada $(+\infty) + (-\infty)$ və ya $(-\infty) + (+\infty)$ cəm formalarına baxılmır. Buna görə də $\lambda(A) = \infty$ (və ya $-\infty$) isə, $\lambda(X) = \infty$ ($-\infty$) $(A \in \mathcal{A})$ qəbul edilir. Beləliklə, işarəli ölçü $+\infty$ və $-\infty$ qiymətlərindən ancaq birini ala bilər. Oxşar mühakiməyə görə $B \in \mathcal{A}$ üçün $\lambda(B)$ sonlu isə $A \in \mathcal{A}$ və $A \subset B$ üçün də $\lambda(A)$ sonlu olmalıdır.

Bir misala baxaq. Tutaq ki, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçülən fəzadır (əslində ölçüyə malik fəza). Burada μ müsbət ölçüdür. Həqiqi ölçülən f funksiyası və $A \in \mathcal{A}$ üçün

$$\nu(A) = \int_A f d\mu$$

inteqralının xəttiliyinə və mojarant yığılma haqqındakı teoremə əsasən ν $(X, \mathcal{A})$-da işarəli ölçüdür. Qeyd edək ki, bu cür təyin olunmuş ν ölçüsü iki

$$\nu_1(A) = \int_A f^+ d\mu$$

və

$$\nu_2(A) = \int_A f^- d\mu$$

müsbət ölçülərin fərqindən ibarətdir. Ümumiyyətlə, ν_1 və ν_2 ölçülən $(X, \mathcal{A})$ fəzasında heç olmazsa biri sonlu olan müsbət ölçülərdirsə, $\nu_1 - \nu_2$ $(X, \mathcal{A})$ fəzasında işarəli ölçüdür.

Aşağıdakı lemmanın isbatı müsbət ölçü halındakı uyğun təklifin isbatına oxşar olduğundan biz onun isbatını oxucuya təklif edirik.

7.1.2. Lemma. Tutaq ki, $(X, \mathcal{A})$ ölçülən fəza və λ işarəli ölçüdür.

1) $\{A_k\} \subset \mathcal{A}$ artan ölçülən çoxluqlar ardıcıllığı isə

$$\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \lambda(A_k);$$

2) $\{A_k\} \subset \mathcal{A}$ azalan ölçülən çoxluqlar ardıcıllığı və müəyyən n nömrəsi üçün $\lambda(A_n)$ sonlu isə

$$\lambda\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \lambda(A_k).$$

2 . Hahn ayrılışı

*7.2.1. **Tərif.*** Tutaq ki, λ $(X, \mathcal{A})$ ölçülən fəzasında işarəli ölçüdür. $A \in \mathcal{A}$ çoxluğu və hər bir ölçülən $E \subset A$ çoxluğu üçün $\lambda(E) \geq 0$ isə A çoxluğuna λ ölçüsünə nəzərən müsbət çoxluq və tərsinə $\lambda(E) \leq 0$ olduqda isə A çoxluğuna λ ölçüsünə nəzərən mənfi çoxluq deyilir. $M \in \mathcal{A}$ çoxluğunun istənilən $E \in \mathcal{A}$ alt çoxluğu üçün $\lambda(E) = 0$ olarsa, M çoxluğuna λ işarəli ölçüsünə nəzərən sıfır çoxluq deyilir.

Göstərmək olar ki, müsbət çoxluğun ölçülən alt çoxluğu müsbət və iki müsbət çoxluğun birləşməsi yenə də müsbət çoxluqdur.

***7.2.2. Hahn teoremi** (ölçünün ayrılışı haqqında).*

λ $\mathcal{A}$-da işarəli ölçü isə elə $P \in \mathcal{A}$ müsbət və $N \in \mathcal{A}$ mənfi çoxluqları vardır ki, $X = P \cup N$, $P \cap N = \emptyset$.

İsbatı. Bütün müsbət çoxluqlar ailəsini $\mathcal{P}$ ilə işarə edək. Bu ailə $\emptyset$ boş çoxluğunu daxilinə aldığından özü boş deyildir.

$$\alpha = \sup\{\lambda(A) : A \in \mathcal{P}\}$$

işarə edək. Tutaq ki, $\{A_k\} \subset \mathcal{P}$ elə ardıcıllıqdır ki,

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \alpha.$$

$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

olsun. İki müsbət çoxluğun birləşməsinin müsbət olduğunu nəzərə alsaq, $\{A_n\}$ ardıcıllığını monoton artan seçə bilərik. Fərz edək ki, bu seçim edilmişdir.

$$\lambda(E \cap P) = \lambda\left(E \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E \cap A_n)\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \lambda(E \cap A_n) \geq 0$$

olduğundan P çoxluğu da müsbət çoxluqdur. Bundan başqa,

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lambda(\mathrm{P}) < \infty\,.$$

Göstərək ki, $N = X \backslash P$ mənfi çoxluqdur. Belə olmasa elə $E \subset N$ ölçülən çoxluğu vardır ki, $\lambda(E) > 0$. Ancaq E müsbət çoxluq ola bilməz, çünki $\lambda(P \cap E) > \alpha$ olardı. Bu isə α ədədinin təyininə ziddir. Deməli, E-nin daxilində mənfi çoxluq vardır. Tutaq ki, n_1 elə ən kiçik nömrədir ki, $E_1 \subset E, E_1 \in \mathcal{A}$ və $\lambda(E_1) \leq -{}^1/_{n_1}$. İndi

$$\lambda(E \backslash E_1) = \lambda(E) - \lambda(E_1) > \lambda(E) > 0$$

və deməli, $E \backslash E_1$ müsbət çoxluq ola bilməz. Çünki, $P_1 = P \cup (E \backslash E_1)$ müsbət çoxluq və $\lambda(P_1) > \alpha$ olardı. Buna görə də $E \backslash E_1$ öz daxilinə mənfi ölçülü çoxluqları da alır. Tutaq ki, n_2 elə ən kiçik nömrədir ki, $E \backslash E_1$ çoxluğu öz daxilində $\lambda(E_2) \leq -{}^1/_{n_2}$ şərtini ödəyən E_2 çoxluğunu saxlayır. Əvvəlki hala uyğun olaraq $E \backslash (E_1 \cup E_2)$ müsbət çoxluq deyildir və elə n_3 nömrəsi vardır ki, $E \backslash (E_1 \cup E_2)$ çoxluğu öz daxilində $E_3 \in \mathcal{A}$ çoxluğunu saxlayır və $\lambda(E_3) \leq -{}^1/_{n_3}$. Bu prosesi təkrar olaraq davam etdirsək, $\{E_k\}$ dizyunkt ölçülər çoxluqlar ardıcıllığı alarıq ki, $\lambda(E_k) \leq -{}^1/_{n_k}$ olur. $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ işarə edək. Aydındır ki,

$$\lambda(F) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E_k) \leq -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} \leq 0$$

$\frac{1}{n_k} \to 0\ (k \to \infty)$.

$G \subset E \backslash F$ hər hansı ölçülən çoxluq və $\lambda(G) < 0$ isə kifayət qədər böyük k nömrəsi üçün

$$\lambda(G) < -{}^{1}\!/_{(n_k - 1)}$$

olardı. Bu isə n_k-nın əvvəlki seçiminə zidd olardı. Yəni n_k nömrəsinin seçiminə görə $E \backslash \left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right)$ çoxluğu öz daxilində işarəli ölçüsü $-\frac{1}{n_k}$-dan kiçik olan çoxluq saxlayır.

Deməli, $E \backslash F$ çoxluğunun istənilən ölçülən G alt çoxluğunun ölçüsü mənfi olmamalıdır, yəni $\lambda(G) \geq 0$. Buradan da λ ölçüsünə nəzərən $E \backslash F$ müsbət çoxluq olduğu alınır. Nəticədə

$$\lambda(E \backslash F) = \lambda(E) - \lambda(F) > 0$$

olur ki, bu da $P \cup (E \backslash F)$-in müsbət çoxluq və

$$\lambda\big(P \cup (E \backslash F)\big) \geq \alpha$$

olduğunu göstərir. Bu isə fərziyyəmizə ziddir.

Beləliklə, $N = X \backslash P$ çoxluğu mənfi çoxluqdur. Bu isə teoremin isbatını tamamlayır. □

Teoremdə qeyd olunan P, N ölçülən çoxluqları haqqında deyilir ki, bu cüt X çoxluğunun Hahn ayrılışını təyin edir. Bu ayrılış ancaq yeganə deyildir. Çünki, P və N λ-ya nəzərən Hahn ayrılışı isə, λ-ya nəzərən M sıfır çoxluğu üçün $P \cup M, N \backslash M$ və $P \backslash M, N \cup M$ cütləri də λ-ya nəzərən Hahn ayrılışları olacaqdır.

Buna baxmayaraq aşağıdakı lemma maraq kəsb edir.

7.2.3. Lemma. P_1, N_1 və P_2, N_2 λ-ya nəzərən Hahn cütləri isə istənilən $E \in \mathcal{A}$ üçün

$$\lambda(E \cap P_1) = \lambda(E \cap P_2)$$

və

$$\lambda(E \cap N_1) = \lambda(E \cap N_2)\,.$$

İsbatı.

$$E \cap (P_1 \backslash P_2) \subset P_1$$

və

$$E \cap (P_1 \backslash P_2) \subset N_1$$

olduğundan

$$\lambda\big(E \cap (P_1 \backslash P_2)\big) = 0$$

olur.

Deməli.

$$\lambda(E \cap P_1) = \lambda(E \cap P_1 \cap P_2)$$

oxşar olaraq,

$$\lambda(E \cap P_2) = \lambda(E \cap P_1 \cap P_2)\,.$$

Bu isə o deməkdir ki,

$$\lambda(E \cap P_1) = \lambda(E \cap P_2)\,.$$

Lemmanın N_1 və N_2 çoxluqları üçün hökmü eynilə isbat olunur. □

3 . Ölçünün variasiyası Jordan ayrılışı

7.3.1. Tutaq ki, λ $\mathcal{A}$ σ-cəbrində işarəli ölçü P və N isə λ-ya nəzərən Hahn cütüdür. $E \in \mathcal{A}$ üçün

$$\lambda^{+}(E) = \lambda(E \cap P)\,, \lambda^{-}(E) = -\lambda(E \cap N)$$

sonlu ölçülərinə λ-nın müsbət və mənfi variasiyaları deyilir.

$$|\lambda|(E) = \lambda^{+}(E) + \lambda^{-}(E)$$

ölçüsünə isə λ ölçüsünün tam variasiyası deyilir.

7.2.3. lemmasına görə müsbət və mənfi variasiyalar korrekt təyin olunmuşlar və Hahn ayrılışından asılı deyildirlər. Bu da aydındır ki,

$$\lambda(E) = \lambda(E \cap P) + \lambda(E \cap N) = \lambda^{+}(E) - \lambda^{-}(E)$$

7.3.2. Jordan teoremi (*ölçünün ayrılışı haqqında*).

Tutaq ki, λ $\mathcal{A}$ σ-cəbrində işarəli ölçüdür. Onda λ iki sonlu ölçünün fərqi şəklindədir. Xüsusi halda, $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$. Bundan əlavə müəyyən sonlu μ və ν ölçülərinin fərqindən ibarətdirsə, $\lambda = \mu - \nu$, istənilən $E \subset \mathcal{A}$ üçün

$$\mu(E) \geq \lambda^+(E),\ \nu(E) \geq \lambda^-(E).$$

İsbatı. $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ ayrılışını əvvəldə göstərmişik. μ və ν mənfi olmayan qiymətlər aldıqlarına görə

$$\lambda^+(E) = \lambda(E \cap P) = \mu(E \cap P) - \nu(E \cap P) \leq \mu(E \cap P) \leq$$
$$\leq \mu(E).$$

$\lambda^-(E) \leq \nu(E)$ bərabərsizliyi oxşar isbat olunur. □

Aydındır ki, f funksiyası μ ölçüsünə nəzərən $\mathcal{A}$-da inteqrallanan isə hər bir $E \in \mathcal{A}$ ölçülən çoxluğu üçün

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu$$

kimi təyin olunan λ ölçüsü işarəli ölçüdür.

Aşağıdakı teorem maraq kəsb edir.

7.3.3. Teorem. $f \in L_1(X, \mathcal{A}, \mu)$ və hər bir $E \in \mathcal{A}$ üçün

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu$$

kimi təyin olunmuşsa,

$$\lambda^+(E) = \int_E f^+ d\mu,\ \lambda^-(E) = \int_E f^- d\mu,$$

$$|\lambda|(E) = \int_E |f| d\mu$$

olur.

İsbatı.

$$P_f = \{x: x \in X, f(x) \geq 0\}$$

və

$$N_f = \{x: x \in X, f(x) < 0\}$$

çoxluqlarına baxaq. Onda

$$X = P_f \cup N_f$$

və

$$P_f \cap N_f = \emptyset$$

olar. $E \in \mathcal{A}$ isə,

$$\lambda\left(E \cap P_f\right) \geq 0$$

və

$$\lambda\left(E \cap N_f\right) \leq 0$$

olar. Bu isə o deməkdir ki, P_f və N_f çoxluqları λ üçün Hahn ayrılışıdır. ∎

Teoremdə qeyd olunan $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ ayrılışına Jordan ayrılışı deyilir. Aydındır ki, istənilən $E \in \mathcal{A}$ üçün

$$|\lambda(E)| \leq |\lambda|(E)\,.$$

$\{X, \mathcal{A}\}$ ölçülən fəza və λ kompleks ölçü isə hər bir $E \in \mathcal{A}$ üçün $\lambda = \lambda' + i\lambda''$ kimi göstərilə bilər. Burada λ' və λ'' sonlu işarəli ölçülərdir. Onda Jordan teoreminə görə hər bir λ kompleks ölçüsü

$$\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 + i\lambda_3 - i\lambda_4$$

şəklində yazıla bilər. Burada $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ və λ_4 $\{X, \mathcal{A}\}$-da sonlu ölçülərdir. Belə ayrılışa da Jordan ayrılışı deyilir. Burada $\lambda' = \lambda_1 - \lambda_2$ və $\lambda'' = \lambda_3 - \lambda_4$ Jordan ayrılışlarıdır.

İndi λ kompleks ölçüsünün $|\lambda|$ variasiyasına diqqət edək. Hər bir $E \in \mathcal{A}$ ölçülən çoxluğu üçün

$$|\lambda|(E) = \sup_{A_j} \sum_{j=1}^{n} \left|\lambda(A_j)\right|\,,\ A = \bigcup_{j=1}^{n} A_j\,,$$

$A_i \cap A_j = \emptyset \; i \neq j$ qəbul edək.

Burada supremum A-nın yuxarıda göstərilən bütün belə ayrılışları üzrə götürülür.

Aşağıdakı təklifləri qeyd edək.

7.3.4. Tutaq ki, $(X, \mathcal{A})$ ölçülən fəza, λ isə bu fəzada kompleks ölçüdür. Onda λ-ya nəzərən $|\lambda|$ variasiyası $(X, \mathcal{A})$-da sonlu ölçüdür.

İsbatı. $|\lambda|(\emptyset) = 0$ olması aşkardır. Aydındır ki, $|\lambda|$-nın sonlu additivliyini iki çoxluq üçün göstərmək kifayətdir. Tutaq ki, $B_1, B_2 \in \mathcal{A}$ və $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Göstərək ki,

$$|\lambda|(B_1 \cup B_2) = |\lambda|(B_1) + |\lambda|(B_2)\,.$$

Fərz edək ki,

$$B_1 \cup B_2 = \bigcup_{j=1}^{n} A_j \;, A_i \cap A_j = \emptyset \,, i \neq j\,.$$

Onda

$$\sum_{j=1}^{n} |\lambda(A_j)| \leq \sum_{j=1}^{n} |\lambda(A_j \cap B_1)| + \sum_{j=1}^{n} |\lambda(A_j \cap B_2)| \leq$$
$$\leq |\lambda|(B_1) + |\lambda|(B_2).$$

$|\lambda|(B_1 \cup B_2)$ bu bərabərsizliyin sol tərəfindəki ədədlərin supremumu olduğundan

$$|\lambda|(B_1 \cup B_2) \leq |\lambda|(B_1) + |\lambda|(B_2)\,.$$

Oxşar mühakimə ilə göstərilir ki,

$$|\lambda|(B_1) + |\lambda|(B_2) \leq |\lambda|(B_1 \cup B_2)\,.$$

Sonuncu iki münasibətdən $|\lambda|$-nın sonlu additiv olduğu göstərilir.

$$\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 + i\lambda_3 - i\lambda_4$$

Jordan ayrılışı olduqda istənilən $E \in \mathcal{A}$ üçün

$$|\lambda|(E) \leq \lambda_1(E) - \lambda_2(E) + \lambda_3(E) - \lambda_4(E)\,. (1)$$

λ_i ölçüləri sonlu olduqlarından $|\lambda|$ variasiyası da sonludur. Digər tərəfdən $\{E_n\}$ azalan $\mathcal{A}$-ölçülən (yəni $A_n \in \mathcal{A}$) çoxluqlar ardıcıllığı olmaqla $\bigcap_n E_n = \emptyset$ isə, $\mu_k(E_n) = 0$ $(k = 1, 2, \dots)$ olacaqdır. (1)-ə əsasən

$$\lim_{n\to\infty} |\lambda|(E_n) = 0$$

olur. Bu isə $|\lambda|$-nın hesabi additiv olduğunu göstərir (bunu isbat edin). □

Asanca göstərmək olar ki, λ $(X, \mathcal{A})$-da kompleks ölçü isə, $|\lambda|$ istənilən $E \in \mathcal{A}$ və

$$|\lambda(E)| \leq \nu(E)$$

şərtini ödəyən müsbət ν ölçülərinin dəqiq aşağı sərhədi olacaqdır (bunu göstərin). Qeyd edək ki, λ sonlu işarəli ölçü olacaqdır. λ kompleks ölçünün tam variasiyası

$$\|\lambda\| = |\lambda|(X)$$

kimi təyin olunur.

Tutaq ki, $(X, \mathcal{A})$ ölçülən fəzadır. $M(X, \mathcal{A}, \mathcal{R})$ ilə bütün həqiqi qiymətli sonlu işarəli ölçülər çoxluğunu, $M(X, \mathcal{A}, \mathbb{C})$ isə bütün kompleks ölçülər çoxluğunu işarə edək. Göstərmək olar ki,

1) $M(X, \mathcal{A}, \mathcal{R})$ və $M(X, \mathcal{A}, \mathbb{C})$ çoxluqları xətti fəza təşkil edirlər;

2) $\|\lambda\| = |\lambda|(X)$ ifadəsi bu fəzalarda norma təyin edir;

3) bu normaya nəzərən qeyd olunan fəzalar Banax fəzaları təşkil edirlər.

4 . Ölçünün mütləq kəsilməzliyi

7.4.1. Tərif. $\mathcal{A}$ σ-cəbrində təyin olunmuş iki λ və μ ölçüləri verilmişdir. $\mu(E) = 0$ şərtini ödəyən hər bir $E \in \mathcal{A}$ çoxluğu üçün $\lambda(E) = 0$ olarsa, λ ölçüsünə μ ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməzdir deyilir. Bu xassə $\lambda \ll \mu$ kimi işarə edilir. λ və μ işarəli ölçülərinin $|\lambda|$ və $|\mu|$ variasiyaları deyilən xassəyə malik olarlarsa, deyirlər ki, λ işarəli ölçüsü μ işarəli ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməzdir.

Aşağıdakı lemma bu anlayışı müəyyən mənada izah edir.

7.4.1. Lemma. Tutaq ki, λ və μ $\mathcal{A}$-da təyin olunmuş sonlu ölçülərdir. $\lambda \ll \mu$ olması üçün zəruri və kafi şərt istənilən $\varepsilon > 0$ üçün elə $\delta(\varepsilon) > 0$ ədədinin olmasıdır ki, hər bir $E \in \mathcal{A}$ və $\mu(E) < \delta(\varepsilon)$ şərtindən $\lambda(E) < \varepsilon$ olsun.

İsbatı. Bu şərt ödənirsə və $\mu(E) = 0$ isə, $\lambda(E) < \varepsilon$ $(\forall\varepsilon > 0)$ olur. Yəni $\lambda(E) = 0$.

Tərsinə, fərz edək ki, elə $\varepsilon > 0$ ədədi və $E_n \in \mathcal{A}$ vardır ki,

$$\mu(E_n) < 2^{-n}$$

olduqda $\lambda(E_n) \geq \varepsilon$ olur.

Fərz edək ki,

$$F_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\,,\ \mu(F_n) < 2^{-n+1} \text{ və } \lambda(F_n) \geq \varepsilon\,.$$

$\{F_n\}$ azalan ölçülən çoxluqlar ardıcıllığı olduğundan

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = 0\,,$$

$$\lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda(F_n) \geq \varepsilon\,.$$

Bu da o deməkdir ki, λ ölçüsü μ-yə nəzərən mütləq kəsilməz deyildir. □

7.4.2. Radon-Nikodim teoremi. Tutaq ki, λ və μ $\mathcal{A}$ σ-cəbrində təyin olunmuş σ- sonlu ölçülərdir və λ ölçüsü μ ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməzdir. Onda elə $f \in M^+(X, \mathcal{A})$ funksiyası vardır ki, istənilən $E \in \mathcal{A}$ üçün

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu . \qquad (1)$$

f funksiyası μ ölçüsünə nəzərən sanki hər yerdə yeganə təyin olunmuşdur (qısaca μ-sanki hər yerdə).

İsbatı. Teoremi əvvəlcə λ və μ sonlu ölçülər olduqda isbat edək.

Tutaq ki, $c > 0$ ədədi üçün $P(c), N(c)$ X-in $\lambda - c\mu$ işarəli ölçüsünə nəzərən Hahn ayrılışıdır. k natural ədədi üçün

$$A_1 = N(c)\,, A_{k+1} = N\big((k+1)c\big)\setminus\bigcup_{j=1}^{k} A_j$$

ölçülər çoxluğuna baxaq.

Aydındır ki, A_k $(k = 1, 2, \dots)$ çoxluqları dizyunkdurlar və

$$\bigcup_{j=1}^{k} N(jc) = \bigcup_{j=1}^{k} A_j .$$

Buradan

$$A_k = N(kc)\setminus\bigcup_{j=1}^{k-1} N(kc) = N(kc)\bigcap\bigcap_{j=1}^{k-1} P(jc)$$

olduğunu alarıq.

E çoxluğu A_k-nın ölçülən altçoxluğu olduğundan $E \subseteq N(kc)$ və $E \subseteq P\big((k-1)c\big)$ olur ki, bu da

$$(k-1)c\mu(E) \le \lambda(E) \le kc\mu(E) \qquad (2)$$

deməkdir.

Aşağıdakı çoxluğa baxaq.

$$B = X\setminus\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} P(jc)\,,$$

Belə ki, bütün k nömrələri üçün $B \subseteq P(kc)$. Buradan isə $\forall k$ nömrəsi üçün

$$0 \leq kc\mu(B) \leq \lambda(B) \leq \lambda(X) < \infty$$

və $\mu(B) = 0$ olur. $\lambda \ll \mu$ olduğundan $\lambda(B) = 0$ olduğunu görürük.

Aşağıdakı funksiyanı daxil edək.

$$f_c(x) = \begin{cases} (k-1)c\,, x \in A_k \\ 0\,, x \in B \end{cases}.$$

E ixtiyari ölçülən çoxluq olduqda, bu çoxluq $E \cap B$ və $E \cap A_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ dizyunkt çoxluqlarının birləşməsindən ibarətdir. Onda (7. 2)-dən alarıq ki,

$$\int_E f_c d\mu \leq \lambda(E) \leq \int_E (f_c + c) d\mu \leq \int_E f_c d\mu + c\mu(X).$$

İndi $c = 2^{-n}$ (n natural ədəddir) qəbul edək. Onda f_c əvəzinə f_n-lə təyin olunmuş funksiyalar ardıcıllığını alarıq. Deməli,

$$\int_E f_n d\mu \leq \lambda(E) \leq \int_E f_n d\mu + 2^{-n}\mu(X). \qquad (3)$$

$m \geq n$ qəbul edək. Onda

$$\int_E f_n d\mu \leq \lambda(E) \leq \int_E f_m d\mu + 2^{-m}\mu(X),$$

$$\int_E f_m d\mu \leq \lambda(E) \leq \int_E f_n d\mu + 2^{-n}\mu(X)$$

olur ki, bu da bütün $E \in \mathcal{A}$ çoxluqları üçün

$$\left| \int_E (f_n - f_m) d\mu \right| \leq 2^{-n}\mu(X)$$

deməkdir.

İndi fərz edək ki, E elə çoxluqdur ki, inteqralaltı funksiya müsbət, mənfi və onların kombinasinasiyası şəklində göstərilə bilir. Onda $m \geq n$ üçün

$$\int_E |f_n - f_m| d\mu \leq 2^{-n+1}\mu(X).$$

Deməli, $\{f_n\}$ ardıcıllığı orta mənada f-ə yığılır. $\{f_n\} \subset M^+$ olduğundan $f \in M^+$ olur. Bundan başqa,

$$\left|\int_E f_n d\mu - \int_E f d\mu\right| \leq \int_E |f_n - f| d\mu \leq \int_E |f_n - f| d\mu.$$

Onda (3)-dən

$$\lambda(E) = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu \ (E \in \mathcal{A})$$

olduğunu görərik. Bu isə teoremin varlıq haqqındakı hökmünün λ və μ ölçülərinin sonlu olduqları halında isbatı deməkdir.

Qeyd edək ki, f funksiyası μ-yə nəzərən ölçüsü sıfır çoxluqlar dəqiqliyi ilə yeganə təyin olunur. Doğrudan da $f, h \in M^+$ və bütün $E \in \mathcal{A}$ üçün

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu = \int_E h d\mu.$$

$E_1 = \{x: f(x) > h(x)\}, E_2 = \{x: f(x) < h(x)\}$ çoxluqları üçün sonuncu ifadəni yazsaq, yəni

$$\int_{E_1} (f - h) d\mu = 0, \int_{E_2} (h - f) d\mu = 0$$

$f - h \in M^+$, $h - f \in M^+$ olduğundan $f = h$ (μ-sanki hər yerdə) olduğunu görərik.

İndi tutaq ki, λ və μ σ-sonlu ölçülər və $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ artan elə ardıcıllıqdır ki,

$$\lambda(A_n) < \infty \, , \mu(A_n) < \infty \, .$$

əvvəl yürütdüyümüz mühakiməni aparsaq, elə $h_n \in M^+$ funksiyasını tapa bilərik ki, $x \notin A_n$ olduqda $h_n(x) = 0$ olar və $E \subset A_n$ ölçülən çoxluq isə

$$\lambda(E) = \int_E h_n d\mu$$

olar. h_n-nin yeganəliyindən $m \geq n$ üçün bütün μ-sanki $x \in A_n$ elementlərinə nəzərən $h_m(x) = h_n(x)$ olur.

Tutaq ki, $f_n = \sup\{h_1, \dots, h_n\}$ və $\{f_n\} \subset M^+$ ardıcıllığı monoton azalandır. $f = \lim f_n$ olsun. $E \in \mathcal{A}$ isə,

$$\lambda(E \cap A_n) = \int_E f_n d\mu \, .$$

$\{E \cap A_n\}$ artan çoxluqlar ardıcıllığı və

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap A_n)$$

olduğundan müsbət ölçünün məlum xassəsi və monoton yığılma haqqındakı Lebeq teoreminə əsasən

$$\lambda(E) = \lim_{n\to\infty} \lambda(E \cap A_n) = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$$

olacaqdır. f-in μ-yeganə olduğunu əvvəl isbat etmişik. □

Teoremdə varlığı göstərilən f funksiyasına adətən λ ölçüsünün μ ölçüsünə nəzərən Radon-Nikodim törəməsi deyilir. Qeyd edək ki, bu funksiya inteqrallanan olmaya da bilər. Əslində f-in (μ-ölçüsünə nəzərən ekvivalent) ölçülən olması üçün zəruri və kafi şərt λ-nın sonlu ölçü olmasıdır.

5 . Ölçünün sinqulyarlığı Lebeq ayrılışı

Elə görünə bilər ki, μ ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməz λ ölçüsü μ ölçüsü kiçik olan çoxluqlar üçün bu xassəni saxlayır, yəni belə çoxluqların λ ölçüsü də kiçik olmalıdır. Lakin bu intiutiv hökmün, ümumiyyətlə, doğru olmadığını göstərən yeni anlayış verək.

7.5.1. Tərif. $\mathcal{A}$ σ-cəbrində təyin olunmuş iki λ və μ ölçüləri üçün $A, B \in \mathcal{A}$ dizyunkt çoxluqlarının varlığından

$$X = A \cup B$$

və $\lambda(A) = \mu(B) = 0$ olarsa, bu ölçülərə qarşılıqlı sinqulyar ölçülər deyilir. Bu halda sinqulyarlığı $\lambda \perp \mu$ kimi yazırlar. Aydındır ki, λ və μ ölçülərinin sinqulyarlığı simmetrik anlayışdır. Bəzən deyirlər ki, λ ölçüsü μ ölçüsünə nəzərən sinqulyardır.

7.5.2. Lebeqin ayrılış teoremi. Tutaq ki, λ və μ $\mathcal{A}$ σ-cəbrində təyin olunmuş σ-sonlu ölçülərdir. Onda μ ölçüsünə nəzərən sinqulyar elə λ_1 ölçüsü və μ ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməz elə λ_2 ölçüsü vardır ki, λ ölçüsü $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ ayrılışına malikdir. λ_1 və λ_2 ölçüləri yeganədirlər.

İsbatı. Tutaq ki, $\nu = \lambda + \mu$ və ν σ-sonlu ölçüdür. λ və μ ölçüləri ν ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməz olduqlarından Radon-Nikodin teoreminə əsasən elə $f, g \in M^+(X, \mathcal{A})$ funksiyaları vardır ki, bütün $E \in \mathcal{A}$ çoxluqları üçün

$$\lambda(E) = \int_E f d\nu \, , \mu(E) = \int_E g d\nu$$

Tutaq ki, $A = \{x: g(x) = 0\}, B = \{x: g(x) > 0\}$. Onda $A \cap B = \emptyset$ və $X = A \cup B$. $E \in \mathcal{A}$ üçün aşağıdakı ölçüləri təyin edək.

$$\lambda_1(E) = \lambda(E \cap A) \, , \lambda_2(E) = \lambda(E \cap B) \, .$$

$\mu(A) = 0$ olduğundan $\lambda_1 \perp \mu$. Digər tərəfdən, $\lambda_2 \ll \mu$ olduğunu göstərmək üçün $\mu(E) = 0$ olduqda

$$\int_E g d\nu = 0$$

olduğunu göstərmək kifayətdir. Çünki bu halda ν-sanki $x \in E$ üçün $g(x) = 0$ olur. Buna görə də $\nu(E \cap B) = 0$. $\lambda \ll \nu$ münasibətindən

$$\lambda_2(E) = \lambda(E \cap B) = 0$$

olduğunu görürük. Buradan isə

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$$

olduğunu görürük.

Ayrılışın yeganəliyi isə hər hansı α ölçüsünün $\alpha \ll \mu$ və $\alpha \perp \mu$ şərtlərindən $\alpha = 0$ olması nəticəsindən alınır. □

Teoremdə göstərilən $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ ayrılışına Lebeq ayrılışı deyilir.

6 . L_p $(p \geq 1)$ fəzasında xətti məhdud funksionalın ümumi ifadəsi

Əvvəlcə xətti və məhdud funksionalın təriflərini yada salaq. Bunu $L_p = L_p(X, \mathcal{A}, \mu)$ $(p \geq 1)$ fəzası üçün etsək daha məqsədə uyğun olar.

7.6.1. Tərif. $L: L_p \to R$ (həqiqi ox) inikası istənilən $\alpha, \beta \in R$ və $f, g \in L_p$ üçün

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g)$$

şərtini ödəyərsə, ona xətti funksional deyilir. Əgər bütün $f \in L_p$ elementləri üçün

$$|L(f)| \leq k\|f\|_p$$

şərtini ödəyən k sabit ədədi varsa, L funksionalına məhdud funksional deyilir.

Bu halda, L xətti məhdud funksionalın norması

$$\|L\| = \sup\{|L(f)|: f \in L_p, \|f\|_p \le 1\} \qquad (4)$$

kimi təyin olunur.

İnteqralın xəttiliyini və Hölder bərabərsizliyini nəzərə alsaq, $g \in L_q$ ($q = \infty$, əgər $p = 1$ və $q = p/(p-1)$ əks halda) funksiyası üçün

$$L(f) = \int_X fg d\mu \qquad (5)$$

çevirməsi L_p fəzasında xətti məhdud funksionaldır və

$$\|L\| \le \|g\|_q$$

olur. Əslində

$$\|L\| = \|g\|_q \text{ (isbat edin!)} .$$

Riss göstərmişdir ki, L_p fəzasında xətti məhdud funksional (5) şəklindədir. Bunun üçün əvvəlcə aşağıdakı lemmanı isbat edək.

7.6.2. Lemma. Tutaq ki, L_p fəzasında xətti və məhdud L funksionalı təyin olunmuşdur. Onda bütün $f \in L_p$ funksiyaları üçün elə L^+ və L^- müsbət məhdud xətti funksionalları vardır ki,

$$L(f) = L^+(f) - L^-(f) .$$

İsbatı. $f \ge 0$ olduqda

$$L^+(f) = \sup\{L(\varphi): \varphi \in L_p, 0 \le \varphi \le f\} .$$

Aydındır ki, $c \ge 0$ və $f \ge 0$ üçün

$$L^+(cf) = cL^+(f) .$$

$0 \le \varphi_j \le f_j$ ($j = 1, 2$) olduqda

$$L(\varphi_1) + L(\varphi_2) = L(\varphi_1 + \varphi_2) \le L(f_1 + f_2) .$$

Bütün bu cür $\varphi_j \in L_p$ elemenləri üzrə sonuncu bərabərsizlikdə sup-da onu ödəyəcəkdir, yəni

$$L^+(f_1) + L^+(f_2) \leq L^+(f_1 + f_2) . \qquad (6)$$

Tərsinə, $0 \leq \psi \leq f_1 + f_2$ olduqda, $\varphi_1 = \sup(\psi - f_2, 0)$ və $\varphi_2 = \inf(\psi, f_2)$ qəbul edək. Onda $\varphi_1 + \varphi_2 = \psi$ və $0 \leq \varphi_j \leq f_j$ $(j = 1, 2)$ olur.

Deməli, $L(\psi) = L(\varphi_1) + L(\varphi_2) \leq L^+(f_1) + L^+(\varphi_2)$. Sonuncu bərabərsizlik bütün $\psi \in L_p$ elementinə görə ödəndiyindən $f_j \geq 0$ və $f_j \in L_p$ $(j = 1, 2)$ üçün

$$L^+(f_1 + f_2) \leq L^+(f_1) + L^+(f_2) \; (7)$$

(6) və (7)-dən L^+ funksionalının

$$L^+(f_1) + L^+(f_2) = L^+(f_1 + f_2) ,$$

$f_j \geq 0, f_j \in L_p$ olduğunu görərik. Yəni L^+ funksionalı xətti funksionaldır. L^+-un təyinindən onun məhdudluğu bilavasitə alınır.

İndi ixtiyari $f \in L_p$ elementi üçün

$$L^+(f) = L^+(f^+) - L^+(f^-)$$

təyin edək. Burada $f = f^+ - f^-$.

İndi $f \in L_p$ üçün L^- funksionalını təyin edək.

$$L^-(f) = L^+(f) - L(f) .$$

Asanca göstərmək olar ki, L^- xətti məhdud müsbət funksionaldır və

$$L = L^+ - L^- . \square$$

7.6.3. Teorem (*L_1 fəzası üçün Riss göstərilişi*). Futaq ki, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-sonlu ölçülən fəza və L bu fəzada xətti məhdud funksionaldır. Onda elə $g \in L_\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ elementi vardır ki, (5) ifadəsi istənilən $f \in L_1$ üçün doğrudur. Bundan başqa $\|L\| = \|g\|_\infty$ və $g \geq 0$ olduqda L müsbət xətti funksionaldır.

İsbatı. Əvvəlcə fərz edək ki, $\mu(X) < \infty$ və L müsbət funksionaldır. $\lambda: \mathcal{A} \to R$ ölçüsünü $\lambda(E) = L(\chi_E)$ $(E \in \mathcal{A})$ kimi təyin edək. Aydındır ki, $\lambda(\emptyset) = 0$. Tutaq ki, $\{E_n\} \subset \mathcal{A}$ artan ölçülən ardıcıllıqdır və $E = \bigcup E_n$, onda $\{\chi_{E_n}\}$ ardıcıllığı nöqtəvi olaraq χ_E funksiyasına yığılır. Qeyd edək ki, χ_E funksiyası E çoxluğunun xarakteristik funksiyasıdır. $\mu(X) < \infty$ olduğundan bu ardıcıllıq L_1 fəzasında χ_E funksiyasına yığılır.

$$0 \le \lambda(E) - \lambda(E_n) = L(\chi_E) - L(\chi_{E_n}) = L(\chi_E - \chi_{E_n}) \le$$
$$\le \|L\| \cdot \|\chi_E - \chi_{E_n}\|$$

olduğundan λ ölçüdür. Bundan başqa, $A \in \mathcal{A}$ və $\mu(A) = 0$ isə $\lambda(A) = 0$ olur ki, bu da $\lambda \ll \mu$ deməkdir.

Radon-Nikodim teoremini tətbiq etsək, bütün $E \in \mathcal{A}$ çoxluqları üçün elə mənfi olmayan $g: \mathcal{A} \to R$ funksiyasını tapmaq olar ki,

$$L(\chi_E) = \lambda(E) = \int \chi_E g d\mu .$$

olar. Buradan isə istənilən $\mathcal{A}$-ölçülən φ sadə funksiyası üçün

$$L(\varphi) = \int \varphi g d\mu .$$

olduğu alınır.

İndi tutaq ki, f L_1-də mənfi olmayan funksiyadır.

Fərz edək ki, $\{\varphi_n\}$ artan sadə funksiyalar ardıcıllığı sanki hər yerdə L_1-də f-ə yığılır. L məhdud olduğundan (yəni eyni zamanda kəsilməzdir)

$$L(f) = \lim_{n \to \infty} L(\varphi_n) .$$

Bundan başqa, monoton yığılma haqqındakı teoremə əsasən

$$L(\varphi) = \lim_{n \to \infty} \int \varphi_n g d\mu = \int f g d\mu .$$

İxtiyari $f \in L_1$ funksiyası üçün bu münasibət xəttilikdən alınır.

İndi σ -sonlu hala baxaq. $F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_n \subset \cdots$ sonlu ölçülü çoxluqlar üçün $X = \bigcup F_n$ isə əvvəlki mühakiməyə əsasən elə $g_n \geq 0$ funksiyaları vardır ki, $\forall f \in L_1$

$$L(f\chi_{F_n}) = \int f\chi_{F_n} g_n d\mu .$$

$m \leq n$ isə sanki bütün $x \in F_m$ üçün $g_m(x) = g_n(x)$. Bu yolla L-i təyin edən g funksiyasını almış oluruq.

İndi L L_1-də təyin olunmuş ixtiyari xətti məhdud funksional olsa, 7.6.2 lemmasına əsasən $L = L^+ - L^-$ şəklində göstərilişi yaza bilərik. Burada L^+ və L^- məhdud müsbət xətti funksionallardır. Əvvəlki mühakiməni bu funksionallara tətbiq etsək, onları təyin edən g^+ və g^- funksiyalarını almış olarıq. $g = g^+ - g^-$ qəbul etsək, bütün $f \in L_1$ üçün

$$L(f) = \int fg d\mu$$

ifadəsini göstərmiş oluruq. Teoremin $\|L\| = \|g\|_\infty$ hökmünün isbatı oxucuya tapşırılır. □

7.6.4. Teorem (*L_p fəzası üçün Riss göstərilişi*). Tutaq ki, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçülən fəza, L isə $L_p(X, \mathcal{A}, \mu)$ $(1 < p < \infty)$ fəzasında təyin olunmuş xətti məhdud funksionaldır. Onda elə $g \in L_q(X, \mathcal{A}, \mu)$ $(q = p/p - 1)$ funksiyası vardır ki, bütün $f \in L_p$ üçün

$$L(f) = \int fg d\mu$$

ifadəsi doğrudur. Bundan başqa, $\|L\| = \|g\|_q$.

İsbatı. $\mu(X) < \infty$ halında teoremin isbatı əvvəlki teoremin isbatının kiçik dəyişməsi hesabına göstərilir. Yəni elə $g \in L_q$ funksiyası vardır ki, $\|L\| = \|g\|_q$ və $L(f) = \int fg d\mu$ münasibəti doğrudur.

İndi tutaq ki, $\{f_n\} \subset L_p$ ardıcıllığı $\|f_n\| = 1$ və

$$L(f_n) \geq \|L\| \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Eyni zamanda elə $X_0 \in \mathcal{A}$ σ-sonlu çoxluğu vardır ki, $x \in X \setminus X_0$ olduqda $f_n(x) = 0$ olur. Tutaq ki, $E \in \mathcal{A}$, $E \cap X_0 = \emptyset$. Onda

$$\|f_n \pm t\chi_E\|_p = \left(1 + t^p \mu(E)\right)^{1/p} \ (t \geq 0).$$

Əlavə olaraq,

$$L(f_n) - L(\pm t\chi_E) \leq |L(f_n \pm t\chi_E)|$$

olduğundan ixtiyari n natural ədədi üçün

$$|L(t\chi_E)| \leq \|L\| \left\{\left(1 + t^p \mu(E)\right)^{1/p} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right\}.$$

$n \to \infty$ şərtilə sonuncu bərabərsizliyin hər tərəfini $t(> 0)$-yə bölsək,

$$|L(\chi_E)| \leq \|L\| \frac{\left(1 + t^p \mu(E)\right)^{1/p} - 1}{t}.$$

olar. Buradan isə $t \to 0^+$ şərtilə Lopital qaydasını tətbiq etsək, X_0 σ-sonlu ölçülən çoxluğun tamamlanmasında yerləşən hər $E \in \mathcal{A}$ çoxluğu üçün $L(\chi_E) = 0$ olacaqdır. Deməli, $\forall f \in L_p$ funksiyası üçün $X_0 \cap \{x: f(x) \neq 0\} = \emptyset$ olacaqdır ki, bu da $L(f) = 0$ deməkdir. Beləliklə, əvvəlki mühakiməni tətbiq etsək, X_0-da təyin olunmuş g funksiyasını tapmış olarıq ki, o da L funksionalını təyin edər. g funksiyasını X_0-dan kənarda sıfır qəbul etməklə onu bütün X-ə davam etdirsək, teoremi isbat etmiş oluruq. ::

7. Tapşırıqlar

1. Tutaq ki, λ $(X, \mathcal{A})$ ölçülən fəzasında işarəli və ya kompleks ölçüdür. Göstərin ki, istənilən $E \in \mathcal{A}$ çoxluğu üçün

a) $|\lambda|(E) = 0$ münasibəti hər bir $\mathcal{A}$-ölçülən $G \subset E$ çoxluğu üçün $\lambda(G) = 0$ münasibətilə eyni güclüdür;

b) $\lambda(E) = 0$ münasibətindən $|\lambda|(E) = 0$ olması həmişə alınmaya da bilər.

2. Tutaq ki, λ $(X, \mathcal{A})$ fəzasında işarəli ölçü, ν_1 və ν_2 isə $(X, \mathcal{A})$-da elə müsbət ölçülərdir ki, $\lambda = \nu_1 - \nu_2$. Göstərin ki, $\nu_1(E) \geq \lambda^+(E)$ və $\nu_2(E) \geq \lambda^-(E)$, $E \in \mathcal{A}$.

3. Tutaq ki, λ_1 və λ_2 $(X, \mathcal{A})$ ölçülən fəzasında sonlu işarəli ölçülərdir. $(X, \mathcal{A})$-da aşağıdakı işarəli ölçüləri təyin edək:

$$\lambda_1 \vee \lambda_2 = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)^+ ,$$

$$\lambda_1 \wedge \lambda_2 = \lambda_1 - (\lambda_1 - \lambda_2)^+ .$$

a) Göstərin ki, $\lambda_1 \vee \lambda_2$ bütün $E \in \mathcal{A}$ çoxluqları üçün $\nu(E) \geq \lambda_1(E)$ və $\nu(E) \geq \lambda_2(E)$ şərtlərini ödəyən sonlu işarəli ν ölçülərinin ən kiçiyidir;

b) analoji olaraq $\lambda_1 \wedge \lambda_2$ ölçüsünü xarakterizə edin.

4. Tutaq ki, λ $(X, \mathcal{A})$-da işarəli və ya kompleks ölçüdür. Fərz edək ki, ν $(X, \mathcal{A})$ fəzasında istənilən $E \in \mathcal{A}$ üçün

$$|\lambda(E)| \leq \nu(A)$$

şərtini ödəyən müsbət ölçüdür. Göstərin ki, istənilən $E \in \mathcal{A}$ üçün

$$|\lambda|(E) \leq \nu(E) .$$

5. Tutaq ki, λ və $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ $(X, \mathcal{A})$-da sonlu işarəli və ya kompleks ölçülərdir. Göstərin ki,

$$\lim_{n \to \infty} \|\lambda_n - \lambda\| = 0 .$$

münasibəti, ancaq və ancaq $\{\lambda_n(A)\}$ ardıcıllığı $\lambda(A)$-ya A-ya $(A \in \mathcal{A})$ nəzərən müntəzəm yığıldıqda mümkündür.

6. Tutaq ki, P çoxluğu λ işarəli ölçüsünə nəzərən müsbət çoxluqdur. $E \in \mathcal{A}$ (σ-cəbr) və $E \subset P$ isə, E çoxluğu da λ-ya nəzərən müsbət çoxluqdur.

7. Tutaq ki, P_1 və P_2 çoxluqları λ işarəli ölçüsünə nəzərən müsbət çoxluqdur. Onda $P_1 \cup P_2$-də λ-ya nəzərən müsbət çoxluqlardır.

8. $M \in \mathcal{A}$ çoxluğu λ işarəli ölçüsünə nəzərən sıfır çoxluq olması üçün zəruri və kafi şərt $|\lambda|(M) = 0$ olmasıdır.

9. λ $\mathcal{A}$-da təyin olunmuş işarəli ölçü isə λ-nın qiymətlər çoxluğu məhduddur və

$$\lambda^{+}(E) = \sup\{\lambda(F): F \subseteq E, F \in \mathcal{A}\},$$
$$\lambda^{-}(E) = -\inf\{\lambda(F): F \subseteq E, F \in \mathcal{A}\}.$$

10. $\mu_1 \ll \mu_2$ münasibətindən $\mu_2 \ll \mu_1$ olduğu həmişə doğrudurmu?

11. Tutaq ki, $(X, \mathcal{A})$-də $\mu_n(X) \leq 1$ şərtini ödəyən $\{\mu_n\}$ ölçülən ardıcıllığı verilmişdir. $E \in \mathcal{A}$ üçün

$$\lambda(E) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \mu_n(E)$$

kimi təyin olunan λ-nın ölçü və bütün n nömrələri üçün $\mu_n \ll \lambda$ olduğunu göstərin.

12. Tutaq ki, λ işarəli ölçü və μ $(X, \mathcal{A})$-ölçülən fəzasında ölçüdür. $\lambda \ll \mu$ isə, λ^{+}, λ^{-} və $|\lambda|$ μ ölçüsünə nəzərən mütləq kəsilməzdirlər.

13. Göstərin ki, 7. 4. 1 lemması μ, hətta sonsuz ölçü olduqda da doğrudur. Lakin λ sonsuz ölçü olduqda bu lemmanın hökmü doğru olmaya da bilər. (Doğrudan da, λ-hesabi ölçü və N natural ədədlər çoxluğunun bütün alt çoxluqlarından ibarət $\mathcal{A}$ σ-cəbrindən olan istənilən E çoxluğu üçün

$$\mu(E) = \sum_{n \in E} 2^{-n}.$$

14. μ 8 tapşırığındakı ölçü olsun. $E \subset N$ üçün λ-nı

$$\lambda(E) = 0 \text{ , əgər } E = \emptyset$$
$$\lambda(E) = \infty \text{ , əgər } E \neq \emptyset$$

kimi təyin edək. Göstərin ki, μ $\mathcal{A}$ σ-cəbrində sonlu ölçü və λ isə sonsuz ölçüdür. Bundan başqa $\lambda \ll \mu$ və $\mu \ll \lambda$.

15. Tutaq ki, μ sonlu ölçü və $\lambda \ll \mu$. Əlavə fərz edək ki, P_n və Q_n çoxluqları $\lambda - n\mu$ üçün Hahn ayrılışıdır. $P = \bigcap P_n$ və $Q = \bigcup Q_n$ olsun. Göstərin ki, Q çoxluğu bütün λ-lar üçün σ-sonlu və $E \subset P, E \in \mathcal{A}$ olduqda ya $\lambda(E) = 0$, yaxud da $\lambda(E) = +\infty$.

16. Tutaq ki, X qeyri-hesabi çoxluq və $\mathcal{A}$ X-in elə E çoxluqlarından təşkil olunmuşdur ki, ya E, yaxud da $X \backslash E$ hesabi çoxluqdur. μ və λ-nı aşağıdakı kimi təyin edək.

$$\mu(E) = \begin{cases} \text{elementlərin sayı}, E \text{ sonlu çoxluq} \\ +\infty, E \text{ sonsuz çoxluq} \end{cases}$$

$$\lambda(E) = \begin{cases} 0, E \text{ hesabi çoxluq} \\ +\infty, E \text{ qeyri - hesabi çoxluq} \end{cases}.$$

Onda $\lambda \ll \mu$. Lakin Radon-Nikodin teoreminin hökmü doğru olmayacaqdır.

17. Tutaq ki, $X = [0,1]$ və $\mathcal{A}$ X-in Borel çoxluqlarından ibarət σ-cəbrdir. μ $\mathcal{A}$-da hesabi ölçü və λ $\mathcal{A}$-da Lebeq ölçüsü isə λ sonlu ölçüdür. Lakin Radon-Nikodin teoremi doğru olmayacaqdır.

18. Tutaq ki, λ və μ $(X, \mathcal{A})$-da σ-sonlu ölçülər, $\lambda \ll \mu$ və

$$f = \frac{d\lambda}{d\mu}.$$

Onda $g \in M^+(X, \mathcal{A})$ isə

$$\int g d\lambda = \int g f d\mu.$$

(Göstəriş: Əvvəlcə sadə funksiyaya baxılsın və monoton yığılma haqqında teorem tətbiq olunsun).

19. Tutaq ki, λ, μ, ν $(X, \mathcal{A})$ σ-sonlu ölçülərdir. $\nu \ll \lambda$ və $\lambda \ll \mu$ isə μ-sanki hər yerdə

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{d\nu}{d\lambda}\frac{d\lambda}{d\mu}$$

olduğunu göstərin. Həmçinin $\lambda_j \ll \mu$ $(j = 1,2)$ isə μ-sanki hər yerdə

$$\frac{d}{d\mu}(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{d\lambda_1}{d\mu} + \frac{d\lambda_2}{d\mu}$$

olacaqdır.

20. λ və μ σ-sonlu ölçülər, $\lambda \ll \mu$ və $\mu \ll \lambda$ isə sanki hər yerdə

$$\frac{d\lambda}{d\mu} = \frac{1}{d\mu/d\lambda}.$$

21. λ və μ ölçülər. $\lambda \ll \mu$ və $\lambda \perp \mu$ isə $\lambda = 0$.

22. λ işarəli ölçü və μ ölçü isə $\lambda \perp \mu$ olduqda λ^+, λ^- və $|\lambda|$ μ ölçüsünə nəzərən sinqulyardırlar.

23. $(X, \mathcal{A})$-dakı bütün işarəli ölçülər çoxluğu

$$(c\mu)(E) = c\mu(E),$$
$$(\lambda + \mu)E = \lambda(E) + \mu(E)$$

əməllərinə nəzərən xətti fəza təşkil edir. Bu fəzada

$$\|\mu\| = |\mu|(\mathcal{A})$$

normadır və bu normaya nəzərən Banax fəzası təşkil edir.

VIII Fəsil

Ölçünün qurulması

Əvvəlki fəsillərdə ölçünün təyini və ümumi hallarda onun qurulması məsələlərinə toxunmuşduq. Bu fəsildə $\mathbb{R}$ həqiqi oxunda intervalın uzunluğu faktından istifadə etməklə Lebeq ölçüsünü qurmaqla məşğul olacağıq.

Təbiidir ki, a və b həqiqi ədədləri üçün $(a,b]$ yarım intervalının uzunluğunu $b-a$ və

$$(-\infty,b]=\{x\in R: x\le b\},$$
$$(a,+\infty)=\{x\in R: a<x\}$$

və $(-\infty,\infty)$ çoxluqlarının uzunluğunu isə $+\infty$ qəbul etmək lazımdır. Uzunluğu l ilə işarə edək.

Sonlu sayda dizyunkt (cüt-cüt kəsişməyən) intervalların birləşməsinin uzunluğu olaraq onu təşkil edən intervalların uzunluqları cəmi qəbul edilməlidir. Deməli, təşkiledici intervallar kəsişmirlərsə,

$$\bigcup_{j=1}^{n}(a_j,b_j]$$

çoxluğunun uzunluğu olaraq

$$\sum_{j=1}^{n}(b_j-a_j)$$

ədədi qəbul edilir.

Elə görünə bilər ki, biz ölçünü

$$(a,b]\,,(-\infty,b]\,,(a,+\infty)\,,(-\infty,\infty)\ (1)$$

(sonlu və sonsuz) intervalların sonlu birləşməsindən ibarət bütün çoxluqların təşkil etdiyi F ailəsində təyin etmiş oluruq. Lakin bu halda F σ-cəbr təşkil etmir. Asanca görmək olar ki, F-dən olan çoxluqların hesabi sayda birləşməsi F-ə daxil olmaya da bilər.

1 . Həqiqi oxda ölçü

Əvvəlcə bəzi tərifləri yada salaq.

8. 1. 1. Tərif. X çoxluğunun $\mathcal{A}_0$ alt çoxluqlar sistemi

1) $\emptyset , X \in \mathcal{A}_0$.

2) $E \in \mathcal{A}_0$ isə, $E^c = X \backslash E \in \mathcal{A}_0$.

3) $E_1, E_2, \dots, E_n \in \mathcal{A}_0$ isə, $\bigcup_{j=1}^{n} E_j \in \mathcal{A}_j$.

şərtlərini ödəyərsə, ona cəbr deyilir.

8. 1. 2. $\mathcal{A}_0$ X çoxluğunun hər hansı cəbri isə, $\mathcal{A}_0$-da ölçü dedikdə $\mathcal{A}_0$-da təyin olunan və

1) $\mu(\emptyset) = 0$.

2) $\forall E \in \mathcal{A}_0$ üçün $\mu(E) \geq 0$.

3) Hesabi sayda dizyunkt $E_n \in \mathcal{A}_0$ çoxluqlarının $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}_0$ olduqda

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

münasibətlərini ödəyən μ genişlənmiş (yəni $-\infty$ və ya $+\infty$ qiymətlərini də ala bilər) həqiqi funksiyasını nəzərdə tutacağıq.

8.1.3. Lemma. (1) şəklində olan çoxluqların sonlu sayda birləşmələrindən ibarət F ailəsi $\mathbb{R}$-in alt çoxluqlarından təşkil olunmuş cəbr və uzunluq F-də ölçüdür.

İsbatı. Aydındır ki, F cəbrdir. l ilə uzunluq funksiyasını qəbul etsək, 8. 1. 2 tərifindəki 1) və 2) şərtləri ödənirlər. 3) şərtini yoxlayaq. Bunu $(a,b]$ yarım intervalı üçün edəcəyik. Digər halların isbatı oxucuya tapşırılır.

Tutaq ki,

$$(a,b] = \bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j,b_j] \tag{2}$$

və $(a_j,b_j]$ intervalları dizyunkdurlar. Sonlu sayda

$$a \le a_1 < b_1 \le a_2 < \cdots < b_{n-1} \le a_n < b_n \le b$$

şərtini ödəyən

$$(a_1,b_1],(a_2,b_2],\dots,(a_n,b_n]$$

yarım intervallarına baxaq.

Onda

$$\sum_{j=1}^{n} l\left((a_j,b_j]\right) = \sum_{j=1}^{n}(b_j-a_j) = b_1-a_1+b_2-a_2+\cdots$$

$$\dots + b_n - a_n \le b_n - a_1 \le b - a = l((a,b])$$

n ixtiyari olduğundan

$$\sum_{j=1}^{n} l\left((a_j,b_j]\right) \le l((a,b]). \tag{3}$$

İndi əks bərabərsizliyi isbat edək.

Tutaq ki, $\varepsilon > 0$ ixtiyari ədəd və $\{\varepsilon_j\}$ $\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon_j < \varepsilon$ şərtini ödəyən müsbət ədədi ardıcıllıqdır. Ümumiliyi pozmadan $a_1 = a$ qəbul edək (bunu nömrələməni dəyişmək hesabına etmək olar).

Aşağıdakı açıq intervallara baxaq.

$$I_1 = (a_1-\varepsilon, b_1+\varepsilon)$$

$$I_j = (a_j, b_j+\varepsilon_j), j \ge 2.$$

(2) münasibətindən görürük ki, $\{I_j, j=1,2,\dots\}$ çoxluqları $[a,b]$ kompakt intervalının açıq örtüyüdür. Onda $[a,b]$-ni örtən sonlu $I_1, I_2, \dots, I_m$ örtüyü vardır. Yenə ümumiliyi pozmadan

$$a = a_1 \le a_2 < b_1 + \varepsilon_1 < \cdots < a_m < b_{m-1} + \varepsilon_{m-1} \le$$

$$\leq b < b_m + \varepsilon_m$$

qəbul etmək olar. Bu bərabərsizliklərdən

$$b - a \leq (b_m + \varepsilon_m) - a_1 \leq \sum_{j=1}^{m} \left| (b_j + \varepsilon_j) - a_j \right| <$$

$$< \sum_{j=1}^{m} (b_j - a_j) + \varepsilon \leq \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j) + \varepsilon$$

olduğunu görərik. ε ixtiyari olduğundan

$$l((a,b]) \leq \sum_{j=1}^{n} l\left((a_j, b_j]\right)$$

olur. (3) və sonuncu bərabərsizlikdən l uzunluq funksiyasının F-də hesabi additiv olduğunu göstərmiş oluruq. □

2. Ölçülərin davamı

İndi ölçünün cəbrdən σ-cəbrə davamı haqqında daha ümumi hallara baxaq. Bunun üçün əvvəlki fəsillərdən məlum olan bəzi anlayış və faktları yada salaq.

9.2.1. Tutaq ki, X hər hansı çoxluq, $\mathcal{A}_0$ orada cəbr və μ isə ölçüdür. $B \subset X$ ixtiyari çoxluğu üçün

$$\mu^*(B) = \inf \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$$

təyin edək. Burada infinium

$$B \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$$

şərtini ödəyən bütün $\{E_j\} \subset \mathcal{A}_0$ çoxluqları üzrə götürülür. Adətən μ^*-u μ ölçüsünün doğurduğu xarici ölçü adlandırırlar.

Aydındır ki, μ^*, ümumiyyətlə, ölçü deyildir, lakin aşağıdakı xassələrə malikdir.

9.2.2. Lemma. 9.2.1 tərifində təyin olunan μ^* funksiyası aşağıdakı xassələrə malikdir:

a) $\mu^*(\emptyset) = 0$

b) $B \subseteq X$ isə, $\mu^*(B) \geq 0$

c) $A \subseteq B$ isə, $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

d) $B \in \mathcal{A}_0$ isə, $\mu^*(B) = \mu(B)$

e) $\{B_n\} \subset X$ isə

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n).$$

e) xassəsinə μ^* xarici ölçünün hesabi yarım additivlik xassəsi deyilir.

9.2.3.Tərif. $E \subset X$ çoxluğu və bütün $A \subset X$ çoxluqları üçün

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \backslash E) \tag{4}$$

olarsa, E çoxluğuna μ^*- ölçülən çoxluq deyilir. Bütün μ^*-ölçülən çoxluqlar sistemini $\mathcal{A}_0^*$ ilə işarə edək.

9.2.4. Davam haqqında Karateodori teoremi.

Bütün μ^*-ölçülən çoxluqların $\mathcal{A}_0^*$ sistemi $\mathcal{A}_0$-ı daxilinə alan σ-cəbrdir. $\forall\{E_n\} \subset \mathcal{A}_0^*$ dizyunkt çoxluqlar ardıcıllığı üçün

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n). \tag{5}$$

İsbatı. Aydındır ki, $\emptyset$ və X çoxluqları μ^* -ölçüləndirlər. Digər tərəfdən $E \in \mathcal{A}_0^*$ isə, $X \backslash E \in \mathcal{A}_0^*$.

İndi göstərək ki, $\mathcal{A}_0^*$ kəsişməyə nəzərən qapalıdır. Tutaq ki, E və F μ^* -ölçüləndirlər. Onda ixtiyari $A \subseteq X$ və $E \in \mathcal{A}_0^*$ çoxluqları üçün

$$\mu^*(A \cap F) = \mu^*(A \cap F \cap E) + \mu^*\big((A \cap F)\backslash E\big). \tag{6}$$

$F \in \mathcal{A}_0^*$ olduğundan

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \backslash F) \qquad (7)$$

$B = A\backslash(E \cap F)$ olsun. Onda

$$B \cap F = (A \cap F)\backslash E$$

və

$$B \backslash F = A \backslash F .$$

$F \in \mathcal{A}_0^*$ olduğundan

$$\mu^*\big(A\backslash(E \cap F)\big) = \mu^*\big((A \cap F)\backslash E\big) + \mu^*(A\backslash F) . \quad (8)$$

(6), (7) və (8) münasibətlərindən alırıq ki.

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E \cap F) + \mu^*\big(A\backslash(E \cap F)\big)$$

olduğundan $E \cap F \in \mathcal{A}_0^*$. $\mathcal{A}_0^*$ kəsişmə və tamamlamaya nəzərən qapalı olduğundan o, cəbr təşkil edir.

İndi fərz edək ki, $E, F \in \mathcal{A}_0^*$ və $E \cap F = \emptyset$. (4)-də A əvəzinə $A \cap (E \cup F)$ qəbul etsək.

$$\mu^*\big(A \cap (E \cup F)\big) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap F)$$

olacaqdır. $A = X$ olduqda. bu sonuncu münasibət göstərir ki, μ^* $\mathcal{A}_0^*$-da additiv funksiyadır.

İndi göstərəcəyik ki, $\mathcal{A}_0^*$ σ-cəbr və μ^* isə $\mathcal{A}_0^*$-da hesabi additiv ölçüdür. Tutaq ki, $\{E_k\}$ $\mathcal{A}_0^*$-da dizyunkt ardıcıllıq və $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Bundan əvvəl göstərmişdik ki.

$$F_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A}_0^* .$$

Onda $\forall A \subset X$ çoxluğu üçün

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A\backslash F_n) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A\backslash F_n) .$$

$F_n \subseteq E$ olduğundan. $A\backslash E \subseteq A\backslash F_n$ və $n \to \infty$ üçün alarıq

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A\backslash E) \le \mu^*(A) .$$

Digər tərəfdən, 9. 2. 2 (e) lemmasına görə

$$\mu^*(A \cap E) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_k),$$

$$\mu^*(A) \le \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \backslash E).$$

Sonuncu üç bərabərsizlikdən alırıq ki,

$$\mu^*(A) \le \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \backslash E) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \backslash E).$$

Xüsusi halda, $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ çoxluğu μ^*-ölçüləndir. $A = X$ qəbul etsək, (5)-i göstərmiş oluruq.

İndi göstərək ki, $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_0^*$. 9.2.2 (d) lemmasına görə $E \in \mathcal{A}_0$ isə, $\mu^*(E) = \mu(E)$. Lakin biz göstərməliyik ki, E μ^*-ölçülən çoxluqdur. Tutaq ki, $A \subset X$ ixtiyari çoxluqdur. 9.2.2 (e) lemmasına görə

$$\mu^*(A) \le \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \backslash E). \qquad (9)$$

Bunun əksini göstərmək üçün ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədinə görə elə $\{F_n\} \subset \mathcal{A}_0$ ardıcıllığı seçək ki,

$$A \subseteq \bigcup F_n$$

və

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) \le \mu^*(A) + \varepsilon$$

olsun.

$A \cap E \subseteq \bigcup (F_n \cap E)$ və $A \backslash E \subseteq \bigcup (F_n \backslash E)$ olduğundan 9. 2. 2 (e) lemmasına görə

$$\mu^*(A \cap E) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n \cap E),$$

$$\mu^*(A\backslash E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n\backslash E).$$

Deməli,

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A\backslash E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(F_n \cap E) + \mu(F_n\backslash E)| =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) \leq \mu^*(A) + \varepsilon .$$

$\varepsilon > 0$ ixtiyari olduğundan sonuncu bərabərsizlik və (9) bərabərsizliyi göstərir ki, $E \in \mathcal{A}_0^*$. □

Qeyd. Karateodori teoremi göstərir ki, $\mathcal{A}_0$ cəbrində təyin olunmuş μ ölçüsünü $\mathcal{A}_0^*$ σ-cəbrində təyin olunmuş μ^* ölçüsünə davam etdirmək olar.

Göstərmək olar ki, μ^* ölçüsü tam ölçüdür. Yəni $E \in \mathcal{A}_0^*$ üçün $\mu^*(E) = 0$ və $B \subset E$, isə, $B \in \mathcal{A}_0^*$ və $\mu^*(B) = 0$. Bunu isbat etmək üçün $\forall A \subset X$ çoxluğu və 9. 2. 2 (c) lemmasına əsasən

$$\mu^*(A) = \mu^*(E) + \mu^*(E) \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A\backslash B).$$

Eyni zamanda 9. 2. 2 (c) lemmasına görə

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A\backslash B)$$

olduğundan B μ^*-ölçüləndir. Deməli,

$$0 \leq \mu^*(B) \leq \mu^*(E) = 0 .$$

İndi göstərək ki, μ σ-sonlu ölçü isə onun $\mathcal{A}_0^*$ σ-cəbrinə μ^* davamı yeganədir.

9.2.5. Davam haqqında Halın teoremi .

Tutaq ki, μ funksiyası $\mathcal{A}_0$ cəbrində σ-sonlu ölçüdür. Onda μ ölçüsünün $\mathcal{A}_0^*$ σ-cəbrinə yeganə davamı vardır.

İsbatı. μ^*-un $\mathcal{A}_0^*$-da ölçü olması 9.2.4 teoremində μ, hətta σ-sonlu ölçü olmadıqda da göstərilmişdir. Davamın yeganə olduğunu göstərmək üçün tutaq ki, ϑ μ ölçüsünün $\mathcal{A}_0^*$-a digər davamıdır. Əvvəlcə fərz edək ki, μ və deməli, μ^* və ϑ sonlu ölçülərdir. Tutaq ki, $E \subset \mathcal{A}_0^*$ hər hansı çoxluq və $\{E_n\} \subset \mathcal{A}_0$ elə ardıcıllıqdır ki,

$$E \subset \bigcup E_n .$$

ϑ μ ölçüsü vasitəsilə təyin olunduğundan

$$\vartheta(E) \leq \vartheta\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) .$$

Deməli,

$$\vartheta(E) \leq \mu^*(E)\ (\forall E \in \mathcal{A}_0^*) .$$

μ^* və ϑ additiv olduqlarından

$$\mu^*(E) + \mu^*(X \backslash E) = \vartheta(E) + \vartheta(X \backslash E) .$$

Bu bərabərliyin sağ tərəfindəki hədlər sonlu və sol tərəfdəki uyğun hədlərdən böyük olmadığından $\forall E \in \mathcal{A}_0^*$ üçün $\mu^*(E) = \vartheta(E)$ olur. Bu isə μ sonlu ölçü olduqda davamın yeganəliyini göstərir.

İndi tutaq ki, μ σ-sonlu ölçüdür. Əlavə fərz edək ki, $\{F_n\} \subset \mathcal{A}_0$ elə artan çoxluqlar ardıcıllığıdır ki, $\mu(F_n) < \infty$ və $X = \bigcup F_n$. Ölçünün sonlu olduğu halında olduğu kimi göstərmək olar ki, $\forall E \in \mathcal{A}_0^*$ üçün

$$\mu^*(E \cap F_n) = \vartheta(E \cap F_n) .$$

Deməli,

$$\mu^*(E) = \lim_{n\to\infty} \mu^*(E \cap F_n) = \lim_{n\to\infty} \vartheta(E \cap F_n) = \vartheta(E) . \square$$

3. Lebeq ölçüsü

İndi yuxarıda həyata keçirdiyimiz davam məsələsini xüsusi halda $X = R$ (həqiqi ox) olduqda araşdıraq.

8.1.3 lemmasında göstərildi ki,

$$(a,b],\ (-\infty,b],\ (a,+\infty),\ (-\infty,\infty)$$

şəklində olan çoxluqların bütün mümkün sonlu sayda birləşmələrindən ibarət F ailəsi R-də cəbr təşkil edir və l uzunluq funksiyası F-də ölçüdür. Davam prosesini l və F üçün həyata keçirsək, (R,F^*,l^*) ölçülən fəzasını almış olarıq. Bu yolla alınan F^* σ-cəbrinin hər bir elementinə (ölçülən çoxluğa) Lebeq mənada ölçülən çoxluq və F^*-da təyin olunan l^*-a Lebeq ölçüsü deyilir.

Adətən (R,F^*,l^*) ölçülən fəzasından istifadə edərkən bütün belə F^* σ-cəbrləri əvəzinə F-i daxilinə alan ən kiçik σ-cəbr daha məqsədəuyğun sayılır.

Aydındır ki, F-i daxilinə alan ən kiçik σ-cəbr Borel çoxluqlar sistemi olacaqdır. Lebeq ölçüsünün Borel çoxluqları halına daralması Borel və ya Lebeq ölçüsü adlanır.

Bəzən intervalın uzunluğu əvəzinə digər xarakteristikalardan da istifadə olunur. Bunu izah etməyə çalışaq. Tutaq ki, $g: R \to R$ monoton artan funksiyadır, yəni $x \le y$ olduqda $g(x) \le g(y)$ olur. Əlavə fərz edək ki, g funksiyası hər bir nöqtədə sağdan kəsilməzdir, belə ki,

$$g(c) = \lim_{h\to 0+} g(c+h).$$

g monoton olduğundan

$$\lim_{x\to-\infty} g(x),\ \lim_{x\to+\infty} g(x)$$

vardır və qiymətləri $-\infty$ və ya $+\infty$-da ola bilərlər.

Belə funksiya üçün aşağıdakıları təyin edək.

$$\mu_g\big((a,b]\big) = g(b) - g(a),$$

$$\mu_g\big((-\infty,b]\big) = g(b) - \lim_{x\to-\infty} g(x),$$

$$\mu_g\big((a,+\infty)\big) = \lim_{x\to+\infty} g(x) - g(a),$$

$$\mu_g\big((-\infty,\infty)\big) = \lim_{x\to+\infty} g(x) - \lim_{x\to-\infty} g(x).$$

İndi μ_g-ni yuxarıda təyin etdiyimiz F cəbrində təyin etsək, o bu cəbrdə σ-sonlu ölçü olacaqdır. Deməli, bu ölçü yeganə davama malikdir ki, biz onu yenə də μ_g kimi işarə edəcəyik. μ_g ölçüsü F-in bütün Borel çoxluqlarının təşkil etdiyi cəbrdəki ölçüdür. Bu zaman davam nəticəsində alınan ölçüyə Borel-Stiltyes ölçüsü deyilir. Aydındır ki, sonuncu ölçü Karateodori teoreminə görə Borel çoxluqlarını daxilinə alan σ-cəbrdə təyin olunmuş ölçüyə davam edilir. Sonuncuya Lebeq-Stiltyes ölçüsü deyilir.

4. $C_{[0;1]}$ fəzasında xətti məhdud funksionalın ümumi ifadəsi

8.4.1. Teorem (*Riss göstərilişi*). İstənilən $f \in C^*[0;1]$ üçün $[0;1]$ parçasında təyin olunmuş elə məhdud variasiyalı g funksiyası vardır ki, $\forall x \in [0;1]$ üçün

$$f(x) = \int_0^1 x dg \tag{10}$$

və

$$\|f\| = V(g) =$$
$$= (g - \text{nin } [0;1] - \text{də tam variasiyası}) \tag{11}$$

Qeyd. Biz sadəlik üçün, ancaq həqiqi qiymətli funksiyalara baxırırıq.

Teoremin isbatı. Əvvəlcə şərtləşək ki, Riman-Stiltyes inteqralı haqqında bəzi, lakin əsas məlumatlara malikik. Xüsusi halda, $x \in C_{[0;1]}$ və g funksiyası $[0;1]$-də məhdud variasiyalı isə (qısaca, $g \in BV[0;1]$). Onda məlumdur ki, $\int_0^1 x dg$ inteqralı vardır və aşağıdakı kimi təyin olunur. Tutaq ki,

$$P = \{0 = t_0, t_1, \dots, t_n = 1\}, \; t_0 < t_1 < \dots < t_n$$

$[0;1]$ parçasının ixtiyari bölgüsüdür və $c_i \in [t_{i-1}, t_i)$ ixtiyari nöqtədir. Onda ixtiyari P bölgüsünə görə

$$\max(t_i - t_{i-1}) \; (1 \le i \le n)$$

sıfra yaxınlaşdıqda $\int_0^1 xdg$ Riman-Stiltyes inteqralı var və

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(x(c_i)\big(g(t_i) - g(t_{i-1})\big)\Big) \to \int_0^1 xdg .$$

$g \in BV[0;1]$ yazdıqda. $[0;1]$ parçasının ixtiyari $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ bölgüləri üzrə

$$\sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})| \le G \; (= const.) \qquad (12)$$

cəmlərinin müntəzəm məhdudluğu başa düşülür. $V(g)$ ilə g funksiyasının $[0;1]$ parçasında tam variasiyasını işarə edirik. Başqa sözlə, $V(g)$ (12) cəmlərinin $[0;1]$ parçasının bütün bölgüləri üzrə dəqiq yuxarı sərhədidir. Asanca göstərmək olar ki, $BV[0;1]$ hər bir $g \in BV[0;1]$ üçün

$$\|g\| = |g(0)| + V(g)$$

normasına nəzərən normalaşmış fəza təşkil edir.

Əvvəlcə $C_{[0;1]}$-kəsilməz funksiyalar fəzasına $[0;1]$-da təyin olunmuş bütün məhdud funksiyaların

$$\|x\| = \sup_{0 \le t \le 1} |x(t)|$$

normasina nəzərən $M_{[0;1]}$ Banax fəzasının alt fəzası kimi baxaq.

$f \in C^*[0;1]$ olduğundan Hahn-Banax teoreminin məlum nəticəsinə əsasən f-in $C_{[0;1]}$-dən $M_{[0;1]}$-a xətti kəsilməz F davamı vardır. Bu davam $\forall x \in C_{[0;1]}$ üçün $F(x) = f(x)$ və $\|F\| = \|f\|$ xassələrinə malikdir.

$K(s)$ ilə $[0;s]$ parçasının xarakteristik funksiyasını işarə edək. Başqa sözlə, $0 \leq t \leq s$ olduqda $K(s)(t) = 1$ və $s < t \leq 1$ olduqda isə $K(s)(t) = 0$.

$K(0)$ ilə sıfır funksiyanı işarə edək. Buna görə də $K(s) \in M_{[0;1]}, 0 \leq s \leq 1$.

İndi $0 \leq s \leq 1$ üçün $g(s) = F\big(K(s)\big)$ işarə edək və hər hansı P bölgüsü üçün

$$\varepsilon_i = sgn\,[g(t_i) - g(t_{i-1})]$$

qəbul edək. Onda

$$\sum_{i=1}^{n}|g(t_i) - g(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\big|F\big(K(t_i)\big) - F\big(K(t_{i-1})\big)\big| =$$

$$= F\left[\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\big(K(t_i) - K(t_{i-1})\big)\right].$$

Buradan isə

$$\sum_{i=1}^{n}|g(t_i) - g(t_{i-1})| \leq \|f\| \tag{13}$$

olur. Burada $\|F\| = \|f\|$ və

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\big(K(t_i) - K(t_{i-1})\big)\right\| = 1$$

olduğundan istifadə edirik. Deməli,

$$g \in BV[0;1] \text{ və } V(g) \leq \|f\|$$

Bu isə o deməkdir ki, hər bir $x \in C_{[0;1]}$ üçün $\int_0^1 xdg$ inteqralı doğrudan da var və $\max_{1\leq i\leq n}(t_i - t_{i-1})$ kifayət qədər kiçik olduqda istənilən $\varepsilon > 0$ üçün

$$\left|\int_0^1 xdg - \sum_{i=1}^{n}x(t_{i-1})|g(t_i) - g(t_{i-1})|\right| < \varepsilon \tag{14}$$

olur.

İndi ixtiyari $x \in C_{[0;1]}$ funksiyası və P bölgüsünə görə

$$z_n(t) = \sum_{i=1}^{n} x(t_i)[K(t_i) - K(t_{i-1})].$$

pilləvari funksiyasını təyin edək. Onda

$$F(z_n) = \sum_{i=1}^{n} x(t_i)[g(t_i) - g(t_{i-1})].$$

Buna görə də

$$\lim_{n \to \infty} F(z_n) = \lim_{n} \sum_{i=1}^{n} x(t_i)[g(t_i) - g(t_{i-1})] = \int_0^1 x dg .$$

Digər tərəfdən, $\{z_n(t)\}$ ardıcıllığı $x(t)$ funksiyasına müntəzəm yığılır. $\|z_n - x\| \to 0$. F funksionalı kəsilməz olduğundan

$$F(z_n) \to F(x) .$$

Deməli,

$$F(x) = \int_0^1 x dg . \tag{15}$$

$x \in C_{[0;1]}$ üçün $F(x) = f(x)$ olduğundan

$$f(x) = \int_0^1 x dg . \tag{16}$$

$|f(x)| \leq \|x\|.V(g)$ və nəticədə $\|f\| \leq V(g)$ olduğundan və eyni zamanda (13) münasibətindən $V(g) \leq \|f\|$ olduğuna görə

$$\|f\| = V(g)$$

olur. Bu isə teoremin isbatı deməkdir. .

Qeyd. Teoremdə qurulan g funksiyası yeganə deyildir. Məsələn,

$$g_0(t) = g(t) + a, 0 \leq t \leq 1, a = const$$

qəbul etsək,

$$f(x) = \int_0^1 x dg = \int_0^1 x d g_0$$

və $V(g_0) = V(g)$ olur ki, bu da f-in teoremdə nəzərdə tutulan ifadəsinin yeganə olmadığını göstərir. Buna görə də $C^*[0;1]$ qoşma fəzanı $BV[0;1]$ fəzası ilə eyniləşdirə (izometriya dəqiqliyi ilə) bilmərik.

Bunu aradan qaldıra bilmək üçün $BV[0;1]$-dən olan funksiyaların iki mühüm xassəsindən istifadə edəcəyik. Tutaq ki, $g \in BV[0;1]$. İlk olaraq qeyd edək ki, hər bir $t \in [0;1]$ üçün

$$\lim_{s \to t+} g(s) = g(t+0)$$

sağ limiti var. İkincisi g funksiyasının kəsilmə nöqtələri hesabi çoxluq təşkil edir.

Aşağıdakı fəzanı daxil edək.

$$\widetilde{BV}[0;1] = \left\{ \begin{matrix} G: G \in BV[0;1], G(0) = 0, G(t+0) = G(t), \\ 0 < t < 1 \end{matrix} \right\}$$

Aydındır ki, $\widetilde{BV}[0;1]$ çoxluğu $BV[0;1]$ fəzasının alt fəzasıdır və $\|G\| = V(G)$. Göstərək ki, $C^*[0;1]$ qoşma fəzasını $\widetilde{BV}[0;1]$ ilə eyniləşdirə bilərik.

Tutaq ki, $f \in C^*[0;1]$ və $g \in BV[0;1]$ elədir ki, (16) ödənir. Hər bir $0 < t < 1$ üçün G-ni elə təyin edək ki,

$$G(0) = 0\,, G(1) = g(1) - g(0)$$

və

$$G(t) = g(t+) - g(0)\,.$$

Onda

$$G(t) = g(t) - g(0)$$

kimi təyin edək. Aydındır ki, $g(t)$ $0 < t < 1$ nöqtələrində kəsilməzdir. Eyni zamanda bu da aşkardır ki,

$$G \in \widetilde{BV}[0;1]$$

və

$$f(x) = \int_0^1 x dg = \int_0^1 x dG \text{ }, \forall x \in C_{[0;1]} \text{ }.$$

Həmçinin $G \in \widetilde{BV}[0;1]$ yeganədir. Doğrudan da, müəyyən $h \in \widetilde{BV}[0;1]$ üçün

$$f(x) = \int_0^1 x dh \text{ }, x \in C_{[0;1]}$$

isə $h(1) - h(0) = G(1) - G(0)$ və $h(0) = G(0) = 0$ olduğundan $h(1) = G(1)$ olur.

İndi tutaq ki, $0 < c < 1$ və $0 \leq t \leq 1$ üçün

$$H(t) = G(t) - h(t)$$

funksiyasına baxaq.

Deməli, $\forall x \in C_{[0,1]}$

$$\int_0^1 x dH = 0 \text{ }.$$

$d > 0$ ədədini elə seçək ki, $c < c + d < 1$ olsun. Aşağıdakı fuhksiyanı təyin edək.

$$x(t) = \begin{cases} 1 \text{ }, x \in [0; c] \\ 0 \text{ }, x \in [c + d; 1] \\ \text{düz xətt parçaları}, x \in (c; 1) \cup (c + d; 0) \end{cases}$$

Onda $x(t) \in C_{[0;1]}$. Hissə-hissə inteqrallasaq

$$0 = H(c) + \int_c^{c+d} x dH = H(c) - H(c) - \int_c^{c+d} x'(t) H(t) dt$$

$$= \frac{1}{d} \int_c^{c+d} H(t) dt \to H(c + 0) \text{ } (d \to 0 +) \text{ }.$$

Deməli, $H(c + 0) = 0$, yəni $G(c +) = h(c +)$ və nəticədə $G(c) = h(c)$ olur. Buna görə də $G(t) = h(t), \forall t \in [0; 1]$.

$\|f\| = V(G)$ olduğundan $C^*[0;1]$ qoşma fəzasını $\widetilde{BV}[0;1]$ fəzası ilə eyniləşdirə bilərik.

5 . Tapşırıqlar

1. Göstərin ki,

$$(a,b)\,,(-\infty,b)\,,(a,+\infty)\,,(-\infty,\infty)$$

intervallarının bütün sonlu birləşmələrindən ibarət G ailəsi R-də cəbr əmələ gətirmir. Lakin G-nin doğurduğu σ-cəbr Borel çoxluqlarından ibarət bir ailədir.

2. Göstərin ki, əgər $(a,+\infty)$ yarım oxu dizyunkt $\{(a_n,b_n]\}$ ardıcıllığının birləşməsindən ibarət isə

$$\sum_{n=1}^{\infty} l\big((a_n,b_n]\big) = +\infty\,.$$

3. Tutaq ki, X $0 < r \le 1$ şərtini ödəyən bütün rasional ədədlər çoxluğudur. $\mathcal{A}$ ilə $\{r \in X : a < r \le b\}$ "yarımaçıq intervalların" bütün sonlu birləşmələrindən ibarət ailəni işarə edək. Burada $0 \le a \le b$ və $a,b \in X$. Göstərin ki, $\mathcal{A}$-nın hər bir boş olmayan çoxluğu sonsuz çoxluqdur. Bununla birlikdə $\mathcal{A}$ -nın doğurduğu σ-cəbr X-in bütün alt çoxluqlarından ibarətdir.

4. $E \subset R$ hesabi çoxluq isə onun Lebeq ölçüsü sıfırdır.

5. Tutaq ki, $I_n = (n,n+1), n = 0,\pm1,\pm2,\dots,\dots$. E alt çoxluğu belə I_n-lərin sonlu birləşməsindən ibarət isə, $l^*(E) < +\infty$. Elə ölçülən E çoxluğu göstərin ki, bütün n-lər üçün $l^*(E \cap I_n>0$ olduqda, $l{*}E<\infty$ olur. İsbat edin ki, $E\subset R$ çoxluğunun Lebeq mənada ölçülən olması üçün zəruri və kafi şərt hər bir n üçün $E \cap I_n$ çoxluğunun Lebeq mənada ölçülən ola bilməsidir.

6. Tutaq ki, $A \subset R$ Lebeq mənada ölçülən çoxluq və $\varepsilon > 0$. Göstərin ki, $\exists G_\varepsilon$ açıq çoxluğu vardır ki, $A \subseteq G_\varepsilon$ və

$$l^*(A) \le l^*(G_\varepsilon) \le l^*(A) + \varepsilon\,.$$

7. Tutaq ki, $B \subset R$ Lebeq mənada ölçülən çoxluq və $\varepsilon > 0$. $B \subseteq I_n = (n, n+1)$ isə $\exists K_\varepsilon \subsetneq B$ kompakt çoxluğu vardır ki,

$$l^*(K_\varepsilon) \leq l^*(B) \leq l^*(K_\varepsilon) + \varepsilon .$$

8. Tutaq ki, $A \subseteq R$ Lebeq mənada ölçülən ixtiyari çoxluqdur. Göstərin ki,

$$l^*(A) = \inf\{l^*(G): A \subseteq G, G - \text{açıq çoxluq}\},$$

$$l^*(A) = \sup\{l^*(K): K \subseteq A, A - \textit{kompakt çoxluq}\}.$$

9. $\lambda = l^*$ ilə R-də Lebeq ölçüsünü işarə edək. A $\lambda(A) < \infty$ olan Lebeq mənada ölçülən çoxluq olsun. $\varepsilon > 0$ isə elə G açıq çoxluğu vardır ki, sonlu sayda intervalların birləşməsindən ibarətdir və

$$\|\chi_A - \chi_G\|_1 = |\lambda(A) - \lambda(G)| < \varepsilon .$$

Bundan başqa, $\varepsilon > 0$ isə elə kəsilməz funksiya vardır ki,

$$\|\chi_A - f\|_1 = \int |\chi_A - f|\, d\lambda < \varepsilon .$$

10. Tutaq ki, $A \subset R$ Lebeq mənada ölçülən çoxluqdur. Onda elə Borel mənada ölçülən $B \subset R$ çoxluğu vardır ki, $A \subseteq B$ və

$$l^*(B \backslash A) = 0 .$$

Göstərin ki, hər bir Lebeq mənada ölçülən çoxluq (eyni ölçüyə nəzərən) Borel çoxluğu ilə Lebeq ölçüsü sıfır olan çoxluğun birləşməsindən ibarətdir. Buradan göstərmək olar ki, hər bir Lebeq mənada ölçülən funksiya sanki hə yerdə Borel mənada ölçülən funksiya ilə üst-üstə düşür.

11. $g \in L(R, \mathcal{B}, \lambda)$ və $\varepsilon > 0$ isə elə f kəsilməz funksiyası vardır ki,

$$\|g - f\|_1 = \int |g - f| d\lambda < \varepsilon .$$

12. Tutaq ki, $\mathcal{B}$ Borel cəbri və λ $\mathcal{B}$-də Lebeq ölçüsüdür. Göstərin ki,

a) hər bir G açıq çoxluğu üçün $\lambda(G) > 0$.

b) hər bir K kompakt çoxluğu üçün $\lambda(K) < \infty$,

c) $\forall E \subset \mathcal{B}$ üçün $\lambda(x + E) = \lambda(E)$.

Burada $x + E = \{x + y : y \in E\}$.

13. Tutaq ki, X hər hansı çoxluq, $\mathcal{A}_0$ isə onun alt çoxluqlarından ibarət cəbr və μ $\mathcal{A}_0$-da ölçüdür.

$$\mu'(B) = \inf\{\mu(A) : B \subseteq A \in \mathcal{A}_0\}$$

təyin edək. Göstərin ki, $\forall E \in \mathcal{A}_0$ $\mu'(E) = \mu(E)$ və $\mu^*(B) \leq \mu'(B)$. Lakin X μ ölçüsü sonlu olan çoxluqların hesabi birləşməsindən ibarət isə $\mu^* = \mu'$.

14. Tutaq ki, X hər hansı çoxluq, $\alpha : \forall E \subset X \to R$ elə funksiyadır ki,

$$0 \leq \alpha(E) \leq \alpha(E \cup F) \leq \alpha(E) + \alpha(F) , F \subset X .$$

$S = \{E \subset X : \alpha(A) = \alpha(A \cap E) + \alpha(A \backslash E), A \subseteq X\}$ işarə edək. $S \neq \emptyset$ isə, o cəbr və α S-də additiv funksiyadır. $S = \emptyset$ ola da bilər. Məsələn, $\forall E \subseteq X$ üçün $\alpha(E) = 1$ olarsa, $S = \emptyset$ olur.

15. Tutaq ki, X və $\mathcal{A}$ 3) tapşırığında olan kimidirlər. $\mathcal{A}_1$ ilə $\mathcal{A}$-nın doğurduğu σ-cəbri işarə edək. Fərz edək ki, μ_1 $\mathcal{A}_1$-də təyin olunmuş hesabi ölçü və $\mu_2 = 2\mu_1$. Göstərin ki, $E \in A$ olduqda $\mu_1(E) = \mu_2(E)$ və $F \in \mathcal{A}_1$ olduqda isə

$$\mu_1(F) \neq \mu_2(F) .$$

16. Tutaq ki, μ R-in $\mathcal{B}$ Borel çoxluqlar ailəsində sonlu ölçü və hər bir $x \in R$ üçün $g(x) = \mu((-\infty, x])$. Göstərin ki, g monoton artan və sağdan kəsilməz funksiyadır və

$$\mu((a, b]) = g(b) - g(a), -\infty < a \leq b < +\infty .$$

IX Fəsil

Ölçülərin hasili

Tutaq ki, X və Y ixtiyari çoxluqlardır. Yada salaq ki, istənilən $x \in X$ və $y \in Y$ elemetləri üçün bütün (x, y) cütləri çoxluğuna X və Y çoxluqlarının Dekart (düz və ya Kartezian) hasili deyilir və $Z = X \times Y$ kimi işarə edilir. Bu fəsildə biz əvvəlcə göstərəcəyik ki, iki $(X, \mathcal{A})$ və $(Y, \mathcal{B})$ ölçülən fəzalarının ($\mathcal{A}$ X-də σ-cəbr, $\mathcal{B}$ isə Y-də σ-cəbrdir) düz hasilini əvvəldən bildiyimiz təbii yollarla ölçülən fəzaya çevirmək olar. Sonda hasil çoxluqla təyin olunan ölçüyə nəzərən inteqralın vuruq fəzalardakı təkrar inteqrallarla əlaqəsini göstərəcəyik.

1 . Ölçülən düzbucaqlılar

9.1.1. Tərif. Tutaq ki, $(X, \mathcal{A})$ və $(Y, \mathcal{B})$ ölçülən fəzalardır. $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$ çoxluqlarının $A \times B$ düz hasilinə ölçülən düzbucaqlı və ya qısaca düzbucaqlı deyilir.

Düzbucaqlıların bütün sonlu sayda birləşmələrindən ibarət küllini (sistemi) Z_0-la işarə edəcəyik. Göstərmək olar ki, $A_j \in \mathcal{A}$, $B_j \in \mathcal{B}$ $(j = 1, 2, \dots, m)$ isə

$$\bigcup_{j=1}^{m} (A_j \times B_j)$$

çoxluğu Z-dən olan düzbucaqlıların sonlu sayda dizyunkt birləşməsindən ibarətdir. Başqa sözlə, Z_0-dan olan hər bir çoxluq Z-dən olan düzbucaqlıların sonlu sayda dizyunkt birləşməsindən ibarətdir.

9.1.2. Lemma. Z_0 sistemi Z-in alt çoxluqlarından ibarət cəbr təşkil edir.

İsbatı. Aydındır ki, Z_0-dan olan sonlu sayda çoxluqların birləşməsi yenə də Z_0-a daxildir. Digər tərəfdən $A_j \in \mathcal{A}$ və $B_j \in \mathcal{B}$ $(j = 1,2)$ çoxluqları üçün

$$(A_1 \times B_1)\backslash(A_2 \times B_2) = [(A_1 \cap A_2) \times (B_1\backslash B_2)] \cup$$
$$\cup [(A_1\backslash A_2) \times B_1]$$

münasibətinə görə Z-dən olan düzbucaqlılarının tamamlanması Z_0-a daxildir. De Morqan düsturuna görə Z_0-dan olan istənilən çoxluğun tamamlanması yenə də Z_0-a daxildir. ::

9.1.3. Tərif. $(X,\mathcal{A})$ və $(Y,\mathcal{B})$ ölçülən fəzaları üçün $\mathcal{F} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ ilə $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ çoxluqlarının $A \times B$ düzbucaqlının $Z = X \times Y$ düz hasilində doğurduğu σ-cəbri işarə edəcəyik. $\mathcal{F}$-dən olan hər bir elementə, yəni Z-in alt çoxluğuna $\mathcal{F}$-ölçülən və ya sadəcə olaraq Z-in ölçülən alt çoxluğu deyilir.

$(X,\mathcal{A},\mu_1)$ və $(Y,\mathcal{B},\mu_2)$ ölçülən fəzaları üçün $\mathcal{F} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$-dən olan ölçülən çoxluğun ölçüsü dedikdə

$$\mu(A \times B) = \mu_1(A) \cdot \mu_2(B)\,, A \in \mathcal{A}\,, B \in \mathcal{B}$$

ədədini başa düşəcəyik. Bu cür təyin olunan μ ölçüsünə μ_1 və μ_2 ölçülərinin hasili deyilir (genişlənmiş həqiqi ox halında $0 \cdot (\pm\infty) = 0$ qəbul edilir).

9.1.4. Ölçülərin hasili haqqında teorem.

Tutaq ki, $(X,\mathcal{A},\mu_1)$ və $(Y,\mathcal{B},\mu_2)$ ölçülən fəzalardır. Onda bütün $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ ölçülən çoxluqları üçün $\mathcal{F} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$-də təyin olunmuş

$$\mu(A \times B) = \mu_1(A) \cdot \mu_2(B) \; (1)$$

ölçüsü vardır. Əgər μ_1 və μ_2 σ-sonlu ölçülər isə (1) vasitəsilə təyin olunan μ ölçüsü yeganədir.

İsbatı. Tutaq ki, $A \times B$ düzbucaqlısı $(A_j \times B_j)$ düzbucaqlılarının dizyunkt birləşməsidir. Onda

$$\chi_{A\times B}(x,y)=\chi_A(x)\cdot\chi_B(y)=\sum_{j=1}^{\infty}\chi_{A_j}(x)\chi_{B_j}(y),$$

$x\in X, y\in Y.$

x-i qeyd edək və sonuncu bərabərliyi μ_2 ölçüsünə nəzərən inteqrallayaq. Eyni zamanda monoton yığılma haqqında teoremi tətbiq etsək, alarıq

$$\chi_A(x)\cdot\mu_2(B)=\sum_{j=1}^{\infty}\chi_{A_j}(x)\cdot\mu_2(B).$$

Yenidən monoton yığılma teoremini tətbiq etsək,

$$\mu_1(A)\cdot\mu_2(B)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu_1(A_j)\cdot\mu_2(B_j)$$

olduğunu görərik.

İndi tutaq ki, $E\in Z_0$. Ümumiliyi pozmadan

$$E=\bigcup_{j=1}^{n}(A_j\times B_j)$$

qəbul edə bilərik. Burada $A_j\times B_j$ qarşılıqlı dizyunkt düzbucaqlılardır.

Əvvəllər apardığımız mühakimələrə görə

$$\mu_0(E)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu_1(A_j)\cdot\mu_2(B_j)$$

kimi təyin olunan ölçü korrekt təyin olunmuşdur və Z_0-da hesabi additivdir. Onda ölçünün davamı haqqında Karateodori teoreminə əsasən μ_0 ölçünü Z_0-ın doğurduğu $\mathcal{F}$ σ-cəbrində təyin olunmuş μ ölçüsünə davam etdirmək olar (μ hesabi additiv ölçüdür).

$(X,\mathcal{A},\mu_1)$ və $(Y,\mathcal{B},\mu_2)$ σ-sonlu ölçülən fəzalar isə μ_0 ölçüsü Z_0 cəbrində σ-sonlu ölçüdür və eyni zamanda (1) münasibətilə təyin olunan ölçü Hahnın davam haqqındakı teoreminə əsasən yeganə olur.

Qeyd. 9.1.4. teoreminə görə $\{A \times B: A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ düzbucaqlıların doğurduğu $\mathcal{F}$ σ-cəbrində (1) münasibətilə təyin olunmuş μ ölçüsü vardır. Bu ölçü hesabi additiv ölçüdür. μ ölçüsünə μ_1 və μ_2 ölçülərinin hasili deyilir və $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ kimi işarə edilir. Bundan əvvəlki fəsildə davam haqqındakı mühakimə μ_1 və μ_2 σ-sonlu olduqda μ ölçüsünün yeganə təyin olunmasını təmin edir. Lakin μ_1 və μ_2 σ-sonlu ölçülər olmadıqda onların hasili yeganə təyin olmaya da bilər.

2 . Kəsiklər

9.2.1. Tərif. Tutaq ki, $E \subset Z\ (= X \times Y)$ hər hansı çoxluqdur. $x \in X$ elementi üçün

$$E_x = \{y \in Y: (x, y) \in E\}$$

çoxluğuna E çoxluğunun x-kəsiyi deyilir. Oxşar olaraq E_y kəsiyinin tərifi verilir. Yəni

$$E^y = \{x \in Y: (x, y) \in E\}\ (y \in Y)$$

çoxluğuna E çoxluğunun y-kəsiyi deyilir.

9.2.2. Tərif. $f: Z \to \bar{R}$ (genişlənmiş həqiqi ox) funksiyası və $x \in X$ elementi üçün Y çoxluğunda təyin olunmuş

$$f_x(y) = f(x, y)\ (y \in Y)$$

f funksiyasının x-kəsiyi deyilir.

Eyni yolla $y \in Y$ elementi üçün X-də təyin olunmuş

$$f^y(x) = f(x, y)\ (x \in X)$$

funksiyasına f funksiyasının y-kəsiyi deyilir.

9.2.3. Lemma. a) $E \subset Z\ (= X \times Y)$ çoxluğu ölçülən isə $\forall x \in X$ və $\forall y \in Y$ elementləri üçün E çoxluğunun hər bir E_x və

E^y kəsikləri də ölçüləndir. Qısaca desək, $E \subset Z$ çoxluğu ölçülən isə onun istənilən kəsiyi də ölçüləndir.

b) $f: Z \to \bar{R}$ ölçülən funksiya isə onun hər bir kəsiyi də ölçüləndir. Başqa sözlə, f ölçülən isə hər bir $x \in X$ və $y \in Y$ elementləri üçün f_x və f^y kəsik funksiyaları da ölçüləndirlər.

İsbatı. a) Tutaq ki, $E = A \times B$ və $x \in X$ isə E çoxluğunun x-kəsiyi $x \in A$ olduqda B və əgər $x \notin A$ olduqda isə $\emptyset$ olacaqdır. Yəni

$$E_x = \begin{cases} B \,, x \in A \,, \\ \emptyset \,, x \notin A \,. \end{cases}$$

Buna görə də düzbucaqlılar Z-dən olan hər bir x-kəsiyi ölçülən çoxluqların $\mathcal{F}_x$ σ-cəbrinə daxildirlər. Buradan isə $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}$ olduğu alınır.

b) İndi tutaq ki, $x \in X$ və $\alpha \in \mathcal{R}$. Onda

$$\{y \in Y: f_x(y) > \alpha\} = \{y \in Y: f(x,y) > \alpha\} =$$
$$= \{(x,y) \in X \times Y: f(x,y) > \alpha\}_x$$

f funksiyası $\mathcal{F}$-ölçülən isə f_x $\mathcal{B}$-ölçülən funksiyadır. Oxşar olaraq f^y funksiyası $\mathcal{A}$-ölçülən funksiyadır. □

3 . Monoton sinif

9.3.1. Tərif. Tutaq ki, X hər hansı bir çoxluq və M isə bu çoxluğun alt çoxluqlarının boş olmayan bir sistemidir. M-in istənilən $\{E_n\}$ ($E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n \subset$) monoton artan ardıcıllığı və istənilən $\{F_n\}$ ($F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset$) monoton azalan ardıcıllığı üçün

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \;, \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

çoxluqları M-ə daxil olarlarsa, M-ə monoton sinif deyilir.

Göstərmək olar ki, hər bir σ-cəbr monoton sinifdir. Həmçinin τ X-in alt çoxluqlarından ibarət boş olmayan külli isə, onu daxilinə alan ən kiçik monoton sinif var. Bu kiçik monoton sinfə τ küllisinin doğurduğu monoton sinif deyilir. Bir maraqlı xassəni də qeyd edək. Fərz edək ki, τ yenə də X-in alt çoxluqlarından ibarət boş olmayan bir küllidir. Onda τ küllisinin doğurduğu S σ-cəbri τ-nın doğurduğu M monoton sinifi daxilinə alır. Bundan əlavə $\tau \subseteq M \subseteq S$ daxilolma münasibətləri ciddi də ola bilər.

İndi göstərək ki, τ cəbr isə $S = M$.

9.3.2. Monoton sinif haqqında lemma. τ müəyyən çoxluqlardan ibarət cəbr isə τ-nın doğurduğu S σ-cəbri τ-nın doğurduğu M monoton sinfi ilə üst-üstə düşür.

İsbatı. Əvvəl qeyd etmişdik ki, $M \subseteq S$. Bunun əksi üçün M-in cəbr olduğunu göstərmək kifayətdir.

Tutaq ki, $E \in M$. Aşağıdakı çoxluqlar sistemini daxil edək.

$$M(E) = \{F \in M: E\backslash F, E \cap F, F\backslash E \subset M\}.$$

Bu sistem elədir ki, içəridəki çoxluqların hamısı M-ə daxildir. Həmçinin aydındır ki, $\emptyset$, $E \in M(E)$ və $M(E)$ monoton sinifdir. Bundan başqa $F \in M(E)$ münasibəti, ancaq və ancaq $E \in M(F)$ olduqda mümkündür. Aydındır ki, E τ cəbrinə daxildirsə, $\tau \subseteq M(E)$. Lakin M τ-nu daxilinə alan ən kiçik monoton sinif olduğundan hər bir $E \in \tau$ üçün $M(E) = M$ olmalıdır. Deməli, $E \in \tau$ və $F \in M$ isə $F \in M(E)$. Buradan isə $E \in \tau$ və $F \in M$ isə $E \in M(F)$ olmalıdır ki, bu da hər bir $F \in M$ olduqda $A \subseteq M(F)$ olduğunu göstərir. M-in minimallığından istifadə etsək, yenidən göstərmiş oluruq ki, hər bir $F \in M$ üçün $M(F) = M$. Buna görə də M kəsişməyə və nisbi tamamlanmaya görə qapalıdır. Lakin $X \in M$ olduğundan M cəbrdir. Digər tərəfdən, M monoton sinif olduğundan o σ-cəbrdir. □

İsbat olunan monoton sinif haqqında lemmaya görə monoton sinif τ cəbrini daxilinə alırsa, τ-nin doğurduğu σ-cəbrini də daxilinə alır.

4 . Fubini teoremi

İndi hasil ölçünü müəyyən kəsik çoxluqların təyin etdiyi funksiyaların Lebeq inteqralı vasitəsilə təyin edək.

9.4.1. Lemma. Tutaq ki, $(X,\mathcal{A},\mu_1)$ və $(Y,\mathcal{B},\mu_2)$ σ-sonlu ölçülən fəzalardır. $E \in \mathcal{F} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ isə

$$f(x) = \mu_1(E_x) \text{ və } g(y) = \mu_2(E^y) \qquad (1)$$

funksiyaları ölçüləndirlər və

$$\int_X f d\mu_1 = \mu(E) = \int_Y g d\mu_2 \qquad (2)$$

İsbatı. Əvvəlcə fərz edək ki, baxılan fəzalar ölçüləri sonlu olan fəzalardır. M ilə lemmanın hökmünün doğru olduğu bütün $E \in \mathcal{F}$ çoxluqlar küllisini işarə edək. Göstərəcəyik ki, M $\mathcal{F}_0$ cəbrini daxilinə alan monoton sinifdir və $M = \mathcal{F}$.

Doğrudan da $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ və $E = A \times B$ isə

$$f(x) = \chi_A(x)\cdot\mu_2(B)\,,\, g(y) = \chi_B(y)\cdot\mu_1(A)\,,$$

$$\int_X f d\mu_1 = \mu_1(A)\cdot\mu_2(B) = \int_Y g d\mu_2\,.$$

$\mathcal{F}_0$-in hər bir elementi sonlu sayda düzbucaqlıların dizyunkt birləşməsi olduğundan $\mathcal{F}_0 \subseteq M$.

İndi göstərək ki, M monoton sinifdir. Doğrudan da, $\{E_n\} \subset M$ birləşməsi E olan monoton artan ardıcıllıqdır. Buna görə də

$$f_n(x) = \mu_2((E_n)_x)\,,\; g_n(y) = \mu_1((E_n)^y)$$

funksiyaları ölçüləndirlər və

$$\int_X f_n d\mu_1 = \mu(E_n) = \int_Y g_n d\mu_2 .$$

Aydındır ki, monoton artan $\{f_n\}$ və $\{g_n\}$ ardıcıllıqları uyğun olaraq $f(x) = \mu_2(E_x)$ və $g(y) = \mu_1(E^y)$ funksiyalarına yığılırlar.

İndi $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$-nün ölçü olduğunu nəzərə alaraq monoton yığılma haqqında teoremi tətbiq etsək,

$$\int_X f d\mu_1 = \mu(E) = \int_Y g d\mu_2$$

olduğunu görərik. Yəni $E \in M$.

μ sonlu ölçü olduğundan eyni qayda üzrə isbat etmək olar ki, $\{F_n\} \subset M$ monoton ardıcıllıq isə $F = \cap F_n \in M$. Deməli, M monoton sinifdir və monoton sinif haqqındakı lemmaya əsasən $M = \mathcal{F}$ olur.

Ölçülən fəzalar σ-sonlu olduqda Z ilə $\mu(Z_n) < +\infty$ şərtini ödəyən artan $\{Z_n\}$ düzbucaqlılarının birləşməsini işarə edək. Lemmanın isbatını sona çatdırmaq üçün əvvəlki mühakiməni aparmaq və monoton yığılma haqqında teoremi tətbiq etmək kifayətdir. □

9.4.2. Tonelli teoremi. Tutaq ki, $(X, \mathcal{A}, \mu_1)$ və $(Y, \mathcal{B}, \mu_2)$ σ-sonlu ölçülən fəzalar və $F: Z = X \times Y \to \bar{R}$ (genişlənmiş həqiqi ox) mənfi olmayan ölçülən funksiyadır. Onda X və Y çoxluqlarında təyin olunan

$$f(x) = \int_Y F_x d\mu_2 \ , g(y) = \int_X F^y d\mu_1 \qquad (3)$$

funksiyaları ölçüləndirlər və

$$\int_X f d\mu_1 = \int_Z F d\mu = \int_Y g d\mu_2 . \qquad (4)$$

Başqa sözlə,

$$\int_X \left(\int_Y F d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int_Z F d\mu = \int_Y \left(\int_X F d\mu_1 \right) d\mu_2 . \quad (5)$$

İsbatı. F funksiyası $\mathcal{F}$-dən olan hər hansı bir çoxluğun xarakteristik funksiyası olduqda teoremin hökmü 9. 4. 1 lemmasından alınır. Xəttilik xassəsinə görə teoremin hökmü ölçülən sadə funksiyalar üçün də doğrudur. $F: Z \to \bar{R}$ funksiyası ixtiyari mənfi olmayan ölçülən funksiya olduqda məlum teoremə əsasən ona yığılan monoton artan mənfi olmayan ölçülən sadə funksiyalar ardıcıllığı vardır. Bu ardıcıllığı $\{\phi_n\}$-lə işarə edək.

$$\phi_n: Z \to \bar{R} , \lim_{n \to \infty} \phi_n = F .$$

Aşağıdakı funksiyaları daxil edək.

$$\varphi_n(x) = \int_Y (\phi_n)_x \, d\mu_2 \, , \psi_n(y) = \int_X (\phi_n)^y d\mu_1 \qquad (6)$$

Aydındır ki, φ_n, ψ_n funksiyaları ölçüləndirlər və $\{\varphi_n\}, \{\psi_n\}$ n-ə görə artan ardıcıllıqlardır. Monoton yığılma haqqındakı teoremə əsasən $\{\varphi_n\}$ ardıcıllığı X-də f-ə, $\{\psi_n\}$ ardıcıllığı isə Y-də g-yə yığılır. Monoton yığılma haqqında teoremin digər tətbiqi

$$\int_X f d\mu_1 = \lim \int_X f_n d\mu_1 = \lim \int_Z \phi_n d\mu = \lim \int_Y \psi_n d\mu_2 =$$

$$= \int_Y g d\mu_2$$

münasibətlərinin doğru olduğunu göstərir. Yenə həmin teoremə əsasən

$$\int_Z F d\mu = \lim \int_Z \phi_n d\mu$$

olur ki, buradan da (4)-ün doğruluğu alınır.

Qeyd edək ki, Tonelli teoreminin hökmü F ixtiyari qiymətli funksiya olduqda (yəni $F \geq 0$ olmadıqda) və μ_1, μ_2 ölçüləri σ-sonlu olmadıqda doğru olmaya da bilər.

Tonelli teoremində Z-də təyin olunmuş mənfi olmayan ölçülən funksiyanın Z üzrə inteqralı iki təkrar inteqralların bərabərliyini göstərir. Burada təkrar inteqrallar sonlu və ya $+\infty$ qiymətlərini ala bilərlər.

İndi elə hala baxaq ki, baxılan funksiya mənfi və müsbət qiymətlər ala bilər, lakin o mütləq inteqrallanan olmalıdır.

9.4.3. Fubini teoremi. Tutaq ki, $(X, \mathcal{A}, \mu_1)$ və $(Y, \mathcal{B}, \mu_2)$ σ-sonlu ölçülən fəzalar və μ isə $\mathcal{F} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ σ-cəbrində təyin olunmuş hasil ölçüdür: $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$.

$F: Z = X \times Y \to R$ μ ölçüsünə nəzərən ölçülən və inteqrallanan funksiya isə

$$f(x) = \int_Y F_x d\mu_2 \text{ və } g(y) = \int_X F^y d\mu_1 \qquad (7)$$

sanki hər yerdə təyin olunmuş genişlənmiş funksiyaları sonlu inteqrallara malikdirlər və

$$\int_X f d\mu_1 = \int_Z F d\mu = \int_Y g d\mu_2 \,. \qquad (8)$$

Başqa sözlə,

$$\int_X \left(\int_Y F d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int_Z F d\mu = \int_Y \left(\int_X F d\mu_1 \right) d\mu_2 \qquad (9)$$

İsbatı. F funksiyası $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ ölçüsünə nəzərən inteqrallanan olduğundan onun F^+ müsbət və F^- mənfi hissələri də inteqrallanandırlar. Tonelli teoremini F^+ və F^- funksiyalarına tətbiq etsək, μ öçüsünə nəzərən uyğun f^+ və f^- funksiyalarının sonlu inteqrallara malik olmalarını görərik. Buna görə də f^+ və f^- funksiyaları μ ölçüsünə nəzərən sanki hər yerdə sonlu qiymətlər aldıqlarından onların fərqi olan f funksiyası μ-sanki hər yerdə təyin olunur və (9)-un birinci hissəsinin doğru olması aşkardır. İkinci hissə oxşar isbat olunur. □

Qeyd edək ki, teoremdəki funksiyanın inteqrallanmasından (7) ilə təyin olunmuş funksiyaların, ancaq sanki hər yerdə inteqrallanmasını söyləmək olur. Misallar göstərir ki, teoremdə F funksiyasının inteqrallanma şərtini atmaq olmaz.

5. Tapşırıqlar

1. Tutaq ki, $A \subseteq X$ və $B \subseteq Y$. A və B çoxluqlarından biri boş isə $A \times B = \emptyset$. Tərsinə, $A \times B = \emptyset$ isə ya $A = \emptyset$, yaxud da $B = \emptyset$.

2. Tutaq ki, $A_j \subseteq X$ və $B_j \subseteq Y$ $(j = 1, 2)$. Onda $A_1 \times B_1 = A_2 \times B_2$ isə $A_1 = A_2$ və $B_1 = B_2$.

3. Tutaq ki, $A_j \subseteq X$ və $B_j \subseteq Y$ $(j = 1, 2)$. Onda
$(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) = [(A_1 \setminus A_2) \times B_2] \cup [(A_1 \cap A_2) \times \times$
$B1 \cup B2 \cup A2 \setminus A1 \times B2$ və sağ tərəfdəki çoxluqlar cüt-cüt dizyunktdurlar.

4. Tutaq ki, $(X, \mathcal{A})$ və $(Y, \mathcal{B})$ ölçülən fəzalardır. $A_j \in \mathcal{A}$ və $B_j \in \mathcal{B}$ $(j = 1, 2, \dots, m)$ isə

$$\bigcup_{j=1}^{m} (A_j \times B_j)$$

çoxluğu Z-dən olan sonlu sayda dizyunkt düzbucaqlıların birləşməsi şəklində göstərilə bilir.

5. Tutaq ki, $A_j \subseteq X$ və $B_j \subseteq Y$ $(j = 1, 2)$. Onda

$$(A_1 \times B_1) \backslash (A_2 \times B_2) = [(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \backslash B_2)] \cup$$
$$\cup [(A_1 \backslash A_2) \times B_1],$$
$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2).$$

6. Tutaq ki, $(R, \mathcal{B})$ həqiqi ədədlərlə birlikdə Borel çoxluqlarından ibarət ölçülən fəzadır. Göstərin ki, $R \times R$-in hər bir açıq çoxluq $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$-yə daxildir. Əslində bu σ-cəbr $R \times R$-in açıq çoxluqlarının doğurduğu σ-cəbrdir. Başqa sözlə, $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ $R \times R$-in Borel cəbridir.

7. Tutaq ki, $f: X \to R$ və $g: Y \to R$. Əlavə fərz edək ki, f $\mathcal{A}$-ölçülən, g $\mathcal{B}$-ölçüləndirlər. Onda $h: X \times Y \to R$ və $h(x, y) = f(x)g(y)$ kimi təyin olunmuş h funksiyası $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$-ölçülən funksiyadır.

8. $E \subset R$ çoxluğu üçün

$$\gamma(E) = \{(x, y) \in R \times R: x - y \in E\}.$$

$E \in \mathcal{B}$ (Borel cəbri) isə göstərin ki, $\gamma(E) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$. Bundan istifadə edərək isbat edin ki, $f: R \to R$ Borel mənada ölçülən funksiya isə $F(x, y) = f(x - y)$ kimi təyin olunan F funksiyası $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$-yə nəzərən ölçülən funksiyadır.

9. Tutaq ki, $E, F \subset Z = X \times Y$ və $x \in X$. Göstərin ki, $(E \backslash F)_x = E_x \backslash F_x$. Əgər $\{E_\alpha\} \subset Z$ isə onda

$$\left(\bigcup E_\alpha\right)_x = \bigcup (E_\alpha)_x.$$

10. Tutaq ki, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ $X = N$ natural ədədlər çoxluğunun bütün alt çoxluqlarında təyin olunmuş hesabi ölçüyə malik ölçülən fəzadır. Əlavə fərz edək ki, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ ixtiyari ölçülən fəzadır. Göstərin ki, $E \subset Z = X \times Y$ çoxluğu $\mathcal{F} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ σ-cəbrinə, ancaq və ancaq E-nin hər bir E_n kəsiyi $\mathcal{B}$-nin elementi

olduqda daxildir. Bu halda yeganə γ hasil ölçüsü vardır və $E \in \mathcal{F}$ üçün

$$\gamma(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n) .$$

$f: Z = X \times Y \to R$ funksiyası, ancaq və ancaq hər bir f_n kəsiyi $\mathcal{B}$-ölçülən olduqda ölçüləndir. Bundan başqa, f funksiyası γ ölçüsünə nəzərən, ancaq və ancaq

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_Y |f_n| d\nu$$

sırası yığıldıqda inteqrallanandır. Bu halda

$$\int_Z f d\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_Y f_n d\nu \right] = \int_Y \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right] d\nu .$$

11. Tutaq ki, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ və $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-sonlu ölçülən fəzalar və $E \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Göstərin ki, hər bir E çoxluğunun μ-sanki kəsiyinin ölçüsü ν ölçüsünə nəzərən sıfıra bərabərdirsə, ν-sanki hər bir E^y kəsiyinin ölçüsü μ ölçüsünə nəzərən sıfıra bərabərdir.

12. Göstərin ki, $R^m \left(= \underbrace{R \times R \times \ldots \times R}_{m} \right)$ fəzasında hər bir $(m-1)$ ölçülü hipermüstəvinin m ölçülü Lebeq ölçüsü sıfıra bərabərdir. Burada $m-1$ ölçülü hipermüstəvi dedikdə müəyyən $b \in R$ sıfırdan fərqli $(a_1, \ldots a_m) \in R^m$ üçün

$$\left\{ x \in R^m : \sum_i a_i x_i = b \right\}$$

çoxluğunu başa düşürük.

13. Tutaq ki, $X = Y = [0; 1]$, $\mathcal{A}$ və $\mathcal{B}$ isə $[0; 1]$-də Borel cəbrləridir, μ ilə $\mathcal{A}$-da Lebeq ölçüsünü, ν ilə $\mathcal{B}$-də hesabi ölçünü işarə edək. Göstərin ki,

$$\mathcal{D} = \{(x, y) : x = y\}$$

$Z = X \times Y$ çoxluğunun ölçülən çoxluğudur. Buna baxmayaraq,

$$\int \nu(\mathcal{D}_x) d\mu(x) \neq \int \mu(\mathcal{D}^y) d\nu(y) .$$

Bu onu göstərir ki, 9.4.1 lemmasının hökmü vuruq ölçüləri σ-sonlu olsalar da belə doğru olmaya da bilər.

14. Əgər F 13 tapşırığındakı $\mathcal{D}$ çoxluğunun xarakteristik funksiyası isə vuruq ölçüləri (vuruq fəzaları) σ-sonlu olsalar da belə Tonelli teoreminin hökmü doğru olmaya bilər.

15. Göstərin ki, 10 tapşırığındakı misala görə $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçülən fəzası ($X = N, \mu$ hesabi ölçü və $\mathcal{A}$ N-in alt çoxluqlar çoxluğu) və ixtiyari $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ ölçülən fəzası üçün Tonelli teoremi doğrudur.

16 . Tutaq ki, $a_{mn} \geq 0, m, n \in N$. Onda

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} \ (\leq +\infty).$$

17. Tutaq ki, a_{mn} $m, n \in N$ aşağıdakı kimi təyin olunmuşdurlar: $a_{nn} = 1, a_{n,n+1} = -1$ və digər m və n-lər üçün $a_{mn} = 0$. Göstərin ki,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = 0 \, , \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} = 1 \, .$$

Yəni Fubini teoremində inteqrallama şərtini atmaq olmaz.

18. Tutaq ki, f $(X, \mathcal{A}, \mu)$ fəzasında, g isə $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ fəzasında ölçülən funksiyalardır. $\mathcal{F} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$-də $h(x, y) = f(x)g(y)$ funksiyasını təyin edək. $\gamma = \mu \otimes \nu$ hasil ölçü isə, göstərin ki, h γ-ölçüləndir və

$$\int_Z h d\gamma = \left[\int_X f d\mu \right] \left[\int_Y g d\nu \right] .$$

19. Fərz edək ki, $(X,\mathcal{A},\mu)$ və $(Y,\mathcal{B},\nu)$ σ-sonlu fəzalar və $E,F \in \mathcal{A}\times\mathcal{B}$. Onda $\nu(E_x)=\nu(F_x)$ $(\forall x\in X)$ olarsa, $\gamma(E)=\gamma(F)$ olacaqdır.

20. Tutaq ki, $f,g\colon(R,\mathcal{B})\to R$ Lebeq mənada inteqrallanan funksiyalardır. Onda 10 tapşırığından çıxır ki, $(x,y)\to f(x-y)g(y)$ funksiyası $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$-yə nəzərən ölçüləndir. λ ilə $\mathcal{B}$-dəki Lebeq ölçüsünü işarə etsək, Tonelli teoreminə və

$$\int_R |f(x-y)|d\lambda(x)=\int_R |f(x)|d\lambda(x)$$

münasibətinə görə göstərin ki,

$$h(x)=\int_R f(x-y)g(y)d\lambda(y)$$

funksiyası sanki hər yerdə sonludur. Bundan başqa,

$$\int|h|d\lambda\le\left[\int|f|d\lambda\right]\left[\int|g|d\lambda\right].$$

Bu cür təyin olunmuş h funksiyasına f və g funksiyalarının bürünməsi (konvolyusiyası) deyilir və adətən $f*g$ kimi işarə edilir.

21. Tutaq ki, $X=R$, $\mathcal{A}$ R-in bütün alt çoxluqlar sistemi və

$$\mu(A)=\begin{cases}0, A-hesabi\ çoxluq\\+\infty, A-qeyri-hesabi\ çoxluq\end{cases}.$$

Biz μ ölçüsünün özü-özünə müxtəlif hasil ölçülərini quraq.

a) $E\in\mathcal{A}\times\mathcal{A}$, $E=G\cup H, G,H\in\mathcal{F}$ və G-nin x-proyeksiyası hesabi, H-ın y-proyeksiyası hesabi olduqda, E-nin γ-hasil ölçüsünü sıfır qəbul edək. Digər hallarda $\gamma(E)=\infty$ olsun. Aydındır ki, γ $\mathcal{F}$-də ölçüdür (hesabi ölçü). $\gamma(E)=0$ isə E müstəvinin hesabi sayda düz xətlərinin birləşməsinə daxildir. $A,B\in\mathcal{A}$ isə göstərin ki,

$$\gamma(A\times B)=\mu(A)\cdot\mu(B).$$

Yəni γ μ-nün öz-özünə hasilidir. $\gamma = \mu \otimes \mu$.

b) $E \in \mathcal{F}$. $E = G \cup H \cup K, G, H, K \in \mathcal{F}, G$ -nin x -proyeksiyası, H-ın y-proyeksiyası və K-nın $y = x$ düz xəttinə proyeksiyası hesabi çoxluqlar olduqda $t(E) = 0$ qəbul edək. Digər hallarda $t(E) = \infty$ olsun. t $\mathcal{F}$-də (hesabi) ölçüdür. $t(E) = 0$ olduqda E düz xətlərin hesabi sayda birləşməsinə daxildir. Göstərin ki, $\forall A, B \in \mathcal{A}$ üçün

$$t(A \times B) = \mu(A) \cdot \mu(B) .$$

Deməli, t ölçüsü μ-nün öz- özünə hasilidir: $t = \mu \otimes \mu$.

c) $E = \{(x, y): x + y = 0\}$ çoxluğu üçün $E \in \mathcal{F}$ olduğunu göstərin. Burada $\gamma(E) = \infty$ olsa da, belə $t(E) = 0$ olacaqdır.

Ədəbiyyat

1. Александров П.С., Введение в общую теорию множеств и функций. М.: Гостехиздат, 1948, 298 с.
2. Вулих Б.З., Краткий курс теории функций вещественной переменной. М.: Наука, 1965, 416 с.
3. Данфорд Н, Шварц Дж.Т., Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962, 896 с.
4. Иосида К., Функциональный анализ . М.: Мир, 1967, 624 с.
5. Камке Э., Интеграл Лебега-Стилтьеса. М.: Физматгиз. 1959, 328 с.
6. Колмогоров А.Н., Фомин С.В., Элементы теории функций и функционального анализа, М.: Наука, 1976, 496 с.
7. Натансон И.П., Теория функций вещественной переменной, изд. 2. М.: Гостехиздат, 1952, 416 с.
8. Рисс Ф., Надь Б.С., Лекции по функциональному анализу . М.: Мир, 1979, 587 с.
9. Рудин У. Основы математического анализа . М.: Мир. 1966, 319 с.
10. Сакс С. Теория интеграла , М.: ИЛ, 1949, 494 с.
11. Халмош П., Теория меры, М.: ИЛ, 1953, 291 с.
12. Хилле Е., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, М.: ИЛ, 1962, 829 с.
13. Шилов Г.Е., Гуревич Б.Л., Интеграл, мера и производная. Общая теория, М.: Наука, 1967, 217 с.
14. Шилов Г.Е., Фан Дык Тинь, Интеграл, мера и производная на линейных пространствах, М.: Наука, 1967, 192 с.
15. Bartle R.G., The elements of integration. New York. Wiley 1966, 129 p.
16. Berberian S.K., Fundamentals of real analysis. Springer, 1999, 494 p.
17. Jacobs K., Measure and integral, New York, 1978, 575 p.
18. Munroe M.E., Measure and integration, 2nd ed., 1971, 290 p.
19. Royden H.L., Real analysis, 2nd ed., Macmillan, 1968, 457 p.

20. Rudin W., Real and complex analysis. 2nd ed., New York, 1974, 412 p.
21. Russel A. Gordan, The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock. AMS, 1991, 394 p.
22. Taylor A.E., General theory of functions and integrations. New York, 1965, 437 p.
23. Wheden R.L., Zygmund A., Measure and integral. Monographs and textbooks in pure and applied mathematics, vol. 43, New York, 1987, 162 p.
24. Babayev R.M., Mirzəyev S.S. Lebeq inteqralı BDU, Bakı 1995, 102 s.
25. Əhmədov Ə.M., Hacıyev A.Ə., Ali riyaziyyat, Bakı: BDU, 2008, 303 s.
26. Hüseynov K.Q., Qəhrəmanov P.F. Funksional analiz, Bakı: Sumqayıt, 2010, 423 s.

Göstərici

Mündəricat

Çapa imzalanmışdır: 02.12.2011. Sifariş №87.
Kağız formatı 60x84 1/16. Həcmi 15,5 ç.v. Sayı 350.

«Bakı Universiteti» nəşriyyatı, Bakı – 370148, Z.Xəlilov, 23.