İxtisas: Kompüter xidmətləri I kurs.
Müəllim: b/m.N.F.Bəşiova .
Fənn: Riyazi analiz .

**Mövzu 1: Həqiqi ədədlərin aksiomatik qurulması.**

Həqiqi ədədlər çoxluğu aşağıdakı xassələri ödəyən ədədlər birləşməsidir.

*I. Nizamlılıq xassəsi*

İstənilən iki $a$ və $b$ ədədləri üçün nizamlılıq münasibəti təyin olunur, yəni istənilən iki $a$ və $b$ həqiqi ədədi aşağıdakı üç münasibətdən ancaq birini ödəyir:

$$a < b,\ a = b,\ a > b;$$

bu zaman əgər, $a < b, b < c$ olarsa, onda $a < c$.

Axırıncı xassə həqiqi ədədlərin nizamlılığının tranzitivlik xassəsi adlanır.

$a < b$ yazılışı $b > a$ yazılışı ilə eynigüclüdür. $a \le b (a \ge b)$ yazılışı o deməkdir ki, ya $a=b$ və ya $a < b$. Məsələn, $2 \le 2,\ 2 \le 5$ və s.

$a < b, a \le b, a > b, a \ge b$ münasibətləri bərabərsizliklər adlanır. $a < b$ və $a > b$ bərabərsizlikləri ciddi bərabərsizliklər adlanır.

*II. Toplama əməlinin xassələri*

$II_1$. İstənilən iki $a$ və $b$ ədədləri cütü üçün

$$a+b=b+a;$$

Bu xassə toplama əməlinin yerdəyişmə və ya kommutativlik xassəsi adlanır.

$II_2$. İstənilən $a, b, c$ ədədləri üçlüyü üçün

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

Bu xassə toplama əməlinin qruplaşdırma və ya assosiativlik xassəsi adlanır.

$II_3$. 0 simvolu ilə işarə olunan sıfır adlanan elə ədəd var ki, istənilən $a$ ədədi üçün

$$a+0=a;$$

Nəticə 1. Sıfırın xassəsini ödəyən ədəd yeganədir.

Doğrudan da fərz edək ki, 2 sıfır var: $0$ və $0'$, onda $0+0'=0$ və $0'+0=0$. Toplamanın kommutativlik xassəsinə əsasən bu bərabərliklərin sol tərəflər və deməli sağ tərəfləri də bərabərdir, $0=0'$.

$II_4$. İstənilən $a$ ədədi üçün, $-a$ kimi işarə olunan və verilmiş ədədin əksi adlanan elə ədəd var ki,

$$a+(-a)=0$$

Nəticə 2. Verilmiş ədədin əksi olan ədəd yeganədir.

Doğrudan da, tutaq ki, $b$ və $c$ ədədləri hər hansı $a$ ədədinin əksidir, yəni $a+b=0$ və $a+c=0$, onda bu bərabərliklərdən birincisindən, alırıq: $(a+b)+c=c$, buradan $(a+c)+b=c$. Amma $a+c=0$, deməli $b=c$.

Nəticə 3. İstənilən $a$ ədədi üçün

$$-(-a)=a \qquad (1)$$

$a+(-a)=0$ bərabərliyindən, toplamanın kommutativliyi xassəsinə əsasən $-a+a=0$ alarıq. Bu o deməkdir ki, $a=-(-a)$.

$II_5$. Əgər $a < b$ olarsa, onda istənilən $c$ ədədi üçün

$$a + c < b + c\,.$$

Nəticə 4. Əgər $a < b$ olarsa, onda $-a > -b$.

Xüsusi halda əgər $a > 0$ olarsa, onda $-a < 0, a < 0$ olarsa, onda $-a > 0$ olar.

Doğrudan da, $a < b$-dən alınır ki, $b + (-a) > 0$, ona görə də

$$-a = -a + b + (-b) = [b + (-a)] + (-b) > 0 + (-b) = -b.$$

$a > 0$ ədədi müsbət, $a < 0$ ədədi isə mənfi ədəd adlanır.

Nəticə 5. Əgər $a < b$ və $c < d$ olarsa, onda

$$a + c < b + d \qquad (2)$$

yəni eyni işarəli bərabərsizliklər arasında hədbəhəd toplama aparmaq olar.

Doğrudan da əgər $a < b$ və $c < d$ olarsa, onda $II_5$ xassəsinə əsasən $a + c < b + c$ və $c + b < d + b$, onda görə də I xassəyə əsasən $a + c < b + d$ alarıq.

Nizamlanmış istənilən iki $a$ və $b$ ədədləri cütü üçün $a+(-b)$, $a$ və $b$ ədədlərinin fərqi adlanır və $a-b$ ilə işarə olunur, yəni tərifə əsasən

$$a-b=a+(-b).$$

Aydındır ki,

$$a-a=0 \qquad (3)$$

belə ki,

$$a-a=a+(-a)=0.$$

Nəticə 6. İstənilən $a$ və $b$ ədədləri üçün

$$-a-b=-(a+b).$$

Doğrudan da,

$$a+b+(-a-b)=(a-a)+(b-b)=0.$$

Nəticə 7. Əgər $a < b, c \geq d$ olarsa, onda $a - c < b - d$.

Doğrudan da $c \geq d$ bərabərsizliyindən alırıq ki, $-c \leq -d$. $a < b$ və $-c \leq -d$ bərabərsizliklərini toplayaraq alarıq: $a - c < b - d$.

*III. Vurma əməlinin xassələri.*

İstənilən nizamlanmış $a$ və $b$ ədədləri cütü üçün onların hasili adlanan, $ab$ simvolu ilə işarə olunan, aşağıdakı xassələri ödəyən yeganə ədəd var.

$III_1$. İstənilən $a$ və $b$ ədədləri cütü üçün

$$ab=ba.$$

Bu xassə vurma əməlinin yerdəyişmə və kommutativlik xassəsi adlanır.

$III_2$. İstənilən $a,b,c$ ədədləri üçlüyü üçün

$a(bc)=(ab)c.$

Bu xassə vurma əməlinin qruplaşdırma və ya assosiativlik xassəsi adlanır.

$III_3$. 1 kimi işarə olunan, vahid adlanan elə $1 \neq 0$ ədədi var ki, istənilən $a$ ədədi üçün

$$a \cdot 1 = a.$$

$III_4$. İstənilən $a \neq 0$ ədədi üçün $\frac{1}{a}$ kimi işarə olunan və onun tərsi adlanan elə ədəd var ki,

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

Sıfır və verilmiş ədədin əksi olan ədədin yeganəliyinin isbatına analoji olaraq vahid və verilmiş ədədin tərsi olan ədədin yeganəliyi də isbat olunur.

$III_5$. Əgər $a < b$ və $c > 0$ olarsa, onda $ac < bc$. Əgər $a < b$ və $c < 0$ olarsa, onda $ac > bc$.

Buradan alınır ki, $a=0$ olduqda eyni işarəli iki vuruğun hasili müsbətdir, müxtəlif işarəli iki vuruğun hasili isə mənfidir.

Nəticə 8. $1>0$.

Doğrudan da əgər fərz etsək ki, $1<0$, onda alarıq ki, $-1>0$. Bu halda $1<0$ bərabərsizliyini -1 müsbət ədədinə vuraraq, $III_5$ xassəsinə əsasən alarıq:

$$1\cdot(-1)<0.$$

Buradan vahidin tərifi və vurmanın kommutativliyindən alınır ki, $-1<0$. Bu isə $1<0$ fərziyyəsinə ziddir.

İstənilən nizamlanmış $a$ və $b$, $b\neq 0$ ədədləri cütü üçün $a\cdot\frac{1}{b}$ ədədi $a$-nın $b$-yə bölünməsindən alınan qismət adlanır və $\frac{a}{b}$ kimi işarə olunur, yəni tərifə əsasən

$$\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}.$$

Verilmiş $a$ ədədi və $n$ natural ədədi üçün $n$ dəfə öz-özünə vurulan $a$ ədədi $n$-dərəcəli ədəd adlanır və $a^n$ kimi işarə olunur, $b^n=a$ şərtini ödəyən $b>0$ ədədi isə $a$ ədədinin $n$ dərəcəli kökü adlanır və $\sqrt[n]{a}$ və ya $a^{\frac{1}{n}}$ kimi işarə olunur.

*IV. Toplama və vurma əməlləri arasında əlaqə.*

İstənilən $a,b,c$ ədədləri üçlüyü üçün

$$(a+b)c=ac+bc.$$

Bu xassə vurmanın toplamaya nəzərən paylama və ya distributivlik xassəsi adlanır.

Nəticə 9. İstənilən $a,b,c$ ədədləri üçün

$$a(b-c)=a(b-c)=ab-ac \qquad (4)$$

Doğrudan da

$$a(b-c)=a(b-c)+ac-ac=a(b-c+c)-ac=ab-ac.$$

Nəticə 10. İstənilən $a$ ədədi üçün

$$a\cdot 0=0.$$

Doğrudan da hər hansı $b$ ədədi götürək, bu zaman $b-b=0$ və (4)-ə əsasən alarıq ki, $a\cdot 0=a(b-b)=ab-ab=0.$

Nəticə 11. İstənilən $a$ və $b$ ədədləri üçün

$$(-a)b=-ab,\quad (-a)(-b)=ab,$$

xüsusi halda

$$(-1)a=-a.$$

Doğrudan da

$$(-a)b=(-a)b+ab-ab=(-a+a)b-ab=ab.$$

Bundan sonra

$$(-a)(-b)=-a(-b)=(-1)(a(-b))=(-1)(-ab)=-(-ab)=ab.$$

Asanlıqla göstərmək olar ki, $II_1,II_2,III_1,III_2$ və IV xassələri induksiyaya görə istənilən sonlu sayda hədlərə aid olunur. Misal olaraq göstərək ki, istənilən $a_1,a_2,...,a_n$ $(n\geq 2)$ və $b$ ədədləri üçün

$$\left(a_1+a_2+...+a_n\right)b=a_1b+a_2b+...+a_nb. \qquad (5)$$

Doğrudan da $n=2$ olduqda bu düstur IV xassəsinə əsasən doğrudur.

İndi fərz edək ki, (5) düsturu n=k olduqda doğrudur, göstərək ki, o n=k+1 üçün də doğrudur. k+1 toplanan üçün $II_2$ xassəsini, sonra isə IV xassəsini tətbiq edərək və induksiya fərziyyəsindən istifadə edərək, alarıq

$$\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_к + a_{к+1}\right) b = \left[\left(a_1 + \ldots + a_к\right) + a_{к+1}\right] b =$$
$$= \left(a_1 + \ldots + a_k\right) b + a_{k+1} b = a_1 b + a_2 b + \ldots + a_k b + a_{k+1} b.$$

$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$ halında (5) düsturundan alınır ki,

$$nb = \underbrace{b + \ldots + b}_{n\ d\partial\partial f},$$

yəni ədədin $n$ natural ədədinə vurulması buə dədin $n$ dəfə toplanmasına gətirilir.

İstənilən $a$ ədədi üçün, $|a|$ ilə işarə olunan və

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \ olduqda, \\ -a & a < 0 \ olduqda, \end{cases}$$

düsturu ilə təyin olunan ədəd $a$ ədədinin mütləq qiyməti və ya Modulu adlanır.

Mütləq qiymətin bir sıra xassələrini qeyd edək.

1. İstənilən $a$ ədədi üçün

$$|a| \geq 0 \qquad (6)$$

$$|a| = |-a| \qquad (7)$$

$$a \leq |a|, \ -a \leq |a| \qquad (8)$$

Doğrudan da əgər $a \geq 0$ olarsa, onda $|a| = a \geq 0$, əgər $a < 0$ olarsa, onda $|a| = -a > 0$ (nəticə7). (6) bərabərsizliyi isbat olundu.

(7) bərabərsizliyini isbat edək. Əgər $a \geq 0$ olarsa, onda $|a| = a$ və $-a \leq 0$, ona görə də mütləq qiymətin tərifinə və (1) bərabərliyinə əsasən alarıq: $|-a| = -(-a) = a = |a|$. Əgər $a < 0$ olarsa, onda $|a| = -a$ və $-a > 0$. Ona görə də $|-a| = -a$. (7) bərabərliyi isbat olundu.

(8) bərabərliyini isbat edək. Əgər $a \geq 0$ olarsa, onda $|a| = a$ və $-a \leq 0 \leq a = |a|$, yəni (8) ödənilir, əgər $a < 0$ olarsa, onda $a < 0 < -a = |a|$, yəni (8) bərabərsizliyi də ödənilir.

2. İstənilən $a$ və $b$ ədədləri üçün

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \qquad (9)$$

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a - b| \qquad (10)$$

Bu bərabərsizlikləri isbat edək. (8)-ə əsasən

$$a \leq |a|, \quad -a \leq |a|,$$
$$b \leq |b|, \quad -b \leq |b|.$$

Buradan (2) bərabərsizliyinə və nəticə 6-ya əsasən

$$a + b \leq |a| + |b|, \ \ -(a + b) \leq |a| + |b|.$$

$a+b$ və ya $-(a+b)$ ədədlərindən biri mənfidir və deməli $|a+b|$ ilə üst-üstə düşür. (9) bərabərsizliyi isbat olunur.

(10) bərabərsizliyi isə (9) bərabərsizliyinin nəticəsidir. Doğrudan da

$$|a| - |b| = \left|\left(a - b\right) + b\right| - |b| \leq |a - b| + |b| - |b| = |a - b|.$$

Analoji olaraq

$$|b| - |a| \le |b - a| = |a - b|.$$

Nəticə 6-ya əsasən, $|b| - |a| = -(|a| - |b|)$. $|a| - |b|$ və ya $-(|a| - |b|)$ ədədlərindən biri $||a| - |b||$ ilə üst-üstə düşür. (10) bərabərsizliyi də isbat olunur.

3. İstənilən $a$ və $b$ ədədləri üçün

$$|ab| = |a||b|.$$

Bu mütləq qiymətin tərifindən və $III_5$ xassəsindən aydındır.

IV. Arximed xassəsi.

İstənilən $a$ ədədi üçün elə $n$ tam ədədi var ki, $n > a$ olsun. Buradan alınır ki, 2 $a > 0$ və $b$ ədədlərindən asılı olmayaraq elə $n$ tam ədədi var ki, $na > b$, yəni kifayət qədər çox sayda $a$ ədədini toplayaraq, əvvəlcədən verilmiş $b$ ədədini aşmaq olar.

Doğrudan da $a \neq 0$ şərtinə əsasən $\frac{b}{a}$ kəsri var, amma V xassəsinə əsasən elə $n > \frac{b}{a}$ tam ədədi var ki, $na > b$.

VI. Həqiqi ədədlərin kəsilməzliyi xassəsi.

Əgər 2 $a$ və $b$ ədədləri verilmişsə, $a \leq b$ olarsa, onda $a \leq x \leq b$ şərtini ödəyən bütün $x$ ədədləri birləşməsi ədədi parça adlanır və $[a,b]$ ilə işarə olunur. $a = b$ halında $[a,b]$ parçası ancaq bir nöqtədən ibarət nöqtədən ibarət olur. $b$-$a$ ədədinə $[a,b]$ parçasının uzunluğu deyilir.

$$[a_1,b_1], [a_2,b_2],...,[a_n,b_n],...$$

ədədi parçalar sistemi biri digərinə daxil olan parçalar sistemi adlanır.

Biri digərinə daxil olan parçalar sistemi. Biri digərinə daxil olan parçalar sistemi üçün heç olmasa bir ədəd var ki, verilmiş sistemin bütün parçalarına daxil olsun.

Ədədlərin bu xassəsi həqiqi ədədlər çoxluğunun Kantor mənada kəsilməzliyi adlanır.

Tərif 1. Tutaq ki, $[a_n,b_n]\ n = 1,2,...$ parçalar sistemi verilmişdir. Əgər hər bir $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $n_\varepsilon$ nömrəsi var ki, bütün $n \geq n_\varepsilon$ nömrələri üçün $b_n - a_n < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənildikdə, deyirlər ki, $[a_n,b_n]\ n = 1,2,...$ parçalarının uzunluqları sıfıra yaxınlaşır.

İxtisas: Kompüter elmləri I kurs.
Fənn: Riyazi analiz .
Müəllim: b/m.N.F.Bəşirova .

**Mövzu: Ədədi çoxluğun dəqiq sərhədləri**

Əgər elə $c$ həqiqi ədədi varsa ki, X çoxluğunun bütün elementləri $c$ ədədini aşmasın, yəni

$$\exists c \in R : \forall x \in X \to x \le c \qquad (1)$$

bərabərsizliyi ödənilirsə, onda X həqiqi ədədlər çoxlüğüna yuxarıdan məhdud çoxluq deyilir.

(1) xassəsinə malik hər bir c həqiqi ədədi X çoxluğunun yuxarı sərhəddi adlanır.

Analoji olaraq əgər

$$\exists c' \in R : \forall x \in X \to x \ge c' \qquad (2)$$

bərabərsizliyi ödənilərsə, onda $X \subset R$ çoxluğuna aşağıdan məhdud çoxluq deyilir. (2) şərtini ödəyən hər bir $c'$ ədədinə X çoxluğunun aşağı sərhəddi deyilir.

Əgər ədədi çoxluq həm yuxarıdan həm də aşağıdan məhduddursa, onda o məhdud çoxluq adlanır, yəni

$$\{\exists c' \in R \; \exists c \in R : \forall x \in X \to c' \le x \le c\} \Leftrightarrow \text{(X məhdud çoxluqdur).}$$

2. Dəqiq yuxarı və dəqiq aşağı sərhədlərin tərifləri.

Tutaq ki, X ədədi çoxluğu yuxarıdan məhduddur, onda (1) şərti ödənir, c ədədi də X çoxluğunun yuxarı sərhəddidir. Aydındır ki, c ədədindən böyük istənilən ədəd eyni zamanda X çoxluğunun yuxarı sərhəddidir. Beləliklə, yuxarıdan məhdud çoxluğun sonsuz sayda yuxarı sərhədlər vardır, onlar arasında ən vacibi ən kiçiyidir. Yəni aşağıdakı şərtləri ödəyən M ədədi:

1) M ədədi X çoxluğunun yuxarı sərhəddidir;

2) M-dən kiçik istənilən M/ ədədi X çoxluğunun yuxarı sərhəddi deyildir.

Tərif 1. Əgər

$$a) \; \forall x \in X \to x \le M \qquad (3)$$

$$b) \; \forall M' < M \; \exists x : M' \in X : x_{M'} > M' \qquad (4)$$

şərtləri ödənilərsə, onda M ədədinə X ədədi çoxluğunun dəqiq yuxarı sərhəddi deyilir.

X ədədi çoxluğunun dəqiq yuxarı sərhəddi *sup*X şəklində işarə olunur. Beləliklə,

$$\{M = \sup X\} \Leftrightarrow \{\forall x \in X \to x \le M\} \wedge \{\forall M' < M \; \exists x_{M'} \in X : x_{M'} > M'\}.$$

Qeyd 1. M=sup X ədədi X çoxluğuna daxil ola da bilər, olmaya da. Məsələn, əgər X çoxluğu $1 \le x \le 2$ şərtini ödəyən x-lərdən ibarətdirsə, onda $\sup X = 2 \notin X$ . Əgər $X_1$ çoxluğu X çoxluğu ilə 3 ədədinin birləşməsindən ibarətdirsə, onda $\sup X_1 = 3 \in X_1$.

Qeyd 2. Dəqiq yuxarı sərhəddin tərifindən alınır ki, əgər X ədədi çoxluğunun dəqiq yuxarı sərhəddi M varsa, onda o yeganədir.

Tərif 2. Əgər

$a) \; \forall x \in X \to x \ge m;$

$b) \; \forall m' > m \; \exists x_{m'} < m'$

şərtləri ödənərsə, onda m ədədinə X çoxluğunun dəqiq aşağı sərhəddi deyilir. X çoxluğunun dəqiq aşağı sərhəddi inf X kimi işarə olunur.

Beləliklə,

$$\{m = \inf X\} \Leftrightarrow \{\forall x \in X \rightarrow x \geq m\} \wedge \{\forall m' > m \ \exists x_{m'} \in X : x_{m'} < m'\}.$$

3. Dəqiq yuxarı (aşağı) sərhəddin varlığı.

Teorem 1. Hər bir boş olmayan, yuxarıdan (aşağıdan) məhdud çoxluğun dəqiq yuxarı (aşağı) sərhəddi vardır.

İsbatı: Dəqiq yuxarı sərhəddin varlığını isbat etməklə kifayətlənək. Tutaq ki, $X \subset R, X \neq \varnothing$, həm də X çoxluğu yuxarıdan məhuddur. X çoxluğunun bütün yuxarı sərhədləri çoxluğunu Y ilə işarə edək. X çoxluğu yuxarıdan məhdud olduğuna görə $Y \neq \varnothing$. Boş olmayan X və Y çoxluqlarının təbiətinə əsasən

$$\forall x \in X \ \forall y \in Y \rightarrow x \leq y .$$

Həqiqi ədədlərin bərabərsizliklə bağlı xassəsinə əsasən

$$\exists c \in R : \forall x \in X \ \ \forall y \in Y \rightarrow x \leq c \leq y .$$

Sol bərabərsizlik o deməkdir ki, c ədədi X çoxluğunun yuxarı sərhəddidir, sağ bərabərsizlik onu göstərir ki, c ədədi X çoxlğunun dəqiq yuxarı sərhəddidir.

Teoremin ikinci hissəsi analoji qaydada isbat olunur.

Teorem 2. (Çoxluqların ayrılması haqqında) Tutaq ki, X və Y boş olmayan elə həqiqi ədədlər çoxluqlarıdır ki, istənilən $x \in X$ və istənilən $y \in Y$ üçün

$$x \leq y \qquad (5)$$

bərabərsizliyi doğrudur, onda sup X və inf X var, həm də

$$\forall x \in X \ \forall y \in Y \rightarrow x \leq \sup X \leq \inf Y \leq y \qquad (6)$$

İsbatı: Məlumdur ki, X boş olmayan çoxluqdur, (5)-ə əsasən Yçoxluğunun istənilən elementi ilə yuxarıdan məhduddur, onda teorem 1-ə görə sup X var. Analoji olaraq boş olmayan Y çoxluğunun X çoxluğunun istənilən elementi ilə aşağıdan məhdud olmasından inf Y-in varlığı alınır. Dəqiq sərhədlərin tərifinə görə

$$\forall x \in X \rightarrow x \leq \sup X , \forall y \in Y \rightarrow \inf Y \leq y \qquad (7)$$

(7)-dən alınır ki, (6) hökmünü isbat etmək üçün

$$\sup X \leq \inf Y \qquad (8)$$

bərabərsizliyini isbat etmək kifayətdir.

(5) bərabərsizliyindən alınır ki, hər bir $y \in Y$ ədədi X çoxluğunun yuxarı sərhəddidir. X çoxluğunun dəqiq yuxarı sərhəddi, yəni sur X ədədi X çoxluğunun yuxarı sərhədlərinin ən kiçiyidir. Beləliklə, istənilən $y \in Y$ üçün

$$\sup X \leq y \qquad (9)$$

bərabərsizliyi ödənilir.

(9) bərabərsizliyindən alınır ki, sup X ədədi Y çoxluğunun aşağı sərhəddidir. Y çoxluğunun dəqiq aşağı sərhəddi yəni inf Y ədədi Y çoxduğunun aşağı sərhədlərinin ən böyüyüdür. Deməli, $\sup X \leq \inf Y$.

4. Dəqiq sərhədlərin xassələri.

Aşağıdakı işarələmələri daxil edək. Tutaq ki, X, $Y \subset R; X, Y \neq \varnothing; \lambda \in R$. Onda

$$\lambda X = \{z \in R : z = \lambda x, x \in X\},$$
$$X + Y = \{z \in R : z = \lambda x, x \in X\}.$$
-1X çoxluğunu qısaca olaraq –X ilə işarə edək.

Xassə 1. Əgər X yuxarıdan məhduddursa və $\lambda > 0$ olarsa, onda
$$\sup \lambda X = \lambda \sup X.$$

İsbatı: Tutaq ki, M=sup X, $z \in \lambda X$. Onda $z = \lambda x, x \in X, x \leq M \to z = \lambda x \leq \lambda M$, buna görə $\lambda M$ çoxluğunun yuxarı sərhəddidir. İndi $\lambda X$ çoxluğunun ixtiyari yuxarı sərhəddini u ilə işarə edək.
$$\forall z \in \lambda X \to z \leq u$$
yəni
$$\forall x \in X \to \lambda x \leq u,$$
və ya
$$\forall x \in X \to x \leq \frac{u}{\lambda}.$$
Axırıncı bərabərsizlik o deməkdir ki, $\frac{u}{\lambda}$ ədədi X çoxluğunun yuxarı sərhəddidir, buna görə də $M \leq \frac{u}{\lambda}$ və ya $\lambda M \leq u$. Beləliklə, $\lambda M$ ədədi $\lambda X$ çoxluğunun yuxarı sərhədlərinin ən kiçiyidir, yəni $\lambda M = \sup \lambda X$.

Xassə 2. Əgər X və Y çoxluqları yuxarıdan məhduddursa, onda
$$\sup(X + Y) = Sup\, X + \sup Y.$$

İsbatı: Tutaq ki, $M_1 = \sup X, M_2 = \sup Y$. Onda
$$\forall x \in X \to x \leq M_1, \forall y \in Y \to y \leq M_2$$
elementləri z=x+y ($x \in X, y \in Y$) şəklində fərz olunan ədədlər çoxluğu X+Y-dir, onda
$$\forall z \in X + Y \to z \leq M_1 + M_2.$$
$\varepsilon > 0$ ədədini qeyd edək. Dəqiq yuxarı sərhəddin tərifinə əsasən
$$\forall \varepsilon > 0 \exists z_\varepsilon \in X, \exists y_\varepsilon \in Y : x_\varepsilon > M_1 - \frac{\varepsilon}{2}, y_\varepsilon > M_2 - \frac{\varepsilon}{2}.$$
Onda $z_\varepsilon = x_\varepsilon + y_\varepsilon$ üçün $z_\varepsilon > M_1 + M_2 - \varepsilon$ olacaqdır, $z_\varepsilon \in X + Y$ olması mümkündür, onda
$$\forall \varepsilon > 0 \exists z_\varepsilon \in X + Y : z_\varepsilon > M_1 + M_2 - \varepsilon.$$

Beləliklə, $M_1+M_2$ ədədi dəqiq yuxarı sərhəddin tərifindəki şərtlərin hər ikisini ödəyir, buna görə də
$$M_1 + M_2 = \sup(X + Y).$$

Xassə 3. Əgər X aşağıdan məhduddursa, onda X yuxarıdan məhduddur, bu halda aşağıdakı bərabərlik doğrudur:

inf X=sup (-X).

İsbatı: Tutaq ki, m=inf X. Onda dəqiq aşağı sərhəddin tərifinə əsasən
$$\forall x \in X \to x \geq m \text{ və } \forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in X : x_\varepsilon < m + \varepsilon$$
şərtləri ödənilməlidir. –X çoxluğu –x şəklində ədədlərdən ibarət olduğuna görə
$$\forall -x \in -X \to -x \leq -m \text{ və } \forall \varepsilon > 0 \exists -x_\varepsilon \in -X : -x_\varepsilon > -m - \varepsilon.$$

Beləliklə, -m ədədi dəqiq yuxarı sərhəddin tərifindəki bütün şərtləri ödəyir, buna görə

$$-m = \sup(-X) \text{ və ya } m = -\sup(-X).$$

5. Genişlənmiş ədəd oxu. İki «qeyri-məxsusi» element daxil etməklə, həqiqi ədədlər çoxluğunu genişləndirək. Onları $+\infty$ və $-\infty$ ilə işarə edəcəyik. $\overline{R} = R \cup \{+\infty, -\infty\}$ çoxluğuna genişlənmiş həqiqi ədədlər çoxluğu deyilir; $+\infty$ və $-\infty$ simvolları üçün hesab əməlləri təyin olunmur. Hesab edək ki,

$$\forall x \in R \rightarrow -\infty < x < +\infty .$$

Bununla əlaqədar olaraq yuxarıdan qeyri məhdud $X \subset R$ çoxluğu üçün dəqiq yuxarı sərhəd anlayışını genişləndirmək məqsədə uyğundur: məhz həmin halda fərz edək ki,

$$\sup X = +\infty .$$

Əgər X çoxluğuna $\overline{R}$-də alt çoxluq kimi baxsaq, bu zaman supX əvvəlki kimi ən kiçik yuxarı sərhəd mənasını daşıyacaqdır. Analoji olaraq, aşağıdan qeyri-məhdud $X \subset R$ çoxluğu üçün fərz edək ki,

$$\inf X = -\infty .$$

İxtisas: Kompütrer elmləri, I kurs
Müəllim: Nurəngiz Bəşirova

**Mövzu 3. Ədədi ardıcıllıq. Ardıcıllığın limiti.**
**Ardıcıllığın limitinin yeganəliyi. Yığılan ardıcıllığın xassələri.**

*1. Ədədi ardıcıllıq.* Əgər hər bir n natural ədədinə $x_n$ həqiqi ədədi qarşı qoyularsa, onda deyirlər ki, $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ ədədi ardıcıllığı verilmişdir. Ardıcıllıq qısa olaraq $\{x_n\}$ və ya $(x_n)$ simvolları ilə də işarə olunur. Burada $x_n$ həmin ardıcıllığın ümumi həddi və ya elementi, n isə $x_n$ həddinin nömrəsi adlanır.

Ədədi ardıcıllıq təyin oblastı bütün N natural çoxluğu olan funksiyadır. Bu funksiyanın qiymətləri çoxluğuna, daha doğrusu $x_n \quad n \in N$ ədədləri külliyatına ardıcıllığın qiymətləri çoxluğu deyilir.

Ardıcıllığın qiymətləri çoxluğu sonlu və ya sonsuz ola bilər. Bu zaman ardıcıllığın elementləri çoxluğu isə həmişə sonsuzdur. Ardıcıllığın istənilən iki müxtəlif elementi bir-birindən nömrələri ilə fərqlənirlər.

Məsələn, $\{(-1)^n\}$ ardıcıllığının qiymətlər çoxluğu -1 və 1 ədədlərindən ibarətdir, $\{n^2\}$ və $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ardıcıllıqlarının qiymətləri çoxluğu isə sonsuzdur.

Ardıcıllıq, hər bir həddi nömrəsinə görə hesablana bilən düsturun köməyi ilə verilə bilir.

Məsələn, əgər $x_n = \frac{(-1)^n + 1}{2}$ olarsa, onda ardıcıllığın hər bir tək nömrəli həddi sıfıra, çüt nömrəli həddi isə vahidə bərabərdir.

Bəzən ardıcıllığın verilməsində rekurent münasibətdən istifadə olunur. Ardıcıllığın bu üsulla verilməsində adətən aşağıdakılar göstərilir:

a) ardıcıllığın birinci həddi $x_1$ (və ya bir neçə həddi, məsələn $x_1, x_2$);

b) n-ci həddi qonşu hədlərlə əlaqələndirən düstur, məsələn (n-1)-ci və (n+1)-ci hədləri.

Hədlər fərqi d olan ədədi silsilə, ortaq vuruğu $q \neq 0$ olan həndəsi silsilə uyğun rekurent düsturlarla verilir:

$$a_{n+1} = a_n + d, \quad b_{n+1} = b_n q.$$

Həmin silsilələrin birinci həddinin $a_1$ və $b_1$ olduğunu bilərək, silsilələrin (n+1)-ci hədləri üçün uyğun düsturları almaq olar:

$$a_{n+1} = a_1 + nd, \quad b_{n+1} = b_1 q^n, \; n \in N .$$

Rekurent düstur

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \; n \in N, n \geq 3 ,$$

$x_1 = 1, \; x_2 = 1$ şərtləri ilə Fibonaççi ardıcıllığı verilir.

Bəzi hallalda ardıcıllıq onun hədlərinin təsviri ilə verilir. Məsələn, əgər $x_n$ - nömrəli sadə ədəddirsə, onda $x_1 = 2, x_2 = 3, \; x_3 = 5$ və s.

Nəhayət qeyd edək ki, $\{x_n\}$ ardıcıllığını

a) müstəvidə $(n, x_n), \; n \in N$ koordinatlı nöqtələrlə,

b) ədəd oxunda $x_n, \; n \in N$ nöqtələri ilə təsvir etmək olar.

*2. Ardıcıllığın limitinin tərifi.* Limit anlayışı riyazi analizin əsas anlayışlarından biridir. O cümlədən ardıcıllığın limiti anlayışı da zəruri anlayışlardan biri hesab olunur.

Tərif: Əgər hər bir $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $N_\varepsilon$ nömrəsi varsa ki, $n \geq N_\varepsilon$ şərtini ödəyən bütün n-lər üçün $|x_n - a| < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənilsin, onda a ədədinə $\{x_n\}$ ardıcıllığının limiti deyilir.

Əgər ardıcıllığın limiti a-ya bərabərdirsə, onda belə yazılır:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ və ya } n \to \infty \text{ olduqda } x_n \to a.$$

Məntiqi simvolların köməyi ilə həmin tərifi aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$\left\{\lim_{n\to\infty} x_n = a\right\} \Leftrightarrow \left\{\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon \to |x_n - a| < \varepsilon\right\} \quad (1)$$

Limiti olan ardıcıllığa yığılan ardıcıllıq deyilir.

Beləliklə, əgər

$$\exists a \in R : \forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon \to |x_n - a| < \varepsilon \quad (2)$$

olarsa, onda $\{x_n\}$ ardıcıllığı yığılandır. Limiti olmayan ardıcıllığa dağılan ardıcıllıq deyilir: başqa sözlərlə yığılmayan ardıcıllığa dağılan ardıcıllıq deyilir.

Qeyd edək ki, əgər bütün $n \in N$ üçün $x_n = a$ olarsa belə ardıcıllıq stasionar ardıcıllıq adlanır, onda $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

(1) tərifindən alınır ki, $\{x_n\}$ ardıcıllığının limitinin varlığı və a-ya bərabər olması ilə $\{x_n - a\}$ ardıcıllığının limitinin varlığı və sıfıra bərabər olması ilə eynigüclüdür, yəni

$$\left\{\lim_{n\to\infty} x_n = a\right\} \Leftrightarrow \left\{\lim_{n\to\infty}(x_n - a) = 0\right\}.$$

Misal. Tərifdən istifadə edərək, ümumi həddi verilmiş $\{x_n\}$ ardıcıllığının limitini tapın: $x_n = \dfrac{n-1}{n}$.

Həlli: İsbat edək ki, $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$. Bildiyimiz kimi $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$, onda $|x_n - 1| = \dfrac{1}{n}$. Tərifə əsasən ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədini götürək. Əgər $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ olarsa, daha doğrusu $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ olarsa, onda $|x_n - 1| = \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödəniləcəkdir. Burada $N_\varepsilon$ əvəzinə $N_\varepsilon > \dfrac{1}{\varepsilon}$ şərtini ödəyən hər hansı natural ədədi, məsələn $N_\varepsilon = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ ədədini götürək, burada $[x] = E(x)$- x ədədinin tam hissəsidir, daha doğrusu, x-i aşmayan ən böyük tam ədəddir. Onda bütün $n \geq N_\varepsilon$ üçün

$$|x_n - 1| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$$

bərabərsizliyi ödəniləcəkdir. Limitin tərifinə görə bu o deməkdir ki, $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$, daha doğrusu $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n} = 1$.

Yenidən limitin tərifinə müraciət edək. Əgər $n \geq N_\varepsilon$ şərtini ödəyən bütün n-lər üçün $|x_n - a| < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənilərsə, tərifə əsasən a ədədi $\{x_n\}$ ardıcıllığının limitidir, $|x_n - a| < \varepsilon$ bərabərsizliyini isə onunla enigüclü olan

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

bərabərsizliyi şəklində yazmaq olar. Başqa sözlə hər bir $\varepsilon > 0$ ədədinə görə tapılan $N_\varepsilon$ nömrəsindən etibarən $\{x_n\}$ ardıcıllığının bütün hədləri $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ intervalında yerləşir.

Həmin interval a nömrəsinin $\varepsilon$-ətrafı adlanır və $U_\varepsilon(a)$ həmçinin $O_\varepsilon(a)$ ilə işarə olunur, yəni

$$U_\varepsilon(a) = \{x : a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\} = \{x : |x - a| < \varepsilon\}.$$

Əgər a nöqtəsinin hər bir $\varepsilon$- ətrafı üçün tapılan nömrədən etibarən ardıcıllığın bütün hədləri həmin ətrafa daxil olursa, həmin ətrafın xaricində ardıcıllığın ya heç bir həddi yerləşmirsə, ya da yerləşənlər ancaq sonlu saydadırsa, deməli a ədədi $\{x_n\}$ ardıcıllığının limitidir.

Məntiqi simvolların köməyi ilə ardıcıllığın limitinin ətraf dilindəki tərifini aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$\left\{\lim_{n\to\infty} x_n = a\right\} \Leftrightarrow \left\{\forall\varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon \rightarrow x_n \in U_\varepsilon(a)\right\}.$$

Əgər $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ və bütün n=1,2,... üçün $x_n \leq a$ (uyğun olaraq $x_n \geq a$) olarsa, onda deyirlər ki, $\{x_n\}$ ardıcıllığın a ədədinə soldan (uyğun olaraq sağdan) yığılır və bəzən $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ əvəzinə $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$-0 (uyğun olaraq $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ +0) yazılır.

Misal. İsbat etməli ki, $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ ardıcıllığı yığılandır və limiti sıfıra bərabərdir.

Həlli: Doğrudan da, tutaq ki, ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi verilmişdir. Tələb edək ki, $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənilsin, buradan $n \geq N_\varepsilon$ əvəzinə $N_\varepsilon > \dfrac{1}{\varepsilon}$ şərtini ödəyən natural ədədi, məsələn $N_\varepsilon = \left\{\dfrac{1}{\varepsilon}\right\} + 1$ ədədini götürək. Onda bütün $n \geq N_\varepsilon$ üçün

$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon,$$

bərabərsizliyi ödənilir, bu isə o deməkdir ki, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0.$ $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ ardıcıllğının sıfıra sağdan yaxınlaşdığı doğrudur.

*3. Ardıcıllığın limitinin yeganəliyi.*

Teorem 1. Ədədi ardıcıllığın ancaq bir limiti ola bilər.

İsbatı: Fərz edək ki, $\{x_n\}$ ardıcıllığının iki müxtəlif a və b limitləri var, həm də $a < b. \varepsilon > 0$ ədədini elə seçək ki, a və b nöqtələrinin $\varepsilon$-ətrafları kəsişməsin. Məsələn, $\varepsilon = \dfrac{b-a}{3}$ götürək. Bilirik ki, a ədədi $\{x_n\}$ ardıcıllığının limitidir. Onda verilmiş $\varepsilon > 0$ ədədinə görə elə N nömrəsi tapmaq olur ki, bütün $n \geq N_\varepsilon$ üçün $x_n \in U_\varepsilon(a)$. Buna görə $U_\varepsilon(a)$ intervalının xaricində ardıcıllığın ancaq sonlu sayda hədləri yerləşə bilər. Xüsusi halda, $U_\varepsilon(b)$ intervalına ardıcıllığın ancaq sonlu sayda hədləri daxil ola bilər. Bu isə b ədədinin $\{x_n\}$ ardıcıllığının limiti olması şərtinə ziddir. Belə ki, b nöqtəsinin istənilən ətrafında ardıcıllığın sonsuz sayda hədləri yerləşməlidir. Alınmış ziddiyyət göstərir ki, ardıcıllığın iki müxtəlif limiti ola bilməz. Deməli, yığılan ardıcıllığın ancaq bir limiti ola bilər.

*4. Yığılan ardıcıllığın məhdudluğu.* Əgər elə $c_1$ ədədi varsa ki, $\{x_n\}$ ardıcıllığının bütün hədləri $x_n \ge c_1$ şərtini ödəsin, yəni $\exists c_1 : \forall n \in N \to x_n \ge c_1$ olur, onda həmin ardıcıllığa aşağıdan məhdud ardıcıllıq deyilir.

Əgər $\exists c_2 : \forall n \in N \to x_n \le c_2$ olarsa, onda $\{x_n\}$ ardıcıllığına yuxarıdan məhdud ardıcıllıq deyilir. Həm aşağıdan, həm də yuxarıdan məhdud ardıcıllığa məhdud ardıcıllıq deyili. Daha doğrusu, əgər

$$\exists c_1, c_2 : \forall n \in N \to c_1 \le x_n \le c_2 \quad (3)$$

bərabərsizliyi ödənilərsə, onda $\{x_n\}$ ardıcıllığına məhdud ardıcıllıq deyilir.

Teorem 2. Əgər ardıcıllığın limiti varsa, onda o məhduddur.

İsbatı: Tutaq ki, $\{x_n\}$ ardıcıllığının limiti var və a-ya bərabərdir. Limitin tərifinə görə $\varepsilon = 1$ üçün elə N nömrəsi tapaq ki, bütün $n \ge N$ üçün $|x_n - 1| < 1$ bərabərsizliyi ödənilsin. Bilirik ki, cəmin Modulu modullar cəmini aşmır, onda $|x_n| = |x_n - a + a| \le |x_n - a| + |a|$. Buna görə bütün $n \ge N$ üçün $|x_n| < 1 + |a|$ bərabərsizliyi ödənilir. Fərz edək ki, c=max$(1 + |a|, |x_1|, \ldots, |x_{N-1}|)$, onda bütün $n \in N$ üçün $|x_n| \le c$ olur, daha doğrusu $\{x_n\}$ ardıcıllığı məhduddur.

Qeyd. Teorem 2-yə əsasən hər bir yığılan ardıcıllıq məhduddur. Tərsi doğru deyil: hər bir məhdud ardıcıllıq yığılan olmaya bilər. Məsələn, $\{(-1)^n\}$ ardıcıllığı məhduddur, lakin yığılan deyil.

*5. Yığılan ardıcıllıqların bərabərsizliklərlə əlaqəli xassələri.*

Teorem 3. Əgər $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ ardıcıllıqları üçün

1) $x_n \le y_n \le z_n \quad \forall n \ge N_0$ olduqda (8)

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$,

şərtləri ödənilərsə, onda $\{y_n\}$ ardıcıllığı da yığılır və $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

İsbatı: Limitin tərifinə görə istənilən $\varepsilon > 0$ üçün elə $N_1 = N_1(\varepsilon)$ və $N_2 = N_2(\varepsilon)$ nömrələri tapmaq olar ki, bütün $n \ge N_1(\varepsilon)$ nömrələri üçün $x_n \in U_\varepsilon(a)$ və bütün $n \ge N_2(\varepsilon)$ nömrələri üçün $z_n \in U_\varepsilon(a)$ olur. Buradan və (8) şərtindən alınır ki, bütün $n \ge N = \max(N_0, N_1, N_2)$ nömrələri üçün $y_n \in U_\varepsilon(a)$ şərti ödənilir. Bu o deməkdir ki, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Teorem 4. Əgər

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \ \lim_{n\to\infty} y_n = b \quad (9)$$

həm də

$a < b$ (10) olarsa, onda

$$\exists N_0 : \forall n \ge N_0 \to x_n < y_n \qquad (11).$$

İxtisas: Kompüter elmləri I kurs.
Müəllim: b/m.N.F.Bəşiova .
Fənn: Riyazi analiz .

**Mövzu 4. Sonsuz kiçilən və sonsuz böyüyən ardıcıllıqlar. Monoton ardıcıllığın limiti. e ədədi.**

*1. Sonsuz kiçilən ardıcıllıqlar.* Əgər

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$$

olarsa, onda $\{\alpha_n\}$ ardıcıllığına sonsuz kiçilən ardıcıllıq deyilir. Başqa sözlə istənilən $\varepsilon > 0$ ədədinə görə elə $N_\varepsilon$ nömrəsi tapmaq olar ki, bütün $n \ge N_\varepsilon$ üçün $|\alpha_n - 0| = |\alpha_n| < \varepsilon$ olur.

Tutaq ki, a ədədi $\{x_n\}$ ardıcıllığının limitidir. $x_n - a = \alpha_n$ kimi işarə edək. Limitin tərifinə görə

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon : \forall n \ge N_\varepsilon \to |x_n - a| = |\alpha_n| < \varepsilon ,$$

yəni $\{\alpha_n\}$ sonsuz kiçilən ardıcıllıqdır. Tərsinə əgər $x_n = a + \alpha_n$ olarsa, burada $\{\alpha_n\}$- sonsuz kiçilən ardıcıllıqdır, onda $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

$\left\{\dfrac{a}{n^r}\right\}, a \in R, r = \dfrac{1}{m}, m \in N; \left|q^n\right|, |q| < 1; \left\{\sqrt[n]{a} - 1\right\}, a > 1$ və s ardıcıllıqları sonsuz kiçiləndir.

Tərif. Tutaq ki, $\{x_n\}$ və $\{y_n\}$ ardıcıllıqları verilmişdir. $\{x_n + y_n\}, \{x_n - y_n\}, \{x_n y_n\}, \left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ ardıcıllıqları $\{x_n\}$ və $\{y_n\}$ ardıcıllıqlarının uyğun olaraq cəmi, fərqi, hasili və nisbəti adlanır. Nisbətin təyinində bütün $n \in N$ üçün $y_n \ne 0$.

Sonsuz kiçilən ardıcıllıqların aşağıdakı xassələri var.

Xassə 1. Sonlu sayda sonsuz kiçilən ardıcıllıqların cəbri cəmi sonsuz kiçilən ardıcıllıqdır.

İsbatı: Tutaq ki, $\{\alpha_n\}$ və $\{\beta_n\}$ sonsuz kiçilən ardıcıllıqdır. Onda istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $N_1 = N_1(\varepsilon)$ və $N_2 = N_2(\varepsilon)$ nömrələri var ki, $n \ge N_1$ üçün $|\alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ və $n \ge N_2$ üçün $|\beta_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ bərabərsizliklər ödənilir. Əgər $N = N_\varepsilon = \max(N_1, N_2)$ olarsa, onda cəmin (fərqin) Modulu üçün bərabərsizlikdən istifadə edərək, bütün $n \ge N$ üçün alarıq:

$$|\alpha_n \pm \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Beləliklə $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ sonsuz kiçilən ardıcıllıqdır.

İnduksiyanın köməyi ilə isbat olunan xassə istənilən sonlu sayda toplananlar üçün genişləndirilir.

Xassə 2. Sonsuz kiçilən ardıcıllığın məhdud ardıcıllığa hasili sonsuz kiçilən ardıcıllıqdır.

İsbatı: Tutaq ki, $\{\alpha_n\}$ məhdud ardıcıllıq, $\{\beta_n\}$ isə sonsuz kiçilən ardıcıllıqdır. Məhdud ardıcıllığın tərifinə görə

$$\exists C > 0 : \forall n \in N \to |\alpha_n| < C ,$$

sonsuz kiçilən ardıcıllığın tərifinə görə isə

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon \to |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{c}.$$

Buradan alınır ki,

$$\forall n \geq N_\varepsilon \to |\alpha_n \beta_n| = |\alpha_n| \cdot |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{c} \cdot c = \varepsilon ,$$

daha doğrusu $\{\alpha_n \beta_n\}$- sonsuz kiçilən ardıcıllıqdır.

Xüsusi halda əgər $\{\alpha_n\}$ stasionar ardıcıllıqdırsa, yəni bütün $n \in N$ üçün $\alpha_n = a$ , $\{\beta_n\}$ isə sonsuz kiçilən ardıcıllıqdırsa, onda $\{a\beta_n\}$ də sonsuz kiçilən ardıcıllıqdır.

Qeyd. Məlumdur ki, sonsuz kiçilən ardıcıllıq məhduddur. Onda isbat olunan xassədən alınır ki, sonlu sayda sonsuz kiçilən ardıcıllığın hasili sonsuz kiçilən ardıcıllıqdır.

2. *Sonsuz böyüyən ardıcıllıqlar.* Əgər istənilən $\delta > 0$ ədədi üçün elə $N_\delta$ nömrəsi varsa ki, $n \geq N_\delta$ şərtini ödəyən bütün n-lər üçün $|x_n| > \delta$ bərabərsizliyi ödənilsin, onda $\{x_n\}$ardıcıllığına sonsuz böyüyən ardıcıllıq deyilir. Bu halda

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

yazılır və deyilir ki, ardıcıllığın sonsuz limiti var.

Bu tərifi aşağıdakı kimi də yazmaq olar:

$$\left\{\lim_{n\to\infty} x_n = \infty\right\} \Leftrightarrow \left\{\forall \delta > 0 \exists N_\delta : \forall n \geq N_\delta \to |x_n| > \delta\right\} \qquad (1)$$

(1) tərifinin həndəsi izahını verək.

$E = \{x \in R, |x| > \delta\}$ çoxluğunu $\infty$-un $\delta$-ətrafı adlandıraq. Əgər $\{x_n\}$ ardıcıllığının sonsuz limiti varsa, onda ardıcıllığın sonlu sayda hədləri müstəsna olmaqla qalan hədlərinin hamısı $\infty$-un $\delta$-ətrafında yerləşir.

Analoji olaraq $\{x_n\}$ ardıcıllığı üçün $-\infty$ və $+\infty$-a bərabər sonsuz limit anlayışları verilir. Bu limitlər uyğun olaraq $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ və $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ simvolları ilə işarə olunurlar və aşağıdakı kimi təyin olunurlar:

$$\left\{\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty\right\} \Leftrightarrow \left\{\forall \delta > 0 \exists N_\delta : \forall n \geq N_\delta \to x_n < -\delta\right\} \qquad (2)$$

$$\left\{\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty\right\} \Leftrightarrow \left\{\forall \delta > 0 \exists N_\delta : \forall n \geq N_\delta \to x_n > \delta\right\} \qquad (3)$$

$E_1 = \{x \in R : x < -\delta\}$ və $E_2 = \{x \in R : x > \delta\}$ çoxluqları uyğun olaraq $-\infty$ və $+\infty$-un $\delta$-ətrafları adlanırlar. Bu halda $E = E_1 \cup E_2$.

Əgər $\{x_n\}$ ardıcıllığının sonlu sayda hədləri müstəsna olmaqla qalan hədlərinin hamısı $+\infty$ simvolunun $\delta$ ətrafında yerləşirsə, onda tərif (3)-ə əsasən $\{x_n\}$ ardıcıllığının limiti var və bu limit $+\infty$-a bərabərdir. Tərif (2)-də analoji məna daşıyır.

Bundan sonra ardıcıllığın limiti dedikdə sonlu limiti başa düşəcəyik.

Məsələn, $x_n = -\sqrt{n}$ olarsa, onda $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$, $x_n = \frac{n^2}{n+2}$ olarsa, onda $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $x_n = (-1)^n 2^n$ olarsa, onda $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

3. *Yığılan ardıcıllıqlar üzərində hesab əməlləri.*

Teorem. Əgər $\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim_{n\to\infty} y_n = b$ olarsa, onda

1) $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b;$

2) $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab;$

3) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b}$ $\quad (y_n \neq 0,\ n \in N, b \neq 0).$

İsbatı: Şərtə görə $\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim_{n\to\infty} y_n = b$, onda $x_n = a + \alpha_n, y_n = b + \beta_n$, burada $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ sonsuz kiçilən ardıcıllıqlardır.

1) $x_n + y_n = a + b + \alpha_n + \beta_n$ bərabərliyindən alınır ki, $n \to \infty$ olduqda $x_n + y_n \to a + b$, burada $\alpha_n + \beta_n$ sonsuz kiçilən ardıcıllıqdır.

2) Aşağıdakı bərabərlikdən istifadə edək:

$$x_n y_n = ab + a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n .$$

Məlumdur ki, $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ sonsuz kiçilən ardıcıllıqlardır. Onda $\{a\beta_n\}, \{b\alpha_n\}, \{\alpha_n\beta_n\}$ ardıcıllıqları da sonsuz kiçilən ardıcıllıqlardır. Buradan alınır ki, $\{a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n\}$- sonsu kiçilən ardıcıllıqdır. Buna görə $n \to \infty$ olduqda $x_n y_n \to ab$.

3) İsbat edək ki, $\left\{\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right\}$- sonsuz kiçilən ardıcıllıqdır. Bilirik ki,

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{b(a + \alpha_n) - a(b + \beta_n)}{by_n} = \left(\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n\right) \cdot \frac{1}{y_n} .$$

Belə ki, $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ sonsuz kiçilən ardıcıllıqlardır, onda $\left\{\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n\right\}$ ardıcıllığı da eyni zamanda sonsuz kiçiləndir.

Şərtə görə $n \to \infty$ olduqda $y_n \to b$, burada $b \neq 0$ və bütün $n \in N$ üçün $y_n \neq 0$. Buna görə də $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ ardıcıllığı məhduddur.

Buradan alınır ki, $\left\{\left(\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n\right)\frac{1}{y_n}\right\}$ ardıcıllığın sonsuz kiçilən ardıcıllığın məhdud ardıcıllığa hasili kimi sonsuz kiçiləndir.

Beləliklə, $\left\{\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right\}$- sonsuz kiçilən ardıcıllıqdır və buna görə də $n \to \infty$ olduqda $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}$.

Misal. Əgər $\{\alpha_k\}$, bütün hədləri və d hədlər fərqi sıfırdan fərqli ədədi silsilə və $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$ olarsa, $\lim_{n\to\infty} S_n$ limitini tapın.

$$\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)\frac{1}{d},\ burada\ \ d = a_{k+1} - a_k ,$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{da_1} - \frac{1}{d(a_1 + nd)}$$

bərabərliyindən istifadə etsək, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{da_1}$ taparıq.

İxtisas: Kompüter xidmətləri I kurs.
Müəllim: b/m.N.F.Bəşiova .
Fənn: Riyazi analiz .

**Mövzu 5. Monoton ardıcıllığın limiti. e ədədi.**
**Altardıcıllıqlar. Koşi kriteriyası.**

*4. Monoton ardıcıllığın limiti.* Əgər istənilən $n \in N$ üçün

$$x_{n+1} \geq x_n \qquad (1)$$

bərabərsizliyi ödənilərsə, onda $\{x_n\}$ ardıcıllığına artan (azalmayan) ardıcıllıq deyilir. Analoji olaraq əgər istənilən $n \in N$ üçün

$$x_{n+1} \leq x_n \qquad (2)$$

bərabərsizliyi ödənilərsə, onda $\{x_n\}$ ardıcıllığına azalan (artmayan) ardıcıllıq deyilir.

Əgər (1) bərabərsizliyini $x_{n+1} > x_n$, (2) bərabərsizliyini isə $x_{n+1} < x_n$ şəklində yazmaq olarsa, onda $\{x_n\}$ ardıcıllığına ciddi artan və ciddi azalan ardıcıllıq deyilir.

Əgər (1) bərabərsizliyi $n \geq n_0$ olduqda ödənilərsə, onda $\{x_n\}$ ardıcıllığına $n_0$ nömrəsindən başlayaraq artan ardıcıllıq deyilir. Analoji olaraq $n_0$ nömrəsindən başlayaraq azalan, ciddi azalan, ciddi artan ardıcıllıq anlayışı verilir.

$\{x_n\}$ ardıcıllığının qiymətlər çoxluğunun dəqiq yuxarı (aşağı) sərhəddi həmin ardıcıllığın dəqiq yuxarı (aşağı) sərhəddi adlanır və uyğun olaraq $\sup\{x_n\}, \inf\{x_n\}$ şəklində işarə olunur.

X ədədi çoxluğunun dəqiq yuxarı və dəqiq aşağı sərhədlərinin təriflərini aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$\{M = \sup X\} \Leftrightarrow \{\forall x \in X \to x \leq M\} \wedge \{\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in X : x_\varepsilon > M - \varepsilon\} \qquad (3)$$

$$\{M = \inf X\} \Leftrightarrow \{\forall x \in X \to x \geq m\} \wedge \{\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in X : x_\varepsilon < m + \varepsilon\} \qquad (4)$$

Bu təriflərə əsasən ardıcıllığın dəqiq yuxarı və aşağı sərhədlərinin təriflərini aşağıdakı şəkildə yazmaq olar.

$$\{a = \sup X\} \Leftrightarrow \{\forall n \in N \to x_n \leq a\} \wedge \{\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in N : x_{N_\varepsilon} > a - \varepsilon\} \qquad (5)$$

$$\{b = \inf X\} \Leftrightarrow \{\forall n \in N \to x_n \geq b\} \wedge \{\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in N : x_{N_\varepsilon} < b - \varepsilon\} \qquad (6)$$

Beləliklə əgər aşağıdakı şərtlər ödənilərsə onda a ədədi $\{x_n\}$ ardıcıllığının dəqiq yuxarı sərhəddidir:

1) ardıcıllığın bütün hədləri a-nı aşmır, yəni

$$\forall n \in N \to x_n \leq a \qquad (7)$$

2) hər bir $\varepsilon > 0$ üçün ardıcıllığın $a - \varepsilon$-dan böyük həddini tapmaq olar, yəni

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : x_{N_\varepsilon} > a - \varepsilon\,. \qquad (8)$$

Analoji olaraq ardıcıllığın dəqiq aşağı sərhəddinin tərifi (6) aydınlaşdırılır.

2. *Monoton ardıcıllığın yığılma əlaməti.*

Teorem 1. Əgər $\{x_n\}$ ardıcıllığı artan və yuxarıdan məhduddursa, onda

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \sup\{x_n\}$$

var. Əgər $\{x_n\}$ ardıcıllığı azalan və aşağıdan məhduddursa, onda

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n\} \text{ var.}$$

İsbatı: Teoremi artan və yuxarıdan məhdud ardıcıllıq üçün isbat edək. Əgər
$\{x_n\}$ ardıcıllığı yuxarıdan məhduddursə, daha doğrusu $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ ədədlər çoxluğu yuxarıdan məhduddursa, onda dəqiq yuxarı sərhəddin varlığı haqqında teoremə görə həmin ardıcıllığın (7)-(8) şərtləri ilə təyin olunan dəqiq yuxarı sərhəddi var. Bilirik ki, $\{x_n\}$ artan ardıcıllıqdır, onda

$$\forall n \geq N_\varepsilon \to x_{N_\varepsilon} \leq x_n. \qquad (9)$$

(7)-(9)-dan alınır ki,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon \to a - \varepsilon < x_{N_\varepsilon} \leq x_n \leq a ,$$

daha doğrusu $x_n \in U_\varepsilon(a)$.

Limitin tərifinə əsasən bu o deməkdir ki,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\} = a .$$

3. $e$ ədədi. $\{x_n\}$ ardıcıllığına baxaq, burada

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n ,$$

və göstərək ki, həmin ardıcıllıq artan və yuxarıdan məhduddur. Nyuton binomu düsturundan istifadə etsək, alarıq

$$x_n = 1 + C_n^1 \frac{1}{n} + C_n^2 \frac{1}{n^2} + ... + C_n^k \frac{1}{n^k} + ... + \frac{1}{n^n},$$

burada

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!}, \qquad k = 1,2,...,n, \; C_n^0 = 1.$$

$x_n$-i aşağıdakı kimi yazaq:

$$x_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)...\left(1 - \frac{k-1}{n}\right); \qquad (10)$$

$$x_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)...\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right); \qquad (11)$$

(10) və (11) cəmlərindəki bütün toplananlar müsbətdir, eyni zamanda (10) cəmindəki hər bir toplanan (11) cəmindəki uyğun toplanandan kiçikdir, çünki

$$1 - \frac{m}{n} < 1 - \frac{m}{n+1}, \quad m = 1,2,...,n-1.$$

(11) cəmindəki toplananların sayı isə (9) cəmindən bir vahid çoxdur. Buna görə bütün $n \in N$ üçün $x_n < x_{n+1}$, daha doğrusu $\{x_n\}$ ciddi artan ardıcıllıqdır. Bundan başqa $0 < 1 - \frac{m}{n} < 1 \quad (m = 1,2,...,n-1)$ olduğunu nəzərə alsaq, (10) bərabərsizliyindən $x_n < 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ bərabərsizliyini alarıq. Bilirik ki, $k \in N$ olduqda $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$, onda həndəsi silsilənin cəmi düsturundan istifadə etsək,

$$x_n < 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} = 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 3-\frac{1}{2^{n-1}}$$

bərabərsizliyini alarıq. Beləliklə

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3,$$

yəni $\{x_n\}$ ardıcıllığı məhduddur. Teorem 1-ə görə $\{x_n\}$ ardıcıllığının limiti var. Həmin limit e hərfi ilə işarə olunur. Beləliklə,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \qquad (12)$$

e irrasional ədəddir, o natural loqarifmi olmaqla riyaziyyatda mühüm rol oynayır.

$$e \approx 2{,}718281828459045 .$$

*4. Altardıcıllıqlar. Xüsusi limitlər.* Tutaq ki, $\{x_n\}$ ardıcıllığı verilmişdir. Ciddi artan, daha doğrusu hədləri $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ şərtini ödəyən $\{n_k\}$ natural ədədlər ardıcıllığına baxaq. Onda $\{y_k\}$ ardıcıllığına, burada $y_k = x_{n_k}, k \in N$ olduqda $\{x_n\}$ ardıcıllığının altardıcıllığı deyilir. Məsələn, artan sıra ilə götürülmüş 1,3,5,7,9,... natural ədədlər ardıcıllığı, 1,2,3,4,5,6,7,... natural ədədlər ardıcıllığının altardıcıllığıdır, 3,5,9,13,7,... ardıcıllığı isə artıq natural ədədlər ardıcıllığının altardıcıllığı deyildir.

Tərifə əsasən $\{x_{n_k}\}$ altardıcıllığı verilən $\{x_n\}$ ardıcıllığının hədlərindən təşkil edilmişdir., həm də altardıcıllıqda hədlərin düzülüşünə verilən $\{x_n\}$ ardıcıllığındakı kimi riayət olunmuşdur. $\{x_{n_k}\}$ yazılışında k ədədi $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$ ardıcıllığındakı hədlərin sıra nömrəsini göstərir. Buna görə $n_k \geq k$, buradan $k \to \infty$ *olduqda* $n_k \to \infty$.

Tutaq ki, $\{x_{n_k}\}$ verilən $\{x_n\}$ ardıcıllığının altardıcıllığıdır və sonlu və ya sonsuz $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$ limiti var. Onda a ədədinə $\{x_n\}$ ardıcıllığının xüsusi limiti deyilir. Məsələn, $\{(-1)^n\}$ ardıcıllığının 2 xüsusi limiti var: 1 və -1.

Əgər $\{x_n\}$ məhdud ardıcıllıqdırsa, L isə onun bütün xüsusi limitləri çoxluğudursa, onda supL və infL ədədləri həmin ardıcıllığın uyğun olaraq yuxarı və aşağı limitləri adlanır və uyğun olaraq $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$ və $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n$ simvolları ilə işarə olunurlar.

Məsələn, 1,2,3,1,2,3,1,2,3,... ardıcıllığı üçün $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 3$, $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 1$.

Teorem (Bolsano-Veyerştrass) İstənilən məhdud ardıcıllıqdan yığılan altardıcıllıq ayırmaq olar.

İsbatı: Tutaq ki, $\{x_n\}$ məhdud ardıcıllıqdır, onda ardıcıllığın bütün hədləri hər hansı parçaya daxildir, daha doğrusu

$$\exists a,b : \forall n \in N \to x_n \in \Delta = [a,b]. \qquad (1)$$

$\Delta=[a,b]$ parçasını d nöqtəsi ilə yarıya bölək. Onda $[a,d],[d,b]$ parçalarından heç olmasa biri $\{x_n\}$ ardıcıllığının sonlu sayda həddini özündə saxlayır. Əgər hər iki parça həmin xassəyə malikdirsə, onlardan birini məsələn, $[d,b]$ parçasını götürək. Verilən ardıcıllıqdan sonsuz sayda hədd daxil olan seçilmiş parçanı $\Delta_1=[a_1,b_1]$ ilə işarə edək. Onun uzunluğu $b_1-a_1=\frac{b-a}{2}$. Sonra $\Delta_1=[a_1,b_1]$ parçasını yarıya bölək, alınan iki parçadan $\{x_n\}$ ardıcıllığının sonsuz sayda hədlərini saxlayan $\Delta_2=[a_2,b_2]$ parçasını seçək, onun uzunluğu $b_2-a_2=\frac{b-a}{2^2}$ ədədinə bərabərdir. Mühakiməni bu qayda ilə sonsuz davam etdirsək aşağıdakı şərtləri ödəyən $\{\Delta_n=[a_n,b_n]\}$ parçalar ardıcıllığını alırıq:

1) $\Delta_1\supset\Delta_2\supset...\supset\Delta_n\supset\Delta_{n+1}\supset...;$

2) $n\to\infty$ *olduqda* $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}\to 0.$

Deyilənlərə əsasən $\{\Delta_n\}$ yığılan parçalar ardıcıllığıdır. Kantor teoreminə görə bütün parçalara daxil olan yeganə c nöqtəsi var, daha doğrusu

$$\exists c:\forall k\in N\to c\in\Delta_k \qquad (2)$$

Göstərək ki, $\{x_n\}$ ardıcıllığının elə $\{x_{n_k}\}$ altardıcıllığını tapmaq olar ki,

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=c \qquad (3)$$

Bilirik ki, $\Delta_1$ parçası $\{x_n\}$ ardıcıllığının sonsuz sayda hədlərini özündə saxlayır, onda $\exists n_1\in N:x_{n_1}\in\Delta_1$. $\Delta_2$ parçası da eyni zamanda verilən ardıcıllığın sonsuz sayda hədlərini saxlayır, buna görə də $\exists n_2>n_1:x_{n_2}\in\Delta_2$. Ümumiyyətlə,

$$\forall k\in N\,\exists n_k:x_{n_k}\in\Delta_k, \text{ burada } n_1<n_2<...<n_{k-1}<n_k.$$

Beləliklə, $\{x_n\}$ ardıcıllığının elə $\{x_{n_k}\}$ altardıcıllığı var ki,

$$\forall k\in N\to a_k\le x_{n_k}\le b_k \qquad (4)$$

(2) və (4) şərtləri o deməkdir ki, c və $x_{n_k}$ nöqtələri $\Delta_k=[a_k,b_k]$ parçasına daxildir, buna görə də onlar arasındakı məsafə $\Delta_k$ parçasının uzunluğunu aşmır, daha doğrusu

$$|x_{n_k}-c|\le b_k-a_k=\frac{b-a}{2^k} \qquad (5)$$

Belə ki, $\left\{\frac{1}{2^k}\right\}$-sonsuz kiçik ardıcıllıqdır, onda (5)-dən alınır ki, (3) hökmü doğrudur.

5. *Ardıcıllığın yığılması üçün Koşi meyarı.* İstənilən $\varepsilon>0$ ədədinə görə elə $n_\varepsilon$ nömrəsi varsa ki, $n\ge n_\varepsilon, m\ge n_\varepsilon$ şərtlərini ödəyən bütün n və m-lər üçün $|x_n-x_m|<\varepsilon$ bərabərsizliyi ödənilsin, onda deyəcəyik ki, $\{x_n\}$ ardıcıllığı Koşi şərtini ödəyir. Koşi şərtini ödəyən ardıcıllığa fundamental ardıcıllıq deyilir. Həmin şərti qısa olaraq

$$\forall\varepsilon>0\,\exists n_\varepsilon:\forall n\ge n_\varepsilon\ \forall m\ge n_\varepsilon\to|x_n-x_m|<\varepsilon \qquad (1) \text{ və ya}$$

$$\forall\varepsilon>0\,\exists n_\varepsilon:\forall n\ge n_\varepsilon\ \forall p\in N\to|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$$

şəklində yazmaq olar. İsbat edək ki, fundamental ardıcıllıq məhduddur.

İsbatı: Tutaq ki, $\varepsilon = 1$, onda Koşi şərtinə əsasən elə $n_0$ nömrəsi tapmaq olar ki, $\forall n \geq n_0, \forall m \geq n_o$ üçün $|x_n - x_m| < 1$ bərabərsizliyi və xüsusi halda $|x_n - x_{n_0}| < 1$ bərabərsizliyi ödənilir. Belə ki, $|x_n| = |(x_n - x_{n_0}) + x_{n_0}| < |x_n - x_{n_0}| + |x_{n_0}| < |x_{n_0}| + 1$ bərabərsizliyi bütün $n \in N$ üçün $|x_n| < c$ bərabərsizliyi doğrudur, burada

$$c = \max(|x_1|, \ldots, |x_{n_0 - 1}|, |x_{n_0}| + 1).$$

Bu o deməkdir ki, $\{x_n\}$ məhdud ardıcıllıqdır.

Teorem (Koşi kriteriyası) Ardıcıllığın sonlu limitinin olması üçün onun fundamental olması zəruri və kafidir.

İxtisas: Kompüter elmləri
Fənn: Riyazi analiz
Müəllim: Nurəngiz Bəşirova

**Mövzu** 6. **Funksiya və onun verilmə üsulları. Mürəkkəb funksiya. Əsas elementar funksiyalar. Funksiyanın qrafiki. Tək və cüt funksiyalar.**

1. Funksiya anlayışı. Tutaq ki, $X \subset R$ ədədi çoxluğu verilmişdir. Əgər hər bir $x \in X$ ədədinə hər hansı qayda ilə müəyyən bir $y$ ədədi qarşı qoyulursa, onda deyirlər ki, X çoxluğunda ədədi funksiya verilir.

Uyğunluğu müəyyən edən simvol hər hansı simvola məsələn $f$ ilə işarə olunur və

$$y = f(x),\ x \in X \qquad (1)$$

şəklində yazılır. X çoxluğuna funksiyanın təyin oblastı deyilir və $D(f)$ ilə işarə olunur, yəni $X=D(f)$. Funksiyanın $D(f)$ çoxluğunda aldığı bütün qiymətləri külliyyatına funksiyanın qiymətləri çoxluğu deyilir və $E(f)$ kimi işarə olunur. Aydındır ki, $Y=E(f)$.(1) yazılışındakı x-ə sərbəst dəyişən və ya arqument, y-ə isə asılı dəyişər və ya funksiya deyilir.

Funksiya çox vaxt ancaq uyğunluq qaydasını təyin edən simvollarla ($f, \varphi, F$ və s) işarə olunur. Funksiyanı işarə etmək üçün eyni zamanda $x \to f(x),\ f: X \to Y$ işarələrindən də istifadə olunur.

Təyin oblastları müxtəlif, uyğunluq qaydaaları eyni olan iki funksiya müxtəlif hesab olunurlar. $f(x) = x^2, x \in R$ və $g(x) = x^2, x \in Q$ müxtəlif funksiyalardır. Baxmayaraq ki, hər iki funksiya eyni qanunla verilmişdir. Təyin oblastları eyni bir X çoxluğundan ibarət olan və hər bir $x \in X$ üçün qiymətləri üst-üstə düşən f və g funksiyaları bərabər adlanırlar. Bu halda $f(x) = g(x), x \in X$ və ya $f = g$.

Məsələn əgər $f(x) = \sqrt{x^2}, x \in R$ və $g(x) = |x|, x \in R$ olarsa, onda $f = g$ olar, çünki bütün $x \in R$ nöqtələri üçün $\sqrt{x^2} = |x|$ bərabərliyi doğrudur.

Funksiyalar üzərində hesab əməlləri təbii qaydada təyin edilir. Tutaq ki, f və g eyni bir E çoxluğunda təyin olunan funksiyalardır, onda hər bir $x \in E$ nöqtəsində qiymətləri $f(x) + g(x),\ f(x) - g(x),\ f(x)g(x),\ \dfrac{f(x)}{g(x)} (g(x) \neq 0, x \in E)$ olan funksiyalar uyğun olaraq f və g funksiyalarının cəmi, fərqi, hasili, nisbəti adlanırlar.

2. Funksiyanın verilmə üsulları. a) Analiti üsul. Funksiya analitik üsulla verildikdə x arqumenti ilə y funksiyası arasındakı uyğunluq qanunu $y=f(x)$ düsturunun köməyi ilə verilir. Düsturdakı y funksiyasının uyğun qiymətlərini almaq üçün x arqumenti üzərində aparılan əməllər göstərilir.

x arqumenti üzərində aşağıdakı əməllər aparıla bilər: hesab əməlləri, qüvvətə yüksəltmə, kök alma, loqarifmləmə, triqonometrik və tərs triqonometrik funksiyaların qiymətlərini hesablama, eyni zamanda limitə keçmə.

Əgər düstur şəklində verilən f funksiyasının təyin oblastı D(f) göstərilmirsə, onda təyin oblastı olaraq arqumentin elə qiymətləri çoxluğu tapılır ki, düsturun mənası olsun və düsturda aparılan hər bir əməlin nəticəsi həqiqi ədəd olsun.

Məsələn $f(x)=\sqrt{x+5}-\sqrt{4-x}$ funksiyasının təyin oblastını tapaq.

$f_1(x)=\sqrt{x+5},\ f_2(x)=\sqrt{4-x}$ işarə edək. Onda

$$D(f_1)=\{x : x+5\geq 0\}=-5\leq x<+\infty;$$

$$D(f_2)=\{x : 4-x\geq 0\}=-\infty<x\leq 4$$

Onda $D(f)=\{x : x\in D(f_1)\cap D(f_2)\}=(-5\leq x<+\infty)\cap(-\infty<x\leq 4)=-5\leq x\leq 4$.

Bir çox hallarda funksiya təyin oblastında bir düsturla deyil, təyin oblastının müxtəlif hissələrində bir neçə müxtəlif düsturla verilir.

Məsələn, $f(x)=\begin{cases} x^2+1, x\leq 0 \\ 2x,\ x>0 \end{cases}$ funksiyası bütün ədəd oxunda təyin olunmuşdur.

b) cədvəl üsulu. Bu üsulla funksiya verildikdə arqumentin müəyyən qiymətləri və bunlara uyğun funksiyanın qiymətləri verilir. Həmin qiymətlər cədvəl şəklində yazılır.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | … | $x_n$ |
| $y$ | $y_1=f(x_1)$ | $y_2=f(x_2)$ | $y_3=f(x_3)$ | … | $y_n=f(x_n)$ |

Arqumentin cədvəldəki qiymətlərinə uyğun funksiyanın qiymətləri cədvəldən asanlıqla tapılır. Bu halda deyirlər ki, funksiya cədvəl vasitəsilə verilmişdir. Arqumentin cədvəldə yerləşməyən qiymətlərinə uyğun funksiyanın qiymətləri adətən təqribi tapılır. Cədvəl üsulu ilə verilən funksiyalara triqonometrik, loqarifmik funksiyaları misal göstərmək olar.

c) qrafik üsulu. Bu üsulda arqument və funksiya arasındakı asılılıq koordinat sistemində çəkilmiş qrafiklə göstərilir. Funksiya qrafik üsulla verildikdə funksiyanın dəyişmə xarakteri əyani olaraq göstərilir. Bu üsulun çatışmayan cəhəti funksiyanın qiymətlərinin dəqiq tapıla bilməməsidir.

d) funksiyanın sözlərlə verilməsi. Bu üsulda funksiya yalnız sözlərlə təsvir olunmaqla verilə bilər. Məsələn, Dirixle funksiyası belə verilir:

$$y=\begin{cases} 1 \ \ x\ rasional \\ 0 \ \ x\ irrasional \end{cases},$$

Dirixle funksiyasını cədvəl üsulu ilə göstərmək olmaz, çünki o bütün ədəd oxunda təyin olunmuşdur.

e) funksiyanın proqramm vasitəsi ilə verilməsi. Bu üsulla arqumentin verilmiş qiymətinə funksiyanın qiymətini tapmaq üçün müasir hesablama maşınlarından istifadə olunur. Arqumentin verilmiş qiymətlərinə uyğun funksiya qiymətlərini tapmaq qanunu proqramm şəklində yazılır və hesablama maşınlarına daxil edilir. Maşın göstərilən proqramm əsasında funksiyanın qiymətlərini hesabllayır.

3. Funksiyanın qrafiki. Müstəvi üzərində Oxy düzbucaqlı koordinat sistemində koordinatları $(x, f(x)),\ x\in D(f)$ olan nöqtələrin həndəsi yerinə $y=f(x),\ x\in D(f)$ funksiyasının qrafiki deyilir. Təyin oblastından asılı olaraq funksiyanın qrafiki bütöv bir xətt, hissə-hissə xətlər və nöqtələr çoxluğu ola bilər.

Oy oxuna paralel olan hər bir $x = x_0 \in D(f)$ düz xətti $y = f(x), x \in D(f)$ funksiyasının qrafikini bir $M_0(x_0, y_0), y_0 = f(x_0)$ nöqtəsində kəsir. $f(a) = 0$ olduqda *x=a* nöqtəsi funksiyanın sıfırı adlanır. Əgər *x=a* nöqtəsi *f* funksiyasının sıfırıdırsa, onda *y=f(x)* funksiyasının qrafiki *x=a* nöqtəsində, daha doğrusu *M(a,0)* nöqtəsində *Ox* oxunu kəsir.

4. Mürəkkəb funksiya. Tutaq ki, $y = \varphi(x)$ və $z = f(y)$ uyğun olaraq X və Y çoxluqlarında təyin olunan funksiyalardır, eyni zamanda $\varphi$ funksiyasının qiymətlər çoxluğu $f$ funksiyasının təyin oblastında yerləşir. Onda hər bir $x \in X$ nöqtəsində qiyməti $F(x) = f[\varphi(x)]$ olan funksiya mürəkkəb funksiya və ya $\varphi$ və $f$ funksiyalarının superpozisiyası adlanır və $f \circ \varphi$ kimi işarə olunur. Məsələn, $z = \sqrt{9 - x^2}, x \in [-3,3]$ funksiyası $y = 9 - x^2, x \in [-3,3]$ və $z = \sqrt{y}, y \in [0, +\infty)$ funksiyalarının kompozisiyasıdır. Həmin funksiya elementar funksiyadır, daha doğrusu onu sonlu sayda hesab əməllərinin və kompozisiyanın köməyi ilə əsas elementar funksiyalardan almaq olar. $z = f[\varphi(x)]$ yazılışında y aralıq arqument, x isə əsas arqument və ya sərbəst dəyişən adlanır, eyni zamanda $\varphi$ funksiyası daxili, f funksiyası isə xarici funksiya adlanır. Mürəkkəb funksiyada əmələr sağdan sola yerinə yetirilir, daha doğrusu öncə $\varphi$ funksiyası üzərinjə sonra isə f funksiyası üzərində əməllər yerinə yetirilir. Aşkardır ki, $f \circ \varphi, \varphi \circ f$ kompozisiyaları bərabər deyildir, ancaq xüsusi halda $f \circ \varphi = \varphi \circ f$ ola bilər.

Qeyd edək ki, mürəkkəb funksiyanın aralıq arqumentlərinin sayı iki və daha çox ola bilər. Məsələn, $z = f(y), y = \varphi(x), x = \psi(t)$ munasibətlərində aralıq arqumentlərin sayı ikiyə bərabərdir: y və x. Onda mürəkkəb funksiyanı belə yazmaq olar: $z = f\{\varphi[\psi(t)]\}$. Bu mürəkkəb funksiyanın «zəncirvari» yazılışıdır.

5. Elementar və elementar olmayan funksiyalar. Sonlu sayda hesab əməllərinin (toplama, çıxma, vurma, bölmə) və superpozisiyanın köməyi ilə əsas elementar funksiyalardan alınan və y=f(x) şəklində düsturla ifadə olunan funksiyalara elementar funksiyalar deyilir.

Məsələn aşağıdakı funksiyalar elementar funksiyalardır:

1. Xətti funksiya: *y=ax+b*, $a \neq 0$;
2. İki dərəcəli funksiya: $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$;
3. n- dərəcəli çoxhədli, daha doğrusu $y = P_n(x)$ funksiyası, burada

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0;$$

4. Rasional funksiya, daha doğrusu $y = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ şəklində funksiya, burada $P_n$ və $Q_m$ uyğun olaraq n və m dərəcəli çoxhədlilərdir, $m \neq 0$.

Elementar funksiyaların şərtini ödəməyən, yəni elementar olmayan funksiyalardan da danışmaq olar.

6. Cüt və tək funksiyalar. Əgər

$$a)\ \forall x \in X \to -x \in X \wedge f(-x) = f(x);$$

$$b)\ \forall x \in X \to -x \in X \wedge f(-x) = -f(x);$$

bərabərlikləri ödənilərsə, onda X çoxluğunda təyin olunmuş f(x) funksiyasına uyğun olaraq cüt və tək funksiya deyilir.

Məsələn, $y = x^2, y = Cos\frac{x}{3}, y = \lg|x|, y = |x|$ funksiyaları cüt, $y = x^3, y = Sin\frac{x}{2}, y = x^2 Sin\,x, y = arc\,Sin(Sin\,x)$ funksiyaları isə təkdir.

a), b) şərtlərini ödəməyən funksiya nə tək, nə də cütdür. Məsələn, $f(x) = a^x\ (a > 0, a \neq 1)$ funksiyası $(-\infty, +\infty)$ aralığında nə cüt, nə də təkdir, çünki $f(-x) = a^{-x} = \frac{1}{a^x} \neq \pm f(x)$.

Cüt funksiyanın qrafiki ordinat oxuna nəzərən simmetrikdir. Doğrudan da əgər $M_1(x, f(x))$ nöqtəsi funksiyanın qrafiki üzərində yerləşirsə, onda $M_2(-x, f(x))$ nöqtəsi də eyni zamanda funksiyanın qrafiki üzərində yerləşir və həmin nöqtələr ordinat oxuna nəzərən simmetrik olur.

Tək funksiyanın qrafiki koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrikdir, həqiqətən də $M_1(x, f(x))$ nöqtəsi funksiyanın qrafiki üzərindədirsə, onda $M_2(-x, f(-x))$ nöqtəsi də funksiyanın qrafiki üzərində yerləşir və həmin nöqtələr koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrikdir.

İxtisas: Kompüter elmləri
Fənn: Riyazi analiz
Müəllim: Nurəngiz Bəşirova

## Mövzu 7. Məhdud və qeyri məhdud funksiyalar. Monoton, periodik funksiya. Tərs, parametrik və qeyri aşkar şəkildə verilmiş funksiya.

Əgər

$$\begin{aligned} &a)\ \exists c_1 : \forall x \in X \to f(x) \geq c_1 \\ &b)\ \exists c_2 : \forall x \in X \to f(x) \leq c_2 \qquad (1) \\ &c)\ \exists c : \forall x \in X \to |f(x)| \leq c \end{aligned}$$

bərabərsizlikləri ödənilərsə, onda f funksiyasına X çoxluğunda uyğun olaraq, aşağıdan, yuxarıdan və məhdud funksiya deyilir.

X çoxluğunda f funksiyasının məhdud olması həndəsi olaraq o deməkdir ki, $y = f(x)\ x \in X$ funksiyasının qrafiki $-c \leq y \leq c$ zolağında yerləşir.

Məsələn, $x \in R, x \neq 0$ olduqda təyin olunan $y = Sin\frac{1}{x}$ funksiyası məhduddur, çünki $\left|Sin\frac{1}{x}\right| \leq 1$. Əgər (1) şərti əvəzinə

$$\forall c > 0\ \exists x_c \in X : |f(x_c)| > c \qquad (2)$$

şərti ödənilərsə onda f funksiyasına X çoxluğunda qeyri məhdud funksiya deyilir.

Tutaq ki, $Y = \{y : y = f(x), x \in X \subset D(f)\}$. Onda Y çoxluğunun yuxarı sərhəddi f funksiyasının X çoxluğunda dəqiq yuxarı sərhəddi deyilir və $\sup\limits_{x \in X} f(x)$ kimi işarə olunur, Y çoxluğunun dəqiq aşağı sərhəddinə isə f funksiyasının X çoxluğunda dəqiq aşağı sərhəddi deyilir və $\inf\limits_{x \in X} f(x)$ şəklində işarə olunur. Əgər

$$\exists x_0 \in X \subset D(f) : \forall x \in X \to f(x) \leq f(x_0)$$

bərabərsizliyi ödənilərsə, onda deyirlər ki, f funksiyası X çoxluğunun $x_0$ nöqtəsində ən böyük (maksimal) qiymət alır və $f(x_0) = \max\limits_{x \in X} f(x)$. Bu halda $\sup\limits_{x \in X} f(x) = f(x_0)$. Analoji olaraq əgər,

$$\exists x_0 \in X \subset D(f) : \forall x \in X \to f(x) \geq f(x_0)$$

şərti ödənilərsə, onda deyirlər ki, f funksiyası X çoxluğunun $x_0$ nöqtəsində ən kiçik (minimal) qiymətini alır və $f(x_0) = \min\limits_{x \in X} f(x)$ kimi yazılır. Bu halda $\inf\limits_{x \in X} f(x) = f(x_0)$. Maksimal və minimal qiymətlərə birlikdə ekstremal qiymətlər deyilir.

Məsələn əgər f(x)=Sin x olarsa, onda

$$\sup_{x \in R} f(x) = \max_{x \in R} f(x) = f(x_k), \text{ burada } x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z\ ,$$

$$\inf_{x \in R} f(x) = \min_{x \in R} f(x) = f(\tilde{x}_k), \text{ burada } \tilde{x}_k = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z\ .$$

Monoton funksiyalar. Əgər $X \subset D(f)$ olarsa və

$$a)\ \forall x_1 \in X\ \ \forall x_2 \in X : x_1 < x_2 \to f(x_1) \leq f(x_2),$$

$$b)\ \forall x_1 \in X\ \forall x_2 \in X : x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2),$$
$$c)\ \forall x_1 \in X\ \forall x_2 \in X : x_1 < x_2 \to f(x_1) \geq f(x_2),$$
$$d)\ \forall x_1 \in X\ \forall x_2 \in X : x_1 < x_2 \to f(x_1) > f(x_2)$$

bərabərsizlikləri ödənilərsə onda f funksiyasına X çoxluğunda uyğun olaraq artan, (azalmayan), ciddi artan, azalan (artmayan) və ciddi azalan funksiya deyilir.

Azalan və artan funksiyalara birlikdə monoton funksiyalar, ciddi artan və ciddi azalan funksiyalara isə ciddi monoton funksiyalar deyilir.

Misal. $f(x) = x^3, X = R$ funksiyasının ciddi artan olduğunu isbat edin.

Həlli: $x^3$ funksiyası bütün ədəd oxunda təyin olunur və ciddi artandır. Doğrudan da əgər $0 \leq x_1 < x_2$ olarsa, onda $x_1^3 > x_2^3$ olar, əgər $x_1 < x_2 \leq 0$ olarsa, onda $0 \leq -x_2 < -x_1$ olur, buradan $(-x_2)^3 < (-x_1)^3$. Aydındır ki, $x^3$ funksiyası tək funksiyadır, onda axırıncı bərabərsizliyi $-x_2^3 < -x_1^3$ şəklində yazmaq olar, buradan $x_1^3 < x_2^3$ bərabərsizliyi ödənilir. Beləliklə, b) şərti ödənilir. Buna görə $x^3$ funksiyası R-də ciddi artandır.

Periodik funksiya. Periodiklik anlayışı astronomiya, fizika, geologiya, riyaziyyat və s. elmlərdə müxtəlif formalarda işlənsə də məna etibarı ilə müəyyən prosesin təkrar olunması, dövr etməsi, dolanması mənasını verir.

Biz təbiətdə bir sıra hadisələrin təkrar olunması prosesini müşahidə edirik. Məsələn, fəsillərin yerini dəyişməsi, gecə ilə gündüzün növbələşməsi və s.

Riyaziyyatda sonsuz təkrarlanan proseslərin qanunauyğunluqları öyrənilir. Bunun üçün periodik funksiya anlayışından istifadə edilir. Əgər

$$\exists T \neq 0 : \forall x \in D(f) \to x + T \in D(f), x - T \in D(f) \wedge f(x+T) = f(x) = f(x-T) \quad (3)$$

bərabərliyi ödənilərsə, onda f funksiyasına periodik funksiya T (-T) ədədinə isə onun periodu deyilir. Əgər $T_1$ və $T_2$, $y = f(x)\ x \in D(f)$ funksiyasının periodudursa, həm də $T_1 + T_2 \neq 0$ olarsa, onda $T_1 + T_2$-də eyni zamanda həmin funksiyanın periodudur. Dorudan da $T_1$ və $T_2$ perioddursa, onda istənilən $x \in D(f)$ üçün $x + T_1 \in D(f), x - T_1 \in D(f)$, eyni zamanda f(x) ilə birlikdə $f(x+T_1)$ və $f(x-T_1)$ var və buna görə f(x) ilə birlikdə $f(x+T_1+T_2)$ və $f(x+T_1-T_2), f(x-T_1+T_2), f(x-T_1-T_2)$ var. Bundan başqa $f(x+(T_1+T_2)) = f((x+T_1)+T_2) = f(x+T_1) = f(x)$. Şərtə $T_1 + T_2 \neq 0$, buna görə $T_1 + T_2$, $y = f(x)\ x \in D(f)$ funksiyasının periodudur.

Əgər $T_1$ və $T_2, y = f(x)\ x \in D(f)$ funksiyasının periodudursa və $T_1 \neq T_2$ olarsa, onda $T_1 - T_2$ -də eyni zamanda həmin funksiyanın periodudur.

Əgər T, $y = f(x)\ x \in D(f)$ funksiyasının periodudursa, onda nT şəklində hər bir ədəd, burada $n \in Z$ , $n \neq 0$ eyni zamanda həmin funksiyanın periodudur.

Əgər $T_1$ və $T_2, y = f(x)\ x \in D(f)$ funksiyasının periodudursa, həm də $nT_1 + kT_2 \neq 0$ olarsa, burada n və k istənilən tam ədədlərdir, onda $nT_1 + kT_2$ ədədi də eyni zamanda həmin funksiyanın periodudur. Verilən funksiyanın müsbət periodlarından (əgər varsa) ən kiçiyinə onun baş (əsas) periodu deyilir. Qeyd edək ki, periodik funksiyanın ən kiçik periodu olmaya da bilər. Triqonometrik funksiyaları periodik funksiyalar misal göstərmək olar . Bu zaman $2\pi$ ədədi

Sin x və Cos x funksiyalarının ən kiçik müsbət periodu, $\pi$ isə tgx və ctgx funksiyalarının ən kiçik müsbət dövrüdür.

Misal. $f(x) = Sin\, ax$ burada $a > 0$ funksiyasının periodik funksiya olduğunu isbat etməli və onun ən kiçik müsbət periodunu tapmalı.

Həlli: Fərz edək ki, f müsbət T periodlu periodik funksiyadır. Onda $\forall x \in R \to Sin\, ax = Sin\, a(x+T)$ bərabərliyi ödənilməlidir, x=0 olduqda buradan $Sin\, aT = 0,\ T = \frac{k\pi}{a}, k \in N$. Beləliklə, $Sin\, ax$ funksiyasının müsbət periodu ancaq $\frac{k\pi}{a}$ ədədi $Sin\, ax$ funksiyasının periodu deyil, çünki əks halda bütün $x \in R$ üçün $Sin\, ax = Sin\, a\left(x + \frac{\pi}{a}\right) = Sin(\pi + ax) = -Sin\, ax$, daha doğrusu $Sin\, ax = 0$ bərabərliyi ödənməlidir, bu isə mümkün deyildir. $\frac{2\pi}{a}$ ədədi Sin ax funksiyasının periodudur, çünki istənilən $x \in R$ üçün $Sin\, ax = Sin\, a\left(x + \frac{2\pi}{a}\right) = Sin(2\pi + ax)$ bərabərliyi doğrudur. Beləliklə, $\frac{2\pi}{a} - Sin\, ax$ funksiyasının ən kiçik müsbət periodudur.

Tərs funksiya.Tutaq ki, $y = f(x)\ x \in D(f)$ ədədi funksiyası verilmişdir. Onda hər bir $x_0 \in D(f)$ ədədinə yeganə $y_0 = f(x_0) \in E(f)$ ədədi uyğundur. Funksiyanın verilən $y_0$ qiymətinə görə arqumentin uyğun qiymətinin tapılmasına, daha doğrusu

$$f(x) = y_0,\ y_0 \in E(f) \qquad (4)$$

tənliyinin x-ə nəzərən həllinə tez-tez rast gəlinir. Həmin tənliyin bir yox, bir neçə və hətta sonsuz sayda həlli ola bilər. y=f(x) funksiyasının qrafiki ilə $y = y_0$ düz xəttinin kəsişdiyi bütün nöqtələrin absisləri (4) tənliyinin həllidir.

Məsələn, əgər $f(x) = x^2$ olarasa, onda $x^2 = y_0, y_0 > 0$ tənliyinin iki həlli var: $x_0 = \sqrt{y_0},\ \tilde{x}_0 = -\sqrt{y_0}$. Əgər f(x)=Sinx olarsa, onda $Sin\, x = y_0, |y_0| \le 1$, tənliyinin sonsuz sayda həlli var: $x_n = (-1)^n x_0 + n\pi$, burada $n \in Z, x_0$- həmin tənliyinin həllərindən biridir. Ancaq funksiya var ki, hər bir $y_0 \in E(f)$ qiymətində (4) tənliyinin yeganə $x_0 \in D(f)$ həlli var. Əgər f funksiyası hər bir $y_0 \in E(f)$ qiymətini ancaq yeganə bir $x_0 \in D(f)$ qiymətində alırsa, onda o funksiya dönən adlanır. Belə funksiyalar üçün f(x)=y tənliyini istənilən $y \in E(f)$ qiymətində x-ə nəzərən birqiymətli həll etmək olar, daha doğrusu hər bir $y \in E(f)$ qiymətinə yeganə $x \in D(f)$ qiyməti uyğundur. Bu uyğunluq funksiya təyin edir, özü də f funksiyasının tərsi adlanır və $f^{-1}$ simvolu ilə işarə olunur. Qeyd edək ki, hər bir $y_0 \in E(f)$ üçün $y = y_0$ düz xətti dönən y=f(x) funksiyasının qrafikini yeganə $(x_0, y_0)$ nöqtəsində kəsir, burada $f(x_0) = y_0$.

Tərs funksiyanın arqumentini x hərfi ilə, onun qiymətini isə y hərfi ilə işarə edərək, f funksiyasının tərs funksiyasını $y = f^{-1}(x), x \in D(f^{-1})$, şəklində yazırlar. Sadəlik üçün $f^{-1}$ simvolu əvəzinə g hərfindən istifadə edəcəyik.

Verilən funksiya ilə onun tərsinin əlaqəsini göstərən aşağıdakı xassələri qeyd edək.

1. Əgər g funksiyası f-in tərs funksiyasıdırsa, onda f-də g-nin tərs funksiyasıdır, əlavə olaraq D(g)=E(f), E(g)=D(f), daha doğrusu g funksiyasının təyin oblastı f funksiyasının qiymətlər çoxluğu ilə üst-üstə düşür və tərsinə.

2. İstənilən $x \in D(f)$ üçün g(f(x))=x, bərabərliyi doğrudur, istənilən $x \in E(f)$ üçün isə f(g(x))=x, bərabərliyi doğrudur.

3. y=g(x) funksiyasının qrafiki y=f(x) funksiyasının qrafikinə y=x düz xəttinə nəzərən simmetrikdir.

4. Əgər tək funksiya dönəndirsə, onda onun tərsi də eyni zamanda tək funksiyadır.

Birinci iki xassə tərs funksiyanın bilavasitə tərifindən, dördüncü və beşinci xassələr isə tərs funksiyanın uyğun olaraq tək və ciddi monoton funksiyaların tərifindən alınır.

Üçüncü xassəyə baxaq. Tutaq ki, $(x_0, y_0)$ nöqtəsi y=f(x) funksiyasının qrafiki üzərindədir, yəni $y_0 = f(x_0)$. Onda $x_0 = g(y_0)$, yəni $(y_0, x_0)$ nöqtəsi g tərs funksiyasının qrafiki üzərinədədir. Belə ki, $(x_0, y_0)$ və $(y_0, x_0)$ nöqtələri y=x düz xəttinə nəzərən simmetrikdirlər, onda y=g(x) funksiyasının qrafiki y=f(x) funksiyasının qrafikinə həmin düz xəttə nəzərən simmetrik olur.

Qeyri-aşkar funksiya. Əgər x arqumenti ilə y funksiyası arasındakı asılılıq y=f(x) düsturu ilə verilərsə, onda y funksiyası aşkar şəkildə verilmiş deyildir. Məsələn, $y=2x^2+3x+1$, y=Sin(2x+1), $y=|x|$ funksiyaları aşkar şəkildə verilmiş funksiyalardır. Əgər x arqumenti ilə y funksiyası arasındakı asılılığı göstərən düstur y-ə nəzərən həll olunmamış

$$F(x,y)=0 \qquad (5)$$

tənliyi ilə verilərsə, onda belə funksiyaya qeyri-aşkar funksiya deyilir. Məsələn, $4y-5x^2=0$, $x^2-y+Sin(x-y)=0$, $y+3xy^{-1}=0$ funksiyaları qeyri aşkar şəkildə verilmişdir. Bəzən (5) tənliyi ilə verilmiş qeyri aşkar funksiyanı y-ə nəzərən həll edərək, onu aşkar şəklə gətirmək olur, bəzər isə gətirmək olmur. Yuxarıda verilmiş qeyri-aşkar funksiyalardan birincisini $y = \frac{5}{4}x^2$ kimi yazaraq aşkar şəklə gətirmək olur. Lakin qalan ikisini aşkar şəklə gətirmək olmur. Ola bilər ki, müəyyən çoxluqdan götürülmüş x arqumentinin hər bir qiymətinə (5) tənliyini ödəyən y-in iki və daha çox birqiymətli aşkar funksiya təyin edir.

y=f(x) aşkar funksiyanı həmişə qeyri-aşkar şəkildə göstərmək olur, buna görə həmin tənliyi aşağıdakı şəkildə yazmaq lazımdır: y-f(x)=0.

Funksiyanın parametrik şəkildə verilməsi. Birdəyişənli funksiya təkcə aşkar şəkildə y=f(x) və ya qeyri-aşkar şəkildə F(x,y)=0 tənliyi ilə deyil, eyni zamanda parametrik şəkildə verilə bilər. Tutaq ki, $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ funksiyaları hər hansı E çoxluğunda təyin olunmuşdur və $E_1$- $\varphi$ funksiyasının qiymətləri çoxluğudur. Fərz edək ki, $\varphi$ funksiyası E çoxluğunda dönəndir və $t=\varphi^{-1}(x)$ onun tərs funksiyasıdır. Onda E çoxluğunda mürəkkəb funksiya $y=\psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)=f(x)$ təyin olunmuşdur. Buna $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ düsturları ilə parametrik şəkildə verilmiş funksiya deyilir.

İxtisas: Kompüter xidmətləri
Fənn: Riyazi analiz
Müəllim: Nurəngiz Bəşirova

**Mövzu: Monoton funksiyaların limiti.**
**Funksiya limitinin varlığı üçün Koşi kriteriyası.**

Tərif: Tutaq ki, f(x) funksiyası hər hansı E ədədi çoxluğunda təyin olunmuşdur. Əgər istənilən iki $x_1 \in E, x_2 \in E$ ədədləri üçün $x_1 < x_2$ olduqda $f(x_1) \le f(x_2)\ (f(x_1) \ge f(x_2))$ bərabərsizliyi ödənilərsə, f(x) funksiyası E çoxluğunda monoton artan (monoton azalan) funksiya adlanır.

Əgər f(x) funksiyası E çoxluğunda monoton artan (azalan) funksiyadırsa, onda deyəcəyik ki, funksiya bu çoxluqda monoton artır (azalır). E çoxluğunda monoton artan və monoton azalan funksiya bu çoxluqda sadəcə olaraq monoton funksiya adlanır.

Teorem: Əgər f(x) funksiyası (a,b) intervalında monoton artandırsa, onda a və b nöqtələrində f(x) funksiyasının sonlu və ya sonsuz birtərəfli $\lim\limits_{x \to b-0} f(x), \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ limitləri var və $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \sup\limits_{(a,b)} f(x),\ \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \inf\limits_{(a,b)} f(x)$.

Əgər f(x) funksiyası (a,b) intervalında monoton azalandırsa, onda sonlu və ya sonsuz $\lim\limits_{x \to b-0} f(x), \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ birtərəfli limitləri var və

$$\lim_{x \to b-0} f(x) = \inf_{(a,b)} f(x),\ \lim_{x \to a+0} f(x) = \sup_{(a,b)} f(x).$$

İsbatı: Tutaq ki, f(x) funksiyası (a,b) intervalında monoton artandır. Əgər $A = \sup\limits_{(a,b)} f(x) < +\infty$ olarsa, onda funksiyanın yuxarı sərhəddinin tərifinə əsasən, istənilən qeyd olunmuş $\varepsilon > 0$ ədədi üçün, elə $x_\varepsilon \in (a,b)$ ədədi var ki, $A - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \le A$ bərabərsizliyi ödənilsin. Tutaq ki, $\delta = b - x_\varepsilon$. Onda f(x) funksiyasının monoton artan olmasına əsasən $b - \delta = x_\varepsilon < x < b$ bərabərsizliyini ödəyən istənilən x nöqtələri üçün $f(x_\varepsilon) \le f(x)$ bərabərsizliyi ödənilir. Yuxarı sərhəddin tərifinə görə isə $f(x) \le A$. Beləliklə, əgər $b - \delta < x < b$ olarsa, onda $A - \varepsilon < f(x) \le A$. $\varepsilon$ ədədinin ixtiyariliyinə əsasən bu o deməkdir ki, $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = A$. Əgər $\sup\limits_{(a,b)} f(x) = +\infty$ olarsa, onda istənilən qeyd olunmuş $\varepsilon$ ədədi üçün elə $x_\varepsilon \in (a,b)$ ədədi var ki, $f(x_\varepsilon) > \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənilsin. Yenidən fərz edək ki, $\delta = b - x_\varepsilon$, onda f(x) funksiyasının monoton artan olmasına əsasən, $x_\varepsilon = b - \delta < x < b$ bərabərsizliyini ödəyən istənilən x-lər üçün $f(x) \ge f(x_\varepsilon) > \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənilir, bu isə o deməkdir ki, $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = +\infty$. Buna analoji olaraq teoremin digər hökmləri də isbat olunur.

Nəticə: İntervalda monoton olan f(x) funksiyası, bu intervalın hər bir nöqtəsində həm sonlu sol, həm də sonlu sağ limiti var.

Doğrudan da əgər f(x) funksiyası (a,b) intervalında monoton artan (azalan) funksiyasıdırsa, onda hər hansı $x_0 \in (a,b)$ nöqtəsindən asılı olmayaraq, istənilən $x_1 \in (a, x_0)$ və $x_2 \in (x_0, b)$ nöqtələri üçün $f(x_1) \le f(x_0) \le f(x_2)$ bərabərsizliyi (uyğun olaraq $f(x_1) \ge f(x_0) \ge f(x_2)$) ödənilir. Ona görə də

$\sup\limits_{(a,x_0)} f(x) \le f(x_0) \le \inf\limits_{(x_0,b)} f(x)$ (uyğun olaraq $\inf\limits_{(a,x_0)} f(x) \le f(x_0) \le \sup\limits_{(x_0,b)} f(x)$) , yəni $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ və $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ limitləri təyin olunur və sonludurlar.

Funksiya limitinin varlığı üçün Koşi kriteriyası. Əvvəlcədən verilmiş nöqtənin, $\infty, +\infty, -\infty$ simvollarının ətrafları anlayışına əlavə olaraq $x_0$ nöqtəsinin birtərəfli ətrafları anlayışlarını verək. $x_0$ nöqtəsinin $O(x_0-0;\delta)$ sol $\delta$-ətrafını

$$O(x_0-0;\delta)=\{x : x_0-\delta < x \le x_0\},\ \delta>0$$

düsturu ilə, $O(x_0+0;\delta)$ sağ $\delta$-ətrafını isə

$$O(x_0+0;\delta)=\{x : x_0 \le x < x_0+\delta\}, \delta>0$$

düsturu ilə təyin edək. Sadəlik məqsədilə $x_0+0, x_0-0, \infty, +\infty, -\infty$ ədədləri və simvollarını «kəmiyyət» termini ilə işarə edəcəyik. Beləliklə, funksiya limitinin tərifini ətrafların köməyi ilə verək.

Tərif: Əgər A kəmiyyətinin istənilən $O(A,\varepsilon)$, $\varepsilon$ ətrafı üçün a kəmiyyətinin elə $O(a,\delta), \delta$ ətrafı varsa ki, bu ətrafa daxil olan istənilən x nöqtələri üçün yalnız x=a nöqtəsi istisna ola bilər, yəni $x \in O(a,\delta),\ x \ne a$ ($a = x_0+0, a = x_0-0$ hallarında axırıncı şərt tərifə əsasən $x \ne x_0$ kimi başa düşülür), bu nöqtələrdə f(x) funksiyasının qiymətləri A kəmiyyətinin $O(A,\varepsilon)$, $\varepsilon$ ətrafına daxil olarsa, yəni $f(x) \in O(A,\varepsilon)$ olarsa, A kəmiyyəti $x \to a$ olduqda f(x) funksiyasının limiti adlanır. Burada A – sonlu ədəd, $\infty, +\infty, -\infty$ simvollarından biridir.

Tərif: Əgər istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ədədi varsa ki, istənilən $x \in O(a,\delta), x \ne a$ və $x' \in O(a,\delta), x' \ne a$ ədədlərindən asılı olmayaraq, f(x) funksiyasının bu nöqtələrdəki qiymətləri üçün $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənilir.

Aydındır ki, əgər f(x) funksiyası $x \to a$ olduqda Koşi şərtini ödəyirsə, onda funksiya a kəmiyyətinin hər hansı ətrafının bütün nöqtələrində təyin olunur. Burada yalnız a kəmiyyətinin özü istisna ola bilər.

Teorem: (Koşi kriteriyası) $x \to a$ olduqla f(x) funksiyasının sonlu limitə malik olması zəruri və kafi şərt onun Koşi şərtini ödəməsidir. Burada a- ya $x_0$ ədədi, ya da $\infty, +\infty, -\infty$, $x_0-0, x_0+0$ simvollarından biridir.

Zəruriliyin isbatı: Tutaq ki, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, burada A- ədəddir. Bu o deməkdir ki, istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ədədi var ki, istənilən $x \in O(a,\delta),\ x \ne a$ ədədi üçün

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

bərabərsizliyi ödənilir. Tutaq ki, $x \in O(a,\delta), x' \in O(a,\delta), x \ne a, x' \ne a$, onda (1)-ə əsasən $|f(x') - f(x)| = \|f(x') - A| + |A - f(x)\| \le |f(x') - A| + |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, yəni Koşi şərti ödənilir.

Kafiliyin isbatı: Tutaq ki, f(x) funksiyası $x \to a$ olduqda Koşi şərtini ödəyir və deməli funksiya a kəmiyyətinin hər hansı $O(a,\delta_0)$ ətrafında təyin olunur, burada x=a nöqtəsinin özü istisna ola bilər. Sonra fərz edək ki, $\{x_n\}$ ardıcıllığı üçün

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ x_n \in O(a,\delta_0),\ x_n \neq a,\ n = 1,2,... \qquad (2)$$

şərti ödənilir. Göstərək ki, $\{f(x_n)\}$ ardıcıllığı yığılandır. Tutaq ki, $\varepsilon > 0$ ədədi qeyd olunmuşdur. Koşi şərtinə əsasən elə $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ədədi var ki, istənilən

$$x \in O(a,\delta),\ x' \in O(a,\delta),\ x \neq a,\ x' \neq a \qquad (3)$$

ədədləri üçün

$$|f(x') - f(x)| < \varepsilon \qquad (4)$$

bərabərsizliyi ödənilir. (2) şərtinə əsasən $O(a,\delta)$ ətrafı üçün elə $n_\delta$ nömrəsi var ki, $n \geq n_\delta$ olduqda $x_n \in O(a,\delta)$; ona görə də istənilən $n \geq n_\delta$ və $n \geq m_\delta$ nömrələri üçün $x_n \in O(a,\delta),\ x_m \in O(a,\delta)$ şərtləri ödənilir ki, bu isə (3) və (4)-ə əsasən o deməkdir ki, $|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$ şərti ödənilir, yəni $\{f(x_n)\}$ ardıcıllığı ardıcıllıqlar üçün Koşi şərtini ödəyir. Ona görə də hər hansı B ədədinə yığılır:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = B \qquad (20)$$

İndi isə göstərək ki, istənilən $\{x'_n\}$ ardıcıllığından asılı olmayaraq

$$\lim_{n\to\infty} x'_n = a,\ x'_n \neq a,\ x'_n \in O(a,\delta_0),\ n = 1,2,... \qquad (21)$$

olduqda $\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = B$ şərti ödənilir. Doğrudan da yeni $x''_n = \begin{cases} x_k & n = 2k-1, \\ x'_k & n = 2k,\quad k = 1,2,... \end{cases}$ ardıcıllığını tərtib etdikdə, aydındır ki, istənilən n=1,2,3… nömrələri üçün $\lim_{n\to\infty} x''_n = a$ və $x''_n \neq a$. Ona görə də isbat olunana görə $\lim_{n\to\infty} f(x''_n)$ limiti var və belə ki, istənilən yığılan ardıcıllığın limiti onun istənilən altardıcıllığının limiti ilə üst-üstə düşür. Onda $\lim_{n\to\infty} f(x''_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ və $\lim_{n\to\infty} f(x''_n) = \lim_{n\to\infty} f(x'_n)$. Ona görə də $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x'_n)$. Beləliklə, funksiya limitinin tərifinə əsasən $\lim_{x\to a} f(x) = B$.

Beləliklə, funksiya üçün Koşi kriteriyası isbat olunur.

Əgər $a = x_0$ sonlu ədəd olarsa, onda Koşi şərtini aşağıdakı kimi söyləmək olar: İstənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ədədi varsa ki, $|x - x_0| < \delta,\ |x' - x_0| < \delta,\ x \neq x_0,\ x' \neq x_0$ şərtini ödəyən istənilən x və $x'$ ədədləri üçün $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənilir.

$a = \infty$ halında isə Koşi şərtinə aşağıdakı şəkli vermək olar. İstənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ədədi varsa ki, $|x| > \delta,\ |x'| > \delta$ bərabərsizliklərini ödəyən x və $x'$ ədədləri üçün $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənilir.

Birtərəfli limitlər halında isə Koşi şərtini aşağıdakı kimi söyləmək olar: İstənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün sol limit halında $\eta < a$, sağ limit halında isə $\eta > a$ şərtini ödəyən elə $\eta$ ədədi varsa ki, $\eta < x < a,\ \eta < x' < a$ şərtlərini və ya uyğun olaraq $a < x < \eta,\ a < x' < \eta$ şərtlərini ödəyən istənilən $x$ və $x'$ ədədləri üçün $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənilir.

İxtisas: Kompüter xidmətləri
Fənn: Riyazi analiz
Müəllim: Nurəngiz Bəşirova

**Mövzu: Mürəkkəb funksiyanın kəsilməzliyi.**
**Parçada kəsilməz funksiyaların xassələri.**
**Tərs funksiyanın kəsilməzliyi.**

Teorem: $y=\varphi(x)$ funksiyası $x_0$ nöqtəsində, $f(y)$ funksiyası isə $y_0=\varphi(x_0)$ nöqtəsində kəsilməzdir, onda $f[\varphi(x)]$ mürəkkəb funksiyası da $x_0$ nöqtəsində kəsilməzdir.

İsbatı: Tutaq ki, $\varepsilon>0$ ədədi qeyd olunmuşdur. Onda f(y) funksiyasının $y_0$ nöqtəsində kəsilməzliyinə əsasən elə $\eta=\eta(\varepsilon)>0$ ədədi var ki, y nöqtəsi üçün

$$|y-y_0|<\eta \tag{1}$$

bərabərsizliyi ödənilərsə, onda f funksiyası bu y nöqtəsində təyin olunur və onun üçün

$$|f(y)-f(y_0)|<\varepsilon \tag{2}$$

bərabərsizliyi ödənilir. $\eta>0$ ədədi üçün elə $\delta=\delta(\eta)>0$ ədədi var ki, x nöqtəsi üçün $|x-x_0|<\delta$ bərabərsizliyi ödənilir. Onda $f[\varphi(x)]$ funksiyası bu nöqtədə təyin olunur və onun üçün (1) bərabərsizliyi ödənilir, burada $y=\varphi(x)$ və deməli (12) bərabərsizliyi ödənilir. Baxılan hal üçün bu bərabərsizlik

$$|f[\varphi(x)]-f[\varphi(x_0)]|<\varepsilon \tag{3}$$

şəklini alır. Bu isə $x_0$ nöqtəsində $f[\varphi(x)]$ funksiyasının kəsilməzliyi deməkdir. T.i.o.

Teoremin hökmünü aşağıdakı düstur şəklində yazmaq olar:

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f\left[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)\right] \tag{4}$$

$\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=\lim\limits_{y\to y_0} f(y),\ y=\varphi(x)$ düsturu kəsilməz funksiyaların limitləri üçün dəyişəni əvəz etmə düsturudur.

Parçada kəsilməz funksiyaların xassələri.

Tərif: $[a,b]$ parçasında təyin olunmuş, parçanın bütün nöqtələrində kəsilməz olan funksiya bu parçada kəsilməz funksiya adlanır.

Bu zaman a nöqtəsində kəsilməzlik dedikdə bu nöqtədə sağdan kəsilməzlik, b nöqtəsində kəsilməzlik dedikdə bu nöqtədə soldan kəsilməzlik nəzərdə tutulur.

Teorem: (Veyerştrass) Parçada kəsilməz olan hər bir funksiya məhduddur və özünün dəqiq yuxarı və aşağı sərhədlərinə malikdir.

İsbatı: Tutaq ki, f funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməzdir və $M=\sup\limits_{a\le x\le b} f(x)$; M, boş olmayan hər bir ədədi çoxluğun dəqiq yuxarı sərhəddi kimi sonlu və ya sonsuz $+\infty$ ola bilər. Göstərək ki, $M<+\infty$ və elə $x_0\in[a,b]$ nöqtəsi var ki, $f(x_0)=M$ .

$$\lim_{n\to\infty} a_n=M,\ a_n<M,\ n=1,2,... \tag{5}$$

şərtini ödəyən hər hansı $a_n, n=1,2,...$ ədədlər ardıcıllığını seçək. Funksiyanın yuxarı sərhəddinin tərifinə əsasən hər bir $a_n, n=1,2,...$ ədədi üçün elə $x_n \in [a,b]$ nöqtəsi var ki,

$$f(x_n) > a_n,\ n=1,2,... \qquad (6)$$

Digər tərəfdən belə ki, M, f funksiyasının yuxarı sərhəddidir, onda bütün $x \in [a,b]$ nöqtələri üçün

$$f(x) \le M \qquad (7)$$

bərabərsizliyi ödənilir. $\{x_n\}$ ardıcıllığı məhduddur: $a \le x_n \le b,\ n=1,2,...$ Ona görə də Bolsano-Veyerştras teoreminə görə onda yığılan $\{x_{n_k}\}$ altardıcıllığını ayırmaq olar:

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \qquad (8)$$

Belə ki, $a \le x_{n_k} \le b,\ k=1,2,...$, onda $a \le x_0 \le b$. (6) və (7) bərabərsizliklərindən alınır ki, bütün k=1,2,… ədədlər üçün

$$a_{n_k} < f(x_{n_k}) \le M \qquad (9)$$

bərabərsizlikləri ödənilir. Yığılan ardıcıllığın hər bir altardıcıllığının limiti bütov ardıcıllığın limitinə bərabərdir, ona görə də (5)-dən alınır ki, $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = M$.

$k \to \infty$ olduqda (9)-dan limitə keçərək alarıq:

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M\ . \qquad (10)$$

Digər tərəfdən f funksiyasının $[a,b]$ parçasında kəsilməzliyinə əsasən funksiya bu parçanın $x_0$ nöqtəsində kəsilməzdir və deməli (8)-dən alınır ki,

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)\,. \qquad (11)$$

(10) və (11)-dən alınır ki, $M = f(x_0)$. Beləliklə, isbat etdik ki, f funksiyasının M yuxarı sərhəddi funksiyanın $x_0$ nöqtəsindəki xüsusi qiyməti ilə üst-üstə düşür və deməli sonludur. Bununla da alınır ki, f funksiyası yuxarıdan məhduddur və $x_0 \in [a,b]$ nöqtəsində yuxarı sərhəddini alır.

Analoji olaraq isbat olunur ki, kəsilməz funksiya aşağıdan məhduddur və dəqiq aşağı sərhəddinə malikdir. T.i.o.

Kəsilməz funksiyanın aralıq qiymətləri.

Teorem (Koşi): Əgər f funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməz və f(a)=A, f(b)=B olarsa, onda A və B arasında yerləşən C-nin istənilən qiymətində elə $\xi \in [a,b]$ nöqtəsi var ki, $f(\xi)=C$ olsun.

Başqa sözlərlə parçada kəsilməz funksiya həmin parçada hər hansı iki qiymət alırsa, onda istənilən aralıq qiyməti də alır.

İsbatı: Müəyyənlik üçün fərz edək ki, $f(a)=A<B=f(b)$ və $A<C<B$. $x_0$ nöqtəsi ilə $[a,b]$ parçasını iki bərabər parçaya bölək, bu zaman ya $f(x_0)=C$ və deməli axtarılan nöqtə $\xi = x_0$ tapılmışdır, ya da $f(x_0) \ne C$, bu zaman alınan parçalardan birinin uclarında f funksiyası C nöqtəsindən müxtəlif tərəflərdə yerləşən qiymətlər alır. Daha dəqiq desək sol uc nöqtəsində C nöqtəsindən kiçik, sağ uc nöqtəsində isə C nöqtəsindən böyük qiymətlər alır.

Bu parçanı $[a_1,b_1]$ ilə işarə edək və onu yenidən iki bərabər hissəyə bölək və s. Nəticədə, sonlu sayda addımdan sonra ya $f(\xi)=C$ şərtinin ödənildiyi axtarılan $\xi$ nöqtəsini alırıq, ya da biri digərinin daxilində yerləşən elə $[a_n, b_n]$ parçalar ardıcıllığını alarıq ki, onların uzunluqları sıfıra yaxınlaşsın və

$$f(a_n) < C < f(b_n) \tag{12}$$

Tutaq ki, $\xi$, $[a_n, b_n]$, n=1,2,... parçalar sisteminin ümumi nöqtəsidir. Bildiyimiz kimi $\xi = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Ona görə də funksiyanın kəsilməzliyinə əsasən

$$f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \tag{13}$$

(11)-dən alınır ki,

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \le C \le \lim_{n\to\infty} f(b_n) \tag{14}$$

(13) və (14)-dən alınır ki, $f(\xi) = C$. T.i.o.

Nəticə 1. Əgər funksiya parçada kəsilməzdirsə və onun uclarında müxtəlif işarəli qiymətlər alırsa, onda bu parçada elə bir nöqtə var ki, həmin nöqtədə funksiya sıfıra çevrilir.

Nəticə 2. Tutaq ki, f funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməzdir və $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x),\ m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$. Onda f funksiyası yalnız $[m, M]$ parçasındakı qiymətləri alır.

Nəticə 2-nin isbatı üçün qeyd edək ki, əgər $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x),\ m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$ olarsa, onda $m \le f(x) \le M$, və teorem 1-ə əsasən elə $\alpha \in [a,b], \beta \in [a,b]$ nöqtələri var ki, $f(\alpha) = m, f(\beta) = M$. İndi isə nəticənin hökmü əgər $\alpha \le \beta$ olarsa $[\alpha, \beta]$ parçasına, $\beta < \alpha$ olarsa $[\beta, \alpha]$ parçasına tətbiq olunan teorem 2-dən alınır.

Beləliklə, hər hansı parçada kəsilməz funksiyanın qiymətləri çoxluğu da parça təşkil edir.

Tərs funksiya.

Tərif 2. Tutaq ki, f funksiyası E ədədi çoxluğunda təyin olunmuşdur. Əgər istənilən iki $x_1 \in E, x_2 \in E$ nöqtələri üçün $x_1 < x_2$ olduqda $f(x_1) < f(x_2)\ (f(x_1) > f(x_2))$ bərabərsizliyi ödənilərsə f funksiyası ciddi monoton artan (azalan) funksiya adlanır.

lemma 1: Tutaq ki, f funksiyası hər hansı X ədədi çoxluğunda ciddi monoton artan (azalan) funksiyadır və Y- onun qiymətləri çoxluğudur. Onda $f^{-1}$ tərs funksiyası Y çoxluğunda birqiymətli ciddi monoton artan (azalan) funksiyadır.

İsbatı: Müəyyənlik üçün fərz edək ki, f funksiyası X çoxluğunda ciddi monoton artandır. İsbat edək ki, tərs funksiya da birqiymətlidir. Əksini fərz edək. Tutaq ki, elə $y \in Y$ nöqtəsi var ki, $f^{-1}(y)$ çoxluğu heç olmasa iki müxtəlif $x_1, x_2$ nöqtələrini özündə saxlasın: $x_1 \in f^{-1}(y), x_2 \in f^{-1}(y), x_1 \ne x_2$. Deməli,

$$f(x_1) = f(x_2) \tag{15}$$

İki $x_1, x_2$, $x_1 \ne x_2$ ədədləri üçün $x_1 < x_2$ və ya $x_1 > x_2$ bərabərsizliklərindən biri ödənilir. Birinci halda f funksiyasının ciddi monoton artan olmasına əsasən $f(x_1) < f(x_2)$, ikinci halda isə $f(x_1) > f(x_2)$, yəni hər iki halda (15) bərabərliyi ödənilmir. Beləliklə, hər bir $y \in Y$ nöqtəsi üçün $f^{-1}(y)$ çoxluğu bir nöqtədən ibarətdir, yəni $f^{-1}$ birqiymətlidir.

İndi isə isbat edək ki, $f^{-1}$ funksiyası Y çoxluğunda ciddi monoton artandır. Tutaq ki,

$$y_1 < y_2,\ y_1 \in Y,\ y_2 \in Y \qquad (16)$$

və $x_1 \in f^{-1}(y_1), x_2 \in f^{-1}(y_2)$. Deməli, $y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2)$. İstənilən iki $x_1, x_2$ ədədləri üçün aşağıdakı üç münasibətdən biri ödənilir: $x_1 > x_2,\ x_1 = x_2,\ x_1 < x_2$. Əgər $x_1 > x_2$ və ya $x_1 = x_2$ olarsa, onda uyğun olaran ya $y_1 > y_2$, ya da $y_1 = y_2$ olar. Beləliklə, (16)-dan alınır ki, $x_1 < x_2$, bu isə o deməkdir ki, $f^{-1}$ funksiyası Y çoxluğunda ciddi monoton artandır.

İxtisas: Kompüter elmləri, I kurs
Fənn: Riyazi analiz
Müəllim: Nurəngiz Bəşirova

**Mövzu: Diferensialın tərifi. Diferensial şəklinin invariantlığı.**

Tutaq ki, y=f(x) funksiyası (a,b) intervalında diferensiallanandır. Onda istənilən $x \in (a,b)$ nöqtəsində artımı

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x\,,\quad \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0 \qquad (1)$$

şəklində göstərilə bilər. Funksiyanın artımı iki $f'(x)\Delta x, \alpha(\Delta x)\Delta x$ hədlərinin cəmi şəklində göstərilmişdir. Bu hədlərin birincisi arqumentin $\Delta x$ artımından xətti asılıdır. İkincisi isə $\Delta x$ -dan xətti asılı deyildir və $f'(x) \neq 0$ olduqda birinci həddə nəzərən yüksək tərtibli sonsuz kiçilən kəmiyyətdir:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{f'(\Delta x)\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{f'(x)} = 0$$

Deməli, $f'(x)\Delta x$ həddi funksiya artımının baş hissəsidir.

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x) \qquad (2)$$

Tərif: Diferensiallanan y=f(x) funksiyasının x nöqtəsindəki artımının baş hissəsinə, yəni $\Delta x$ -dan xətti asılı olan $f'(x)\Delta x$ ifadəsinə onun x nöqtəsindəki diferensialı deyilir. y=f(x) funksiyasının x nöqtəsindəki diferensialı dy və df(x) ilə işarə olunur:

$$df(x) = f'(x)\Delta x \qquad (3)$$

və ya

$$dy = f'(x)\Delta x \qquad (4)$$

Qeyd edək ki, $f'(x) = 0$ olduqda $f'(x)\Delta x$ =0 olur. $\alpha(\Delta x)\Delta x$ ifadəsi isə ümumiyyətlə sıfıra bərabər deyildir. Buna görə də $f'(x)\Delta x$ həddi funksiya artımının baş hissəsi ola bilməz. Lakin bu halda da funksiyanın diferensialını (3) və (4) düsturu ilə təyin edirlər: df(x)=0. Deməli bütün hallarda funksiyanın diferensialı onun törəməsi ilə arqumentin artımın hasilinə bərabərdir. İndi isə f(x)=x funksiyasının diferensialını hesablayaq: $f'(x) = x' = 1$ olduğundan, $df(x) = dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$ və yaxud $dx = \Delta x$. Yəni sərbət dəyişən olan arqumentin diferensialı həmişə özünün artımına bərabərdir. Bunu nəzərə alsaq (3) düsturunu

$$df(x) = f'(x)dx \qquad (5)$$

şəklində yazmaq olar. Deməli, y=f(x) funksiyasının x nöqtəsindəki diferensialı onun həmin nöqtədəki törəməsi ilə arqumentin diferensialı hasilinə bərabərdir. (5) düsturundan törəməni tapsaq: $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ alarıq, bu da funksiya törəməsinin funksiya diferensialının arqumentin diferensialı nisbətinə bərabər olduğunu göstərir. Funksiyanın $f'(x)$ törəməsi ancaq x-dən asılı olduğu halda, onun df(x)= $f'(x)dx$ diferensialı asılı olmayan iki dəyişəndən, x və dx-dən asılıdır.

*Diferensial şəklinin invariantlığı.* Diferensiallanan y=f(x) funksiyasının diferensialı onun törəməsi ilə arqumentin artımı hasilinə bərabərdir:

$$dy = f'(x)\Delta x \qquad (1)$$

İxtiyari dəyişən olan x arqumentinin artımı öz diferensialına bərabər olduğundan $dx = \Delta x$ (1) düsturururun

$$dy = f'(x)dx \qquad (2)$$

şəklində yazıldığı yuxarıda göstərilmişdir. İndi fərz edək ki, x arqumenti sərbəst dəyişən olmayıb başqa bir t dəyişəninin funksiyasıdır: $x = \varphi(t)$. Onda y dəyişəni t-nin mürəkkəb funksiyası olar: $y = f[\varphi(t)]$. Bu mürəkkəb funksiyanın t dəyişəninə görə diferensialını hesablayaq:

$$dy = y'_t \cdot dt = \{f[\varphi(t)]\}'_t \cdot dt = f'(x) \cdot \varphi'(t)dt$$

(mürəkkəb funksiyanın törəməsi düsturuna əsasən). Buradan $dx = \varphi'(t)dt$ olduğunu nəzərə alsaq:

$$dy = f'(x)dx \qquad (2)$$

Deməli, x arqumentinin başqa bir t dəyişəninin funksiyası olduqda da y=f(x) funksiyasının diferensialı (2) şəklində olur, yəni x arqumenti sərbəst dəyişən olduqda y=f(x) funksiyasının diferensialı nə şəkildədirsə, x arqumenti başqa bir t dəyişənin funksiyası olduqda da diferensialı həmin şəkildə olur.

Buna diferensialın (2) şəklinin invariantlıq (dəyişməzlik) xassəsi deyilir.

Funksiya diferensialının (1) şəkli isə invariant deyildir. x arqumenti sərbəst dəyişən olduqda onun artımı diferensialına bərabərdir, lakin başqa bir t dəyişənin funksiyası, yəni $x = \varphi(t)$ olduqda isə onun artımı ümumiyyətlə diferensialına bərabər olmur: $\Delta x \neq dx$.

*Yüksək tərtibli diferensiallar:* Tutaq ki, y=f(x) diferensiallanan funksiyadır və x arqumenti sərbəst dəyişəndir. Onda funksiyanın diferensialı

$$dy = f'(x)dx \qquad (1)$$

olar. (1) bərabərliyinin sağ tərəfindəki həddin birinci vuruğu olan $f'(x)$ törəməsi x-dən asılıdır, ikinci dx vuruğu isə sərbəst dəyişən x arqumentinin artımı olduğundan x-dən asılı deyildir (sabit ədəddir). Buna görə də (1) bərabərliyinin sağ tərəfi x arqumentindən asılıdır və onun diferensialından danışmaq olar. Funksiya diferensialının diferensialına həmin funksiyanın ikitərtibli və yaxud ikinci diferensialı deyilir və $d^2y, d^2f(x)$ və s. işarə olunur. Beləliklə,

$$d^2y = d(dy), \qquad d^2f(x) = d(df(x)).$$

Diferensialın tərifindən istifadə edərək, ikinci diferensialın ifadəsini tapaq:

$$d^2y = d(dy) = d\big(f'(x)dx\big) = \big(f'(x)dx\big)' dx = f''(x)(dx)^2.$$

Bu əməliyyat zamanı dx diferensialı x-dən asılı olmadığından törəmə işarəsinin xaricinə çıxarılır. Eyni qayda ilə də üçüncü və ya üçtərtibli diferensialını təyin etmək olar:

$$d^3y = d\big(d^2y\big) = d\big[f''(x)(dx)^2\big] = \big[f''(x)(dx)^2\big]' dx = f'''(x)(dx)^3.$$

Funksiyanın (n-1) tərtibli diferensialının diferensialına həmin funksiyanın n tərtibli diferensialı deyilir və $d^ny$ ilə işarə olunur. Beləliklə,

$$d^ny = d\big(d^{n-1}y\big) = d\big[f^{(n-1)}(x)(dx)^{n-1}\big] = \big[f^{(n-1)}(x)(dx)^{n-1}\big]' dx = f^{(n)}(x)(dx)^n.$$

Qeyd edək ki, funksiya diferensialının ifadəsini yazdıqda dx ifadəsini mötərizədə yazmırlar, $(dx)^n$ ifadəsi əvəzinə $dx^n$ yazırlar. Bunu nəzərə alsaq, funksiyanın n tərtibdi diferensialı üçün

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n \qquad (2)$$

ifadəsini alarıq. (2) düsturundan funksiyanın n tərtibli törəməsi üçün

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} \qquad (3)$$

münasibətini alarıq. İndiyə qədər funksiyanın diferensiallarını hesablayarkən x arqumentinin sərbəst dəyişən hesab edirdik. Funksiya diferensialının (1) şəkli invariant olduğundan x arqumenti bir t dəyişəninin funksiyası olduqda da həmin funksiyanın birinci diferensialı

$$dy = f'(x)dx \qquad (4)$$

şəklində olar. Lakin burada dx kəmiyyəti əvvəlki kimi sabit olmayab t-dən asılıdır. Bu halda da funksiyanın ikinci diferensialını hesablamaq olar:

$$d^2y = d(dy) = d[f'(x)dx] = d[f'(x)]dx + f'(x)d(dx) = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x \qquad (5)$$

Funksiyanın üçüncü diferensialını hesablasaq:

$$d^3y = d(d^2y) = d[f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x] = d[f''(x)dx^2] + d[f'(x)d^2x] =$$
$$= d[f''(x)]dx^2 + f''(x)d(dx^2) + d[f'(x)]d^2x + f'(x)d(d^2x) = f'''(x)dx^3 +$$
$$+ f''(x)2dxd(dx) + f''(x)dxd^2x + f'(x)d^3x = f'''(x)dx^3 + 3f''(x)dxd^2x + f'(x)d^3x$$

və yaxud $d^3y = f'''(x)dx^3 + 3f''(x)dxd^2x + f'(x)d^3x$ (6)

Buq ayda ilə funksiyanın dördüncü, beşinci və s diferensiallarını da hesablamaq olar. (5) və (6) düsturlarından aydındır ki, diferensialın (2) şəkli mürəkkəb funksiya üçün, yəni x arqumenti başqa bir t dəyişəninin funksiyası olan halda invariant deyildir. Deməli, n-tərtibli diferensialın (2) şəkli $n \geq 2$ olduqda, ümumiyyətlə invariant deyildir. Bu invariantlıq ancaq bir xüsusi halda, x dəyişəni t-dən xətti asılı olduqda olur: x=at+b. dx=adt (sabit ədəd) və $d^2x = d^3x = ... = d^n x = 0$. Bu halda da (5) və (6) düsturları uyğun olaraq

$$d^2y = f''(x)dx^2, \quad d^3y = f'''(x)dx^3$$

kimi, funksiyanın n tərtibli diferensialı isə (2) şəklində olur: $d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$.

*Funksiyaların xəttiləşdirilməsi:* y=f(x) funksiyası (a,b) intervalında diferensiallanan olduqda həmin intervalın istənilən $x_0 \in (a,b)$ nöqtəsində

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x) \qquad (1)$$

göstərilişi doğru olar. Burada $x = x_0 + \Delta x$ hesab etsək, $\Delta x = x - x_0$ olar və (1) göstərilişindən

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \qquad (2)$$

münasibətini alarıq. Buradan aydındır ki, $\Delta x = x - x_0$ artımı çox kiçik olduqda f(x) funksiyasını $x_0$ nöqtəsinin yaxın ətrafında

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad (3)$$

xətti funksiyası ilə əvəz etmək olar:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (x \to x_0) \qquad (4)$$

yəni $x_0$ nöqtəsinin yaxın ətrafında f(x) funksiyası özünü (3) xətti funksiyası kimi aparır. Deməli, f(x) funksiyası diferensiallanan olduğu $x_0$ nöqtəsinin yaxın ətrafında (3) xətti funksiyasından $\Delta x = x - x_0$ artımına nəzərən yüksək tərtibli sonsuz kiçilən olan bir kəmiyyətlə fərqlənir. Bu halda yəni $x \to x_0$ şərtində (2) münasibəti doğru olduqda deyirlər ki, f(x) funksiyası $x_0$ nöqtəsinin yaxın ətrafında xəttiləşdirilə bilir.

Kompüter elmləri, I kurs.
B/m. Nurəngiz Bəşirova

**İbtidai funksiya və qeyri müəyyən inteqral**.

Tutaq ki, f(x) funksiyası hər hansı sonlu və ya sonsuz E aralığında təyin olunmuşdur, Əgər E çoxluğunda təyin olunmuş F(x) funksiyasının törəməsi verilmiş f(x) funksiyasına bərabər olarsa, yəni $F'(x) = f(x),\ x \in E$ şərti ödənilərsə, F(x) funksiyasına verilmiş f(x) funksiyasının ibtidai funksiyası və ya sadəcə olaraq ibtidaisi deyilir.

Aşkardır ki, əgər F(x) funksiyası verilmiş f(x) funksiyasının ibtidaisidirsə