Z.Q.SADIXOV
V.M.CABBARZADƏ
A.R.BUNİYATOV

RİYAZİ MƏNTİQ

Z.Q. SADIXOV

V.M. CABBARZADƏ

A.R. BUNİYATOV

RİYAZİ MƏNTİQ

Dərs vəsaiti

Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirinin 22 07.05.2014-cü il tarixli 835saylı əmrinə əsasən çap edilir.

BAKI-2015

Unudulmaz müəllimimiz
Məmmədəli Buniyatova ithaf edirik.

Elmi redaktor **A.B.Şahbazov**
Fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dosent

Rəyçilər: **O.M .Məmmədov**
Fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dosent
K.M.Cəfərov
Fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dosent

Z.Q.SADIXOV, V.M.CABBARZADƏ, A.R. BUNİYATOV. RİYAZİ MƏNTİQ.Dərs vəsaiti.Bakı-2015. ADPU-nəşriyyatı. 184 səh.

MÜNDƏRİCAT

GİRİŞ

Riyaziyyatçiya öz ideyalarını sağlam və qüvvətli saxlaması üçün riyazı məntiq onun bir növ qiqiyenasıdır.

Qerman Veyl.

Riyazi məntiq elminin əsas tədqiqat sahəsi,riyazi nəzəriyyələrin formal aksiomatik sistemlərini qurub (məntiqi alınma qaydaları ilə), onların ziddiyyətsizliyinin, tamlığının və həll olunma problemlərinin öyrənilməsidir.

Riyazi məntiq və klassik riyaziyyatın sərhəddində müasir ümumi cəbrlər nəzəriiyəsi yaranmışdır.

Riyazi məntiqdə alınan bir çox fundamental nəticələr ümumbəşər mədəniyyətınıə aid edilmişdir.

Fizika elmı texniki elmlər üçün nə qədər əhəmiyyət-lidirsə, riyazi məntiq elmidə informatika elmi üçün bir o dərəcədə, əhəmiyətlıdır. Buna görədə riyazi məntiqi "infor-matikanın hesabida" adlandırırlar.

"Riazi məntiq" kursunun tədrisində əsas məqsəd, bu elmin əsaslarını,hesab nəzəriyyəsinə, informatika elminə tətbiqlərini gələcək orta məktəb müəllimlərinə öyrətmək və onların tədris edəcək fənlərin ümumi məntiqi stukturu haqqında daha dəqiq elmi bılıyə malik olmağa, cəbr,həndəsə, ehtimal nəzəriiyəsi ,informatikaya aid mətn və məntiqi xarakterli məsələrin həllində, bu fəndən əldə etdikləri bilik və bacarıqları tətbiq etmək imkanına malik olmalarına nail olmaqdır.

Müasir İKT dövründə bunların mənimsənilməsi tələbələrin dövrün tələblərinə cavab verən ixtisasçı yetişməsində mühüm əhəmiyyətə malikdir.

Bu baxımdan, oxuculara təqdim olunan riyazi məntiq dərs vəsaiti, universitetlərdə informatika və riyaziyyat ixtisası üzrə bakalavr hazırlığının səmərəliliyinin artırılmasında faydalı rol oynaya bilər.

I FƏSILMÜLAHIZƏLƏR CƏBRI VƏ ONUN FORMAL SISTEMI

§1 Mülahizələr və onlar üzərində ilk məntiqi əməliyyatlar

1.1.Mülahizə riyazı məntiq elminin ilk anlayışıdır. Doğru və ya yalan olması haqda fikir sölәmәk mümkün olan nəqli cümləyə mülahizə deyilir.(təriflər istisna olmaqla)

Misal 1. “Hər bir dördbucaqlı kvadratdır” yalan mülahizədir.

Misal 2. “Hər bir kvadrat dörbucaqlıdır” doğru mülahizədir.

Misal 3.”Mükəmməl ədədlərin sayı sonsuzdur” mülahizədir. Lakin doğru və ya yalan olduğu isbat olunmadığından riyazı problem olaraq qalır.

Misal 5.”Tək mükəmməl ədəd yoxdur” mülahizədir. Lakin doğru və ya yalan olduğu isbat olunmadığından riyazı problem olaraq qalır.

Misal 6.”İkidən fərqli hər bir cüt ədəd iki sadə ədədin cəmi şəklində göstərilə bilər” mülahizədir.1742 ildə Leonard Eyler tərəfindən problem kimi qoylmuşdur və hələlik həll edilməməşdir.

Misal 7.”Beşdən böyük hər bir tək ədəd üç sadə ədədin cəmi şəklində göstərilə bilər” mülahizədir.1742 ildə Kristian Qolbax tərəfindən problem kimi qoymuşdur və Harald Qelfort tərəfindən 2013 ildə doğruluğu isbat olunmuşdur.

Nida, sual cümlələri və təriflər mülahizə deyillər. Məsələn,“Yaşasın Azərbaycan!” və ya “Mülahizələr cəbri nəyi öyrənir?” və ya ”Özündən fərqli bütün müsbət bölənlərinin cəminə bərabər olan natural ədədə mükəmməl ədəd deyilir” cümlələri mülahizə deyillər.Qeyd etdiyimiz kimi təriflər mülahizə deyil.”Ancaq iki tərəfi paralel olan dörbucaqlıya trapesiya deyilir” mülahizə deyil tərifdir, lakin “Trapesiyanın oturacaqları paraleldir” mülahizədir.

Mülahizələr latın əlifbasının böyük hərfləri ilə işarə olunurA,B,D,.... Mülahizəyə doğru və ya yalan qiymət qiymət alan dəyişən kimi də baxmaq olar. Mülahizənin aldığı qiymət doğrudursa D, yalandırsa Y hərfi ilə işarə olunur. Müəyyən hallarda D əvəzinə T(true) və ya 1,Y əvəzinə F(false) və ya 0 yazılır. Təyin oblastı mülahizələr çoxluğu və qiymətlər oblastı$\{0,1\}$ olan bir arqumentli $\lambda(x)$ funksiyasına baxmaq olar.A mülahizəsi doğrudursa $\lambda(A)=1$,A mülahizəsi yalandırsa $\lambda(A)=0$ olur.

Mülahizələrdən məntiqi əməliyyatlar vasitəsi ilə yenilərini almaq olar. Tutaq ki, A və B ixtiyari mülahizələrdir

1.İnkar əməliyyatı. " $\bar{}$ ". A mülahizəsinin inkarı $(\bar{A})$*və ya* $(\neg A)$ ilə işarə olunur.$(\bar{A})$ onda və ancaq onda doğru olur ki, A yalan olsun. Onun doğruluq cədvəli aşağıdakı kimidir.

$(\bar{A})$ doğruluq cədvəli :

A	$(\bar{A})$
D	Y
Y	D

Cədvəl 1.1

2. "Və" bağlayıcısına uyğun olan konyukasiya " ∧" ("&") (A ∧ B) oxunuşu A konyuksiya B kimi oxunur. A və B konyuksiyanın hədləri adlanır.

Onda və ancaq onda doğru olur ki, A və B hədlərinin hər ikisi doğru olsun.

(A ∧ B) doğruluq cədvəli

A	B	A∧B
D	D	D
Y	D	Y
D	Y	Y
Y	Y	Y

Cədvəl 1.2

Qeyd. bəzən $A \wedge B$ əvəzinə AB-də yazılır.

2." Və ya " bağlayıcısına uyğun olan dizyunksiya "$\vee$". $(A \vee B)$ oxunuşu A dizyunksiya B kimi oxunur . A və B dizyunksiya hədləri adlanır . $(A \vee B)$ Avə B hədlərindən heç olmasa biri doğru olduqda doğrudur. Hər ikisi yalan olduqda yalan olur.

$(A \vee B)$ doğruluq cədvəli

A	B	$A \vee B$
D	D	D
Y	D	D
D	Y	D
Y	Y	Y

Cədvəl 1.3

3." $\rightarrow$ "(və ya $\supset$) implikasiya. $(A \rightarrow B)$ oxunuşu A implikasiya B, burada A-ya antesendet, B - yə konsenvet deyilir(latınca antesendet-əvvəlki, konsenvet-nəticə deməkdir). $(A \rightarrow B)$ müəyyən mənada "Əgər A – dırsa onda B – dir" mühakiməsinə uyğundur. Burada A şərt, B hökm kimi qəbul edilir. Misal. " Əgər üçbucağın iki bucağı bərabərdirsə, o bərabəryanlıdır" .

Onda və ancaq onda yalan olur ki,A dogru B yalan olsun

XX əsrin görkəmli riyaziyyatçısı Bertran Rasselın filosovlara mühazirə oxuyarkən, dinləycılərdən birinin "nə üçün yalandan istənilnini almaq mümkündür ?" sualına verdiyi

(A → B) doğruluq cədvəli

A	B	A→B
D	D	D
Y	D	D
D	Y	Y
Y	Y	D

Cədvəl 1.4

cavab maraqlıdır. Rassel 2·2 = 5 yalan mülahizəzindən onun ROMA-PAPASI olmasının isbat ardıcıllığını aşağıdakı kımı verir :

$$2 \cdot 2 = 5,\ 2+2 = 2+3,\ 2 = 3,\ 1+1 = 2+1,\ 1 = 2.$$

Rassel və ROMA-PAPASI iki nəfərdir, lakin 2=1, deməli Rassel və ROMA-PAPASI eyni şəxsdir.

4.(A↔B) (vəya≡) "A və B məntiqi ekvivalendir" və ya "A və B eynıgüclüdür" kimi oxunur. Hər ikisi eyni qiymət aldıqda doğru olur,müxtəlif qiymət aldıqda yalan olur. (A$\leftrightarrow$ B) doğruluq cədvəli

A	B	A$\leftrightarrow$B
D	D	D
Y	D	Y
D	Y	Y
Y	Y	D

Cədvəl 1.5

1.2. Proporzisional formalar.

Proporzisional formanın tərifi:

1. Hər bir latın əlifbasının böyük hərfləri və indekslə götürülmüşləri proporzisional formalardır.

2. Əgər A və B proporzisional formalardırsa onda ($\bar{A}$), (A$\vee$ B), (A$\to$B),(A$\wedge$B) və (A$\leftrightarrow$B) proporzisional formalardır.

3. Proporzisional forma yalnız və yalnız 1və 2 qaydası ilə alına bilər.

Misal. ((A$\vee$ B) $\wedge$ (A$\to$B)$\vee$C), ($\bar{A}$) $\wedge$ (B$\to$C) . proporzisional formalardır. Lakin $(A \wedge B) \vee C) \vee \overline{A}$, $((A \wedge B) \to C$, $(A \wedge B$ proporzisional formalar deyil.

Hər bir proporzisional formaya uyğun doğruluq cədvəli qurmaq olar. Əgər proporzisional formada n müxtəlif hərf varsa onun doğruluq cədvəli 2^n sayda sətirdən ibarət olur.

Bu cədvəlin hərflərin qiymət aldığı sətirlərindən hər birinə,hərflərin doğruluq qiymətlərini paylanması sətri deyiləcək.

Məsələn, n=2 olduqda $2^2=4$, n=3 olduqda $2^3=8$, n=4 olduqda $2^4=16$ sayda sətirdən ibarət olur.

Misal. $(\bar{A}) \wedge (B \to C)$ doğruluq cədvəli

A	B	C	$(\bar{A})$	$(B \to C)$	$(\bar{A}) \wedge (B \to C)$
D	D	D	Y	D	Y
Y	D	D	D	D	D
D	Y	D	Y	D	Y
Y	Y	D	D	D	D
D	D	Y	Y	Y	Y
Y	D	Y	D	Y	Y
D	Y	Y	Y	D	Y
Y	Y	Y	D	D	D

Cədvəl 1.6

Proporzisional formaların onun oxunmasını asanlaşdırmaq üçün müəyyən mötərizələri qəbul edilmiş qaydaya əsasən azaltmaq və ya bərpa etmək olar. 1 pillə ↔ 2 pillə $\rightarrow$, 3 pillə $\vee$, 4 pillə $\wedge$, 5 pillə $\bar{\ }$ (məntiqi inkar əməli) hesab olunur.

Mötərizəyə alma aşağıdakı qaydaya əsasən aparılır, proporzisiona formada:

1.Əgər eyni pilləli əməllərdirsə onda mörtərizəyə almaq üçün əvvəlcə soldan sağa ilk əməliyyatın təsir dairəsinə daxil ola biləcək ən kiçik ifadəni mörtərizəyə almaqla başlanılır sonra ondan sonra bilavasitə gələn əməliyyatın təsir dairəsinə daxil ola biləcək ən kiçik ifadə mörtərizəyə alınır və sairə... bu proses ardıcıl olarq xarici bir cüt mötərizə yazılana qədər davam etdirilir.

Məsələn: $A \vee B \vee C \vee D$

1addım $(A \vee B) \vee C \vee D$

2 addım $((A \vee B) \vee C) \vee D$

3 addım $(((A \vee B) \vee C) \vee D)$

2.Əgər müxtəlif pilləli məntiqi əməllərdirsə onda soldan ən yüksək pilləli əməldən başlayıb onun təsir dairəsinə daxil ola biləcək ən kiçik ifadəni mörtərizəyə alınır və sonra bu qayda soldan sağa yenıdən davam etdirilir və sairə.Bu proses o vaxta qədər dəvam etdirilir ki,bütün forma tam sag və sol mötərizəy alınsın

Məsələn: $A \rightarrow B \vee C \wedge \bar{D}$

1 addım $A \to B \vee C \wedge (\bar{D})$

2 addım $A \to B \vee (C \wedge (\bar{D}))$

3 addım $A \to (B \vee (C \wedge (\bar{D})))$

X	Y	Z	X→ Y(1)	Y→ Z(2)	X→ Z(3)	(1)∧(2)	(1)∧(2)→(3)

4 addım $(A \to (B \vee (C \wedge (\bar{D}))))$

Qeyd. Mörtərizələrin azaldılınası alınma qaydasının əksinə olaraq icra olunur yəni elə atılır ki,alınmış formaya mötərizələrin bərpası alqoritmini tətbiq etdikdə ilkin forma ilə eyni olsun. Lakin elə formalar var ki, onlarda mörtərizəni azaltmaq olmaz, ona görə ki, mörtərizə atılsa, mötərizələrin bərpasından sonra başqa forma alınar. Məsələn: $A \to (B \to C)$ mörtərizəni atsaq $A \to B \to C$ yenidən bərpa etsək $((A \to B) \to C)$ alarıq (bunlar da ayrı-ayrı formalardır).

§2.Tavtalogiyalar(məntiqin qanunlari) və onların xassələri.

2.1 Dəyişənlərin bütün qiymətlərində doğru qiymət alan propozosional formaya tavtalogiya deyilir.

Misal1.$((X \to Y) \to (Y \to Z)) \to (X \to Z)$ doğruluq cədvəli (cədvəl 2.1.) Aydınıdır ki, .$((X \to Y) \to (Y \to Z)) \to (X \to Z)$ tavtalogiyasinda X,Y,Z proporzisional hərflərini, hər hansı proporzisional A,B,C formaları ilə əvəz etsək alınan formalarda tavtalogia olar.

Y	Y	Y	D	D	D	D	D
Y	Y	D	D	D	D	D	D
Y	D	Y	D	Y	D	Y	D
Y	D	D	D	D	D	D	D
D	Y	Y	Y	D	Y	Y	D
D	Y	D	Y	D	D	Y	D
D	D	Y	D	Y	Y	Y	D
D	D	D	D	D	D	D	D

Cədvəl 2.1

2.2. Əgər A→ B tavaloqiadırsa,onda deyirlər ki ,B forması A formasının məntiqi nəticəsidir. Əgər A↔B tavaloqiadırsa onda deyirlər ki ,A və B formaları məntiqi eynıgüclüdür deyilir , A≡Bvə ya A≅ *B* yazılır.

Elə proporzisional formalar var ki, onlar dəyişənlərin müəyyən qiymətlərində doğru, müəyyən qiymətlərində isə yalan qiymətlər alırlar. Belə proporzisional formalara ödənilə bilən forma deyilir. Məsələn ($\bar{A}$) ∧ (B→C) propozisional formasının doğruluq cədvəlindən (cədvəl 1.6) görünür ki, o ödənilə bilən propozisional formadır. Elə proporzisional formalar var ki, onlar həmişə yalan qiymət alırlar, bunlara ziddiyyətli forma deyilir. Məsələn. A ∧ $\bar{A}$

A	$\bar{A}$	$A \wedge \bar{A}$
D	Y	Y
Y	D	Y

Cədvəl 2.2

Aydmdır ki, A ziddiyyətli formadırsa onda $\bar{A}$ tavtalogiya olur. Misal $A \wedge \bar{A}$ ziddiyyətli propozisional forma olduğundan onun inkari $\overline{(A \wedge \bar{A})}$ tavtalogiya olur. Qısa yazılış üçün əgər A tavtalogiyadırsa A=1, A ziddiyyətdirsə A=0 yazılır.

2.3.Teorem . Əgər A və $A \to B$ tavtalogiyadırsa onda B də tavtalogiyadır.

İsbatı: Əksini fərz edək: fərz edək ki, B tavtalogiya deyil. Onda A və B formalarına daxil olan dəyişənlərin müəyyən qiymətlərində B yalan qiymət alır. $A \to B$ həmişə doğru olduğundan yəni tavtalogiya olduğundan Cədvəl 1.4 əsasən B yalan olduğu üçün dəyişənlərin bu qiymətlərind A mütləq yalan olmalıdır. Bu isə A- nın tavtalogiya olmasına ziddir. Deməli, əks fərziyyə doğru deyil. Teorem isbat olundu.

2.4.Teorem. Əgər A tavtalogiyası $A_1, \dots, A_n$ dəyişənlərindən düzəlmişsə və A tavtalogiyasında $A_1, \dots, A_n$ dəyişənlərini uyğun olaraq $B_1, \dots, B_n$ formalları ilə əvəz etsək, alınan yeni C formasıdada tavtalogiya olar.

İsbatı. Fərz edək ki,A tavtalogiyadir və C formasına daxıl olan dəyışənlərın ıxtıyari qeyd edilmiş doğruluq qiymətlərini paylanma sətri verilmlşdir. Onda $B_1,\ldots, B_n$ formaları müəyyən $x_1,..,x_n$ qiymətləri alacaq ($x_i \in \{D,Y\}, i=1,\ldots,n$), əgər $x_1,..,x_n$ bu qiymətlərini uyğun olaraq $A_1, \ldots, A_n$dəyişənlərinə versək,onda A formasının aldığı qiymət,C formasının (daxıl olan dəyışənlərın hərflərin doğruluq qiymətlərini qeyd edilmiş paylanma sətrinə görə) aldığı qiymətlə eynı olacaq.A forması tavtaloqiya olduğundan,onda C formasıda doğru olacaq. Beləliklə C tavtaloqiyadır. Altformanın tərifini verək.

2.3. **Tərif.** Fərz edək ki,A,B,C ixtiyari proporzisional formalardır,onda

a) A proporzisional forması Avə $\bar{A}$ proporzisional formalarının alt formasıdir.

b) Avə B proporzisional formaları $A \vee B, A \rightarrow B, A \wedge B, A \leftrightarrow B$ formalarının alt formarlardırlar.

c) Əgər A proporzisional forması B proporzisional formasının,B proporzisional forması C proporzisional formasinin alt formasıdırsa, onda A proporzisional forması C proporzisional formasinin alt formasıdır.

Misal.

$$(A \rightarrow ((B \wedge C) \vee \bar{B})) \leftrightarrow (D \rightarrow E)$$

formasında A, D→E, B∧C alt formalardır.

2.5. Teorem.(əvəze etmə prinsipi) Fərz edək ki,A proporzisional forması A_1 alt formasıdir. A_1 formasında A alt formasının bir və ya bir neçə daxil olmasını B proporzisional forması ilə əvəz etdikdə alınan proporzisional formanı B_1 ilə işarə edək,onda $(A\leftrightarrow B)\rightarrow(A_1\leftrightarrow B_1)$.

İsbatı.A_1, B-də olan olan dəyişənlərin ıxtıyari qeyd edilmiş doğruluq qiymətlərinin paylanma sətrinə baxaq.Əgər bu qiymətlərdə A və B müxtəlıf qiymətlər alırsa,onda A↔B yalan olur və $(A\leftrightarrow B)\rightarrow(A_1\leftrightarrow B_1)$ forması dogru olur. Əgər bu qiymətlərdə A və B eyni qiymət alırsa,onda aydındır ki,A_1 və B_1-də eyni qiymət alır,belə ki B_1 forması A_1 formasında A alt formasının bir və ya bir neçə daxil olmasını B proporzisional forması ilə əvəz etməklə alınmışdır və $A_1\leftrightarrow B_1$forması doğru olur, deməli $(A\leftrightarrow B)\rightarrow(A_1\leftrightarrow B_1)$ formasıda doğru olur. Aydındır ki,

2.6. Nəticə. Əgər (A↔B) tavtaloqiadırsa(yəni Avə B məntiqi eynıgüclüdürsə), onda $A_1\leftrightarrow B_1$ tavtaloqia olur(yəni A_1və B_1 məntiqi ekvivalent olur). Bu nəticə verilmiş formanı məntiqi ekvivalent formalalar vasitəsi ilə onunla məntiqi ekvivalent olan daha sadə formaya gətirməyə imkan verir.Bunun üçün məniqin əsas qanunların (tavtaloqiaların) siyahısını verək.

2.7.Teorem(məniqin əsas qanunları) P, Q, R ixtiyarı proporzisional formalardır, onda məniqin əsas qanunları(tavtaloqiaları) aşagıdakılardır.

1. $P \vee \overline{P}$ - III rədd etmə qanunu

2. $\overline{\left(P \wedge \overline{P}\right)}$ - ziddiyəti rədd etmə qanunu

3. $\overline{\overline{P}} \leftrightarrow P$ - ikiqat inkar qanunu

4. $P \to P$ - eynilik qanunu

5. $(P \to Q) \leftrightarrow \left(\overline{Q} \to \overline{P}\right)$ - əks mövqe qanunu

6. $((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R)$ - ardıcıl mühakimə qanunu

7. $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow \left(\overline{P} \leftrightarrow \overline{Q}\right)$ - əkslərin vəhdəti qanunu

8. $(P \wedge Q) \leftrightarrow (Q \wedge P)$ - konyuksiyanın kommutativlik qanunu

9. $(P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$ - dizyuksiyanın kommutativlik qanunu

10. $((P \wedge Q) \wedge R) \leftrightarrow (P \wedge (Q \wedge R))$ - konyuksiyanın assosativlik qanunu

11. $((P \vee Q) \vee R) \leftrightarrow (P \vee (Q \vee R))$ - dizyuksiyanın assosativlik qanunu

12. $(P \wedge (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$ - konyuksiyanın dizyuksiyaya nəzərən distrubutivlik qanunu

13. $(P \vee (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$ - dizyuksiyanın konyuksiyaya nəzərən distrubutivlik qanunu

14. $(P \wedge P) \leftrightarrow P$ - konyuksiyanın idempotentlik qanunu

15. $(P \vee P) \leftrightarrow P$ - dizyuksiyanın idempotentlik qanunu

16. Fərziyələrin yerdəyişmə qanunu

$((A \rightarrow B) \rightarrow C)) \leftrightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow C))$

17. $(P \wedge (Q \vee P)) \leftrightarrow P$ - udmanın I qanunu

18. $(P \vee (Q \wedge P)) \leftrightarrow P$ - udmanın II qanunu

19. $(\overline{P \wedge Q}) \leftrightarrow (\overline{P} \vee \overline{Q})$ - De Morqanın I qanunu

20. $(\overline{P \vee Q}) \leftrightarrow (\overline{P} \wedge \overline{Q})$ - De Morqanın II qanunu

Məntiqi əməllələrinin birinin digərləri ilə ifadəsi

21. $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\overline{A} \vee B)$, $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\overline{A \wedge \overline{B}})$

22. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A$

23. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (\bar{A} \vee B) \wedge (\bar{B} \vee A)$

24. $(A \wedge B) \leftrightarrow \overline{(A \rightarrow \bar{B})}$, $(A \wedge B) \leftrightarrow \overline{(\bar{A} \vee \bar{B})}$

25. $(A \vee B) \leftrightarrow (\bar{A} \rightarrow B)$, $(A \vee B) \leftrightarrow \overline{(\bar{A} \wedge \bar{B})}$

Tavtaloqiya və ziddyyətlərə aid məntiq qanunları (burada 1 istənilən tavtaloqiyanın, 0 istənilən ziddyyətin əvəzinə yazılmışdır)

26. $(A \wedge 1) \leftrightarrow A$

27. $(A \vee 1) \leftrightarrow 1$

28. $(A \wedge 0) \leftrightarrow 0$

29. $(A \vee 0) \leftrightarrow A$

30. $(A \wedge \bar{A}) \leftrightarrow 0, (A \vee \bar{A}) \leftrightarrow 1,$

31. $(A \rightarrow A) \leftrightarrow 1$, $(0 \rightarrow A) \leftrightarrow 1$

32. $(1 \rightarrow A) \leftrightarrow A$, $(A \rightarrow 0) \leftrightarrow \bar{A}$, $(A \rightarrow 1) \leftrightarrow 1$

33. $(A \leftrightarrow A) \leftrightarrow 1$, $(A \leftrightarrow \bar{A}) \leftrightarrow 0$, $(A \leftrightarrow 1) \leftrightarrow A$

34. $1 \leftrightarrow \bar{0}$, $(A \leftrightarrow 0) \leftrightarrow \bar{A}$

İsbatı. Doğruluq cədvəllərini tərtib edərək tavtaloqiyalar olduğunu göstərin.

2.8. Teorem 2.6 və 2.7 əsasən verilmiş formanı ,məntiqi ekvivalent formalalar vasitəsi ilə onunla məntiqi ekvivalent olan daha sadə və ya tələb olunan formaya gətirmək olar.

Misal.

Sadələşdirin$(A \wedge B \wedge \bar{C}) \vee \overline{(A \to B)} \wedge \bar{C}) \vee (\bar{A} \vee \overline{(B \to C)} \wedge \bar{C}))$

Həlli. $(A \wedge B \wedge \bar{C}) \vee \overline{(A \to B)} \wedge \bar{C}) \vee (\bar{A} \vee \overline{(B \to C)} \wedge \bar{C})) \equiv$

$$\equiv (A \wedge B \wedge \bar{C}) \vee (\bar{A} \vee B) \wedge \bar{C}) \vee (\bar{A} \vee (\bar{B} \vee C) \equiv$$

$$\equiv ((A \wedge B \wedge \bar{C}) \vee (A \wedge \bar{B} \wedge \bar{C})) \vee (\bar{A} \wedge B \wedge \bar{C}) \equiv$$

$$\equiv (A \wedge (B \vee \bar{B})) \wedge \bar{C}) \vee ((\bar{A} \vee A) \wedge B \wedge \bar{C}) \equiv$$

$$\equiv (A \wedge \bar{C}) \vee (B \wedge \bar{C}).$$

Misal2. Sadələşdirin.

$(P \leftrightarrow Q) \wedge (P \vee Q) \equiv (P \to Q) \wedge (Q \to P) \wedge (P \vee Q) \equiv (\bar{P} \vee Q) \wedge$
$\wedge (\bar{Q} \vee P) \wedge (P \vee Q) \equiv (\bar{P} \vee Q) \wedge ((P \vee \bar{Q}) \wedge (P \vee Q)) \equiv (\bar{P} \vee Q) \wedge$
$\wedge (P \vee (\bar{Q} \wedge Q)) \equiv (\bar{P} \vee Q) \wedge (P \vee 0) \equiv (\bar{P} \vee Q) \wedge P \equiv (\bar{P} \wedge P) \vee (Q \wedge$
$\wedge P)) \equiv 0 \vee (P \wedge Q) \equiv P \wedge Q$

§3.Proporzisional əməliyyatların tam sistemi. İkilik Prinsipi

3.1. Tərif. Təyin və qiymətlər oblastı { D , Y } olan hər bir funksiyaya doğruluuq funksiyası deyilir

Funksional nöqteyi - nəzərdən hər bir proporzisional forma doğruluq funksiyasıdır. Əksi də doğrudurmu, yəni hər bir doğruluq funksiyasını propzisional forma vasitəsi ilə ifadə etmək olarmı?

3.2.Teorem İstənilən doğruluuq funksiyasını $\bar{\ }$, $\wedge$, $\vee$ məntiqi əməliyyatları vasitəsi ilə proporzisional forma şəklində ifadə etmək olar.

İsbatı: Fərz edək ki, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiyaları verilmişdir. Belə ki, $D(f) = E(f) = \{D, Y\}$, yəni $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dəyişənləri və f funksiyası ancaq doğru və ya yalan qiymətlər alır, burada x_1, x_2, ..., x_n-dəyişənlərinə qarşı uyğun olaraq $A_1, A_2, \ldots, A_n$ proporzisional hərflərini qarşı qoyaq. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiyasının doğruluq cədvəli 2^nsətirdən ibarətdir və bu *sətirləri* $1,2,\ldots,2^n$ qədər nömrələyək. Hər bir k sətri ($k=1,\ldots,2^n$) üçünC_k olaraq $U_1^k \wedge U_2^k \wedge \ldots \wedge U_n^k$ qarşı qoymaq olar, burada əgər k sətrində x_j dəyişəni doğru qiymət alırsa onda U_j^k ($j=1,\ldots,n$) A_J proporzisional hərfi götürlür, əks halda U_j^k ($j=1,\ldots,n$) $\bar{A}_J$ götürülür. Aydındır ki, hər bir C_k($k=1,\ldots,2^n$) doğruluq cədvəlinin ancaq k sətrində aldığı qiymətlərdə doğru olur,qalan sətirlərdə Y qiyməti alır. E forması olaraq, C_k - ların dizyunksiyasını götürək ki, bu sətirdə f funksiyası D qiyməti alsın. (Əgər belə sətir yoxdursa onda f funksiyası həmişə Y qiyməti alır, onda teoremi $A_1 \wedge \bar{A}_1$ formulu axtarılan forma olur). E formulu vasitəsi ilə verilmiş funksiya f ilə üst - üstə düşür. Doğrudan da x_1, x_2, ..., x_n dəyişənlərinin müəyyən j($j= 1,2,\ldots,2^n$) sətrindəki qiymətlərinə baxaq, əgər bu sətirdə f funksiyası D qiyməti alırsa, onda E formulunu Cj dizyunktiv həddi D qiyməti alır, başqa hədləri Y qiyməti alır və E formulu(dizunksiyanın doğru olması üçün onun bir həddinin doğru olması kifayətdir) D qiyməti alır. Əgər j sətrində Y qiyməti alırsa onda Cj E formulunun dizyunktiv həddi olmur və bu sətrə görə E daxil olan bütün hədlər Y qiymət aldığından E formuluda Y qiyməti alır. Beləliklə, E formulunun doğruluq cədvəli f funksiyasının doğruluq cədvəli ilə üst-üstə düşür. Teorem isbat olundu.

Misal. $f(x_1, x_2, x_3)$ funksiyasının doğruluq cədvəlinə görə, ona uyğun proporzisional formanı qurun:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
D	D	D	Y
Y	D	D	D
D	Y	D	D
Y	Y	D	Y
D	D	Y	Y
Y	D	Y	D
D	Y	Y	Y
Y	Y	Y	D

Cədvəl 2.3

Funksiya doğru qiymətlərini 2,3,6,8 sətirlərdə alır

2 sətrə görə dizyunktiv hədd $(\overline{A_1} \wedge A_2 \wedge A_3)$

3 sətrə görə dizyunktiv hədd ($A_1 \wedge \overline{A_2} \wedge A_3$)

6 sətrə görə dizyunktiv hədd ($\overline{A_1} \wedge A_2 \wedge \overline{A_3}$)

8 sətrə görə dizyunktiv hədd ($\overline{A_1} \wedge \overline{A_2} \wedge \overline{A_3}$)

Onda E formulu

$(\overline{A_1} \wedge A_2 \wedge A_3) \wedge (A_1 \wedge \overline{A_2} \wedge A_3) \wedge (\overline{A_1} \wedge A_2 \wedge \overline{A_3}) \wedge$

$(\overline{A_1} \wedge \overline{A_2} \wedge \overline{A_3})$ şəklidə olacaq.

3.3.Nəticə. İstənilən doğruluq funksiyasını yalnız ($\bar{}$ və $\vee$) və ya ($\bar{}$ və $\rightarrow$) və ya ($\wedge$ və $\bar{}$) məntiqi əməliyyatları vasitəsi ilə tərtib olunmuş proporzisional forma ilə ifadə etmək olar.

İsbatı. Teorem 3.2 görə istənilən doğruluuq funksiyasını $\bar{}$, $\wedge$, $\vee$ məntiqi əməliyyatları vasitəsi ilə proporzisional forma şəklində ifadə etmək olar.Alınmış proporzisional formanı onunla ekvivalent olan və yalnız

a) ($\wedge$ və $\bar{}$) məntiqi əməliyyatları saxlayan proporzisional forma şəklində ifadə etmək üçün hər bu formaya daxil olan hər bir AvB proporzisional forması şəklındə alt formanı ona məntiqi ekvivalent olan $\overline{(\overline{A} \wedge \overline{B})}$ ilə əvəz edilir.

b) ($\bar{}$ və $\rightarrow$) məntiqi əməliyyatları saxlayan proporzisional forma şəklində ifadə etmək üçünr bu formaya daxil olan hər bir AvB proporzisional forması şəklındə alt formanı ona məntiqi ekvivalent olan $A \vee B \leftrightarrow (\overline{A}) \rightarrow B$ ilə və A $\wedge$ B proporzisional forması şəklındə alt formanı ona məntiqi ekvivalent olan $\overline{A \wedge B \leftrightarrow (A \rightarrow \overline{\overline{B}})}$ əvəz edilir.

c) ($\overline{\ }$ və $\vee$) məntiqi əməliyyatları saxlayan proporzisional forma şəklində ifadə etmək üçün hər bu formaya daxil olan hər bir A $\wedge$ B proporzisional forması şəklındə alt formanı ona məntiqi ekvivalent olan $A \wedge B \leftrightarrow \overline{(\overline{A} \vee \overline{B})}$ əvəz edilir.İsbat olundu ki, elə məntiqi əməliyyat cütləri var ki, (məsələn $\overline{\ }$ və $\vee$) istənilən doğruluq funksiyasını yalnız onlar vasitəsi ilə ifadə etmək olar.

Elə bir 2 yerli məntiqi əməliyyat vardır ki, istənilən doğruluq funksiyasını yalnız onun vasitəsi ilə ifadə etmək olar. Bu məntiqi əməliyyatlardan bırı Şeffer əməliyyatı adlanır.

3.4.Şefferin doğruluq cədvəli (Şeffer ştrixi)

A	B	$A \mid B$
D	D	Y
D	Y	D
Y	D	D
Y	Y	D

İstənilən doğruluq funksıyasının Şeffer əməliyyatı vasitəsilə ifadə oluna bilməsi $\bar{A}$ və A∨ B məntigi əməliyyatnirının doğruluq cədvəllərinin uyğun olaraq $(A|A)$ və $(A|A)|(B|B)$ formallarının doğruluq cədvəllərinin eynı olmasından alınır. İstənilən doğruluq funksıyasını Şeffer əməliyyatı vasitəsilə ifadə oluna bilməsin göstərmək üçün, nəticə 3.3-dəki bəndində alınmış proporzisional formuluda ki, ¯ və ∨ məntigi əməliyyatnirını uyğun olaraq $(A|A)$ və $(A|A)|(B|B)$ ilə əvəz etmək kifayətdir..

3.5. Bu məqsəd üçün yararlı ikinci məntiqi əməliyyat ↓ (Pirs oxu (Bebba funksiyası ;)) ↓ məntiqi əməliyyatın cədvəli:

A	B	A↓B
D	D	Y
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	D

Cədvəl 2.4.

Bu məntiqi əməliyyatın kifayət etməsi $\bar{A}$ və A∧B məntiqi əməlıyyatlarının dogruluq cədvəllərinin uyğun olaraq $(A\downarrow A)$ və $((A\downarrow A)|(B\downarrow B))$ formallarının doğruluq cədvəlləri ilə eynı olmasından alınır. İstənilən doğruluq funksıyasını ↓

əməliyyatı vasitəsilə ifadə oluna bilməsin göstərmək üçün, nəticə 3.3-dəki a) bəndində alınmış proporzisional formuluda ki, $\overline{}$ və $\wedge$ məntigi əməliyyatnirını uyğun olaraq $(A \downarrow A)$ və $((A \downarrow A) | (B \downarrow B))$ ilə əvəz etmək kifayətdir...

3.6. Teorem. İstənilən doğruluq funksiyasını yalnız bir 2 yerli məntiqi əməliyyatla ifadə edə bilən məntiqi əməliyyat ancaq Şeffer və Pirs məntiqi əməliyyatlarıdır.

İsbatı: Fərz edək ki, h (A,B) məntiqi əməliyyatıda bu məqsəd üçün yararlıdır. Əgər h(D, D)=D olsa, onda, h(A,B) vasitəsi ilə qurulan istənilən proporzisional forma, doğru qiymətiə doğru alar. Deməli $\overline{A}$ -nı yalnız h (A,B) vasitəsi ilə almaq olmaz. Eyni qayda ilə h(Y,Y)=Y olsa, onda $\overline{A}$ - nı almaq olmaz. . Deməli, yeni məntiqi əməlyyatda da 1-ci və 4-cü sətir əvvəlki 2 məntiqi əməliyyatın 1-cı və 4-cü sətri ilə üst-üstə düşməlidir.

A	B	$h(A,B)$
D	D	Y
Y	D	?
D	Y	?
Y	Y	D

Cədvəl 2.5

Onda aşağıdakı variantlardan biri ola bilər:

a) 2 , 3 sətirlərdə uyğun olaraq D və Y qiyməti alır, onda h(A,B) ılə $\bar{A}$ məntiqi əməliyyatı ilə

və ya 2 , 3 sətirlərdə uyğun olaraq Y və D qiyməti alır onda h(A,B) ılə $\bar{B}$ məntiqi əməliyyatı ilə eyni olar.Hər iki halda $h(A,B)$ əməliyyatı inkar əməlıyyatı vasitəsi ilə ifadə olunur. Lakin istənilən doğruluq funksiyasını $^{-}$ əməliyyatı vasitəsi ilə (biryerlı əməliyyat) ifadə oluna bilməz. Belə ki, $^{-}$ əməliyyatı (bir yerlı) vasitəsi ilə ifadə oluna bilən funksiya yalnız və yalnız eyniliklə dəyişənin özünə bərabər olan və dəyişənin inkarı olan doğruluq funksiyalarıdır.

b) 2 , 3 sətirlərdə uyğun olaraq D və D qiymətləri alır. Onda Şeffer əməliyyatını alırıq.

c) 2 , 3 sətirlərdə uyğun olaraq Y və Y qiymətləri alır. Onda Pirs əməliyyatını alırıq. Teorem isbat olundu.

3.7.İkilk prinsipi.

a) Fərz edək ki, A ancaq $\wedge$, $\vee$ *və* $^{-}$ məntiqi əməllərini saxlayan propozosional formadır, A formasında $\vee$-nı $\wedge$ ilə və $\wedge$ nı $\vee$ ilə əvəz etsək alınan formanı A' ilə işarə edək. Asanlıqla isbat etək olar ki,(de Morqan qanunlarından istifadə edərək)A onda və ancaq onda tavtaloqiya olur ki, $\overline{A'}$ tavtaloqiya olsun.

b) Fərz edək ki,A ancaq $\wedge$, $\vee$ *və* $^{-}$ məntiqi əməllərini saxlayan propozosional formadır, A formasında $\vee$ nı$\wedge$ ilə, $\wedge$ nı $\vee$ və hər bir propzosional dəyişəni onun inkarı ilə əvəz etsək etsək alınan formanı A^* formasına A nın ikili forması deyilir. İsbat edin ki, A^* forması $\bar{A}$ forması ilə eynigüclüdr. (de Morqan və distributivlik qanunlarından istifadə edərək).

§4 . Mühazilər cəbrinin normal formalari. DNF,KNF,MDNF,MKNF və onlara aid teoremlər

Mülahizələr cəbrinin normal formaları.

Məlumdur ki, riyazi analizdə müxtəlif funksiyalar içərisində elmentar (üstlü, loqarifmik, qüvvət, triqonometrik və s.) funksiyalar seçilir və digər funksiyalar onlar vasitəsi ifadə olunaraq tədqiq olunur.

Mülahizələr cəbrində də belə elmentar formalar var

4.1. Proporzisional dəyişənlərin və ya onlarm inkarlarının dizyunksiyalarına elementar cəm(elmentar dizyunktiv cəm) deyilir. Xüsusi halda hər bir proporzisional dəyişənə dizyunktiv cəm kimi baxmaq olar. Məsələn,

$$A, A\vee B, A\vee\bar{B}, \bar{A}\vee B\vee C\vee D\vee\bar{B}$$

dizuynktiv cəmdir.

4.2. Teorem. Elementar cəmin tavtalogiya olması üçün zəruri və kafi şərt heç olmazsa bir proporzisional dəyişənlə, onun inkarının bu cəmə daxil olmasıdır.

Kafilik. Əgər elementar cəmə müəyyən A dəyişəni ilə onun inkari daxildirsə, yəni o, $A \vee \bar{A} \vee \ldots$ şəklindədirsə, ona görə də dəyişənlərin istənilən qiymətlərində $A \vee \bar{A}$ doğru qyimət aldığından elementar cəmdə doğru qiymət alacaq.

Zərurilik. Fərz edək ki, elementar cəm tavtalogiadır, lakin heç bir dəyişən özü ilə, inkarı bu cəmə daxil deyil. Onda cəmə daxil olan hər bir proporzisional hərf özü daxildirsə yalan, inkarı daxildirsə doğru qiymət verək, onda cəmin bütün toplananları yalan qiymət aldığından, cəm də yalan qiymət alacaq, deməli, elmentar cəm tavtalogiya deyil. Bu isə şərtə ziddir, deməli, əks fərziyyə doğru deyil.

4.3. Proporzisional dəyişənlərin və ya onların inkarlarının konyuksiyalarına elementar hasil(elmentar konyuktiv hasil deyilir). Xüsusi halda hər bir proporzisional dəyişənə konyuktiv hasil kimi də baxmaq olar

Məsələn:

$$A \wedge B, A \wedge \bar{B}, \bar{A} \wedge B \wedge C \wedge D \wedge \bar{B}$$

konyuktiv hasildirlər.

4.4.Teorem. Elementar hasilin ziddiyyət olması üçün zəruri və kafi şərt heç olmazsa bir proporzisional dəyişənlə, onun inkarının bu hasilə daxil olmasıdır.

Teoremin isbatı, 4.2-nin isbatına uyğundur.

4.5.Elmentar konyuksiyaların dizyunksiyalarına dizyunktiv normal forma (DNF) deyilir. Bir elmentar konyuksiya da dizyunktiv normal forma hesab olunur (həddi bir olan).

Misallar.($\overline{A} \wedge B \wedge C \wedge D \wedge \overline{B}$) $\vee$ ($A \wedge \overline{B}$), $A \wedge B$ DNF-dır.

4.6.Teorem Hər bir proporzisional formula üçün onunula eynigüclü olan DNF var(yeganə deyil).

İsbatı. Proporzisional formulalarnın DNF qurmaq üçün:

a) Əvvəlcə→ və ↔ əməliyatlarını

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\overline{A} \vee B) \text{ və} (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (\overline{A} \vee B) \wedge (A \vee \overline{B})$$

qanunlarindan istifadə edərək →və↔ əməliyyatlarını $\wedge, \vee$,

və $\overline{}$ əməliyyatları ılə əvəz edək.

b) $\overline{}$ əməliyyatlarını ancaq proporzisional dəyişənlərin qarşısında olmasını təmin etmək üçün De Morqan qanunlarından $\overline{A \wedge B} \leftrightarrow (\overline{A} \vee \overline{B})$ və $\overline{A \vee B} \leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$ istifadə etmək.

c) konyuksiyyanın distributivlyi$(A \vee B) \wedge C \leftrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ qanundan istifadə edərək dizyunksiyaları,konyuktiv hasillərə çevirmək.

d) daima ikiqat inkar qanunundan $\overline{\overline{A}} \leftrightarrow A$ istifadə edərək, ikiqat inkarlardan azad olmaqdır .

Misal1.Propozosional formasının DNF-ni tapın.

Həlli.

$$\overline{(X \vee Z)} \wedge (X \to Y) \cong (\overline{X} \wedge \overline{Z}) \wedge (\overline{X} \vee Y) \cong \overline{X} \wedge (\overline{Z} \wedge (\overline{X} \vee Y)) \cong$$

$$\cong \overline{X} \wedge ((\overline{Z} \wedge \overline{X}) \vee (\overline{Z} \wedge Y)) \cong (\overline{X} \wedge \overline{Z} \wedge \overline{X}) \vee (\overline{X} \wedge Y \wedge \overline{Z}) \cong$$

$$\cong (\overline{X} \wedge \overline{Z}) \vee (\overline{X} \wedge Y \wedge \overline{Z})$$

4.7. Elmentar dizyunksiyaların konyuksiyalarına konyuktiv normal forma(KNF) deyilir. Bir elmentar dizyunksiya da konyuktiv normal forma hesab olunur.

4.8.Teorem. Hər bir proporzisional formula üçün onunla eynigüclü olan KNF var (yeganə deyil). Proporzisional formulaların KNF tapmaq üçün:

a) Əvvəlcə $\to$ və $\leftrightarrow$ əməliyatlarını

$$(A \to B) \leftrightarrow (\bar{A} \vee B) \text{ və} (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (\bar{A} \vee B) \wedge (A \vee \bar{B});$$

qanunlarindan istifadə edərək $\to$və $\leftrightarrow$ əməliyyatlarını $\wedge, \vee$ və $\bar{\ }$ əməliyyatları ılə əvəz edək.

b) $\bar{\ }$ əməliyyatlarını ancaq proporzisional dəyişənlərin qarşısında olmasını təmin etmək üçün De Morqan qanunlarından $\overline{A \wedge B} \leftrightarrow (\bar{A} \vee \bar{B})$ və $\overline{A \vee B} \leftrightarrow \bar{A} \wedge \bar{B}$ istifadə etmək.

c) Dizyunksiyanın distributivlyi

$$(A \wedge B) \vee C \leftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

qanundan istifadə edərək, konyuksiyaları dizyunktiv cəmlərə çevirmək.

d) daima ikiqat inkar qanunundan $\bar{\bar{A}} \leftrightarrow A$ istifadə edərək, ikiqat inkarlardan azad olmaqdır.

Misal2.Propozosional formasının KNF-ni tapın.

Həlli.

$$\overline{(X \vee Z)} \wedge (X \rightarrow Y) \cong (\bar{X} \wedge \bar{Z}) \wedge (\bar{X} \vee Y) \cong$$

$$\cong (\bar{X} \wedge \bar{Z}) \vee (\bar{X} \wedge Y \wedge \bar{Z}) \cong ((\bar{X} \wedge \bar{Z}) \vee \bar{X}) \wedge ((\bar{X} \wedge \bar{Z}) \vee$$
$$\vee Y) \wedge ((\bar{X} \wedge \bar{Z}) \vee \bar{Z} \cong$$

$$\bar{X} \wedge ((\bar{X} \vee Y) \wedge (\bar{Z} \wedge Y)) \wedge \bar{Z} \cong (\bar{X} \wedge (\bar{X} \vee Y)) \wedge ((\bar{Z} \vee Y) \wedge \bar{Z}) \cong \bar{X} \wedge \bar{Z}$$

Teorem 4.2 isbat qaydasina uyğun olaraq isbat etmək olar kı,

4.9.Teorem: Propzosional A formasının tavtaloqiy olmasını üçün zəruri və kafi şərt onunula eynıgügülü olan KNF –nın hər vuruğunda heç olmazsa bir dəyışənlə, onun inkarını saxlayan toplananm olmasıdır.

Bu teorem propzosional formasınun tavtaloqiya olub və ya olmasını yoxlamaga imkan verən qayda verir,bunun üçün, propzosional fomanın KNF qurmaq kifayətdir.

4.10.Mükəmməl dizynktiv normal forma (MDNF) .Əgər A_1, $A_2,\dots,$, A_n propzosional həriflədən düzəldilmiş B(A_1, $A_2,\dots, A_n$) - DNF propzosional formasında:

a) eyni toplananlar yoxdursa

b) hər bir toplanana A_1, $A_2,\dots,$, A_n propzosional həriflədən hər birinin ancaq özü və ya ancaq inkari(ancaq bir dəfə) daxidirsə, onda $B(A_1, A_2,..., A_n)$ mükəmməl dizynktiv normal forma (MDNF) deyilir.

Hər bir propzosional formanın doğrulrq cədvəlinə görə teorem 3.2(ziddiyyət deyilsə) əsasən MDNF qurmaq olar. MDNF qurmaq üçün ikinci üsul,əvəlcə onun DNF qurmaq $D_1 v D_2 v... D_k$ sonra,alınmış DNF-də:

a) alınmış müəyən $D_i(i\leq m)$toplananında hər hansi bir hərf bir dəfədən artıq daxildirsə,birləşdirmə qanunua əsasən onları yalnız biri ilə əvəz edirik.

b) alınmış müəyən $D_i(i\leq m)$toplananında hər hansi bir hərfin inkarı bir dəfədən artıq daxildirsə,birləşdirmə qanunua əsasən onları yalnız biri ilə əvəz edirik.

c) alınmış müəyən $D_i(i\leq m)$toplananında müəyən hərf və onun inkarı daxıldırsə onda D_i zidiyyətdir və onu silmək olar.

ç) alınmış müəyən $D_i(i\leq m)$toplananında $A_1, A_2,..., A_n$ propzosional hərifldən,hərə hansı biri məsələn A_j iştirak etmirsə,onda onunla məntiqi ekvivalent olan

$(D_i \wedge A_j) \vee (D_i \vee \overline{A_j})$ formasi ilə əvəz edirik.

e) Əgər təkrarlanan toplananlar varsa,onda onları,biri ilə əvəz edirik

Misal3. Propzosional formasının MDNF-nı qurun.

Həlli:Əvvəlcə DNF alınmasından istifadə edək

$$(\overline{X \vee Z}) \wedge (X \to Y) \cong (\overline{X} \wedge \overline{Z}) \vee (\overline{X} \wedge Y \wedge \overline{Z}) \vee (\overline{X} \wedge Y \wedge \overline{Z}) \cong$$

$$\cong ((\overline{X} \wedge \overline{Z}) \wedge (Y \vee \overline{Y})) \vee (\overline{X} \wedge Y \wedge \overline{Z}) \cong (\overline{X} \wedge \overline{Z} \wedge Y) \vee$$

$$\vee (\overline{X} \wedge \overline{Z} \wedge \overline{Y}) \vee (X \wedge Y \wedge \overline{Z}) \cong$$

$$\cong (\overline{X} \wedge Y \wedge \overline{Z}) \vee (\overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z})$$

Qeyd. Hər bir propzosional formanı onunu dogruluq cədvəlinə görə (ziddiyyət deyilsə)teorem3.2 isbatında kı,sxemə əsasən MDNF-nı qurmaq olar.

4.11.Mükəmməl konyuktiv normal forma .Əgər $A_1, A_2,...,, A_n$ propzosional hərifllədən düzəldilmiş B($A_1, A_2,..., , A_n$)KNF propzosional formasında:

a) eyni vurqlar yoxdursa

b) hər bir vuruqda $A_1, A_2,..., , A_n$ propzosional həriflədən hər birinin ancaq özü və ya ancaq inkari(ancaq bir dəfə) daxidirsə onda

B($A_1, A_2,...,, A_n$) mükəmməl konyktiv normal forma (MKNF) deyilir.

B($A_1, A_2,..., , A_n$) mükəmməl konyktiv normal formasını qurmaq üçün,əvvəlcə,B($A_1, A_2,..., , A_n$) formasina ekvivalen,olan KNF qurmaq, sonra, alınmış KNF-də:

a) müəyən $D_i(i \leq m)$ vurugunda hər hansi bir hərf bir dəfədən artıq daxildirsə, birləşdirmə qanunua əsasən onları yalnız biri ilə əvəz edirik.

b) alınmış müəyən $D_i(i \leq m)$ vurugunda hər hansi bir hərfin inkarı bir dəfədən artıq daxildirsə,birləşdirmə qanunua əsasən onları yalnız biri ilə əvəz edirik.

c) alınmış müəyən $D_i(i \leq m)$ vurugunda müəyən hərf və onun inkarı daxıldırsə onda D_i tavtaloqiyadir və onu silmək olar.

ç) alınmış müəyən $D_i(i \leq m)$ toplananında $A_1, A_2, \dots, A_n$ propzosional hərifldən, hərə hansı biri məsələn A_j iştirak etmirsə, onda ona onda onunla məntiqi ekvivalent olan

$$(D_i \vee A_j) \wedge (D_i \vee \overline{A}_j)$$

formasi ilə əvəz edirik.

d) Əgər təkrarlanan vuruqlar varsa,onda onları,biri ilə əvəz edirik.

Misal 4.

Həlli. Propzosional formanın MKNF tapın.Əvvəlcə onun KNF tapılmasından istifadə edək:

$$\overline{(X \vee Z)} \wedge (X \to Y) \cong \overline{X} \wedge \overline{Z} \cong (\overline{X} \vee (Y \wedge \overline{Y})) \wedge (\overline{Z} \vee (X \wedge \overline{X})) \cong$$
$$\cong (\overline{X} \vee Y) \wedge (\overline{X} \vee \overline{Y}) \wedge (X \vee \overline{Z}) \wedge (\overline{X} \vee \overline{Z}) \cong (\overline{X} \vee Y \vee (Z \wedge \overline{Z})) \wedge$$
$$\wedge (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee (Z \wedge \overline{Z})) \wedge (X \vee \overline{Z} \vee (Y \wedge \overline{Y})) \wedge (\overline{X} \vee \overline{Z} \vee (Y \vee \overline{Y}) \cong$$
$$\cong (\overline{X} \vee Y \vee Z) \wedge (\overline{X}Y \vee Z) \wedge (X \vee \overline{Y} \vee Z) \wedge (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z) \wedge$$
$$\wedge (X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}) \wedge (X \vee Y \vee \overline{Z}) \wedge (X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}) \wedge (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}) \cong$$
$$\cong (\overline{X} \vee Y \vee Z) \wedge (\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}) \wedge (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z) \wedge (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z})(X \vee Y \vee \overline{Z}) \wedge$$
$$\wedge (X \vee Y \vee \overline{Z}) \wedge (X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z})$$

4.12.Hər bir propzosional A($A_1, A_2, \dots, A_n$) formasmm doğruluq cədvəlinə əsasən MKNF(tavtaloqiya deyilsə)qurmaq olar. $A(A_1, A_2,...,, A_n)$ formasının doğruluq cədvəli 2^nsətirdən ibarətdir və bu sətirləri $1,2,...,2^n$ qədər nömrələyək.Hər bir k sətri($k=1,...,2^n$)üçünC_k olaraq U_1^k vU_2^k v....vU_n^k qarşı qoymaq olar,burada əgər k sətrində x_j dəyişəni doğru qiymət alırsa ondaU_j^k (j=1,...,n) $\overline{A_j}$ proporzisional hərfi götürlür, əks halda U_j^k (j=1,...,n) A_J götürülür. E formulu olarq elə C_k larin konyksiyasını götürək ki, k sətirdə propozasional formaY qiyməti alsın. Asanlıqla isbat etməkolar ki,alınmış E mükəmməl konyuktiv normal forması

$$A(A_1, A_2,...,, A_n)$$

formasına məntiqi ekvivalendir.

Misal. $f(A_1, A_2, A_3)$ funksiyasının doğruluq cədvəlinə əsasən MKNF quraq.

A_1	A_2	A_3	$f(A_1, A_2, A_3)$
D	D	D	D
Y	D	D	D
D	Y	D	D
Y	Y	D	Y
D	D	Y	Y
Y	D	Y	D
D	Y	Y	Y
Y	Y	Y	D

Forma 4, 5 və 7 sətirlərdə yalan qymət alır,onda onun MKNF
$(\overline{A_1} \vee \overline{A_2} \vee A_3) \wedge (A_1 \vee A_2 \vee A_3) \wedge (A_1 \vee \overline{A_2} \vee \overline{A_1} \vee \overline{A_3})$
şəklində olur.

Doğrulyq cədvəllərinə görə MKNF və MDNF qurulması göstərir ki,hər bir formanın MKNF(tavtaloqia deyilsə) və MDNF(ziddiyyət deyilsə) yeganədir,əks halda MKNF və MDNF qurlmuş doğruluq cədvəlləri müxtəlıf olardı.

§ 5.Formal deduktiv nəzəriyyə. Formal mülahizələr cəbri

5.1 .Formal F deduktiv nəzəriyyə verılmişdir deyilir o vaxt ki,

a) F nəzəriyyəsinin müyyən hesabi sayda simvolları verilmişdir. F nəzəriyyəsinin müyyənın sonlu sayda simvolları bu nəzəriyyənin ifadələri adlanır.

b) F nəzəriyyəsinin ifadələrinin müəyyən alt çoxlugu verilir ki,onlarda F nəzəriyyəsinin formulları adlanır.Adətən verilmiş ifadənin formula olub olmamasını müəəyənləşdirən effektiv qayda verilmiş olur.

c) F nəzəriyyəsinin formullarının müəyyən alt çoxlugu verilir ki, onlarda F nəzəriyyəsinin aksiomları adlanır. Əksər hallarda verilmiş formulanın aksioma olub olmamasını müəəyənləşdirən effektiv qayda olur. Bu halda F nəzəriyyəsi effektiv aksiomatikləşdirilmış nəzəryyə adlanır.

5.2. Formullar arasında sonlu sayda $R_1,...,R_n$ münasibətləri olur ki,onlarda alınma qaydaları adlanır.Hər bir $R_i(i=1,...,n)$ münasibətinə qarşı elə müsbət j tam ədədi var ki, hər bir j sayda formullar ardıcıllıgı və hər bir A formulu üçün ,verilmiş j sayda formullar ardıcıllığının A formulu ilə R_i münasibətdə olduğunu və ya olmadıgını müəyyənləşdirən qayda var. ƏgərA formulu verilmiş j sayda formullar ardıcıllığı ilə A formulu ilə R_i münasibətindədirsə,onda deyirlər ki,A formulu verilmiş j sayda formullar ardıcıllığından R_i münasibəti vasitəsi ilə bilavasitə (çıxarılır) alınır.

5.3. F nəzəriyyəsində $A_1,...,A_k$ formullar ardıcıllıgına o vaxt isbat ardıcıllığı deyilir ki,bu ardıccıllığın istənilən A_i $(i=1,...,k)$ formulu ya F nəzəriyyəsinin aksiomudur və ya özündən əvvəl gələn formullardan $R_i(i=1,...,n)$münasibətlərinin birinin vasitəsi ilə bilavasitə alınır.

5.4. A formullu F nəzəryyəsini teoremi və ya isbat olunmuş formulu adlanır o vaxt ki, F nəzəryyəsində elə $A_1,...,A_k$ isbat ardıcıllıgı var ki, A formulu bu isbat ardicilliğının axırıncı formulludur. A formullu F nəzəryyəsini teoremidir $\vdash A$ və ya $\vdash_K$ A işarə olunur.

5.5. Tutaq ki, Γ formullar çoxluğu verilmişdir. A formulu F nəzəriyyəsində Γ formullar çoxlugunda o vaxt alınır ki, elə

$B_1, B_2.., B_n$ formullar ardıcıllığı olsun ki, A formulu bu ardicilliğının axırıncı formulludur və hər bir B_i (i=1,...,n)

a) ya aksiomdur;

b) ya $B_i \in F$;

c) və ya özündən əvvəl gələn formullardan R_i (i=1,...,n) münasibətlərinin birinin vasitəsi ilə bilavasitə alınır.

A formulunun Γ formullar çoxlugunda alınırsa $\Gamma \vdash A$ işarə olunur . Γ çoxlugunun elementləri fərziyələr adlanır.

5.6. Qeyd. Əgər Γ sonlu formullar ardıcıllığıdırsa, $\Gamma = \{ E_1, E_2.., E_n \}$ və $\Gamma \vdash A$- sa, onda $E_1, E_2.., E_n \vdash A$ yazılır. Aydındır ki, əgər Γ boş зoxluqdursa və $\Gamma \vdash A$ isə onda A teorem olur.

Fərziyələrdən alınmanın bir neçə sadə xassələrini qeyd edək:

1.Əgər əgər $\Gamma \subset \Delta$ - sa, $\Gamma \vdash A$ alirsa, onda $\Delta \vdash A$ alir.

2. $\Gamma \vdash A$ yalnız və yalnız o vaxt ki , Γ-nin elə sonlu alt çoxlupu Δ olsun ki, $\Delta \vdash A$

3. Əgər $\Delta \vdash A$ və istənilən $B \in \Delta$ -ın $\Gamma \vdash B$ onda $\Gamma \vdash A$.

5.7. Hər bir formal F deduktiv nəzəryyənin 4 xassəsinin tədqiqi mühümdür:

1. **Ziddiyyətsizliyi.** Əgər nəzəriyyədə hər bir formula isbat oluna biləndirsə onda bu nəzəryyə ziddiyyətsizli adlanır,əks halda

ziddyətsiz adlanır. Deduktiv nəzəryyənin ziddyətsizliyinin tədqiqi ən vacib, bir çox hallarda isə ən çətin məsələrindən biridir.Əgər nəzəryyənin ziddyətliliyi isbat olunmursa,onda bu nəzəriyyənin nə nəzəri,nə də tətbiqi əhəmiyyəti yoxdur.

2. **Doluluğu və ya tamlığı.** Əgər nəzəriyyədə istənilən A formulunun özü və ya inkarı isbat oluna biləndirsə, onda bu nəzəryyə doludur deyilir. Əks halda yəni,nəzəryyədə ya özü və ya inkarı isbat oluna bilməyən formula varsa, bu halda nəzəryyə dolu (tam)deyildir.

3.**Aksiomlarin asili olmamazliği.** Əgər nəzəriyyənin ayrıca götürülmüş aksiomu, digər aksiomlardan alına bilən deyilsə onda, ona asılı olmayan aksiom deyilir. Asılı olan aksiom əslində artıqdır, onun aksiomların siyahısından silinməsi nəzəriyyəyə heç bir təsir göstərməyəcək. Əgər nəzəriyyənin hər bir aksiomu asılı deyilsə, onda bu aksiomlar sisitemi asılı olmazdır deyilir.

4. **Həllliliyi.** Deduktiv nəzəryyəinin istənilən formulunu teorem olub olmadığını sonlu sayda addimdan sonra müəyyənləşdirə bilən effektiv proses(alqoritm) varsa, onda bu nəzəriyyə həll oluna biləndir deyilir,əks halda həll oluna bilən deyil deyilir

1.8. Formal mülahizələr cəbri (L formal nəzəryyəsini) verək.

1) Simvolları: $\neg$, $\to$, (,), $A_1, A_2, \ldots, A_n$,...sabitləri.

2) Formulanun tərifi:

a) Hər bir sabit formuladır

b) A və B formuladırsa, onda $\bar{A}$ və A→B formuladır

c) Formula yalnız a) *və* b) qaydaları vasitəsilə alına bilər.

3) L formaformal mülhazilər cəbrinin aksiomları:

L nəzəriyyəsini n istənilən A, B, C formuları üçün:

(A1) $(A \to (B \to A))$

(A2) $\left((A \to (B \to C)) \to (A \to B) \to (A \to C)\right)$

(A3) $((\bar{B} \to \bar{A}) \to ((\bar{B} \to A) \to B))$

formulları L nəzəriyyəsinin aksiomlrıdır.

4) L nəzəriyyəsinin yeganə alınma qaydası modus ponens qaydasıdır:

A və A→B- dən bilavasitə B alınır.Bu qayda qısa olaraq MP yazılacaq.

Məsələn.

a) $(\bar{\bar{\bar{B}}}\to\bar{\bar{B}}) \to ((\bar{\bar{\bar{B}}}\to B) \to \bar{\bar{B}})$ və $\bar{\bar{\bar{B}}}\to\bar{\bar{B}}$ formullarına MP

tətbiq etsək $(\bar{\bar{\bar{B}}}\to B) \to \bar{\bar{B}}$ alınar.

b) $\bar{B} \to \bar{A}$ və $(\bar{B}\to\bar{A}) \to ((\bar{B}\to A)\to B)$ formullarına MP

tətbiq etsək $(\bar{B}\to A) \to B$ alınar.

c) $\bar{B} \to \bar{\bar{A}}$ və $(\bar{B} \to \bar{\bar{A}}) \to ((\bar{B}\to \bar{\bar{A}}) \to B)$ formullarına MP

tətbiq etsək $(\bar{B}\to \bar{\bar{A}}) \to B$ alınar

Bu aksiomatikaya Mendelson aksiomatikası deyilir[1].

Onuda qeyd edək ki, L nəzəriyyəsinin sonsuz sayda aksiomlrı (A1), (A2), (A3) sxemləri vasitəsi ilə verilmişdir.

Məsələn.

a) Əgər A2 aksiomunda, B-ni A→A formulu, C-ni A formulu ilə əvəz etməklə,A2 aksiomu

$$A\to((A\to A)\to A)\to((A\to(A\to A))\to(A\to A))$$

şəklində olar.

b) A1 aksiomunda B-nı A→A formulu,ılə əvəz etməklə A1 aksiomu şəklində olar. $A\to((A\to A)\to A)$

c) A3 aksiomunda $A=\bar{B}$ götürsək onda

$$(\bar{B}\to\bar{\bar{B}})\to((\bar{B}\to\bar{B})\to B)\quad A3$$

aksiomu şəklində olar və sairə.

Çalışma1.

(A1), (A2), (A3) aksiomların doğruluq cədvəllərini qurun və onlardan hər birinin tavtaloqiya oldugunu göstərin.

Digər məntiqi əməlyyatları :

(D1) $\overline{(A\to\bar{B})}$ formulu əvəzinə ($A\wedge B$) yazılacaq.

(D2) ($\bar{A}\vee B$) formulu əvəzinə $A\to B$ yazılacaq.

(D3). $(A\to B)\wedge(A\to B)$ formulu əvəzinə ($A\leftrightarrow B$) yazılacaq.

5.9. L nəzəriyyəsində $A_1,\dots,A_k$ formullar ardıcıllıgına o vaxt isbat ardıcıllığı deyilir ki,bu ardıccıllığın istənilən A_i ($i=1,\dots,k$) formulu ya L nəzəriyyəsinin aksiomudur və ya özündən əvvəl gələn iki formuladan MP vasitəsi ilə alınır.

5.10. A formullu L nəzəryyəsini teoremi və ya isbat olunmuş formulu adlanır o vaxt ki, L nəzəryyəsində elə $A_1,...,A_k$ isbat ardıcıllıgı var ki, A formulu bu isbat ardicilliğının axırıncı formulludur. A formullu F nəzəryyəsini teoremidir $\vdash$A və ya $\vdash_L$A işarə olunur.

5.11. Tutaq ki, Γ formullar çoxluğu verilmişdir. A formulu L nəzəriyyəsində Γ formullar çoxlugunda o vaxt alınır ki, elə $B_1, B_2,..,B_n$ formullar ardıcıllığı olsun ki, A formulu bu ardicilliğının axırıncı formulludur və hər bir B_i (i=1,...,n)

a) ya aksiomdur;

b) ya $B_i \in F$;

c) və ya özündən əvvəl gələn iki formuladan MP ilə alınır. A formulunun Γ formullar çoxlugunda alınırsa Γ$\vdash$A və ya $\Gamma \vdash_L$A işarə olunur. Γ çoxlugunun elementləri fərziyələr adlanır.

Qeyd: Əgər Γ sonlu formullar ardıcıllığıdırsa, Γ= $\{E_1,E_2..,E_n\}$ və Γ$\vdash$A- sa, onda $E_1,E_2..,E_n \vdash A$ yazılır.

Hər bir isbat ardıcıllıgının formullarmın sag tərəfində formulanın isbat ardıcıllıgına daxil olmasını əsaslandıran qısa izahatlar veriləcək.

5.12.A,A→B,B→C$\vdash$C

İsbatı

1). A fərziyyə

2). $A \to B$ fərziyyə

3). $B \to C$ fərziyyə

4). B MP1,2

5). C MP4,3

5.13. Lemma. $A \to A$

İsbatı

1. $(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$ A2 aksiomunda B-ni $A \to A$ formulu, C-ni A formulu ılə əvəz etməklə alınır

2. $A \to ((A \to A) \to A)$ A1 aksiomunda B-nı $A \to A$ formulu ılə əvəz etməklə alınır

3. $(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$ MP1,2

4. $A \to (A \to A)$ A1 aksiomunda B-ni A-ilə əvəz etməklə alınır .

5. $A \to A$ MP3,4

§6.L formal sistemi üçün deduksiya teoremi və ondan çıxan nəticələr

Riyazi mühakimələrdə çox vaxt A şərti daxilində B isbat olunur, bunun əsasında" əgər A-dirsa onda B-dir" mülahizəsinin doğruluğu nəticəsi alınır.

L nəzəryyəsi üçün bu üsulun əsaslandırılması deduksiya teorremi şəklində verilir.

6.1. Teorem (Deduksiya teoremi): Əgər Γ formullar çoxlugu A və B formullardırsa və

$$\Gamma, A \vdash B \qquad (1)$$

Onda

$$\Gamma \vdash A \to B \qquad (2)$$

İsbatı. Fərz edək ki, $\Gamma, A \vdash B$ ısbat ardıcıllıgı

$B_1, B_2, \ldots, B_n$ (3) burada B_n B formuludur.

İsbatı. riyazi induksiya metodu ilə aparılacaqdır. (3) isabat ardıcıllığındaki formulların sayı n görə.

Başlağic addım Əvvəlcə n=1 olduqda isbat edək.Yəni B_1 B formuludur

Bu halda üç hal ola bilər:

a) B_1 aksiomdur. Onda (2) isbat ardıgıllıgı:

1) B aksiomdur

2) $B \to (A \to B)$ A_1 Aksiomu

3) $A \to B$ MP (1,2)

b) $B \in \Gamma$. Onda(2) isbat ardıgıllıgı:

1) B fərziyyə

2) $B \to (A \to B)$ Aksiom

3) $A \to B$ MP (1,2)

c) B_1 formulu A ilə üstə düşür, bu halda $\Gamma\vdash A\to A$ (2) şəklində olur. $A\to A$ nın isbatı teorem 2.4.1 verildiyyındən. $\vdash A\to A$ dən $\Gamma\vdash A\to A$ alınır.

<u>İnduksiya addimi</u>:

İndi fərz edək ki, (1) ardıcıllığında ixtiyari $k<n$ üçün deduksiya doğrudur. Yəni ixtiyari $k<n$ üçün $\Gamma, A\vdash B_k$ olarsa onda $\Gamma\vdash A\to B_k$. $k=n$ üçün isbat edək. Burada 4 hal var

a) $B_n\in\Gamma$

b) B_n aksiomdur

c) B_n formula A ilə eynıdır.

ç)elə $i,j<n$ var ki, $B_i = B_j\to B_n$ və aydindir ki, $B_n=B$

a), b) və c) halları üçün $\Gamma\vdash A\to B$ isbat ardıcıllğı n=1 olduqda qurulmuş uyğun isbat ardıcıllıqları ilə eynidir.

ç) halı üçün teoremi isbat edək.İnduksiya təklifinə görə

$\Gamma, A\vdash B_j$ dən $\Gamma\vdash A\to B_j$ və $\Gamma, A\vdash B_i$ dən $\Gamma\vdash A\to B_i$ yəni $\Gamma\vdash A\to(B_j\to B_n)$ alınır.

$$A\to B_j\ ,\ A\to(B_j\to B_n)\vdash(A\to B_n) \qquad (4)$$

isbatini verək.

(4) üçün isbat ardıcılığı:

1) $((A\to(B_j\to B_n))\to((A\to B_j)\to(A\to B_n))$ A_2 aksiomu

2) $A\to(B_j\to B_n)$ fərziyyə

3) $(A\to B_j)\to(A\to B_n)$ MP (1,2)

4) $A\to B_j$ fərziyyə

5) $A\to B_n$ MP (3,4)

olar.(4) isbat olundu

(4) və $\Gamma\vdash A\to B_j$, $\Gamma\vdash A\to(B_j\to B_n)$ isbatlarindan $\Gamma\vdash A\to B$ alınır.

Deduksiya teoremi isbat olundu.

6.2.Nəticə

i) $A\to B,\ B\to C\vdash A\to C$

ii) $A\to(B\to C),\ \ B\vdash A\to C$

i)-bəndini isbat etmək üçün əvvəlcə

$A\to B,\ B\to C,\ A\vdash C$ (*) isbat edək.

$A\to B,\ B\to C,\ A\vdash C$ nin isbatı:

1) $A\to B$ fərziyyə

2) $B\to C$ fərziyyə

3) A fərziyyə

4) B MP (1,3)

5) C MP (2,4)

(*) isbat olundu.Burada (*)deduksiya teoremini tətbiq etsək

$A\to B,\ B\to C\vdash A\to C$ alınar.

ii)- bəndini isbat etmək üçün əvvəlcə

$A\to(B\to C),\ B,\ A\vdash C$ (**) isbat edək.

1) $A \to (B \to C)$ fərziyyə

2) B fərziyyə

3) A fərziyyə

4) $B \to C$ MP (1,3)

5) C MP (2,4)

(**) isbat olundu. Burada (**)deduksiya teoremini tətbiq etsək

$A \to (B \to C), B \vdash A \to C$ alınar.

L formal sistemi üçün deduksiya teoremindən çıxan nəticələr aşagidakı teoremlələ ifadə olunur.

6.3.Teorem : $\vdash \bar{\bar{B}} \to B$

İsbatı:

1) $(\bar{B} \to \bar{\bar{B}}) \to ((\bar{B} \to \bar{B}) \to B)$ A3 aksiomu $A = \bar{B}$

2) $\bar{B} \to \bar{B}$ 5.13-ə görə

3) $(\bar{B} \to \bar{\bar{B}}) \to B$ 6.2 (ii) bəndinə 1və2

4) $\bar{\bar{B}} \to (\bar{B} \to \bar{\bar{B}})$ A1 aksiomu

5) $\bar{\bar{B}} \to B$ 6.2 (i)bəndinə və 3,4

6.4.Teorem $\vdash B \to \bar{\bar{B}}$

İsbatı

1) $(\bar{\bar{\bar{B}}} \to \bar{B}) \to ((\bar{\bar{\bar{B}}} \to B) \to \bar{\bar{B}})$ (A3) aksiomu

2) $\bar{\bar{\bar{B}}} \to \bar{B}$ 6.3 isbat olunub

3) $(\bar{\bar{\bar{B}}} \to B) \to \bar{\bar{B}}$ MP 1,2

4) $B \to (\bar{\bar{\bar{B}}} \to B)$ A1 aksiomu

5) $B \to \bar{\bar{B}}$ 6.2 (i)və 3,4

6.5.Teorem $\vdash \bar{A} \to (A \to B)$ isbatı:

Əvəlcə $\bar{A}$, $A \vdash B$ isbat edək.

1) $\bar{A}$ fərziyyə

2) A fərziyyə

3) $\bar{A} \to (\bar{B} \to \bar{A})$ A1 aksiomu

4) $A \to (\bar{B} \to A)$ A1 aksiomu.

5) $\bar{B} \to A$ MP 2,4

6) $\bar{B} \to \bar{A}$ MP 1,3

7) $(\bar{B} \to \bar{A}) \to ((\bar{B} \to A) \to B)$ A3 aksiomu.

8) $(\bar{B} \to A) \to B$ MP 6,7

9) B MP 5,8

$\bar{A}$, $A \vdash B$ isbat olundu. $\bar{A}$, $A \vdash B$ 2 defe deduksiya teoremini ardicil tətbiq etsək c) alınar.

6.6.Teorem $\vdash (\bar{B} \to \bar{A}) \to (A \to B)$

Əvvəlcə $(\bar{B} \to \bar{A})$, $A \vdash B$ isbat edək:

1) A fərziyyə

2) $(\bar{B} \to \bar{A})$ fərziyyə

3) $(\bar{B} \to \bar{A}) \to ((\bar{B} \to A) \to B)$ A3 aksiomu.

4) $(\bar{B} \to A) \to B$ MP 2,3

5) $A \to (\bar{B} \to A)$ A1 aksiomu.

6) $\bar{B} \to A$ MP 1,5

7) B MP 4,6

$(\bar{B} \to \bar{A})$, A $\vdash$ B isbatına 2 dəfə deduksiya teoremini tətbiq etsək, teoremin isbatı alınar.

6.7.Teorem $\vdash (A \to B) \to (\bar{B} \to \bar{A})$

Əvvəlcə $A \to B \vdash (\bar{B} \to \bar{A})$ ıisbat edək:

1) $A \to B$ fərziyyə

2) $\bar{\bar{A}} \to A$ teorem 6.3

3) $\bar{\bar{A}} \to B$ 1,2 nət6.2. (i)

4) $B \to \bar{\bar{B}}$ teorem 6.4

5) $\bar{\bar{A}} \to \bar{\bar{B}}$ 3,4 nət.6.2 (i)

6) $(\bar{\bar{A}} \to \bar{\bar{B}}) \to (\bar{B} \to \bar{A})$ teorem6.6

7) $(\bar{B} \to \bar{A})$ 5,6 MP

$A \to B \vdash (\bar{B} \to \bar{A})$ deduksiya teoremini tətbiq etcək teoremin isbatı alınar.

6.8. Teorem . $\vdash A \to (\bar{B} \to \overline{A \to B})$

İsbatı: bilirik ki, A, $A \to B \vdash B$ alınır, deduksiya teoremini 2 dəfə tətbiq etsək $\vdash A \to ((A \to B) \to B)$ alınar. teorem 7.4 görə $\vdash ((A \to B) \to B) \to (\bar{B} \to \overline{A \to B})$

nəticə 6.2 (i) görə $\vdash A \to (\bar{B} \to \overline{A \to B})$

6.9.Teorem $\vdash (A \to B) \to ((\bar{A} \to B) \to B))$

Əvvəlcə $A \to B$, $\bar{A} \to B \vdash B$ isbat edək.

İsbatı:

1) $A \to B$ fərziyyə

2) $\bar{A} \to B$ fərziyyə

3) $(A \to B) \to (\bar{B} \to \bar{A})$ teorem 6.7

4) $\bar{B} \to \bar{A}$ MP 1,3

5) $(\bar{A} \to B) \to (\bar{B} \to \bar{\bar{A}})$ teorem 6.7

6) $\bar{B} \to \bar{\bar{A}}$ MP 2,5

7) $(\bar{B} \to \bar{\bar{A}}) \to ((\bar{B} \to \bar{A}) \to B)$ A3 aksiomudur

8) $(\bar{B} \to \bar{A}) \to B$ MP 6,7

9) B MP 4,8

$A \to B,\ \bar{A} \to B \vdash B$ deduksiya teoremini 2 dəfə tətbiq etsək teorem isbat olunar .

§7. Formal mülahazilər cəbrinin tamlığı və ziddiyyətsizliyi və həll olunma problemi.

7.1.Teorem .Formal mülhazilər cəbrinin hər bir isbat olunan formulu tavtaloqiyadır.

İsbatı. Doğruluq cədvəlləri qurmaqla göstərmək olar kı,A1,A2,A3 aksiomları tavtaloqiyadır. Teorem 2.1. görə əgər A və $A \to B$ tavtalogiyadırsa onda B-də tavtalogiyadır.Onda MP tavtaloqiyalra tətbiqidə tavtaloqiya alındıgmdan və L nəzəriyyəsində isbat ardıcıllığının hər bir formulu ya aksiom və ya özündən əvvəl gələn iki formuldan MP vasitəsi ilə alındığını nəzərə alsaq, teoremi(isbat ardıcıllığındakı formulların sayına görə)riyazı induksiya metodu vasitəsi ilə asanlıqla isbat etmış olarıq.

Əksini isbat etmək üçün, əvvəlcə aşağidakı lemmanı isbat edək.

7.2. Lemma. Əgər $B_1,....,B_m$ və A formulyna daxil olan proporsional dəyişənlərdirsə və A formulunun doğruluq cədvəli qurulmuşsa bu cədvəlin hər bir k (k=1,...,2^m) sətri üçün aşağıdakı qayda ilə isbat qurmaq olar. Əgər k sətrdə B_i (k=1,...,n) dəyişəni doğrudu qiymət alırsa onda B_i' olaraq B_i götürürük və əksinə B_i yalan qiymət alırsa onda B_i' olaraq $\bar{B}_i$ götürülür və A bu sətirdə doğrudu qiymət alırsa A'olaraq A götürülür ,A yallan qiuməti alırsa A' olaraq $\bar{A}$ götürülür, onda L də:

$$B_1',..., B_n' \vdash A'$$

İsbatı: Əvvəlcə teoremin tətbiqi (isbatdan əvvəl)

$$A \wedge (\bar{A} \rightarrow B) \rightarrow C$$

fomulu üçün quraq.

A	B	C	$\bar{A}$	$\bar{A}\to$B	($\bar{A}\to$B)$\to$C	A $\wedge$ ($\bar{A}\to$B)$\to$C
D	D	D	Y	D	D	D
Y	D	D	D	D	D	Y
D	Y	D	Y	D	D	D
Y	Y	D	D	Y	D	Y
D	D	Y	Y	D	Y	Y
Y	D	Y	D	D	Y	Y
D	Y	Y	Y	D	Y	Y
Y	Y	Y	D	Y	D	Y

1 və 7 sətr üçün yazsaq,

I sətr A, B, C $\vdash$ A$\to$($\bar{A}$ $\to$ B) $\to$ C)

7 sətr A, $\bar{B}$,$\bar{C}$ $\vdash$ $\overline{\text{A}\to(\bar{A} \to \text{B}) \to \text{C})}$

İsbatı:İsabatı riyazi induksiya metodu vasitəsilə aparaq. n olaraq formula daxil olan məntiqi əmliiyatların sayını götürəcəyik.

Başlağic addım: $n = 0$ olduqda A formulu B_1 propzosional dəyişəni olur.Bu halda teoremin isbatı trivaldır. B_1 doğru olduqda $B_1 \vdash B_1$ və B_1 yalan olduqda

$\overline{B_1} \vdash \overline{B_1}$ trıvial hallara ğəlır. n=0 üçün isbat olundu.

İnduksiya addımı. A formuluna daxil olan məntiqi əməliyyatların sayı n olsun: $j < n$ üçün teoremin doğruluğundan n-üçün doğruluğunu isbat edək.

Burada 2 hal ola bilər.

I hal. A *formulu* $\bar{B}$ şəklindədir. B formulundakı məntiqi əməliyyatların sayı n-1 olur və teorem B formulu üçün doğrudur.Əgər k sətrə görə B yalan qiymәti alsa, onda $B'=\bar{B}$ və

$$B_1',\ldots,B_m' \vdash \bar{B} \tag{1}$$

və $\bar{B}$ doğru qymət alır və A' =A yəni $\bar{\bar{B}}$ olur. (1) dən $B_1',\ldots,B_m' \vdash A'$ alınır.

Əks halda B doğru qiymət alarsa,onda B'=B

$$B_1',\ldots,B_m' \vdash B \tag{2}$$

$\bar{B}$ yəni A yalan olduğundan A' formulu $\bar{\bar{B}}$ şəklində olur, onda 6.4 görə $\vdash B\rightarrow\bar{\bar{B}}$ və (2) dən MP-yə görə $B_1',\ldots,B_m' \vdash A'$ alınır.

II hal. A formulu B→C şəklindədir. B və C formulunda məntiqi əməlyyatlarin sayı <n oldugundan teorem B və C üçün doğrudur.

Burada A formulunu doğruluq cədvəlində ki, k sətirə görə 3 hal ola bilər:

IIa) B yalan qiymət alır, onda A doğru qiymət alır, B' fomulu $\bar{B}$, A' formulu isə A olur.İnduksiya təklifinə görə

$$B_1',\ldots,B_m' \vdash \bar{B} \tag{3}$$

və teorem 6.5 görə

$$\vdash \bar{B}\rightarrow(B\rightarrow C) \qquad (4)$$

3və 4 MP tətbiq etsək

$$B'_1,\ldots, B'_m \vdash B\rightarrow C \text{ yəni}$$

$$B'_1,\ldots, B'_m \vdash A\,,\ A' = A$$

olduğundan

$$B'_1,\ldots, B'_m \vdash A'$$

alınar.

IIb) C doğru qiymət alir,bu halda A formuluda doğru qiymət alır, onda C'=C , isə$A' = A$ olur. İnduksiya təklifinə görə

$$B'_1,\ldots, B'_m \vdash C(5)$$

və (A1) aksiom sxeminə görə

$$\vdash C\rightarrow(B\rightarrow C)(6).$$

5və 6 MP tətbiq etsək

$$B'_1,\ldots,,\ldots, B'_m \vdash B\rightarrow C$$

yəni $B'_1,\ldots, B'_m \vdash A$,

$A' = A$ olduğundan

$B'_1,\ldots, B'_m \vdash A'$alınar.

IIc) B doğru qiymət alir və C yalan qiymət alir,bu halda A yalan qiymət alır. Onda$A' = \bar{A}$, $C'=\bar{C}$, B' =B olur. İnduksiya təklifinə görə

$$B'_1,\ldots, B'_m \vdash \bar{C} \ (7)$$

və $B'_1,\ldots, B'_m \vdash$ B (8)

olur. 6.8 görə

$$\vdash B \to (\bar{C} \to \overline{(B \to C)}) \quad (9).$$

8 və 9 MP tətbiq etcək

$$B'_1,\dots,B'_m \vdash \bar{C} \to \overline{(B \to C)} \ (10).$$

7və10 MP tətbiq etcək

$$B'_1,\dots,B'_m \vdash \overline{A \to B}$$

$A' = \bar{A}$ olduğundan $B'_1,\dots,B'_m \vdash A'$ alınar.

Teorem isbat olundu.

7.3.Teorem (8.1-in tərsi) Əgər A formulu tavtalogiyadırsa, onda L formal mülhazilər cəbrinin teoremidir.

İsbatı.Fərz edək ki, A formulu $B_1,\dots B_n$ dəyişənlərindən təşkil olunmuşdur və onun qiymətlər cədvəlində 2^n sətir var və hər sətir üçün lemma 7.2 görə $B'_1,\dots,B'_n \vdash A'$,A formulu tavtalogiya olduğundan istənilən sətrə görə dogru qiymət alır $A' = A$, deməli

$$B'_1,\dots,B'_n \vdash A \quad (1)$$

A formulunun dogruluq cədvəlindən elə müxtəlıf iki sətir götürək ki, bu sətirlərdə $B_1,\dots B_{n-1}$, qiymətləri eyni olsun, onda bu sətirlərın birində B_n *dogru və* $B'_n = B_n$,onda

$$B'_n,\dots\dots,B'_{n-1},B_n \vdash A \quad (2)$$

digərində B_n yalan, $B'_n = \overline{B_n}$ olar, yerinə qoysaq:

$$B'_n,\dots\dots,B'_{n-1},\overline{B_n} \vdash A \quad (3)$$

Deduksiya teoremini 2 və 3 tətbiq etsək

$$B'_n,\ldots,B'_{n-1} \vdash B_n \to A \qquad (4)$$

$$B'_1,\ldots,B'_{n-1} \vdash \overline{B_n} \to A \qquad (5)$$

Onda teorem 6.9 görə :

$$((B_n \to A) \to ((\bar{B}_n \to A) \to B)) \ (6)$$

4 və 6 MP tətbiq etsək

$$B'_1,\ldots,B'_{n-1} \vdash ((\overline{B_n} \to B_n) \to A) \qquad (7)$$

5 və 7 MP tətbiq etsək

$B'_1,\ldots,B'_{n-1} \vdash A$ (8) alarıq.

Beləliklə biz, apardığımız isbat sxemini $B_{n-1},\ldots,B_1$ dəyişənlərinə ardıcıl olaraq n-1 dəfə təkrar etsək $\vdash A$ almar. Teorem isbat olundu.

Teorem 7.1 və 7.3-dən bilavasitə alarıq.

7.4. Nəticə.L formal nəzəriyyəsinin A formulunun isbat oluna bilən formula olması,üçün zəruri və kafi şərt onun tavtoloqiya olmasıdır

7.5. Nəticə L formal nəzəryyəsində fomulanın isbat oluna bilən olması problemi effektiv həll oluna biləndir.

İsbatı.L istənilən formulası verilərsə onun doğruluq cədvəlini qururuq, əgər o tavtalogiyadırsa 7.4 görə isbat oluna biləndir, əgər deyilsə isbat oluna bilən deyildir.

7.6.Teorem . L formal nəzəriyyəsi ziddiyyətsizdir.

İsbatı: Əksini fərz edək, elə A formulu var ki, L formal nəzəryyəsində A və $\bar{A}$ formulları isbat oluna biləndir. Onda 7.1 teoremınə görə A və $\bar{A}$ formulları tavtalogiya olmalıdırlar. Bu isə mümkün deyil. A tavtalogiya olsa $\bar{A}$ olur və əksini.Deməli əks fərziyyə doğru deyil. Teorem isbat olundu.

§8. L formal nəzəriyyəsinin Medelson aksiomlar sisteminin asılı olmamazlığı. Mülahizələr cəbrinin formal nəzəriyyəsinin dicər aksiommatikaları.

8.1. Tərif. Verilmış aksiomlar sisteminə daxil olan hər bir aksiom,bu sistemin digər aksiomlarından alına bilmirsə,onda deyirlər ki, verilmış aksiomlar sistemi asılı deyil

8.2 Teorem. L formal nəzəriyyəsinin Medelson aksiomlar sistemi asılı deyil.

İsbatı.

a) A1 aksiomu A2 və A3-dən alına bilməz .

İsbatı.Aşagıdakı doğruluq cədvəllərinə baxaq

A	$\bar{A}$
0	1
1	1
2	0

Cədvəl 1

A	B	A→B
0	0	0
1	0	2
2	0	0
0	1	2
1	1	2
2	1	0
0	2	2
1	2	0
2	2	0

Cədvəl 2

Asanlıqla göstərmək olar ki, A2, A3 (onların cədvəlləri qurmaqla) aksiomları dəyişənlərin bütün qiymətlərində "0" qiymət alır. Ümumiyyətlə dəyişənlərin bütün qiymətlərində "0" qiymət alan formullar qeyd olunmuş formullar adlandırılacaq. Cədvəl2.əsasən A və A→B hər ikisi 0 olarsa onda B-də 0 olur.Deməli A və A→B qeyd olunmuş formullardırsa, onda B – də qeyd olunmuş formul olacaq, yəni MPnın qeyd olunmuş xassəsini saxlayır. A2 və A3 aksiomları qeyd olunmuş olmasından və MPnın qeyd olunmuş xassəsini saxlanmasından alınır kı, A2 və A3 aksiomlarında alınmış bütün formullar qeyd olunmuşdur.Lakin A1 sxem aksiomunun xüsisi halı üçün $A_1 \to (A_2 \to A_1)$, $A_1=1$, $A_2=2$ olduqda Cədvəl2. əsasən o 2 qiuməti alır, deməli A1 aksiomu qeyd olunmuş deyil və A2 , A3 aksiomlarmdan alına bilməz.

b) **A2 aksiomu A1 və A3-dən alına bilməz**

Bunun üçün məntiqi əməlyyayların yeni cədvəllərindən istifadə edək.

Bu cədvəllərə əsasasən dəyşənlərin bütün qiymətlərində 0 qiyməti alan formulalar **seçilmış formullar** adlandıralacaq. A1, A3 (cədvəllərini qurmaqla) aksiomları dəyişənlərin bütün qiymətlərində “0” qiymət alır.. Cədvəl 4 .əsasən A və A→B hər ikisi 0 olarsa onda B-də 0 olur. Deməli A və A→B seçilmış formulalardırsa, onda B – də seçilmış formul olacaq, yəni MP qeyd seçilmışlik xassəsini saxlayır. A1 və A3 aksiomları seçilmış olmasından və MP seçilmışlık xassəsini saxlanmasmdan alınır kı, A1 və A3 aksiomlarmda alınmış bütün formulalar seçilmışdir

A	$\bar{A}$
0	1
1	0
2	1

Cədvəl 3.

A	B	A→B
0	0	0
1	0	0
2	0	0
0	1	2
1	1	2
2	1	0
0	2	1
1	2	0
2	2	0

Cədvəl 4.

Lakin A2 sxem aksiomunun xüsisi halı üçün

$$((A_1 \to (A_2 \to A_3)) \to ((A_1 \to A_2) \to (A_1 \to A_3))$$

əgər A_1, A_2, A_3 dəyişənləri uyğun olaraq 0,0,1 qiymətləri olarsa bu formula 2 qyiməti alır, A2 seçilmiş olmur. Deməli, A2 aksiomu A3 və A1 aksiomlarından alına bilməz.

c) A3 aksiomunun A1 və A2-dən alına bilməz.

Ixtiyari A formululuna daxil olan bütün inkar məntiqi əməliiyatını sildikdə alınan formulanı h(A) ilə işarə edək. h(A1) formulu A1, h(A2) formulu A2 formulu ilə eyni olduğundan, h(A1)və h(A2) formulları tavtaloqiya olur. h(A → B) formulası h(A) →h(B) formulası ilə eyni olduğundan. h(A) və h(A → B) formulaları tavtaloqiyadirsa h(B) formasıda tavtaloqiya olur. Deməlı A1 və A2 aksiomlarında alınan hər bir A formulası üçün h(A) tavtaloqiyadir.Lakin A3 aksiom sxemını xüsusi halı olan

$$(\overline{A_1} \to \overline{A_1}) \to ((\overline{A_1} \to A_1) \to A_1)$$

formulasına h-ı tətbiq etsək alınan

$$(A_1 \to A_1) \to ((A_1 \to A_1) \to A_1)$$

formulası tavtaloqiya deyil. Deməli A3 aksiomu A1,A2 aksiomlarından alına bilməz.

Teorem isbat olundu.

8.3 Mülahizələr cəbrinin formal nəzəriyyəsinin dicər aksiomatikaları.

Mülahizələr cəbrinin formal nəzəriyyəsinin dicər aksiomatikalarıda var.

a) Formal mülahizələr cəbrinin Novikov aksiomatikası

Novikov aksiomatikasında ilkin əməliyyatlar →, ∨,¬ və ∧ Formullarin tərifi uyğun qayda ilə verilir. Yəni:

1) Mülahizələr cəbrinin hər bir dəyişəni formuladır.

2) Əgər A və B formuldursa, onda A→B,¬ A, A∨B, A∧B formuldur

3) Formula yalnız və yalnız 1 və 2 qaydaları vasıtəsi ilə verilə bilər.

Aksiomatikaya aşağıdakı aksiomlar daxildir

I qrup

1) $(A\rightarrow(B\rightarrow A)$

2) $(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(B\rightarrow C)$

II qrup

1) $A\wedge B\rightarrow A$

2) $A\wedge B\rightarrow B$

3) $(A\rightarrow B)\rightarrow((A\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow(B\wedge C))$

III qrup

1) $A\rightarrow AVB$

2) $B\rightarrow AVB$

3) $(A\rightarrow C)\rightarrow(B\rightarrow C)\rightarrow((AVB)\rightarrow C)$

IV qrup

1) $\neg\neg A\rightarrow A$

2) $A\rightarrow\neg\neg A$

3) $(A\rightarrow B)\rightarrow(\neg B\rightarrow\neg A)$.

2 alınma qaydası vardır:

1.Qayda. Əgər U formulu A hərfini saxlayan formuladırsa və U isbat oluna bilən formuladırsa, onda U formulunda A hərfinin bütün daxil olmalarını,hər hansı B formulu ilə əvəz etdikdə,alınan formulada isbat oluna bilən formuladır.

2 Qayda. Əgər A və A→B isbat oluna bilən formullardırsa,onda B isbat oluna bilən formuladır.

b) Formal mülahizələr cəbrinin Hilbert aksiomatikası

Formullarin tərifi eyni qayda ilə verilir. Yəni:

1) Mülahizələr cəbrinin hər bir dəyişəni formuladır.

2) Əgər A və B formuldursa, onda A→B,¬ A, A∨B, A∧B formuldur

Aksiomatikaya aşağıdakı aksiomlar daxildir

$A_1 : A \to (B \to A);$

$A_2 : ((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$

$A_3 : A \wedge B \to A;$

$A_4 : A \wedge B \to B;$

$A_5 : A \to (B \to (A \wedge B));$

$A_6 : A \to (A \vee B);$

$A_7 : B \to (A \vee B);$

$A_8 : (A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C));$

$A_9 : \neg A \to (A \to B);$

$A_{10} : (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A);$

$A_{11} : A \vee \neg A$

Bir alınma qaydası var, MP(Modus ponens) .

c) Formal mülahizələr cəbri bir aksiom və bir alınma qaydası vasitəsi ilə verilə bilər.

Məsələn 1953 ildə Meredet tərəfidən $\rceil$ və $\rightarrow$ əməliyaatları vasitəsi ilə mülahizələr cəbrinin formal sistemi üçün bir aksiom:

$$(((A \rightarrow B) \rightarrow (\rceil C \rightarrow \rceil D)) \rightarrow S) \rightarrow (S \rightarrow A) \rightarrow (D \rightarrow A))$$

və bir alınma MP qaydası ilə verir.

Çalışmalar

1.Proporzisional formalanin dogruluq cədvəlini qurun:

a) $A \rightarrow (B \wedge C)$

b) $A \leftrightarrow (B \rightarrow C)$ c) $A \rightarrow (B \rightarrow C)$

ç) $(A \rightarrow (B \wedge C) \leftrightarrow (A \wedge B)$

d) $\overline{A} \vee \overline{B} \rightarrow ((C \vee D) \leftrightarrow E)$

e) $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$

j) $((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

k) $((\overline{B} \rightarrow \overline{A}) \rightarrow ((\overline{B} \rightarrow A) \rightarrow B))$

2. Proporzisional formanı mötərizəyə alın:

a) $A \rightarrow B \wedge C \vee \overline{B} \leftrightarrow D \rightarrow E$

b) $A \rightarrow B \wedge C$

c) $B \wedge C \rightarrow A$

ç) $A \rightarrow B \wedge C \vee \overline{B} \leftrightarrow D \rightarrow E$

e) $C \rightarrow B \wedge A$

d) $B \wedge A \rightarrow C$

3.Proporzisional formada mötərizələri azaldın:

1) $A \wedge (B \wedge (A \vee \bar{B}))$

2) $(A \wedge B) \vee ((B \wedge C) \vee ((\bar{A} \wedge B) \vee (A \wedge \bar{C})))$

3) $((A \vee B) \vee C) \rightarrow ((A \wedge \bar{Y}) \vee C)$

4) $((A \vee B) \wedge (A \vee (B \wedge C))) \rightarrow ((\bar{X} \wedge \bar{B}) \rightarrow \bar{A}$

5) $((A \vee B) \vee (A \vee ((B \wedge (A \vee C)) \wedge (B \rightarrow C))) \sim C)$

6) $((A \vee B) \rightarrow (A \wedge B)) \vee ((\bar{X} \wedge B) \wedge (A \vee \bar{Y}))$

7) $((A \vee B) \wedge C) \rightarrow (((A \wedge B) \vee C) \sim (\bar{X} \vee \bar{Y}))$

8) $(A \wedge (B \vee C)) \wedge ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \sim (A \wedge B))$

9) $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \vee \bar{C}$

10) $(A \rightarrow ((B \wedge C) \vee \bar{B})) \leftrightarrow (D \rightarrow E)$

11) $(A \wedge \bar{B}) \vee (C \rightarrow E)$

12) $(\bar{A} \vee (B \wedge \bar{C})) \wedge ((\overline{B \wedge \bar{C}}) \vee A)$

4. Propozosional formaların doğruluq cədvəllərini qurun, ödənilə bilən, tavtalogiya və ya zidiyyət olduğunu müəyyənləşdirin.

a) $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow \bar{Q}) \rightarrow \bar{P}$;

b) $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow Q$;

v) $(P \wedge (Q \vee \bar{P})) \wedge ((\bar{Q} \rightarrow P) \vee Q)$

q) $((P \wedge \overline{Q}) \to Q) \to (P \to Q)$

d) $P \wedge (Q \wedge (\overline{P} \vee \overline{Q})$

e) $(((P \to Q) \to Q) \to Q) \to Q$

j) $((((P \vee \to \overline{Q}) \wedge (Q \vee R)) \vee \overline{R}) \vee Q$

z) $(P \wedge (Q \vee R)) \to ((R \to (P \to Q)) \leftrightarrow (Q \to (R \to P)))$

i) $(((P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \leftrightarrow R)) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)) \leftrightarrow P$

k) $((\overline{\overline{\overline{R}} \to (P \to (Q \to R)) \to (P \to Q))}$

l) $((P \vee \overline{Q}) \to Q) \wedge (\overline{P} \vee Q)$

5. Propozosional formaları elə sadələşdirin ki,inkar işarəsi yalnız propozosional dəyişənlərin qarşısında olsun.

a) $((\overline{X \wedge (Y \vee Z)) \vee Z}$

b) $((\overline{X \wedge Y) \vee Z) \to (X \wedge Z}$

q) $(((\overline{\overline{\overline{X}} \wedge Y \to Y) \to (X \wedge Z))}$

d) $\overline{((X \vee (Y \wedge Z) \vee Z) \vee (Y \vee Z)}$

e) $((\overline{\overline{X} \wedge \overline{Y}) \to (X \wedge (Z \vee \overline{T}))}$

j) $((\overline{\overline{X} \leftrightarrow (\overline{Y} \vee Z)) \wedge Y}$

z) $((\overline{\overline{X} \leftrightarrow \overline{Y}) \vee Z) \wedge Y}$

İ) $((\overline{X \to Y) \to X) \to Y}$

k) $\overline{((X \vee \overline{Y}) \to Y) \wedge (\overline{X} \vee \overline{Y})}$

l) $(X \to Y) \to (\overline{X} \leftrightarrow \overline{Z})$

6. Propozosional formaları elə sadələşdirin ki,ancaq inkar və dizyunksiya işarəsini saxlasın.

a) $(X \vee Y) \to (\overline{X} \to Z)$

b) $(\overline{X} \to Y) \vee (\overline{X} \to Y)$

v) $((X \vee Y \vee Z) \to X) \vee Z$

q) $((X \to Y) \to Z) \to \overline{X}$

d) $(X \vee (Y \to Z)) \to X$

e) $(X \to Y) \to (Y \wedge Z)$

j) $(\overline{X} \wedge \overline{Y}) \to (X \wedge Y)$

z) $((\overline{X} \wedge \overline{Y}) \vee Z) \to (Z \wedge \overline{Y})$

i) $((X \to (Y \wedge Z)) \to (\overline{Y} \to \overline{X})) \to \overline{Y}$

k) $((X \to Y) \wedge (Y \to Z)) \to (X \to Z)$

l) $(\overline{X} \leftrightarrow X) \to Z)$

7. Propozosional formaları elə sadələşdirin ki, ancaq inkar, $\wedge$ və $\vee$ işarəsini saxlasın.

1 - $(A \to B) \leftrightarrow (A \to \overline{B})$

2 - $(A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge B)$

3 - $A \wedge \overline{A}$

4 - $(A \vee B) \leftrightarrow (\overline{B} \rightarrow \overline{A})$

5 - $A \rightarrow (\overline{A} \rightarrow B)$

8. Propozosional formanını, onunla eynigüclü olan və yalnız inkar, $\wedge$ *və* $\vee$ məntiqi əməllərini saxlayan .propozosional formalar şəklində yazın,alınmış formanın ikili formasını tapın.

a) $(\overline{P} \vee Q) \rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow P)$

b) $(\overline{P} \wedge \overline{Q}) \vee ((P \rightarrow Q) \wedge P)$

v) $(P \wedge Q) \wedge (Q \rightarrow P) \wedge (P \vee Q)$

q) $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow \overline{P}) \wedge (R \rightarrow P)$

d) $(P \wedge R) \vee (P \wedge \overline{R}) \vee (Q \wedge R) \vee (\overline{P} \wedge Q \wedge Q \wedge R)$

e) $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow \overline{Q}) \rightarrow \overline{P})$

j) $\overline{((P \rightarrow \overline{Q}) \vee R) \wedge Q}$

9. Propozosional formaların KNF, DNF, MKNF və MDNF (məntiqin qanunlarından istifadə edərək) tapın.

a) $(X \leftrightarrow Y) \wedge (\overline{Z} \rightarrow T)$

b) $((X \rightarrow Y) \rightarrow (Z \rightarrow X)) \rightarrow (Y \rightarrow \overline{Z})$

v) $(X \rightarrow (Y \rightarrow Z)) \rightarrow ((X \rightarrow \overline{Z}) \rightarrow (X \rightarrow \overline{Y}))$

q) $((X \rightarrow Y) \vee \overline{Z}) \rightarrow (X \vee (X \rightarrow \leftrightarrow Z))$

d) $(X \rightarrow Y) \rightarrow Z$

e) $X \to (Y \to Z)$

j) $(\overline{X} \wedge \overline{Y}) \vee (X \leftrightarrow Z)$

z) $(X \leftrightarrow Y) \to (X \wedge Z)$

i) $(X \leftrightarrow Y) \to ((X \to Z) \to \overline{Y}$

k) $(X \vee (\overline{Y} \to Z)) \wedge (X \vee Z)$

l) $(\overline{X} \vee Z) \wedge (X \to Y)$

10. Propozosional formaların hər birinin doğruluq cədvəllini qurun. Bu cədvəll əsasında onların hər birinin MKNF və MDNF tapın.

a) $((P \to Q) \to P) \wedge \overline{P}$

b) $((X \vee Y) \to (\overline{X} \to Y)) \vee (Z \wedge Y)) \to ((Z \to \overline{Z}) \vee Z$

v) $(((X \to Y) \wedge (Y \to Z)) \to (X \to Z))$

q) $((X \to \overline{Y}) \to (X \to Z)) \wedge (\overline{Z} \to Y)$

d) $(Z \to (\overline{X} \wedge \overline{Z})) \to ((\overline{X} \vee Z) \wedge X \wedge Y)$

e) $((\overline{P} \to \overline{Q}) \to ((P \to Q) \to P)) \to ((\overline{P} \to P) \to P$

j) $\overline{Q} \wedge P \wedge (P \to Q)$

z) $(P \vee Q) \leftrightarrow (\overline{P} \wedge (Q \to \overline{Q}))$

z) $(P \to Q) \to (\overline{P} \to Q)$

i) $(P \to \overline{Q}) \wedge ((P \to Q) \vee (R \to P)$

k) $((P \to Q) \wedge P) \wedge (\overline{P} \vee \overline{Q})$

l) $(P \leftrightarrow Q) \wedge (P \vee Q)$

11. Aşagıdakı propozosıonal formuların doğruliq cədvəlını qurun və lemma7.2 verilmış sxemə əsasən bu formuların bir neçə sətir alınma ardıcıllıqlarını yazın.

1 - $(A \vee B \to B) \vee \overline{(A \vee B \to B)}$

2 - $(A \vee B \to B) \vee \overline{(\overline{A \vee B} \vee B)}$

3 - $(A \vee B \to B) \vee ((A \vee B) \wedge \overline{B})$

4 - $(A \vee B \to B) \vee ((A \vee B) \wedge B)$

5 - $(\overline{A \vee B} \wedge B) \vee (A \vee B \to B)$

Variatlar	İsbat edin.
1.	$(B \to A); (B \to (\bar{A} \vee C)) \vdash (B \to (\bar{B} \vee C))$
2	$(\bar{A} \vee B); (C \vee \bar{B}) \vdash (A \to C) \vee (A \to \bar{C})$
3.	$(\bar{A} \vee \bar{B}) \vdash (\bar{B} \to A) \vee (A \to C)$
4.	$(A \to B) \vdash ((\bar{B} \vee C) \to (\bar{A} \vee C))$
5	$(A \to B); (C \to D) \vdash (A \wedge C \to B \wedge D)$
6	$(A \to B); (\bar{A} \to B) \vdash B \vee (A \to C)$
7.	$(B \to A); (B \to (A \to C)) \vdash (B \to C)$

8.	$(A \to B) \vdash (\bar{C} \to A) \to (\bar{C} \to B)$
9	$(A \to B); (A \to (\bar{B} \vee C)) \vdash (A \to C)$
10.	$(A \wedge B \vee \bar{A} \wedge \bar{B}) \vdash (A \to C) \leftrightarrow (B \to C)$
11.	$(A \to (B \to C)); (A \to B); A \vdash C$
12.	$(A \wedge B \to C) \vdash (A \to (B \to C))$
13.	$(B \to (A \to C)); (B \to A) \vdash (B \to (B \to C))$
14	$(A \wedge B \vee C \wedge D); (A \to \bar{A}) \vdash C$
15.	$(A \to (B \to C)); (\bar{D} \vee A); B \vdash (D \to C)$
16.	$(A \vee B); (A \to C); (B \to D) \vdash C \vee D$
17.	$(A \to B); (C \to B); (D \to (A \vee C)); D \vdash B$
18.	$(A \to B); (B \to C); (C \to D) \vdash (A \to D)$
19	$(B \to (A \to C)); (B \to A) \vdash (B \to (B \to C))$
20	$(A \to (C \to B)); (\bar{D} \vee A); C; D \vdash D \to B$
21	$(A \leftrightarrow B) \vdash (C \vee A) \leftrightarrow (C \vee B)$
22.	$A; (A \to B) \vdash (C \wedge A \to B \wedge C)$
23	$(A \to B); (\overline{B \vee C}) \vdash \bar{A}$
24	$(A \to (B \to C)); (\bar{D} \vee A); B \vdash (D \to C)$
25	$(A \vee C); (A \to B); A \vdash (A \vee C) \to (B \vee C)$
26	$(A \to (B \to C)); (A \to B) \vdash (A \to C)$
27	$(\bar{A} \vee B); (C \to \bar{B}) \vdash A \to \bar{C}$

1.5.Formulanın tərifi

1) Hər bir elementar formula formuladır.

2) Əgər A və B formula, x dəyişəndirsə, onda $\bar{A}$, A→B və (∀ x A) formulalardır.

3) Formula yalniz və yalnız 1) və 2) qaydası ilə alına bilər

Qeyd:$(\forall x A)$ ifadəsində A formulu $\forall x$ kvantorunun təsir dairəsindədir deyılır.Formulaya x dəyişənin daxil olması müəyyən $\forall x$ kvantorunun təsir dairəsindədirsə,onda deyılır ki, x dəyişəni asılı daxil olub,əks halda deyilir ki, x dəyişəni sərbəst daxil olub deyilir.

Məsələn.

1) $p_1^{(2)}(x_1,x_2)$ formulunda x_1,x_2 sərbəst dəyişənlərdir.

2) $\forall x_1\, p_1^{(2)}(x_1,x_2)$ formulunda x_1 asılı, x_2 sərbəst dəyişən olur.

3) $\forall x_1\, p_1^{(2)}(x_1,x_2) \to \forall x_3 p_1^{(3)}(x_1 x_2 x_3)$ formulunda x_1 dəyişəni implikasiyanın sol tərəfindəki daxil olması asılı, sağ tərəfə isə asılı olmayan dəyişən kimi daxil olur. x_2 və x_3 sərbəst dəyişəndir.

$\forall x_1\, \forall x_2\, A_1^{(2)}(x_1,x_2)$ burda həm x_1 həm də x_2 asılı dəyişənlərdir. Belə formulaya qapalı formula deyilir. Yəni formulaya daxil olan ixtyarı dəyişənın serbəs daxil olması yoxdursa,onda belə formulaya qapalı formula deyiləcək.

Deməli formulaya hər hansı dəyişən asılı, və ya sərbəst, müəyyən hissədə sərbəst, müəyyən hissədə asılı dəyişən kimi daxil ola bilə bilər.

1.6. Tərif.Əgər formulaya daxil olan bütün dəyışənlər asılı dətişənlərdirsə,belə formulaya qapalı formula deyilir.

1.7. Tərif.t termi A formulunda x_i dəyişəni üçün sərbəstdir o vaxt ki, A formuluna $x_i - in$ hər bir sərbəst daxil olması müəyyən $\forall x_j$ (burada x_j t-yə daxil olan ixtyari dəyişəndir) ümumilik kvantorunun təsiri altında olmasın.

1.8. Qeyid. $\wedge$, $\leftrightarrow$, $\wedge$ əməliyyatlarının $\rightarrow$ və inkar işarəsi vasitəsilə ifadə olunması mülahizələr cəbrinda olduğu kimidir. Varlıq kvantoru

$$\exists x A(x) \text{ isə } \overline{\forall x(\overline{A(x)})}$$

formulunun qisa yazılışı demekdir.

$\exists x A(x)$ bele təyin olunması onun məzmununa tam uyğundur.

Formulları mötərizəyə alarkən və ya mötərizələri atarkən, müllahizələr cəbrində müəyyən olunmuş qaydalarda istifadə olunur və 1-ci tərtib nəzəriyyədə əməlyyatların mərtəbələrə görə (artma sırası ılə)$\equiv, \rightarrow, \forall, \exists, \vee, \wedge, \bar{}$ düzülüşü nəzərə alınmalıdır.

Məsələn.

$$\forall x_1 A_1^{(2)}(x_1,x_2) \rightarrow \exists x_2 A_2^{(1)}(x_2) \rightarrow A_1^{(3)}(x_1,x_2,x_3)$$

formulunu mötərizəyə aldıqda

$$((\forall x_1 A_1^{(2)}(x_1,x_2) \rightarrow (\exists x_2 A_2^{(1)}(x_2))) \rightarrow (A_1^{(3)}(x_1,x_2,x_3))$$

alınır.

1.9.-ci tərtib nəzəriyyənin interpretasiyası (modeli)

1.9.1. İnterpretasiya(model) dedikdə,müəyyən boş olmayan D çoxluğu götürülür,hər bir sabitə D çoxluğunun elmenti qarşı qoyulur.Hər bir $f_j^{(n)}$ funksioənal simvoluna D oblastina təyin olunmuş və D oblastinda qiymətlər alan konkret n arqumentli f funksiyası götürülür. yəni D^n dekart hasilinin D –yə inkas edən funksiyası götürülür.

Misal. D olaraq biz N natural ədədlər çoxl uğu götürsək D=N , $f_1^{(2)}$ əvəzinə "+" əməli götürə bilərik.

Hər bir $P_i^{(k)}$ predikat simvoluna D^k dekart hasilinin alt çoxluğu götürülür . Məsələn: N ədədlər çoxluğunda ">" işarəsi NxN dekart hasilinin, yəni (n,m) natural ədədlər cütündə ibaərtdir ki,n > m şərti ödənilsin. $\bar{}$, $\rightarrow$, &, v, $\equiv$

işarələrinin mənası yəni doğruluq cədvəlləri mülahizələr cəbrində olduğu kimidir.

Verilmiş interpretasiyya görə,hər bir qapalı formula ya doğrudur yada yalan,sərbəs dəyişənli hər formula interpretasiya oblastından götürülmüş dəyişənlərin bəzi qiymətlərinə görə doğru, dəyişənlərin bəzi qiymətlərinə görə yalan qiymətlər ala bilər.

Misal

i) $A_1^{(2)}(x_1 x_2)$

ii) $\forall x_2 A_1^{(2)}(x_1, x_2)$

iii)$\exists x_2 \forall x_1 A_1^{(2)}(x_2, x_1)$

Əgər biz D oblastı olaraq bütün müsbət tam ədədlər çoxlugunu götürsək və $A_1^{(2)}(y, z)$ interpretasysı olaraq $y \leq z$ götürsək, onda $A_1^{(2)}(y, z)$ münasibəti elə (a,b) nizamlanmış cütlər üçün dogru olacaq ki, $a \leq b$ olsun. ii) bu interpretasiyada "ixtiyarı müsbət z tam ədədi üçün $y \leq z$", aydındır ki, y=1 olduqda dogru olur.iii) qapalı formulu müsbət tam ədədlər çoxluğunda ən kiçik ədəd 1 olduğu üçün dogrudur,tam ədədlər çoxlugunda isə yalandir.

1.9.2. A formulunun dəyişənlərin doğru qiymətlər aldığı çoxluğa onun doğruluq oblastı deyilir və T(A) ilə işarə olunur.

Əgər A və B formullarının doğruluq oblastları uyğun olaraq T(A) və T(B) olarsa onda:

a)$T(A \vee B)=T(A) \cup T(B)$

b) $T(A \rightarrow B)=T(\bar{A}) \cup T(B)$

c) $T(A \wedge B)=T(A) \cap T(B)$ olar.

1.9.3. Əgər A formulu hər bir interpretasiyda dəyişənlərin bütün qiymərtlərundə ancaq doğru qiyməti alırsa ona ümmumi dəyərli fomula deyilir. Əgər A formulu hər bir interpretasiyda dəyişənlərin bütün qiymərtlərundə ancaq ancaq yalan qiyməti alırsa ziddyyətli fomula deyilir.Ödəninilə bilən adlanır o vaxt ki, nə ümmumi dəyərli, nə də ziddyyətli olsun.Əgər $A \rightarrow B$ ümumi dəyərli formuladirsa, onda deyirlər kı, B formulu A formulunun məntiqi nəticəsidir. $A \leftrightarrow B$ formulu ümumi dəyərlidirsə, onda A və B formulları məntiqi ekvivalendir deyilir və $A \equiv B$ kimi işarə olunur.

1.9.4. Tərif. Əgər birinci tərtib nəzəriyyənin formulunun yazılışında $\leftrightarrow$ $\rightarrow$ məntiqi əməliyyatları yoxdursa və inkar işarəsi ancaq elmementar formulların qarşısında yazılırsa, belə formulaya gətirilmiş formula deyilir.

1.9.5. Birinci tərtib nəzəriyyənin istənilən formulu,onunla ekvivalent olan gətirilmiş formula şəklində yazila bilər. Bunun üçün tavtaloqiyalardan və ümumilik və varlıq kvantorları üçün Morqan qanunlarindan yəni:

$$\overline{\forall x A(x)} \equiv \exists x \overline{A(x)} \quad \text{və} \quad \overline{\exists x A(x)} \equiv \forall x \overline{A(x)}$$

istifadə etmək kifayətdir.

Misal.

$$(\exists x P(x) \to \forall y Q(y)) \to R(z) \equiv \overline{\overline{\exists x P(x)} \vee \forall y Q(y)} \vee R(z) \equiv$$

$$\equiv \overline{\overline{\exists x P(x)}} \,\&\, \overline{\forall y Q(y)} \vee R(z) \equiv \exists x P(x) \,\&\, \exists y \overline{Q(y)} \vee R(z)$$

1.9.6.Tərif. $Q_1x_1...Qx_nU\ (x_1,...,x_n)$ şəklində (burada $Q_i\ \varepsilon\{\exists, \forall\}$ $(i=1,...,n)$ və U formulunun yazılışında kvantorlar yoxdur) olan, birinci tərtib nəzəriyyənin formulu önkvantorlu formula adlanır.

1.9.7. Birinci tərtib nəzəriyyənin istənilən formulu,onunla ekvivalent olan önkvantorlu $Q_1x_1...Qx_nU\ (x_1,...,x_n)$ şəklində yazıla bilər. Bunun üçün:

a) tavtaloqiyalardan.

b) V, Λ əməlləri, ümumilik və varlıq kvantorları üçün de Morqan qanunlarindan

c) kvantorların mötərizə xaricinə çıxarılması qanunlarından

$(\exists x)(A(x) \wedge B) \equiv (\exists x)A(x) \wedge B,$

$(\forall x)(A(x) \wedge B) \equiv (\forall x)A(x) \wedge B,$

$(\exists x)(A(x) \vee B) \equiv (\exists x)A(x) \vee B,$

$(\forall x)(A(x) \vee B) \equiv (\forall x)A(x) \vee B.$

$(\forall x)(A(x) \wedge B(x)) \equiv (\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x),$

$(\exists x)(A(x) \vee B(x)) \equiv (\exists x)A(x) \vee (\exists x)B(x).$

istifadə edirik və burada B formuluna x dəiyşəni sərbəs daxil deyil.

Qeyd: Əgər B formuluna x dəyişəni sərbəs daxil olsa, onda $\forall xA(x)$ əvəzinə onunla eynigüclü olan $\forall yA(y)$ formulu (burada *y*, *B* və *A(x)* fomullarının heç birinin dəyişənlər siyahısına daxil olmayan ilk dəyişəndir) ilə əvəz edirik. Eyni ilə $\exists xA(x)$ əvəzinə onunla eynigüclü olan $\exists yA(y)$ formulu (burada *y*, *B* və *A(x)* fomullarının heç birinin dəyişənlər siyahısına daxil olmayan ilk dəyişəndir) ilə əvəz edirik.

1.9.8. Tərif. Əgər birinci tərtib nəzəriyyənin gətirilmiş formulu önkvantorlu formula şəklindədirsə, ona birinci tərtib nəzəriyyənin normal formulu deyilir.

1.1.9. Birinci tərtib nəzəriyyənin istənilən formulu,onunla ekvivalent olan normal formula şəklində yazıla bilər. Bunun üçün yuxarıdakı eynigüclülüklərdən istifadə etmək kifayətdir.

Misal $.\overline{\exists xP(x)} \vee \forall xQ(x)$ fomulunun normal formasını yazın.

Həlli. $\overline{\exists xP(x)} \vee \forall xQ(x) \equiv$

$\equiv \forall x\overline{P(x)} \vee \forall xQ(x) \equiv \forall x\overline{P(x)} \vee \forall yQ(y) \equiv$

$\equiv \forall x\forall y(\overline{P(x)} \vee Q(y))$

§2. 1-ci tərtib nəzəriyyənin aksiomları və alınma qaydaları. 1-ci tərtib nəzəriyyə aid misallar. Predikatlar cəbrinin ziddyyətsizliyi, İsbat ardıgıllığı haqqında lemma

2.1. Mühazilər cəbrinin hər bir tavtaloqiya,L formal nəzəriyyəsinin isbat oluna bilən formuludur və əksinə. Mühazilərin cəbrinin hər bir formasının tavtaloqiya olmasını yoxlamaq üçün effektiv prosedura var(onun dogruluq cədvəlini qurmaq kifayətdir), deməli L formal nəzəriyyəsinin formulunun isbat oluna bilən formula olub olmamasını müəyən edən effektiv prosedura var. Lakin 1-ci tərtib nəzəriyyənin ixtiyari formulun ümumidəyrli formula olub olmamasını müəyyn edən effektiv prosedyranın olması sual altındadır.Belə ki, verilmiş formulanın ümumidəyrli formula olub olmamasını yoxlamaq üçün bu proseduranı sonlu və sonlu çoxluluqlarda yoxlmaq lazımdır.Buna görədə 1-ci tərtib nəzəriyyənin formal aksiomatikasını verib,onu tədqiq etmək zəruridir.

2.2 .1-ci tərtib nəzəriyyənin aksiomları

2.2.1) Məntiqi aksiomlar

A1) $A\to(B\to A)$

A2) $(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$

A3) $(\bar{B}\to\bar{A})\to((\bar{B}\to A)\to B)$

A4) $\forall x\, A(x) \to A(t)$

Burada A(x) formulunda x dəyişəni t termi üçün sərbəstdir.

A5) $\forall x\,(A \to B) \to (A \to \forall x\, B)$ A formuluna x dəyişəni sərbəst daxil deyil.

2.3.Alınma qaydaları

1) MP qaydası: A, $A \to B$ formullarından B

2) Ümumiləşmə (**GENERELAZİTİON**): A-dan $\forall x_i A$ alınır. Bu qayda qısa olaraq **GEN** qaydası adlandırılacaq

Bundan sonra istənilən 1-ci tərtib nəzəriyyəyə K formal nəzəriyyəsi deyiləcək.

1-ci tərtib nəzəriyyəyə vasitəsi ilə riyaziyyatın demək olar ki,bütün bölmələrini formalizə etmək olar.

2.4 .İsbat ardıcıllığı. K nəzəriyyəsində $A_1,...,A_k$ formullar ardıcıllıgına o vaxt ısbat ardıcıllığı deyilir ki,bu ardıccıllığın istənilən A_i (i=1,...,k) formulu ya K nəzəriyyəsinin aksiomudur və ya özündən əvvəl gələn iki və ya bir formuladan MP və ya **GEN** vasitəsi ilə alınır.

2.5. İsbat oluna bilən formulanın və ya teoreminin tərifi:A formullu K nəzəryyəsini teoremi və ya isbat olunmuş formulu adlanır o vaxt ki,K nəzəryyəsində elə $A_1,...,A_k$ isbat ardıcıllıgı var ki,A formulu bu isbat ardicilliğının axırıncı formulludur. A formullu K nəzəryyəsini teoremidir $\vdash A$ və ya$\vdash_K A$ işarə olunur.

2.6. Γ formullar çoxluğundan alınanan formula: Tutaq ki, Γ formullar çoxluğu verilmişdir. A formulu K nəzəriyyəsində Γ formullar çoxluğunda o vaxt alınır ki, elə $B_1, B_2, .., B_n$ formullar ardıcıllığı olsun ki, A formulu bu ardicilliğının axırıncı formulludur və hər bir B_i $(i=1,...,n)$

a) ya aksiomdur;

b) ya $B_i \in F$;

c) və ya özündən əvvəl gələn iki və ya bir formuladan MP və ya **GEN** vasitəsi ilə alınır.

A formulunun Γ formullar çoxluğunda alınırsa $\Gamma \vdash A$ və ya $\Gamma \vdash_K A$ işarə olunur . Γ çoxluğunun elementləri fərziyələr adlanır.

Qeyd. Əgər *Γ* sonlu formullar ardıcıllığıdırsa, $\Gamma = \{ E_1, E_2 .., E_n \}$ və $\Gamma \vdash A$- sa, onda $E_1, E_2 .., E_n \vdash A$ yazılır.

Misal. $\forall x_1 \ \forall x_2 A \vdash \forall x_1 \ \forall x_2 A$

İsbatı.

1) $\forall x_1 \ \forall x_2$ A fərziyyə

2) $\forall x_1 \ \forall x_2 A \to \forall x_2 A$ (A4) aksiomu

3) $\forall x_2$ A MP 1,2

4) $\forall x_2 A \to A$ (A4) aksiomu

5) A MP 3,4

İsbatı: İsbat üçün hər bir A formulunda,bütün kvantorları bütün dəyişənləri, bütün termləri(müvafiq vergül vəmötərizələrdə daxil olmaqla)silərək alınan formulanı h(A) ilə işarə edək.

Məsələn: ∀ x (A(x) →B(x)) h tətbiq etsək (A → B) A_4 aksiomu ∀ x A → A (t) h tətbiq etsək A → A alınar. Əslində h(A) prpozosianal formadir.

h əməlıyyatını A1-A5 aksiomlarina tətbiq etsək tavtaloqiya alınar. və h(A→B) formula isə h(A)→h(B) ilə eyni olduğundan, əgər h(A) və h(A→B) formuları tavtaloqiyadırsa, onda h(B) tavtaloqiya olacaq. Gen tətbiq olunduqda,əgər h(A) tavtaloqiyadırsa,onda h($\forall x_i A$)-da, tavtaloqiyadır, ona görə ki, h(A)ilə eyni olacaq. Deməı,əgər A formula predikatlar cəbrinı teoremidirsə onda h(A) tavtaloqiyadır. Əgər predikatlar cəbri, ziddyyətli olsaydı, yənı elə B formula olsaydı ki,B və $\bar{B}$ formulları predikatlar cəbrinın teoremləridir, onda h(B) və h($\bar{B}$) tavtaloqiya olardılar.Lakin istənilən A formula üçün h($\bar{A}$)formulu $\overline{h(A)}$ ilə eyni olduğundan bu mümkün deyil. Deməlı əks fərziyyə doğru deyil. Teorem isbat olundu.

2.11. Tutaq ki, Γ formullar çoxluğu verilmişdir. B formulu K nəzəriyyəsində Γ formullar çoxlugundan alınmasınm hər bir addımı əsaslandırılmış $B_1, B_2, \dots, B_n$ isabat ardıcıllığı ilə verilmışdirşdir və A∈Γ. Bu isbatın əsaslandırılmasında da B_i(i=1,...,n) formulu A formulundan asılıdır deyilir o vaxt ki, ya bu əsaslandırılmada da B_i fərziyədir və B_i = A və ya B_i bu isbatda A-dan asılı olan formulaya və ya formullaradan GEN və ya MP qaydası tətbiqi alınsın.

Əks halda B_i bu isbatda A formullundan asılı deyil deyilir.

Məsələn: A , $\forall x$ A → C $\vdash \forall x$ C isbat ardıcıllığın verək.

1) A fərziyyədir.

2) $\forall x$ A → C fərziyyədir.

3) $\forall x$ A 1-ə GEN qaydası tətbiq olunur.

4) C MP 2,3

5) $\forall x$ C 4-ə GEN qaydası tətbiq olunur.

Burada A-dan 2 istisna olmaqla ardıcılılığın bütün formulları asılıdır. 1 ona görə asılıdır ki, A fərziyyədir, 3 ona görə asılıdır ki, 1- ə GEN tətbiq olunması nəticəsində alınmışdır.

4 ona görə asılıdır ki, A formulundan asılı 2,3 MP tətbiq olunması nəticəsində alınmışdır. 5 ona görə asılıdır ki, A-dan asılı 4 formuluna GEN tətbiq olunması nəticəsində alınmışdır.

2.12.Lemma. Əgər Γ, A $\vdash$ B və elə $B_1, B_2, \ldots, B_n$ isabat ardıcıllığı var ki, bu isbatda B formulu A formulundan asılı deyidir, onda Γ $\vdash$ B.

İsbatı.İsbatı riyazi induksiya metodu ilə $B_1, B_2, \ldots, B_n$ isabat ardıcıllığındakı n görə aparılacaq.

Başlanğıc addım.n=1 onda $B_1 = B$ burda iki hal ola bilər:

a) $B_1 aksiomdur$. Onda $\vdash$ B və Γ $\vdash$ B

b) B_1 fərziyyədir və B formulu A formulundan asılı olmadıqından B∈ Γ,onda Γ $\vdash$ B.

İnduksiya addımı: Fərz edək ki,lemma $B_1, B_2, ..., B_n$ ardıcıllığındakı ustənilən k<n üçün dogrudur.Burda aşağıdakı hallar ola bilər:

a) $B_1 aksiomdur$.Onda $\vdash$ B və Γ $\vdash$ B

b) B_1 fərziyyədir və B formulu A formulundan asılı olmadıqından B∈ Γ, onda Γ $\vdash$ B.

c) B formulu özündən əvvəl gələn B_i formulundan GEN qaydası vasıtəsı ılə alınmışdır,i<n oldugundan induksiya fərzıyyəsinə görə Γ $\vdash B_i$ və B formulu özündən əvvəl gələn B_i formulundan GEN qaydası ilə alındığından Γ $\vdash$ B

d) B formulu özündən əvvəl gələn B_i və $B_j$formulalarından MP vasitəsi ilə alınmışdır.

e) i,j<n oldugundan induksiya fərzıyyəsinə görə Γ $\vdash B_i$, Γ $\vdash B_j$ və B formulu özündən əvvəl gələn B_i və $B_j$formulalarından MP vasitəsi ilə alındığından Γ $\vdash$ B.

Lemma isbat olundu.

§3.I tərtib nəzəriyyə üçün deduksiya teoremi. Predikatlar cəbrinin zidiyyətsizliy və tamlığı

Mülahizələr cəbrinda deduksiya teoremi aşağıdakı kimidir. Əgər $\Gamma, A \vdash B$ onda $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ və burada A formulu üzərinə heç bir şərt qoyulmur. Lakin predikatlar cəbri üçün və ya onun genişlənməsiu olan istənilən K nəzəriyyəsi üçün deduksiya teoremini bu şəkildə vermək olmaz.

Misal: İstənilən $A \vdash \forall x\ A$ (1)

İsbatı

1) A fərziyyədir

2) $\forall x$ A 1-ə GEN tətbiq olunur.

Lakin, (1) deduksiya teoremini tətbiq edib $\vdash A \rightarrow \forall x\, A$ alınması düz deyil. Bu halda,istənilən A formula üçün $A \rightarrow \forall x\, A$ ümumıdəyərli olardı. Elə A formulu və onun elə interpretasiyasını götümək olar ki,bu interpretasiyada A(b) doğru A(c) yalan olsun. Onda aydındır ki, $A \rightarrow \forall x\ A$ formulu yalan qiymət alacaq.

I tərtib nəzəriyyə üçün deduksiya teoremi,müəyyən şərt daxilində mümkündür.Lakin bu hal üçündə,onun bir çox əhəmiyyətli tətbiqləri var.

3.1.Teorem (Deduksiya teoremi). Əgər $\Gamma, A \vdash B$ və B formulunun alınmasının elə $B_1,....,B_n$ isbatı var ki, bu isbatda

A-dan asılı formulara GEN alınma qaydası tətbiq olunarsa,o A-nın heç bir sərbəst dəyişənini kvantor vasitəsi ilə bağlamır onda

$$\Gamma \vdash A \rightarrow B (*).$$

İsbatı: İsbat ardıcıllığının uzunluğuna görə riyazi induksiya metodu ilə aparılır.

Baslanğic addım: n=1 olduqda. Burada üç hal var.

a) B fərziyyədir və B $\in$ Γ. Onda (*)-un isbatı aşağıdakı kimi verilir.

1.B fərziyyədir

2.$B \rightarrow (A \rightarrow B)$ A1aksiomu

3.$A \rightarrow B$ MP 1,2

b) B aksiomudur. Onda (*)-un isbatı aşağıdakı kimi verilir.

1.B aksiomu

2.$B \rightarrow (A \rightarrow B)$ A1 aksiomu

3.$A \rightarrow B$ MP 1,2

c) B_1 formulu A ilə eynidir.Onda (*) $\Gamma \vdash A \rightarrow A$ şəklində olur. $\vdash A \rightarrow A$ – dan isə $\Gamma \vdash A \rightarrow A$ alınır.

İnduksiya addımı.

Bu isbat ardıcıllığında istənilən $k < n$ teoremın doğruluğunu qəbul edib k = n üçün isbat edək. Burada B_n formulu B formula ilə eynidir.

5 hal var. a) B_n fərziyyədir və $B_n \in \Gamma$ onda onun isbatı yuxarıdakı a) bəndinin isbatı ilə üst-üstə düşür. b) B_1 aksiomudur onda onun isbati yuxarıdakı b) bəndinin isbatı ilə üst-üstə düşür. c) $B_1 =$ A onda onun isbatı yuxarıdakı c)bəndinin isbatı ilə üst-üstə düşür. ç) B_n = B formulu özündən əvvəl gələn B_i , $B_i \to B_n$ formulla rından MP vasitəsi ilə alınır. Onda $\Gamma, A \vdash B_i$ $\Gamma, A \vdash B_i \to B_n$ (i,j< n olduğundan) induksiya addımına əsasən, deduksiya teoremini tətbiq etsək onda $\Gamma \vdash A \to B_i$(**) və $\Gamma \vdash A \to (B_i \to B_n)$ (***) alınacaq. Onda bu hal üçün teoremin isbatı üçün aşağıdakı isbat ardıcıllığını verək

1) $A \to B_i$ (**) əsasən

2) $A \to (B_i \to B_n)$ (***) əsasən

3) $(A \to (B_1 \to B_n)) \to ((A \to B_i) \to (A \to B_n))$ (A2) aksiomu

4) $(A \to B_i) \to (A \to B_n)$ MP 2,3

5) $A \to B_n$ MP 4,1

d) B_n formulu hər hansı B_i formulundan GEN qaydasını tətbiq etməklə alınır. Yəni B_i i < n B_n və B formulları $\forall x_k\ B_k$ olur. Burada x_k dəyişəni şərtə görə A- nın sərbəst dəyişəni deyil, onda Γ, A ⊢ B_i olduğundan induksiya fərziyyəsinə görə

Γ, A ⊢ B_i dən Γ ⊢ A → B_i (****)

Onda (****)-a GEN-i tətbiq etsək alarıq:

Γ ⊢ ∀x_k (A → B_i) (*****)

alınacaq. Teoremin şərtinə görə x_k A- da sərbəst dəyişən deyil.

Onda (A5) aksiomu:

∀x_k (A → B_i) → (A→ ∀x_k B_i) (*****)

(****) və (*****) MP-ni tətbiq etsək,

Γ ⊢ A → ∀x_k B_i və ya Γ ⊢ A→B almar .

Teorem isbat olundu.

Bu teoremin deyilişindəki olan şərti yoxlamaq bir o qədər də asan deyil. Buna görədə , bir çox hallarda bu teoremdən alınan nəticələrdən istifadə olunur.

3.2. Nəticə

Əgər Γ,A ⊢ B və A qapalı formuladırsa onda Γ ⊢A→ B .

3.3. Nəticə

Əgər Γ,A ⊢ B və { Γ, A} formulalarından B formulunun alınmasının elə B_1 ,..., $B_n$isbatı var ki, bu isbatda A formulunun sərbəst dəyişənlərinə GEN tətbiq olunmur onda

Γ ⊢A→ B .

Misal. İsbat edək ki, ⊢ ∀x_1 ∀ x_2 A → ∀ x_2∀ x_1 A

İsbatı. Əvvəlcə İsbat edək ki ∀ x_1 ∀ x_2A ⊢ ∀ x_1 ∀ x_2 A

1) $\forall x_1 \ \forall x_2$ A fərziyyə

2) $\forall x_1 \ \forall x_2 \ A \to \forall x_2 \ A$ (A4) aksiomu

3) $\forall x_2$ A MP 1,2

4) $\forall x_2 \ A \to A$ (A4) aksiomu

5) A MP 3,4

6) $\forall x_1 A$ 5 GEN tətbiq olunur

7) $\forall x_2 \ \forall x_1$ A 6 GEN tətbiq olunur.

bu isbatda GEN x_1 və x_2 tətbiq olunur. x_1 və x_2 $\forall x_1 \ \forall x_2$ A formulunu sərbəs dəyişnləri olmadığından Nəticə 1.3. tətbiq etsək alarıq ki,

$$\vdash \forall x_1 \ \forall x_2 \ A \to \forall x_2 \forall x_1 \ A \ .$$

3.4.Teorem. Əgər K nəzəriyyəsində qapalı $\bar{A}$ formulu isbat oluna bilən deyilsə və K nəzəriyyəsi ziddiyətsizdirsə, onda $K' = \{K, A\}$ nəzəriyyəsi ziddiyətsizdir.

İsbatı. Əksini fərz edək. Fərz edək ki, ziddiyətlidir. Yəni elə qapalı B və B' formulu vardır.Onda

$$K' \vdash B, \quad K' \vdash \bar{B}$$

yəni

$$K, A \vdash B, \quad K, A \vdash \bar{B}$$

B və $\bar{B}$ qapalı formula olduqlarından nəticə 1.3 əsasən:

$$K \vdash A \to B \ (*) \text{ və } K \vdash A \to \bar{B} \ (**) \text{ alınır.}$$

Aşağıdakı isbat ardıcıllığını quraq:

1) $A \rightarrow B$ (*)

2) $A \rightarrow \bar{B}$ (**)

3) $(A \rightarrow \bar{B}) \rightarrow (\bar{\bar{B}} \rightarrow \bar{A})$ teorem 6.7

4) $\bar{\bar{B}} \rightarrow \bar{A}$ MP 2,3

5) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{A})$ teorem 6.7

6) $\bar{B} \rightarrow \bar{A}$ MP1,5

7) $(\bar{B} \rightarrow \bar{A}) \rightarrow ((\bar{\bar{B}} \rightarrow \bar{A}) \rightarrow \bar{A})$ teorem 6.9

8) $(\bar{\bar{B}} \rightarrow \bar{A}) \rightarrow \bar{A}$ MP 6,7

9) $\bar{A}$ MP4,8

Biz isbat etdik ki, K nəzəriyyəsində $\bar{A}$ isbat oluna bilən formuladır. Bu isə teoremin şərtinə ziddir.Teorem isbat olundu.

3.5.Teorem. Birnci tərtıb ziddiyətsiz nəzəriyyənin hesabi güclü interpretasiyası(modeli)var. (bax [1] səh25)

İstənilən qapalı formulanın özü və ya inkarı K nəzəriyyədə isbat oluna biləndirsə, onda K nəzəriyyəsi tamdır deyilir.

3.6. Teorem. (Lındenbaum) Əgər K nəzəriyyəsi ziddiyətsizdirsə, onu özündə saxlayan, (yəni onun genişlənməsi olan) elə K^* nəzəriyyəsi var ki, bu nəzəriyyə tamdır.

İsbatı. K nəzəriyyəsində qapalı formulların gücü hesabı çoxluq olduğundan onları nömrələmək olar:

$$A_1, A_2, A_3 \ldots$$

Bu ardıcıllığa uygun genişlənmələrini quraq:

$$K_0 = K$$

götürək və

$$K_1 \subset K_2 \subset K_3 \ldots$$

ardıgılligi quraq.

K_1 aşağıdakı qayda üzrə qurulur. Əgər $\overline{A}$ formulu K nəzəriyyəsində isbat oluna bilən deyilsə, onda $K_1 = \{K_0, A_1\}$ götürülür və teorem 3.4 əsasən K_1 ziddiyətsiz olur. Əks halda $\overline{A}$ formulu K nəzəriyyəsində isbat oluna biləndirsə, $K_1 = K_0$ olur və yenədə K_0 ziddiyətsiz olduğundan, K_1 ziddiyətsiz olur.

K_2 aşağıdakı qayda üzrə qurulur. Əgər $\overline{A_2}$ formulu K_1 nəzəriyyəsində isbat oluna bilən deyilsə, onda $K_2 = \{K_1, A_2\}$ götürülür və teorem 3.4 əsasən K_2 ziddiyətsiz olur. Əks halda $\overline{A_2}$ formulu K_1 nəzəriyyəsində isbat oluna biləndirsə, $K_2 = K_1$ olur və yenədə K_1 ziddiyətsiz olduğundan, K_2 ziddiyətsiz olur. Aydındır ki, $K_1 \subset K_2$ alt çoxluğudur və sairə.

K_n quruqlmuşa, $\overline{A_{n+1}}$ formulu K_n nəzəriyyəsində isbat oluna bilən deyilsə, onda

$$K_{n-1} = \{K_n, A_{n-1}\}$$

olur. K_{n+1} və teorem 3.4 əsasən ziddiyətsiz olur.Əks halda, $\overline{A_{n+1}}$ K nəzəriyyəsində isbat oluna biləndirsə,

$$K_{n-1} = K_n$$

olur və yenə K_n ziddiyətsiz olduğundan K_{n+1} ziddiyətsiz olur. Onda

$$K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n \subset \ldots \qquad (1)$$

alınır və bunların birləşməsində

$$K^* = \cup_{n=o,\infty} K_n \qquad (2)$$

K* nəzəriyyəsi tamdır, onda görəki K nəzəryyəsinin

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$$

formullarından hər birinin özü və ya inkarı K*daxildir.

İsbat edək ki, K* ziddyətsizdir.Əksini fərz edək, fərz edək ki, ziddyətlidir,yəni elə B və $\overline{B}$ formulları var ki, K* -da bu formullar isbat oluna biləndir. Hər bir isbat ardıcıllıgı sonlu sayda formulalardan ibarət olduğundan, (1) və (2) alınır ki, elə K_m var ki, K_m -də B və $\overline{B}$ formulları isbat oluna biləndir.Bu isə istənilən m üçün K_m zidiyyətsiz olması şərtinə ziddir. Deməli əks fərziyyə dogru deyil. Teorem isbat olundu.

3.7. Nəticə. Əgər K nəzəriyyəsi ziddiyətsizdirsə, onda hər bir ümümidəyərli formula K nəzəriyyəsində isbat oluna biləndir.

İsbatı. Əksini fərz edək,fərz edək ki, elə qapalı ümümidəyərli A formulu vardır ki, K nəzəriyyəsində isbat oluna bilən deyil. Onda teorem 3.4 görə $K^* = \{K, \overline{A}\}$ nəzəriyyəsi ziddiyyətsizdir və teorem 3.5 görə onun modelı var. $\overline{A}$ formulu K^* nəzəriyyəsinin aksiomu oldugindan bu modeldə doğrudur və A formulu ümümidəyərli oldugu üçün bu modeldə doğrudur. Onda bu modeldə A və $\overline{A}$ doğrudur bu isə zidiyyətdir.Deməli əks fərziyyə dogru deyil.İsabt etdik ki, hər bir ümümidəyərli formula K nəzəriyyəsində isbat oluna biləndir.

3.8. Nəticə (Qedel1930il)) Predikatlar cəbri tamdır.

İsbatı.Teorem2.9 görə predikatlar cəbri ziddiyətsizdir və onda teorem 3.7 bilavasitə alınır ki, hər bir hər bir ümümidəyərli formula predikatlar cəbrində isbat oluna biləndir.

Çalışmalar.

1.Formulardan hansıları

a) ümumdəyərli

b) zidiyyyətli

c) ödənilə bilən

1.

$$\forall x \forall y((P(x,y) \to Q(x,y)) \leftrightarrow (\overline{P}(x,y) \vee Q(x,y))$$

2.

$$\forall x((P(x) \to Q(x)) \leftrightarrow \forall(\overline{Q}(x) \to \overline{P}(x))$$

3.

$$\forall x(\overline{P(x) \wedge Q(x))} \leftrightarrow (\overline{P}(x) \vee \overline{Q}(x))$$

4.

$$\exists x(p(x) \wedge \overline{p}(x))$$

5.

$\forall x(P(x) \wedge \overline{P}(x))$

6.

$\forall x((A(x) \to B(x)) \leftrightarrow (A(x) \wedge \overline{B}(x))$

7.

$\forall x((A(x) \to B(x)) \leftrightarrow (\overline{B}(x) \to \overline{A}(x))$

8.

$\forall x((A(x) \to B(x)) \leftrightarrow (\overline{A}(x) \wedge \overline{B}(x))$

9.

$\forall x((A(x) \to \overline{B}(x)) \leftrightarrow (\overline{A}(x) \wedge \overline{B}(x))$

10.

$\forall x((A(x) \to B(x)) \to A(x))$

11.

$A(x, y) \to \overline{A}(x, y)$

12.

$\overline{A}(x, y) \to \overline{A}(x, y)$

13.

$\exists x A(x) \to \forall x A(x)$

14.

$\forall x A(x) \to \exists x A(x)$

15.

$\exists xA(x) \vee \exists xB(x) \leftrightarrow \exists x(A(x) \vee B(x))$

16.

$\forall xA(x) \wedge \forall xB(x) \leftrightarrow \forall x(A(x) \wedge B(x))$

17.

$A(y) \to \forall xA(x)$

18.

$\forall x(\Phi(x) \to P(x)) \to (\forall x\Phi(x) \to \forall xP(x))$

19.

$\forall x(\Phi(x) \to P(x)) \to (\exists x\Phi(x) \to \exists xP(x))$

20.

$\exists x(\Phi(x) \to P(x)) \to (\forall x\Phi(x) \to \forall xP(x))$

21.

$\exists x(\Phi(x) \to P(x)) \equiv (\forall x\Phi(x) \to \exists xP(x))$

22.

$\forall x(\Phi(x) \to P(x)) \equiv (\exists x\Phi(x) \to \forall xP(x))$

olmasını müəyyənləşdirin.

2.Formullarin gətirilmiş formasını yazin.

1.

$\overline{\forall xA(x,y)} \to \exists x\overline{A}(x,y)$

2.

$A(x) \wedge B(y) \to \forall zC(z)$

3.

$\forall xA(x) \vee \forall xB(x) \to \forall x(A(x) \vee B(x))$

4.

$\exists xA(x) \wedge B(x) \to \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$

5.

$\forall xA(x) \to \exists xA(x)$

6.

$\exists xA(x) \wedge \exists xB(x) \leftrightarrow \exists x\exists y(A(x) \wedge B(y))$

3. Formulların normal formasını yazın.

1.

$A(x) \vee \overline{\forall yB(y) \wedge C(z)}$

2.

$A(x) \wedge B(y) \to \forall zC(z)$

3.

$\forall xA(x) \vee \forall xB(x) \leftrightarrow (\exists xA(x) \wedge \exists xB(x))$

4.

$\forall x(A(x) \leftrightarrow B(x)) \leftrightarrow (\exists xA(x) \leftrightarrow \exists xB(x))$

5.

$\exists xA(x) \wedge B(x) \to \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$

6.

$\forall x(A(x) \to B(x)) \to (\forall xA(x) \to \forall xB(x))$

4. Formulların önkvantorlu formasını yazın

1.

$\forall x A(x) \to \exists x A(x)$

2.

$\forall x B(x) \to B(y)$

3.

$A(x) \to \exists x A(x)$

4.

$\overline{\forall x A(x,y)} \to \exists x \overline{A}(x,y)$

5.

$\forall x (A(x) \leftrightarrow B(x)) \leftrightarrow (\exists x A(x) \leftrightarrow \exists x B(x))$

6.

$\forall x \exists A(x,y) \to \exists y \forall x A(x,y)$

5.İsbat edin ki, elə Φ və P predikatları var ki:

1) $\forall x(\Phi(x) \vee P(x)) \not\equiv \forall x \Phi(x) \vee \forall x P(x)$

2) $\exists x(\Phi(x) \wedge P(x)) \not\equiv \exists x \Phi(x) \wedge \exists x P(x)$

3) $\forall y \exists x \mathrm{P}(x,y) \to \exists x \forall y \mathrm{P}(x,y) \not\equiv 1$

III FƏSIL. I TƏRTIB NƏZƏRIYYƏNIN TƏTBIQLƏRI.FORMAL HESAB

§1. Bərabərlik xassəsinə malik I tərtib nəzəriyyə. Mülahizələr və predikatlar cəbrinin tətbiqləri. Formal hesabın aksiomatikası.

1.1. Bərabərlik xassəsinə malik I tərtib nəzəriyyə .

Tutaq ki, I tərtib K tərtib nəzəriyyəsində A_1^2(s,t) predikatı var ki,onu t=s işarə edəcəyik. I tərtib K nəzəriyyə o vaxt bərabərlik xassəsinə malik olur ki, aşağıdakı şərtlər ödənilsin.

a) $\vdash x_1 = x_1$

b) $\vdash$ $x=y \to (A(x,x) \to A(x,y))$

burada A formulu nəzəriyyənin ixtiyari ikiyerli formuludur. A(x,y)formuli A(x,x)-dən y dəyişənin x dəyişəninə görə sərbəst daxil olmalarının bir və ya bir neçə yerdə y-lə əvəz olunması nəticəsində alınmışdır.

Elemenar qruplar,meydanlar,vahidə malik kommutativ halqalar nəzəriyyələri, bərabərlik xassəsinə malik I tərtib nəzəriyyələrdir.

"Yeganə x var ki, A(x) xassəsinə malıkdır" ifadəsi bərabərlik xassəsinə malik I tərtib nəzəriyyədə:

$$\exists x A(x) \wedge \forall x \forall y (A(x) \wedge A(y) \to x = y)$$

formulu ilə ifadə oluna bilər və qısa olaraq bu formulu $\exists_1 xA(x)$ işarə edəcəyik.Riyazi nəzəriyyələrin əksəriyyəti,qruplar,halqalar,ədədlər nəzəriyyəsi, rasional, həqiqi və kompleks ədədlər nəzəriyyəsinin ,riyazi analiz və sairə bərabərlik xassəsinə malik I tərtib nəzəriyyələrdir.

1.2. Mülahizələr və predikatlar cəbrinin tətbiqləri.

Fizika elmı texniki elmlər üçün nə qədər əhəmiyyətlidirsə, riyazi məntiq elmidə informatika elmi üçün bir o dərəcədə,əhəmiyətlıdır.Buna görədə riyazi məntiqi "informatikanın hesabida" adlandırırlar.

a) Kompüterlərin aparat təmınatında məntiq.

Kompüterlər və avtomatik qurgular özündə onminlərlə, yüz minlərlə çeviricilər(rele, triqqerlər, ventellər və sairə) saxlayan elektron sxemlərdən istifadə olunur.Onların yaradılması çox çətin işdir.

Çeviri sxem: ceviriclər, onları birləşdirən naqillərdən , girişlər və cixişlardan ibarət gurgunun sxematik təsviridir.Bu gurguya elektrik siqnalları verilir və götürülür.

Hər bir çevirici sxemə çevirmə funksiyasi qarşi qoymaq olar.Bu funksiyaya sxemin cəryan keçirmə funksiasi deyilir.

Bəzi çevirmə sxemlərinin cəryan keçirmə funksialarina baxaq

a) 

Sxem çeviricilər saxlamir və cəryani həmişə keçirir, deməli F=1;

b) 

Sxem ancaq bir açılmiş kontakt saxlayir, deməli F=0

c) 

Sxem çevirici x qapali olduqda cəryan keçirir,açiq olduqda keçirmir,deməli, F(x) = x;

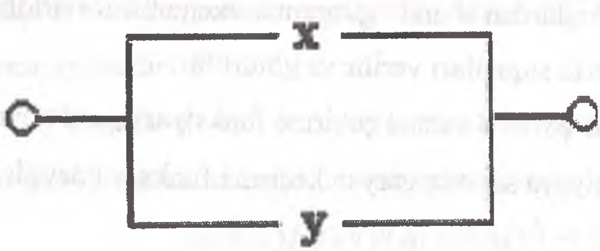
ç) 

Sxem çevirici x açiq olduqda cəryan keçirir, qapali olduqda keçirmir,deməli, $F(x) = \bar{x}$;

д) 

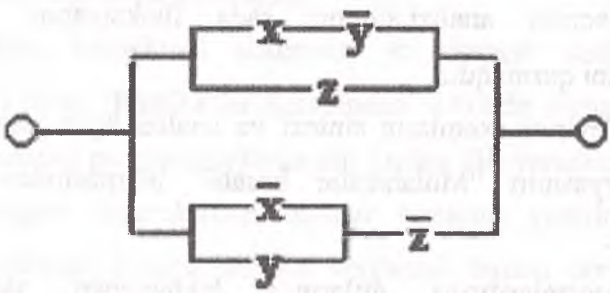
Sxem yalniz və yalniz hər iki çevirici qapali olduqda cəryani keçirir.deməlı, $F(x,y) = x \cdot y$;

e)



Sxem iki çeviricidən heç olmazsa biri qapali olduqda cəryani keçirirdeməli, F(x,y)=x v y;

Bu funksiyalar kifayətdirki, istənilən çeviri sxemin cərəyan funksiyasını onlar vasitəsi ılə ıfadə etmək olsun. Məsələn



Sxem iki paralel budaqdan ibarətdir və funksyası vasitəsi ilə ifadə olunur

$$F(x,y,z)=(x\cdot\bar{y})\vee z\vee(\bar{x}\vee y)\cdot\bar{z}$$

İki sxem eynigüclü hesab olynur ,əgər eyni giriş siqnqllqrında onlardan birindən yalnız və yalnız o vaxt cəryan keçirki,o birindən cəryan keçsin. İki eynigüclü sxemdən daha sadə o hesab olunur kı,o daha az məntiqi əməliyyatlar və çeviricilər saxlayır.

Eynigüclü sxemlər içərisində daha sadəsini tapmaq çox əhəmiyətlidir.

Çevirici sxemlərin tədqiqində iki əsas məsələ,sxemin sintezi və analizi məsələsi durur.

Sxemin analizi üç mərhələdən ibarətdir:

1.Sxemin gəryan funksiyasının dogruluq cədvəlini qurmaq

2.Bu funksiyanı sadələşdirmək.

3.Uygun sxemi qurmaq.

Sxemin analızi,alınmış sadə funksiyanın dogruluq cədvəlini qurmaqdır.

Çevirici sxemlərin sintezi və analizi üçün riazi məntiq nəzəriyyəsinin "Mülahizələr hesabi" bölməsindən istifadə olunur.

b) Pogrmlaşdırma dillərində budaglanan alqoritmləri reallaşdirmaq üçün məntiqi əməliyyatlardan istifadə olunur. Məsələn paskal proqramlaşdirma dilində

NOTX(¬X),X1ANDX2(X1&X2),X1ORX2

(X1VX2),X1XORX2((X1&X2)V(¬X1&¬X2))

məntiqi əmlyyatları daxil edilmişdir. Bu məntiqi əməliyatlar mürəkkəb budaqlanma strukturuna malik proqramların tərtibini asanlaşdırır. Nümayiş etdirmək üçün sadə bir misala baxaq.Tərflərinini uzunluqları X,Y,Z, olan üçbucagın gurulmasinin mümkünlüyünü təmin edən

Proqram hissəsi:

İF(X+Y>Z)AND(X+Z>Y)AND(Y+Z>X) THEN('Belə üçbucaq qurmaq olar') ELSE (('Belə üçbucaq qurmaq olmaz')

c) Süni intelektual sistemlər nəzəriyyəsi insanın əqlı fəaly-yətini modelləşdirən kompüter proqramları sistemidir.Ekspert sisitemlərı ısə süni intelektual sistemlər nəzəriyyəsini tətbiqi ilə insanın konkret fəalyyət sahəsini mjltkkəşdirən edən kompüter programlar sistemidir.

Süni intelektual sistemləri və ekspert sistemlərini yaratmaq üçün "Predikatlar hesabından" istifadə olunur. 1980 illərdə məntiqi programlaşdirma dili Proloq dili yaradıldı ki, bu dildə ekspert sistemlərinin biliklər bazasını yardılmasında ıstıfadə olunur. Proloq dilində verilənlər bazası predikatlar hesabınınköməyi ilə yazılmış faktlar və mətniqi mühakimələr küllıyatidir. Onların yazılışında ingilis,rus və digər dillərdən istifadə etmək olar. Bunun üçün Proloqda bu dilin interpre-tatoru olmalıdır.

Proloq yazılmış biliklər küllıyatini prosedurlar və məntiqi qaydalar vasitəsi ilə emal etməyə imkan verir.

ç) Verilənlər bazasi dedikdə,informasiya külliyatının sistem-ləşdirilmiş və strukturlaşdirilmiş şəkildə kompüterin yaddaşına elə yazılışıdır ki,bu külliyatı kompüterdə tələb olunan şəkildə emal etmək mümkün olsun.Verilənlər bazsı ınsan fəalliyyətini bütün sahələrində tətbiq olunur.

Bütün verilənlər bir cədvəldə yerləşərsə belə verinlər bazası, müstəvi verinlər bazası adlanır. Bütün verilənlər bir neçə cədvəllərdə yerləşərsə və eyni adlı sahələr arasında əlaqə təmin edilmiş olarsa belə verinlər bazası,relasiyon verilənlər bazası adlanır. Relasiyon verilənlər bazasında informasiyanın axtarışı SOL (Structuret Onlu Language) adlanır. SOL verilənlər bazasında informasiyanın axtarılması, modifikasiya edılməsi üçün universal proqramlaşdırma dilidir. İnformasiyanın axtarışı məntiqi şərtli operatorlar vasitəsi ilə aparılır. Məntiqi şərtlər sadə və ya mürəkkəb ola bilər.

Sadə məntiqi bərabərlik şəklındə veriliə bilər(ad=qiymət)

Mürəkkəb şərt daxilində Sol-da axtariş AND(və)OR(və ja),NOT(inkar) mənitqi əməliyyatlari vasitəsi ilə aparılır .Məntiqi nöqtey nəzərdən SOL-dakı sorgular riyazi məntiqin bərabərlık ışarəsi ilə verilmlmiş predikatlar hesabı ilə eynıgüclüdür.

1.3. Formal hesabın aksiomatikası.

1.3.1. Hesab nəzəryyəsi,natural ədədlər və onların xassələrini öyrənən elmidir.Natural ədədlərın xassələrindən istifadə istənilən riyazi nəzəriyyə üçün zəruri oldugundan,riyaziyyatın əsaalandırılmasını və formalızasiyasını hesabdan başlamaq təbidir. Hesabın aksiomtikası 1901-ci ildə Dedikin tərəfindən verilib, Peano aksiomatikası adlanır və verilmə qaydası aşagıdakı kimidır.

P1) 0 natural ədəddir.

2) ixtiyari x natural ədədi üçün,ondan bilavasitə sonra gələn adlanırlan x' natural ədədi var.

P3) İstənilən x üçün $0 \neq x'$

P4) Əgər $x_1' = x_2'$ onda $x_1 = x_2$

P5) Əgər A natural ədədlərin müəyyən xassəsidirsə, 0 ədəi üçün A doğrudursa və istənilən x naturalədədi üçün A xassəsini doğruluğundan, x' üçün A doğruluğu alınmırsa onda A xassəsi bütün natural ədədlər üçün doğrudur. (induksiya prinsipi)

Bu aksiomlar çoxluqlar nəzəriyyəsinin müəyyən hissəsini əlavə etməklə, nəin ki, natural ədədlərin və həmçinin rasional, həqiqi və kompleks ədədlər nəzəriyyəsinin qurulması üçün kifayətdir. Lakin bu nəzəriyyədə qeyri-dəqiq anlayışlardan (məsələn A natural ədədlərin müəyyən xassəsidir kimi anlayışlardan) istifadə olduğundan tam formalızə edılmış nəzəriyyə deyil. Bu səbəbdən də, bu nəzəriyyənin ziddiyyətsizliyi, dolulğu, həll oluna bilmə problemlərini tədqiq etmək qeyri mümümkündür.

1.3.2 Hesabın formal nəzəriyyəsi S nəzəriyyəsi adlanır. Bu I tərtib nəzəriyyə bir ikiyerli A_1^2 predikatından, bir a_1 sabitindən və üç f_1^1, f_1^2, f_1^3 funksiyanal işarələrdən ibarətdir.Formal olmayan hesabda olan adət etdiyimiz münasibət və əməllərdən ayrılmmaq üçün(formalızasiyya xələl gətirmədən), $A_1^2(x,y)$

predikatı əvəzinə $x=y$, $f_1^1(t)$, $f_1^2(t,s)$, $f_1^3(t,s)$ funksiualarıəvəzinə isə uygun olaraq t',$t+s$,$t\cdot s$ yazılacaq, a_1 sabiti 0 kimi işarə olunacaq.

OndaS formal hesabının aksiomları aşağıdakılardır;

$S1)$ $x=x_2 \rightarrow (x_1=x_3 \rightarrow x_2=x_3)$

$S2)$ $x_1=x_2 \rightarrow x_1'=x_2'$

$S3)$ $0\neq(x_1')$

$S4)$ $x_1'=x_2' \rightarrow x_1=x_2$

$S5)$ $x+0=x_1$

$S6)$ $x_1+x_2'=(x_1+x_2)'$

$S7)$ $x_1\cdot 0=0$

$S8)$ $x_1\cdot x_2'=x_1\cdot x_2+x_1$

S9) formal hesabın isənilən A(x) formulu üçün $A(0)\rightarrow$

$(\forall x(A(x)\rightarrow A(x'))\rightarrow \forall xA(x))$

1.3.3.Qeyd: S9) –dan MPvə vasitəsi ilə, riyazi induksiya metodunu almaq olar, yəni A(0) və

$A(0)\rightarrow(\forall x(A(x)\rightarrow A(x'))\rightarrow \forall xA(x))$ formullarından $\forall$ xA(x) formulu alınır

1.3.4. TEROEM:Istənilən t,s,r termləri üçün

$(S1')$ $t=r \rightarrow (t=s\rightarrow r=S)$

$(S2')$ $t=r\rightarrow t'=r'$

$(S3')$ $0\neq t'$

$(S4')$ $t'=r'\rightarrow t=r$

$(S5')$ $t+0=t$

$(S6')$ $t+r'=(t+r)'$

$(S7')$ $t\cdot 0=0$

$(S8')$ $t\cdot r'=(t\cdot r)+t$

S nəzəryyəsinin isbat oluna bilən formullarıdır.

İsbatı. Bunlardan hər biri A4 aksiomundan və GEN vasitəsi ilə asanlıqla alınır.

§ 2. Formal hesabda toplama və vurma əməllələrinin xassələrinin isbatı

Ədədlər nəzəriyyəsində bərabərlik münasibətinə, toplama və vurma əməllələrinin xassələrinin S formal nəzəriyyəsində isbat edək.

2.1.TEOREM

a) $t=t$

b) $t=r\rightarrow r=t$

c) $t=r\rightarrow (r=s\supset t=s)$

ç) $r=t\rightarrow (s=t\supset r=s)$

d) $t=r\rightarrow t+s=r+s$

e) $t=0+t$

ə) $t'+r=(t+r)'$

f) $t+r=r+t$

ə) $t=r \rightarrow s+t=s+r$

g) $(t+r)+s=t+(r+s)$

h) $t=r \rightarrow t \cdot s=r \cdot s$

x) $t' \cdot r=t \cdot r+r$

i) $0 \cdot t=0$

k) $t \cdot r=r \cdot t$

q) $t=r \rightarrow s \cdot t=s \cdot r$

a)-in isbatı.

1)	$(t+0=t) \rightarrow ((t+0=t) \rightarrow t=t)$	(S5′)
2)	$t+0=t$	(S1′)
3)	$t+0=t \rightarrow t=t$	MP 1,2
4)	4) $t=t$	MP 1,3

b) isbat edək.

1) $t=r \rightarrow (t=t \rightarrow r=t)$	(S1′)
2) $t=t \rightarrow (t=r \rightarrow r=t)$	1,tavtaloqiya
3) $t=r \rightarrow r=t$	2,(a) MP

c) isbatını verək.

1) $r=t \rightarrow (t=s \rightarrow r=s)$	(S1′)
2) $t=r \rightarrow r=t$	(b)
3) $t=r \rightarrow (r=s \rightarrow t=s)$	1,2, tavtaloqiya

ç) bəndində isbatı a),b)və c) bəndlərinin isbatlarına oxşar olduğundan, çalışma kimi verilir.

d) $t=r \rightarrow t+s=r=+s$ isbatı

Bu dusturu riyazi induksiya metodu vastəsilə isbat edək: $A(z)$ formulu olaraq $x=y \rightarrow (x+z=y+z)$ götürək.

$A(0)$ isbat edək yəni $x=y \rightarrow (x+0=y+0)$. Bunun üçün əvvəlcə

$x=y \vdash x+0=y+0$ (*)

1) $x+0=x$ (S5′)

2) $y+0=y$ (S5′)

3) $x=y$ fərziyə

4) $x+0=y$ 1,3 c

5) $x+0=y+0$ 2,4,ç

(*)isbat olundu.(*) deduksiya teorremini tətbiq etsək $A(0)$ isbatı alınar.

$A(z)$ dən $A(z')$ alinmani isbat edək.

$A(z)$formulu $x=y \rightarrow (x+y \rightarrow y+z)$ induksiya fərziyəsi

$A(z')$ formulu $x=y \rightarrow (x+z' \rightarrow y+z')$ isbat olunmalı.Əvvəlcə

$x=y \vdash x+z'=y+z'$ (* *)

1)	$x=y \rightarrow (x+z \rightarrow y+z)$	induksiya fərziyyəsi
2)	$x=y$	fərziyyə
3)	$x+z=y+z$	(d)
4)	$x+z=y+z \rightarrow (x+z)'=(y+z)'$	(S2′)
5)	$(x+z)'=(y+z)'$	Mp 3,4
6)	$x+z'=(x+z)'$	(S6′)
7)	$y+z'=(y+z)'$	(S6′)

8) $x+z'=(y+z)'$ 5,6 (c)

9) $x+z'=y+z'$ 7,8 (c)

Deməli (**) isbat olundu və (**)-a deduksiya teoremi tətbiq etsək onda alarıq ki, $x=y\to(x+z'=y+z')$ isbat olundu.

e) $t = 0+t$ isbat edək.

A(x) formulu $x=0+x$ üçün riyazi induksiya metodunu tətbiq edək.

A(0) formulunu $0=0+0$ isbat edək.

1) $0+0=0$ (S(5')),(A4)

2) $0+0=0\to0=0+0$ (b)

3) $0=0+0$ Mp 1,2

A(0) isbat olundu.

A(x)-in doğruluğunu qəbul edib yəni $x=0+x$ -in doğruluğunu qəbul edib A(x') -i isbat edək yəni $x'=0+x'$

1) $x=0+x$ induksion fərziyyə

2) $x=0+x\to0+x=x$ (S2')

3) $0+x' = (0+x)'$ (S6')

4) $x = 0+x \to x'=(0+x)'$ (S2')

5) $x' = (0+x)'$ MP 1,3

$x' = 0+x'$

ə) $t' + r = (t + r)'$ isbat edək.

A(y) formulu olaraq $x' + y = (x + y)'$ götürək. Riyazi induksiya metodu ilə isbat edəcəyik. Əvvəlcə A(0)-ı isbat edək, yəni $x' + 0 = (x + 0)'$ isbat edək.

1. $x' + 0 = x'$ (S5′)
2. $x + 0 = x$ (S5′)
3. $x + 0 = x \leftrightarrow (x + 0)' = x'$ (S2′)
4. $(x + 0)' = x'$ MP 2, 3
5. $x' + 0 = (x + 0)'$ 1,3,ç

A(0) isbat olundu. Indi isə isbat edək ki, $\vdash A(x) \rightarrow A(x')$

Əvəllcə isbat edək ki, $A(x) \vdash A(x')$ (***)

1.	$x' + y = (x + y)'$	fərziyyə
2.	$x' + y' = (x' + y)'$	(S6′)
3.	$x' + y = (x + y)' \leftrightarrow (x' + y)' = (x + y)''$	1, (S6′)
4.	$(x' + y)' = (x + y)''$	2,3,c
5.	$x' + y' = (x + y)''$	(S6′)
6.	$x' + y' = (x' + y)'$	5, (S2′)
7.	$x' + y' = (x + y')'$	4,6,ç

(***) deduksiya teoremini tətbiq etsək, $\vdash A(x) \rightarrow A(x')$

f) $t + r = r + t$ isbat edək.İnduksiya metodu vasitəsi ilə isbat edəcyik.

A(y) formulu $x + y = y + x$ götürək

A(0)-ı isbat edək. $x + 0 = 0 + x$

1. $x + 0 = x$ (S5′)

2. $x = 0 + x$ (e)

3. $x + 0 = 0 + x$ (c)

$\vdash A(0)$.

Isbat edək ki, $A(y) \vdash A(y')(****)$ alınır, yəni $x + y = y + x \vdash x + y' = y' + x$

1. $x + y = y + x$ fərziyyə

2. $x + y = (x + y)'$ (S6′)

3. $y' + x = (y + x)'$ (ə)

4. $(x + y)' = (y + x)'$

5. $(x + y)' = (y + x)'$ 2,3 (c)

6. $x + y' = y' + x$ 3,5,(ç)

(*****) isbat olundu. (*****) deduksiya teoremini tətbiq etsək (f) alınar.

(i) $t = r \rightarrow s + t = s + r$

Əvvəlcə $t = r \vdash s + t = s + r$ isbatbedək.

1.	$t = r \rightarrow t + s = r + s$	(d)
2.	$t + s = s+t$	(f)
3.	$r + s = s + r$	(f)
4.	$t = r$	fərziyyə
5.	$t + s = r+s$	1,4,MP
6.	$s + t=s+r$	2,5 , (S1′)
7.	$s + t = s + r$	3,6 (c)

İsbat etdik ki, $t = r \vdash s + t= s + r$

Teoremin isbatmda GEN qaydası tətbiq olunmadığından deduksiya teoremini tətbiq edə bilərik.

g) **$\vdash (t + r) + s = t + (r + s)$**

$\vdash (t + r) + s = t + (r + s)$

Əvvəlcə $(t+r)+s=t+(r+s)$ isbat edək.

Bunu riyazi induksiya metodu ilə isbat edək. Bunun üçün $A(z)$ formulu olaraq $(x + y) + z = x + (y + z)$ götürək.

Burada z parametrdir.

$A(0) = (x + y) + 0 = (x + y) + 0$ isbat etməli.

1. $(x + y) + 0 = x + y$ (S5′)
2. $y + 0 = y$ (S5′)
3. $x + (y + 0) = x + y$ 2,d
4. $(x + y) + 0 = x +(y + 0)$ 1,3 (ç)

A(0)-ı isbat etdik.

İnduksiya addımı A(z)

$(x + y) + z = x + (y + z)$

$(x + y') + z' \vdash x + (y' + z')$-i isbat edək.

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$ fərziyyə
2. $(x + y) + z' = ((x + y) + z)'$ (S6)′
3. $(x + y) + z' = (x + (y + z))'$ 1, (S2)′
4. $x + (y + z)' = (x + (y + z))'$ 2,3,(c)
5. $y + z' = (y + z)'$ (S6)′
6. $x + (y + z') = x + (y + z)'$ 5,(g)

7. $x + (y + z)' = (x + (y + z))'$ (S6′)

8. $x + (y + z') = (x + (y + z))'$ 6,7,(ç)

9. $(x + y) + z' = (x + (y + z')$ 4,8(d)

$(x + y') + z' \vdash x + (y' + z')$-i isbat etdik. Deduksiya teoremini tətbiq etsək g) isbatı alınır. Yerdə qalan bəndlərini isbatı çalışma kimi verilir.

Teorem 2.1 və qeyd 1.1-dən alınır ki, S formal hesab nəzəriyyəsi I tərtib bərabərlik xassəsinə malik olan nəzəriyyədir.

2.2.Teorem.s,t,v ixtiyari termlərdirsə onda aşağıdakı formullar S nəzəriyyəsində isbat oluna biləndir:

a) $t\cdot(s+r)= t\cdot s+t\cdot r$ (disributivlik)

b) $(s+r)\cdot t= s\cdot t+r\cdot t$ (disributivlik)

c) $(t\cdot r)\cdot s =t\cdot(r\cdot s)$ (hasilin assosativliyi)

ç) $t+s=r+s \rightarrow t=r$(bərabərlıkdə islah etmə xassəsi)

İsbatı.Göstəriş

(a) z görə induksiyaya əsasən isbat et $\vdash x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$

(b) (a) bəndindən və 2.1(k) bəndindən alınır.

(c) z görə induksiyaya əsasən isbat $\vdash (x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$

(ç) z görə induksiyaya əsasən və(S4′) görə isbat et $\vdash x+z=y+z\rightarrow x=y$

Biz ədədlər nəzəriyəsinin bir çox xassələrini S formal sistemində isbatını verdik.Növbəti paraqrafda, formal hesabın standart interpretasiyası,hesabi münasibətlərin və funksiyaların formal hesabada ifadə oluna bilməsi məsələlərinə baxılacaq.

§3.Formal hesabın standart interpretasiyası. Hesabi münasibətlərin və funksiyaların formal hesabada ifadə oluna bilməsi. Formal hesabda Qedel nömrələnməsi

3.1.Formal hesabın S nəzəriyyəsinin standart interpretasiyası (modeli).

Formal hesabın S nəzəriyyəsinin standart interpretasiyası (modeli):

1) Mənfi olmayan tam ədələr çoxluğu onun oblastidir.

2) 0 simvolu 0 tam ədədi kimi interpretasiya olunur.

3) f_1^1 yəni $'$ funksiyasını, özündən sonranı götürmə(vahidi əlavə etmə) əmliyyatı kimi interpretasiya olunur.

4) $+$ və $\cdot$ əməliyatları, adi toplama və vurma əməlləri kimi interpretasiya olunur.

5)= predikat hərfi, eynilik münasibəti kimi interpretasiya olunur.

Bundan, fərqli istənilən interpretasiya S nəzəriyyəsinin standart olmayan interpretasiyası (modeli) adlanır. Standart interpretasiyası ilə formal hesab arasında əlaqəni asanlaşdirmaq üçün (formal isbatın gətirmədənə xələl gətirmədən),bundan sonra üçün $0'$ əvəzinə$\bar{1}$, $0''$ əvəzinə $\bar{2}$... və s. yazılacaq. Əgər biz S nəzəriyyəsinin standart interpretasiyası (modeli) qəbul ediriksə,onun zidiyyətsizliyinidə qəbul etmış oluruq.Lakin semantik üsullar (adətən bu üsullar nəzəri-çoxluq mühakimələrinin müəyyən hissəsinidə özündə saxlayır), bir çox riyaziyyatçılar tərəfindən o qədərdə etibarlı sayılmır.Bundan başqa, S nəzəriyyəsinin teoremlərinin standart interpretasiyada doğru olmasınının isbatını vermirik, bu doğruluğunu intuitiv olaraq qəbul edirik/ Bu səbəbdən, S nəzəriyyəsinin zidiyyətsizliyinin hər bir isbatı, S nəzəriyyəsinin teoremlərinin standart interpretasiyada doğru olmasınını ısbat edilməmiş fərziyyə kimi qəbul edilməsinə əssaslanır.

3.2. Hesabi münasibətlərin və funksiyaların formal hesabada ifadə oluna bilməsi

3.2.1 Tərif.Təyin oblastı mənfi olmayan tam ədədlər çoxluğu və qiymətlər oblastı mənfi olmayan tam ədədlər çoxluğuna daxil olan funksiyalar hesabi funksiya deyilir. Mənfi olmayan tam ədədlər çoxluğunda verilmiş hər bir münasibətə, hesabi münasibət deyilir

3.2.2. Tərif.$R(x_1,...x_n)$ hesabi münasibəti S nəzəriyyəsində o vaxt ifadə oluna bilən deyilir ki, S nəzəriyyəsində $x_1,...x_n$ sərbəs dəyişənli elə $A(x_1,...x_n)$ formulası olsun ki,

(1) $R(k_1,...., k_n)$ doğru olduqda $\vdash_S A(\overline{k_1},..., \overline{k_n})$.

(2) $R(k_1,...., k_n)$ yalandırsa, $\vdash_S \neg A(\overline{k_1},..., \overline{k_n})$.

Məsələn, natural ədələr arasında bərabərlık münasibəti S nəzəriyyəsində $x_1=x_2$ formulası vasitəsi ilə ifadə oluna biləndir. Dogrudanda əgər $k_1=k_2$ onda, S nəzəriyyəsində teorem13.1(a) görə $\vdash \overline{k_1}=\overline{k_2}$, əgər $k_1 \neq k_2$ onda S nəzəriyyəsində $\vdash \overline{k_1} \neq \overline{k_2}$ (bax[1]3.6(a)) olur. S nəzəriyyəsində

$\exists w(w \neq 0 \wedge t + w = s)$ *formulu* $s < t$ *ifadə edir.*

$s > t$ *i sə* $s < t$ *ifadə edir.* $t \leq s$ *formulu* $(s < t) \wedge (s = t)$

ifadə edir.

$s \geq t$ isə $t \leq s$ *ifadə edir.*

Burada w, t və s termlərinə daxil olmayan S nəzəriyyəsində ilk dəyişəndir ([1]).

3.2.3. Tərif.$f(x_1,...x_n)$ hesabi funksiyası S nəzəriyyəsində ifadə oluna bilən deyilir o vaxt ki, S nəzəriyyəsində elə $x_1,...x_n$, x_{n+1} sərbəs dəyişənli elə $A(x_1,...x_n, x_{n+1})$ formulu olsun ki,

(1) Əgər $f(x_1,...x_n)= x_{n+1}$ olsa, onda S nəzəriyyəsində

$\vdash_S A(x_1,...., x_n, x_{n+1})$.

(2) $\vdash_S \exists_1 x_{n+1}\, A(\overline{k_1},\ldots,\overline{k_n}, x_{n+1})$.

Əgər (2) şərtini

(2′) $\vdash_S \exists_1 x_{n+1}\, A(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n}, x_{n+1})$ ilə əvəz etsək,onda $f(x_1,\ldots x_n)$ hesabi funksiyası S nəzəriyyəsində güclü ifadə oluna bilən deyilir.

Məsələn.

1) Sıfır funksiya $Z(x)=0$, yəni, $\forall x\ Z(x)=0$ funksiyası S nəzəriyyəsində $x_1=x_1 \wedge x_1=0$ formulu vasitəsi ilə güclü ifadə oluna biləndir. Əgər $Z(k_1)=k_2$ onda $k_2=0$ və $\vdash \overline{k_1}=\overline{k_2} \wedge 0=0$, yəni tərifin (1) bəndi ödənilir. Aydındır ki, $\vdash \exists_1 x_2\,(x_1=x_1 \wedge x_2=0)$ yəni tərifin (2′) şərti ödənilir.

2) Vahid əlavə etmək $N(x)=x+1$ funksiyası S nəzəriyyəsində $x_2=x_1'$ formulu vasitəsi ilə güclü ifadə oluna biləndir. Doğrudanda $k_2=k_1+1$ olduqda $\overline{k_2}$ və $\overline{k_1}'$ eyni olurlar və buna görədə $\vdash \overline{k_2}=\overline{k_1}'$. Bundan başqa $\vdash \exists_1 x_2 (x_2=x_1')$.

3) Proyeksiya alınan funksiyalar

$$U_i^{(n)}(x_1,\ldots,x_n)=x_i (i=1,\ldots,n)$$

S nəzəriyyəsində

$$x_1=x_1 \wedge \ldots \wedge x_n=x_n \wedge x_{n+1}=x_i$$

formulu vasitəsi ilə güclü ifadə oluna biləndir.Əgər

$$U_i^{(n)}(k_1,\ldots,k_n)=k_{n+1} (i=1,\ldots,n)$$

onda $k_{n+1}=k_i$ və $\overline{k_{n+1}}=\overline{k_i}$ deməli

$$\vdash \overline{k_1}=\overline{k_1} \wedge \ldots \wedge \overline{k_n}=\overline{k_n} \wedge \overline{k_{n+1}} = \overline{k_i}$$

və (1) şərti ödənildi. (2′) şərtinin ödənilməsi:

$$\vdash_S \exists_1 x_{n+1}(x_1=x_1 \wedge \ldots \wedge x_n=x_n \wedge \ x_{n+1}=x_i)$$

alınır. Deməli $U_i^{(n)}$ $(x_1,\ldots,x_n)=x_i$ funksiyası S nəzəriyyəsində güclü ifadə oluna biləndir.

3.2.4.Bərabərsizlik münasibətləri:

a) $\exists w(w \neq 0 \wedge t + w = s)$ *formulu* $s < t$ *ifadə edir.*

b) $s > t$ *isə* $s < t$ *ifadə edir.*

c) $t \leq s$ *formulu* $s < t \vee s = t$ ifadə edir.

ç) $s \geq t$ isə $t \leq s$ *ifadə edir*.

Burada w , t və s daxil olmayan S nəzəriyyəsində ilk dəyişəndir.

3.2.5. Qalıqsız bölünmə: $\exists z(s = t \cdot z)$(*burada* z S nəzəriyyəsində t və s daxil olmayan ilk dəyişəndir) bu formulu qısa olaraq s/t işarə edəcəyik.

Ümumiyətlə ədədlər nəzəriyyəsinin xassələrini formal S nəzəriyyəsində isbat etmək olar.İstisna olaraq Drixle teoremini göstərmək olar ki,onun isbatında kompleks dəyişənli funksiyalardan istifadə olunmuşdur və bu teoremin elementar isbatının varlığı və məlum deyil.

Eyni qayda ilə sadə ədədlər haqqında teoremin isbatında loqarifmik funksiyadan istifadə olunur bu teoremin elementar isbatınında varlığı məlum deyil.

3.2.6. Qödel nömrələnməsi S nəzəriyyəsinin hər bir simvollarına qarşı g(x) funksiyası vasitəsi ilə nömrələnmə aparılmışdır:

$$g(()=3;\ )\ g())=5;\ g(,)=7;\ g(\bar{\ })=9;\ g(\rightarrow)=11;$$

$$g(x_n)=5+8k; \quad k=1,2....$$

$$g(a_n)=7+8k; \quad k=1,2....$$

$$g(f_k^n)=9+8\cdot(2^n\cdot 3^k);\ k,n\geq 1$$

$$g(p_k^n)=11+8\cdot(2^n\cdot 3^k);\ k,n\geq 1$$

Hər bir formula simvollar ardıcıllığıdır. Məs: $u_0u_1..., u_n$ i onda onun Qedel nömrəsi $2^{g(u_0)}\cdot 3^{g(u_1)}\cdot 5^{g(u_2)}\ ...\ \cdot p_n^{g(u_n)}$ olur (burad p_i i-ninci sadə ədədlərdir, məsələn $p_0=2$.)

$$g(\forall x_i)=g((x_i)).$$

Mısallar.

1)

$g(x_2)=21, g(a_4)=39, g(f_1^2)=105, g(p_2^1)=155$

3) $g(p_1^2(x_1,x_2))=2^{g(p_1^2)}\cdot 3^{g(()}\cdot 5^{g(x_1)}\cdot 7^{g(,)}\cdot 11^{g(x_2)}\cdot 13^{g())}=$
$=2^{107}\cdot 3^3\cdot 5^{13}\cdot 7^{21}\cdot 13^5$

Nəhayət $B_1,...,B_n$ isbat ardiclliği verilmişsə onda onun Qedel nömrəsi:

$2^{g(B_1)}\cdot 3^{g(B_2)}\ ...\ \cdot p_n^{g(B_n)}$ olur(burad p_i i-ninci sadə ədədlərdir, məsələn $p_0=2$.)

Deməli, hər bir formulanın, hər bir isbatın S nəzəriyyəsində nömrəsi var və hər bir natural ədəd sadə ədədlərin qüvvətlərinin hasili şəklində yeganə qayda ilə göstərilə bildiyindən bu uyğunluq qarşılıqlıbirqiymətlidir. Əlbəttə ki, elə natural ədəd var ki, ona simvol və formula qarşı qoyulmur məsələn 12natural ədədi qedel nömrəsi deyil.Belə nömrələnmə ilk dəfə 1931 ildə Qedel tərəfindən verilmişdir. Məqsəd S formal nəzəryəsini hesabiləşdirmək idi,yəni S formal nəzəryəsinə aid olan müddəaları onlara ekvivalent olan natural ədədlərə aid olan mülahizələrlə əvəz etmək və sonra bu mülahizələri S formal nəzəryəsində ifadə etmək idi. Hesabləşmə ideyası,riyazi məntiq nəzəryyəsinin bir çox mühüm problemlərinin həlli üçün mühüm vasitə oldu.

§ 4.Formal hesab üçün Qedel teoremi və ondan alınan nəticələr

Əvvəlcə Qedel teoreminin isbatı üçün lazım olan qayda, təriflər və teoremləri verək.

4.1. A4 qaydası və ya fərdiləşmə qaydası:Əgər t termi x dəyişəni üçün **A(x)** formulunda sərbəsdirsə onda I tərtıb nəzəriyyədə $\forall x\ A(x) \vdash A(t)$.

İsbatı.

1) $\forall x\ A(x)$ fərziyyə

2) $\forall x\ A(x) \longrightarrow A(t)$ (A4 aksiomu)

3) $A(t)$ MP1,2

4.2. Tərif.K nəzəriyyəsi S nəzəriyyəsi ilə eyni simvollu I tərtib nəzəryyədir.K nəzəriyyəsi o vaxt ω ziddiyyətsiz hesab olunur ki, istənilən sərbəst dəyişən A(x) formulası üçün əgər ixtiyari n natura ədədi üçün $A(\bar{n})$ isbat oluna biləndirsə onda K nəzəriyyəsində $\exists x\overline{A(x)}$ formulu isbat oluna bilən deyil.

4.3.Lemma. Əgər K nəzəriyyəsi ω ziddiyyətsizdirsə, onda o ziddiyyətsizdir.

İsbatı.Tutaq ki, K nəzəriyyəsi ω ziddiyyətsizdir.Sərbəst dəyişən x olan hər hansı isbat oluna bilən A(x) formulası götürək, məsələn $x = x \rightarrow x = x$ isbat oluna bilən formuladır. Aydındır ki,istənilə n üçün$\vdash_k \bar{n}=\bar{n}\rightarrow\bar{n}=\bar{n}$. və K nəzəriyyəsi ω zidiyyətsiz olduğundan K nəzəriyyəsində $\exists x\overline{(x = x \rightarrow x = x)}$ formulu isbat oluna bilən deyil. İndi əksini fərz edək,fərz edək ki, K nəzəriyyəsi ziddiyyətlidir,onda elə A və $\bar{A}$ formulları var ki,onlar K nəzəriyyəsində isbat oluna biləndir.Bu halda $\bar{A} \rightarrow (A \rightarrow B)$ tavtaloqiyasından K nəzəriyyəsində istətilən formulanın isbat oluna bılən formula olduğu alınır, bu isə K nəzəriyyəsində $\exists x\overline{(x = x \rightarrow x = x)}$ formulu isbat oluna bilən deyil faktına zıddır.

Deməli əks fərziyyə dogru deyil, yəni K nəzəriyyəsi ziddiyyətsizdir.

4.4. $W_1(u,y)$ münasibətinə münasibətinə baxaq.Bu münasibət onda doğru olur ki, x_1 sərbəst dəyişənli $A(x_1)$ formulunun Qedel nömrəsi u olsun, y isə S nəzəriyyəsində A(u) formulunun isbat ardıcıllığının Qödel nömrəsidir.Əks halda yalan olur.

4.5.Teorem. $W_1(x_1,x_2)$ münasıbəti S formal nəzəriyyəsində $\mathcal{W}_1(x_1,x_2)$ formulu ilə ifadə oluna biləndir.([1],Nəticə 3.4.)

Yəni $W_1(x_1,x_2)$ doğrudursa onda $\vdash_S \mathcal{W}_1(x_1,x_2)$,əgər yalandirsa onda $\vdash_S \overline{\mathcal{W}_1(x_1,x_2)}$.

4.6. $\forall x_2 \neg \mathcal{W}_1(x_1,x_2)$ (*) formulunun Qedel nömrəsi m olsun,onda:

$$\forall x_2 \overline{\mathcal{W}_1(m,x_2)} \qquad (**)$$

qapalı formula olar.

4.7. Teorem(Qedel teoremi [1931 il].

a)Əgər S nəzəriyyəsi ziddiyyətsizdirsə onda (**) formulası S nəzəriyyəsində isbat oluna bilən deyil.

b)Əgər S nəzəriyyəsi ω ziddiyyətsizdirsə onda $\overline{(**)}$formulası S nəzəriyyəsində isbat oluna bilən deyil.

İsbatı:a)Əksini fərz edək , yəni fərz edək ki, S nəzəriyyəsi ziddiyyətsizdir,lakin (**) formulası isbat oluna biləndir və k natural ədədi $\forall x_2 \overline{\mathcal{W}_1(m,x_2)}$ formulasının müəyyən isbat ardıcıllığının nömrəsi olsun.Onda $W_1(m,k)$ doğru olacaq və $\vdash_S W_1(\bar{m},\bar{k})$. $\vdash_S \forall x_2 \overline{W_1(m,x_2)}$ isbatından A4 qaydasına görə $\vdash_S \overline{W_1(\bar{m},\bar{k})}$.Deməli S nəzəriyyəsində $W_1(\bar{m},\bar{k})$ və $\overline{W_1(\bar{m},\bar{k})}$ formulları isbat oluna bilən formullardır,bu isə S nəzəriyyəsi ziddiyyətsizdir şərtinə ziddir. Alınan zidiyyət əks fərziyyənin doğru olmadığını göstərir.

b) Əksini fərz edək , yəni fərz edək ki, S nəzəriyyəsi ω ziddiyyətsizdir ,lakin $\overline{(**)}$ formulası isbat oluna biləndir yəni $\vdash_S \overline{\forall x_2 \overline{W_1(m,x_2)}}$. Onda 4.3 görə S nəzəriyyəsi ziddiyyətsiz olduğundan onda $\forall x_2 \overline{W_1(m,x_2)}$ formulu isbat oluna bilən deyil,onda istənilən n ədədi $\forall x_2 \overline{W_1(m,x_2)}$ formulunun S nəzəriyyəsində isbat ardıcıllıgının Qedel nömrəsi deyil və deməli istətilən n üçün$W_1(m,n)$ yalandır yəni istənilən n üçün$\vdash_S$ $\overline{W_1(\bar{m},\bar{n})}$.$A(x_2)$ formulu olaraq $\overline{W_1(m,x_2)}$ götürsək, S nəzəriyyəsi ω ziddiyyətsizliyindən $\overline{\exists x_2 W_1(\bar{m},k)}$ formulu S nəzəriyyəsində isbat oluna bilən olmaması alınır və $\overline{(**)} \equiv \exists x_2 \overline{\overline{W_1(\bar{m},k)}}$) olduğundan ziddiyyət alındı. Alınan zidiyyət əks fərziyyənin doğru olmadığını göstərir.

Qedel teoremindən çıxan nəticələr:

Qedel teoremindən bilavasitə alınır ki,əgər S nəzəriyyəsi ω ziddiyyətsizdirsə onda (**) formulu standart interpitasiyasında doğrudur, lakin (**) və $\overline{(**)}$ formulları S nəzəriyyəsində isbat oluna bilən deyil.(belə formullara S nəzəriyyəsinin həll oluna bilməyən formulları deyilir).

S nəzəriyyəsində ziddiyyətsizdirsə S nəzəriyyəsinin standart interpitasiyasında doğru, lakin S nəzəriyyəsində isbat oluna bilməyən formulaların olması, ilk baxışda onun aksiomlar sisteminin zəif olması fərz etməyə əsas verir.S nəzəriyyəsinin aksiomlar siyahısına, S nəzəriyyəsinin standart interpitasiyasında doğru və S nəzəriyyəsini isbat oluna bilməyən formulaların əlavə edilməsi onu tam sistemə çevirirmi? Məsələn daha güclü aksiomatik S_1 sistemi almaq üçün (**) formulunu əlavə edək. S nəzəriyyəsində ifadə oluna bilən hər bir münasıbət,hər bir funksiya S_1nəzəriyyəsində ifadə oluna bilən olduğundan [1]-dəki 3.25-3.27 teoremlər öz gücündə qalır. Bu isə Qedel teoreminin S_1nəzəriyyəsində doğru olması üçün kifayət edir. Ona görə ki,eyni isbat sxemi əsasında S_1 nəzəriyyəsində $\forall x_2 \overline{\mathcal{W}_{1_{S_2}}(\bar{k}, x_2)}$ formulunun olduğunu göstərmək olar ki, S_1 nəzəriyyəsi ω ziddiyyətsizdirsə onda bu formula bu nəzəriyyədə həll oluna bilən deyil. Deməli S nəzəriyyəsini sonlu sayda aksiomlar əlavə etməklə(o zidiyyətsizdirsə) tam sistemə çevirmək olmur. Deməli, hesab nəzəriyyəsi isə riyazi analizin,cəbrin və dicər bir çox riyazi nəzəriyyələrin tərkib hissəsi olduğundan,bu nəzəriyyələrində formal sistemələri tam deyil.Tam olmayan formal sistemlərə aid olan məsələlərin bir çoxunu isə kompyuterlər vasitəsi ilə(həll alqoritmləri olmadığı üçün) həll etmək mümkün deyil.

Buna görədə, kompüter texnoloqiyası inkişaf səviyyəsindən asılı olmayaraq, bir çox məsələləri kompüterdə rellaşdırmaq üçün insan zəkasının tam formal olmayan mühakimələrinə həmişə ehtiyac var.

Çalışmalar.

1.S nəzəriyyəsində t,y,s termləri üçün isbat ett.

a) $\vdash t + \bar{1} = t'$

b) $\vdash t \cdot \bar{1} = t$

c) $\vdash t \cdot \bar{2} = t + t$

d) $\vdash t + s = 0 \rightarrow t = 0 \wedge s = 0)$

e) $\vdash t \neq 0 \rightarrow (s \cdot t = 0 \rightarrow s = 0)$

f) $\vdash t + s = \bar{1} \rightarrow (t = 0 \wedge s = \bar{1})$

g) $\vdash t \cdot s = \bar{1} \rightarrow (t = \bar{1} \wedge s = \bar{1})$

h) $\vdash t \neq 0 \rightarrow \exists y(t = y')$

i) $\vdash s \neq 0 \rightarrow (ts = rs \rightarrow t = r)$

j) $\vdash t \neq 0 \rightarrow (t \neq \bar{1} \rightarrow \exists y(t = y''))$

III FƏSIL. ƏLAVƏ. FORMAL ÇOXLUQLAR NƏZƏRIYYƏSI

§1. Riyaziyyatın əsasları və riyazi məntiq

Müasir dövrdə elmin inkişafının ən səciyyəvi cəhəti, elmi biliklərin differensiasiyası və inteqrasiyasının sinkretik vəhdət halında çıxış etməsindədir. Elmi idrakın inkişafında bu baxılan tendensiya, fundamental elmlərin tərkibində müstəqim əhəmiyyətə malik elmi istiqamətlərin formalaşması ilə yanaşı, elmi yaradıcılığın ən müxtəlif istiqamətlərində universal tədqiqat metoduna malik elm sahələrinin təşəkkül tapması ilə xarakterizə edilir.

Bu baxımdan XX əsrin əvvəllərindən başlayaraq, Tcermelo, Frege, Rassel, Bull, Pirs, Vitqenşteyn, Karnap, Kuayn və digərlərinin tədqiqatları sayəsində formalaşan yeni elm sahəsinin, riyazi məntiqin məxsusiliyi, onun müasir elmlər tərkibində rolu son dərəcə səciyyəvidir.

Riyazi məntiqin elmi sistem olmaq etibarilə başlıca xüsusiyyəti, riyaziyyatın və məntiqin inteqrasiyası əsasında təşəkkül tapmasıdır. Məlumdur ki, riyazi məntiq bütövlükdə riyaziyyat elminə nəzərən məxsusi mahiyyət kəsb edir.

Belə ki, riyaziyyat elmi deduktiv struktura malik olmaqla, başlıca olaraq ciddi isbat anlayışına istinad edir. Öz növbəsində riyazi nəzəriyyələrdə realizə olunan isbat metodu məntiqi xarakter daşıyır və məntiq elminin tərkibində tətbiq olunur. Bu baxımdan riyazi nəzəriyyələrdə isbat metodunun, mühakimələrin təhlili riyazi məntiqin əsas problemi olmaq etibarilə, riyazi məntiq elmi çərçivəsində nəzərdən keçirilməlidir. Bu isə öz növbəsində riyazi biliyin səhihliyini , bütövlükdə riyaziyyatm əsaslarının öyrənilməsini özündə ehtiva edir.

Bu nöqteyi-nəzərdən, riyazi məntiqin məxsusiyyətinin araşdırılması, riyaziyyatın əsaslarının, riyazi və məntiqi metodların qarşılıqlı əlaqəsinin təhlilinə əsaslanır.

Riyaziyyat və məntiq elminin qarşılıqlı əlaqəsinin təhlili isə, öz növbəsində riyaziyyat elminin tarixi inkişafının tədqiq olunmasını şərtləndirir. İlk növbədə qeyd edək ki, riyaziyyat elminin əsaslarının təkamülü prosesi tarixən 3 böhran mərhələsini özündə ehtiva edir. Bu mərhələləri xarakterizə etmək üçün riyaziyyatın tarixi inkişaf prosesinə nəzər salaq.

Məlum olduğu kimi, bir sıra tədqiqatcıların mülahizələrinə görə riyaziyyatın elmi sistem kimi formalaşması, eramızdan əvvəl VII-VI əsrlərdə təşəkkül tapmış yunan riyazi məktəbinin elmi yaradıcılığınm məhsuludur. Məhz qədim yunan elmi çərçivəsində riyaziyyat elmi, Falesin, Pifaqorun, Anaksimandrın elmi yaradıcılığı əsasında dəqiq deduktiv elmi sistem kimi formalaşmışdır.

Deduktiv əsaslarla qurulmuş yunan riyaziyyat elmi, Ekvlid həndəsəsində özünün ən yüksək zirvəsinə çatmış oldu. Ekvlid həndəsəsinin deduktiv əsaslarla qurulması ilə yanaşı, yunan riyaziyyat elmi bir sıra çətinliklərlə üzləşmiş oldu.

Yunan riyazi məktəbinin üzləşmiş olduqu ilk çətinlik, eyni məişəli həndəsi qurmaların bir sıra hallarda qarşılıqlı tənasübünün müəyyən ləşməsinin qeyri-mümkünlüyü ilə bağlıdır. Belə ki, yunan riyaziyatçılarının tədqiqatları göstərdi ki, kvadratın diaqonalının, onun tərəfinin tənasübü ilə ölçülməsi qeyri-mümkündür.

Yunan riyaziyyatının qarşılaşdığı digər bir çətinlik Zenonun və onun davamçılarının tədqiqatları ilə bağlıdır. Zenon və onun məktəbinin nümayəndələri tərəfindən belə bir nəticə müəyyən edildi ki, sonlu kəmiyyətin, sonsuz kiçik kəmiyyətlər toplusu şəklində müəyyən edilməsi qeyri-mümkündür.

Yunan riyaziyyatının qarşılaşdığı bu paradoksların həlli cəhdləri bir sıra elmi nailiyyətlərin əldə edilməsini şərtləndirmiş oldu. Məxsusi olaraq, Evklidin nisbətlər nəzəriyyəsi bu istiqamətdə atılmış mühüm addımlardan biri kimi dəyərləndirilməlidir.

Nəticə etibarilə, yunan riyaziyyatının keçirdiyi böhranın həlli yönümündə qeyd olunan bu cəhdlər, irrasional ədədlər anlayışının işlənib hazırlanmasını təmin edə bilmədi.

Riyaziyatın əsaslarını sarsıdan II böhran XIX əsrin əvvəlində meydana çıxdı. Bu böhran başlıca olaraq sonsuz kiçik kəmiyyətlərin hesabı ilə bağlıdır. Nəticə etibarilə, XIX əsrin görkəmli riyaziyyatçısı olan Koşinin səyləri nəticəsində riyaziyatın əsaslarında baş verən II böhran aradan qaldırıldı.

Koşi və digər riyaziyatçılar limitlər nəzəriyyəsini işləyib hazırlamaqla, sonsuz kiçik kəmiyyətlər hesabının qurulmasını, riyazi analizin və funksiyalar nəzəriyyəsinin hesabi əsaslarının müəyyənləşməsini təmin etmiş oldular.

Riyaziyatın əsaslarında meydana çıxan III böhran XIX əsrin sonlarında Kantor tərəfindən çoxluqlar nəzəriyyəsinin işlənib hazırlanması ilə bağlıdır. Kantorun çoxluqlar nəzəriyyəsi əsasında işləyib hazırladığı transfinit ədədlər nəzəriyyəsi, sonsuz çoxluqlar üzərində riyazi əməllərin aparılmasını təmin etməklə, həqiqi ədədlərin tam nəzəriyyəsinin qurulmasına imkan vermiş oldu.

XIX əsrin son illərində bir sıra riyaziyatçılar tərəfindən Kantorun çoxluqlar nəzəriyyəsi əsasında riyaziyatın bir sıra mühüm bölmələrinin,məxsusi olaraq, hesabın, qrup nəzəriyyəsinin aksiomatik əsasda qurulması həyata keçirilmiş oldu.

XX əsrin sonuncu onilliyində riyaziyatın aktual sahələrindən biri olan çoxluqlar nəzəriyyəsinin köklu ideyaları, əsasən Q.Kantorun tədqiqatları sayəsində formalaşmış oldu.

Kantorun yaratdığı çoxluqlar nəzəriyyəsi qısa bir müddət ərzində sürətli inkişaf yolu keçməsinə baxmayaraq, bir sıra prinsipial xarakterli çətinliklərlə üzləşmiş oldu.

Bu çətinliklər, riyaziyyatın əsaslarını, onun məntiqi özülünü ciddi sarsıntıya məruz qoymuş oldu.

Kantorun çoxluqlar nəzəriyyəsinin yaradılması ilə əlaqədar meydana çıxan çətinliklərin xarakterini aydınlaşdırmaq məqsədilə , bu nəzəriyyənin fundamental xüsusiyyətlərinin qısa icmalını verək.

§ 2. Kantorun abstrakt çoxluqlar nəzəriyyəsi

İlk öncə Kantorun çoxluqlar nəzəriyyəsinin müqəddəm konseptual məqamlarını nəzərdən keçirək.

Bu başlıca olaraq, sonsuz çoxluqların müqayisəli təhlili ilə əlaqədardır. Kantorun çoxluqlar nəzəriyyəsində sonsuz çoxluqların müqayisəli təhlili, sonsuz natural ədədlər çoxluğuna istinad edir. Bu məqsədlə, Kantor natural ədədlər çoxluğunu sonsuz hesabi çoxluq adlandırır.

Öz növbəsində sonsuz hesabi natural ədədlər çoxluğunun simvolik yazılışı aşağıdakı şəkildə təsvir olunur:

0,1,2....

Baxılan rakursdan, sonsuz hesabi natural ədədlər çoxluğu ilə qarşılıqlı birqiymətli uyğunluğa malik hər hansı bir çoxluq sonsuz hesabi çoxluq adlanır. İxtiyari çoxluğun sonsuz hesabi çoxluq olması sonsuz hesabi natural ədədlər çoxluğu ilə qarşılıqlı birqiymətli uyğunluğunun müəyyən edilməsi ilə şərtlənir.

Hər hansı sonsuz çoxluq ilə natural ədədlər çoxluğu arasında, yuxarıda verilmiş qaydada qarşılıqlı birqiymətli uyğunluğun müəyyən edilməsi proseduru, bu çoxluğun hesablanmasi kimi qəbul edilir. Bu proseduru həqiqi cəbri ədədlərin sonsuz hesabi çoxluğuna nəzərən tərbiq etmək mümkündür. Burada tam əmsallı birməchullu cəbri tənliklərin həqiqi köklərinin çoxluğu nəzərdə tutulur.

n tərtibli (n $\geq$ 1) cəbri ifadələri aşağıdakı qaydada yazmaq mümkündür:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots a_{n-1}x + a_n = 0$$

harada ki, $a_0 \neq 0$.

Baxılan halda, cəbri tənliklər çoxluğu hesablanandırsa onda, həqiqi cəbri ədədlər çoxluğu da hesablanandır. Belə ki, hesablanma prosedurunda hər bir cəbri tənliyi, onun həqiqi köklərinin kyllysy ilə əvəz etməklə, bütün həqiqi cəbri ədədləri müəyyən etmiş oluruq.

Cəbri tənliklərin hesablanması üçün baxılan qaydada istifadə olunan hesablanma proseduru rəqəmlər metodu adlanır. Bu metodun tətbiqi əsasında aşağıdakı mühüm nəticəni əldə etmiş oluruq.

Nəticə

Əgər verilmiş S çoxluğunun hər bir elementi, hər hansı qeyd olunmuş $S_0 \ldots S_{p-1}$ sonlu simvollar siyahısından götürülmüş simvollarin boş olmayan sonlu ardıcıllığı vasitəsilə birqiymətli şəkildə müəyyən edilə bilərsə, onda baxılan S çoxluğu hesabıdır.

Qeyd etmək lazımdır ki, müvafiq hesablama proseduru vasitəsilə verilmiş hər hansı sonsuz çoxluğun hesabiliyinin myəjjən edilməsinin digər bir metodu Kantorun adı ilə bağlıdır. Bu metod elmi ədəbiyyatda Kantorun diaqonal metodu kimi tanınır. Bu metodun qısa icmalını nəzərdən keçirək.

Baxılan halda, hesablama proseduru biryerli hesab funksiyaları çoxluğuna şamil edilir. Belə ki, burada natural ədədlər çoxluğunda təyin olunmuş və bu çoxluqda müvafiq qiymətlər alan birqiymətli hesab funksiyası nəzərdən keçirilir.

Tutaq ki, hər hansı bir f_0 (a), f_1(a), f_2(a) ...birqiymətli hesab funksiyalarının hesablama proseduru təyin edilmişdir. Baxılan halda, bu sıradan funksiyalardan fərqli, hər hansı birqiymətli f(a) hesab funksiyasını qura bilsək, onda f_0 (a), f_1(a), f_2(a) ...birqiymətli funksiyalar çoxluğunun bütün birqiymətli hesab funksiyalarını özündə ehtiva etməməsi aydın olur.

Bu qaydada qurulmuş müvafiq f(a) funksiyasının əyani ifadəsi məqsədilə f_0 (a), f_1(a), f_2(a) funksiyalarının qiymətlər çoxluğundan təşkil olunmuş cədvəli

nəzərdən keçirək.	0 1 2................
$f_o(a)$	$f_0(0), f_0(1), f_0(2)$......
$f_1(a)$	$f_1(0), f_1(1), f_1(2)$......
$f_o(a)$	$F_2(0), f_2(1), f_2(2)$......

f (a) funksiyasının qiymətlər ardıcıllığını, cədvəldə diaqonal üzrə yerləşmiş qiymətlərə 1 əlavə olunmaqla alınan qiymətlər ardıcıllığı şəkildə müəyyən edək;

$$f(a) = f_0(a) + 1$$

Asanlıqla göstərmək olar ki, bu funksiyanın aldığı qiymətlər ardıcıllığı $f_0(a), f_1(a), f_2(a)$ ...hesablanmasına daxil deyil. Baxılan misaldan göründüyü kimi, Kantorun diaqonal metodunun tətbiqi ,mahiyyət etibarilə baxılan funksiyalar çoxluğuna əlavə şərtlər qoymaqla, qeyri-hesabi çoxluqların yaradılmasını təmin etmiş olur .

Kantorun çoxluqlar nəzəriyyəsi məhz rəqəmlər metoduna və diaqonal metoduna istinad edir. Kantorun çoxluqlar nəzəriyyəsinin fundamental anlayışı olan çoxluq anlayışını nəzərdən keçirək.

Çoxluq dedikdə, bizim qavrayışımızın və təfəkkürümüzün fərqləndirdiyi m obyektlərinin ixtiyari butov M birləşməsi nəzərdə tutulur (burada m-lər M-in elementləri adlanırlar).

Baxılan halda m-in M-çoxluğunun elementi (və ya üzvü) olmasını və ya m-in M-ə aid olmasını bildirmək üçün $m \in M$ yazırıq. Bu halda m , M-ə aid olmadıqda $m \notin M$ yazılır.

Tərif. İxtiyari götürülmüş iki M_1 və M_2 çoxluqları, eyni elementlərə malik olduqda , üst-üstə düşmüş hesab olunurlar ($M_1 = M_2$).

Sonsuz çoxluqlar halında, məxsusi olaraq natural ədədlərin sonsuz çoxluğu aşağıdakı qaydada yazıla bilər.

$$\{ 1,2,3\ldots\ldots\ldots \}$$

Yuxarıda deyilənlər əsasında, Kantorun aşağıdakı teoremini formulə etmək olar.

Kantor teoremi.

İxtiyari M çoxluğu üçün $M < 2^m$ münasibəti doğrudur.

Kantor teoreminin başqa bir ifadəsi M çoxluqlarının UM birliyi ilə bağlıdır.

Burada UM-in elementləri M çoxluğunun elementlərinin bütün elementləri çoxluğunu nəzərdə tutur. Bu hal üçün Kantor teoremi aşağıdakı qaydada formalaşmalıdır.

Kantor teoremi

Əgər M çoxluğu, kardinal ədədləri arasında ən boyüyü olmayan çoxluqlar çoxluğudursa, onda M-in ixtiyari A elementləri üçün A < UM.

Kantorun yuxarida verilmis qajdada formalaşmış əsas müddəalarıni özündə ehtiva edən çoxluqlar nəzəriyyəsi ,1903-cü ildə gözlənilmədən ciddi sarsıntılara məruz qaldı.

Bu sarsıntıya səbəb ingilis filosofu və riyaziyatçısı B.Rassel tərəfindən kəşf olunan məşhur antinomiyanın çoxluqlar nəzəriyyəsinin əsasına endirdiyi zərbə idi. Bu paradoks aşağıdakı mühakimə qaydası üzrə aparılır:

Məlumdur ki, bəzi çoxluqlar özlərinin məxsusi element ola bildiyi halda, elə çoxluqlar var ki, bu xassəni ödəmirlər.

Buna görə belə bir sual təbiidir ki, öz-özünün elementi olmayn çoxluqlar çoxluğunu bu iki haldan hansı birinə aid etmək olar.

Yuxarıda Rasselin məlum paradoksunun qısa xülasəsini verdik. Qeyd olundu ki, Rassel paradoksu sırf riyazi deyil, həm də məntiqi xarakter daşıyır.

Elmi ədəbiyyatda Rassel paradoksu ilə eyni səciyyəli məntiqi paradokslar adlanan daha bir sıra paradokslar tərtib olundu. Bu paradoksları nəzərdən keçirək.

1899-cu ildə çoxluqlar nəzəriyyəsinin banisi Q. Kantor daha bir məntiqi paradoksu formulə etdi. Bu paradoksun məzmunu aşağıdakıdan ibarətdir.

Bütün çoxluqların çoxluğunu T ilə işarə edək. Bu halda 2^T müəyyən çoxluqların çoxluğudur. Belə ki, $2^T \subseteq T$. Kardinal ədədlər üçün < münasibətinin tərifinə əsasən $M \subseteq N$ olduqda M> N. Bu halda , $2^T > T$.

Kantorun teoreminə görə $2^T > T$.

Göründüyü kimi, baxılan situasiya da məntiqi paradoks ilə nəticələnir. Daha bir məntiqi paradoks kateqoriyasına aid edilə bilən paradoks , Burali-Forti paradoksu adlanır və 1897-ci ildə dərc olunmuşdur. Bu paradoksun məzmunu aşağıdakı qaydada müəyyənləşmişdir.

Bütün sıravi ədədlərin tam nizamlanmış w çoxluğu, özünün hər bir elementindən böyük olan sıravi ədədə malikdir.

Başqa sözlə, w çoxluğu , ixtiyari nizami ədəddən böyük nizami ədədi özündə ehtiva edir.

Digər semantik adlandırılan paradokslar fərqli xarakterə və məzmuna malik olub, riyazi elmi ədəbiyyatda dərc olunmuşdur.

Bu sinfə mənsub paradoksların bir neçəsini nəzərdən keçirək.

Semantik paradokslar içərisində Rişar paradoksu diqqəti cəlb edir. Bu paradoks bir neçə variasiyada formulə edilir.

Variasiyalardan birini nəzərdən keçirək.

Sonsuz sayda, lakin sonlu sözlər ardıcıllığı vasitəsilə ifadə oluna bilən həqiqi ədədləri nəzərdən keçirək.

Aydındır ki, bu ədədlər ancaq hesabi sayda ola bilərlər. Bu ədədlər çoxluğunun R ilə işarə edək.

R çoxluğunun elementlərinin hesablanmasını nəzərdən keçirək. B urada hər hansı bir r ədədini {0,1} intervalında elə təyin edək ki, onun onluq işarəsi n ədədinin n-ci onluq işarəsinin tsiklik olaraq yerdəyişməsi kimi tərtib olunsun.

Məsələn 1,0 rəqəminin dövri yerdəyişməsi, 2-1 rəqəminin dövri yerdəyişməsi,10rəqəmi isə 9 rəqəminin dövri yerdəyişməsi kimi təyin edilsin. Burada nəticə etibarilə belə bir mülahizəyə gəlmək olar ki, r, R çoxluğunun ixtiyari elementlərindən fərqli olub, sonlu sözlər ardıcıllığı ilə ifadə oluna bilmir.

Bu mülahizədən göründüyü kimi Rişar antinomiyası da, aşkar məntiqi paradoksa gətirib çıxarmış olur. Rişar paradoksuna analoji antinomiya, Berri tərəfindən təklif olunmuşdur.

Berri paradoksu aşağıdakı mühakimə qaydasına əsaslanır.

Belə bir ifadəni nəzərdən keçirək.

«33 hecadan az miqdarda heca ilə təyin oluna bilməyən ən kiçik natural ədəd». Bu ifadə ilə müəyən edilən natural ədədi n-lə işarə edək.

Məlumdur ki, natural ədədlərin boş olmayan hər bir çoxluğu ən kiçik elementə malikdir.

Baxılan halda 33 hecadan az sayda hecadan təşkil olunmuş ifadə vasitəsilə təyin olunan natural ədədlər çoxluğu nəzərdə tutulur. Verilən tərifə görə n-i 33 hecadan az hesablı ifadə ilə təyin etmək qeyri-mümkündür. Halbuki bu ifadə n-i təyin edir və 33 hecadan az hesabi ifadədir.

Göründüyü kimi bu mühakimə də aşkar məntiqi ziddiyyətə gətirib çıxarır.

«Yalançı» adlanan daha bir semantik paradroks müxtəlif variasiyalarda tərtib olunur. Bu paradoksun aşağıdakı versiyasını nəzərdən keçirək.

Məşhur Krit filosofu Epimenid demişdir: «Bütün kritlilər yalançıdırlar». Baxılan halda Epimenid doğru deyirsə onda Epimenid özü də yalançıdır.

Bu təqdirdə onun ifadə etdiyi fikir də yalandır. Nəticə etibarilə Epimenid ifadə etdiyi fikir ziddiyyətli xarakter alır. Bu nöqteyi-nəzərdən «Yalançı paradoksu» semantik paradoks kimi xarakterizə edilməkdədir.

§3. Qeyri -Kantor çoxluqlar nəzəriyyəsi

Rassel antinomiyası və sair antinomiyalar göstərdi ki, Kantorun naiv çoxluqlar nəzəriyyəsində əsas müddəalardan biri olan çoxluq anlayışında və ondan alınan nəticələrdə əsaslı təftiş aparmadan, riyaziyyat elminin əsaslarını təşkil edən çoxluqlar nəzəriyyəsinin möhkəmliyinə nail olmaq mümkün deyildir.

XX əsrin əvvəllərindən başlayaraq bu sahədə aparılan tədqiqatlar qeyri-naiv çoxluqlar nəzəriyyəsinin inkişafında üç əsas meyli; aksiomatik, məntiqi və intusioniet mövqelərdən çoxluqlar nəzəriyyəsinin qurulmasını aşkara çıxararaq, aksiomatik çoxluqlar nəzəriyyəsinin inkişafına səbəb oldu.

Aksiomatik çoxluqlar nəzəriyyəsinin inkişafında mühüm istiqamətlər Tsermelonun, fon Nöymanın, Bernays və Gödelin, nəhayət Kuaynın işləri ilə müəyyən olunmuşdur.

Çoxluqlar nəzəriyyəsinin əsaslandırılması məsələsi, ilk dəfə olaraq Frege tərəfindən irəli sürüldü. Məxsusi olaraq Frege bir sıra riyazi anlayışların, məxsusi olaraq, çoxluq, ədəd, funksiya anlayışlarının məntiqi anlayışlar əsasında verilməsini nəzərdə tuturdu. Bütövlükdə Frege hesab sisteminin məntiqi ifadəsini işləyib hazırlamaq yönümündə bir sıra ciddi tədqiqatları həyata keçirmiş oldu. Fregenin çoxluqlar nəzəriyyəsinin əsaslarını təftiş etmək cəhdləri, mahiyyət etibarilə riyaziyyatın əsaslarının təftişi kimi dəyərləndirilməlidir.

Elmi ədəbiyyatda riyaziyyatın əsaslarının məntiqi anlayışlara istinadən işlənməsi, məntiqilik cərəyanı kimi xarakterizə olunur. Bu yönümdə həyata keçirilən ciddi tədqiqatlar Frege ilə yanaşı Rasselin, Uaytxedin, Pirsin, Bulun adları ilə bağlıdır. Riyaziyyatın əsaslarının məntiqilik mövqeyindən şərhinə görə, bütövlükdə riyaziyyatin elmi sistem olmaq etibarilə əsaslandırılması, müvafiq məntiqi hesabın əsaslarının qurulması kimi nəzərdə tutulmalıdır.

Riyaziyyatın əsaslandırılmasına dair digər fərqli mövqe Brauer, Qeyting, Veyl və başqaları tərəfindən irəli sürülmüşdür və elmi ədəbiyyatda intusionizm adı ilə tanınır.

Riyaziyyatın əsaslarının intuisionist mövqelərdən şərhi, riyazi konstruksiyaların varlıq problemi ilə bağlıdır. İntuisionistlərin fikrincə ixtiyari riyazi konstruksiya, intuitiv olaraq verildikdə və ya intuitiv olaraq müəyyən edilmiş ünsurlər üzərində, intuitiv qavranılan əməliyyatları tətbiq etməklə qurulduqda mövcud ola bilər.

Brauerin riyaziyyatın əsaslarına dair əsas ideyasına görə, riyazi obyektlər müəyyən prinsiplər əsasında qurulmalıdır. Onun mülahizəsinə qorə, formal aksiomatik metodun istifadə etdiyi aktual sonsuzluq anlayışı, potensial çoxluq anlayışı ilə əvəz olunmalıdır.

Bu baxımdan, Brauer məntiqi prinsiplərin mütləq xarakter daşımasını məxsusi olaraq, III istisna etmək prinsipini inkar edir. Brauerin bu məlum mövqeyi əsasında, 1988-ci ildən başlayaraq, intusionist tendensiya bir sıra üstünlüklərə malik olsa da, gözlənilən nəticələrin əldə olunmasım, riyaziyyatın adekvat metodoloji əsaslarının formalaşmasını təmin edə bilmədi.

Riyaziyyatın əsaslarının məntiqi və intusionist şərhindən fərqli olaraq, görkəmli riyaziyyatçı Hilbert, formalizm adlanan mövqeyini irəli sürdü.

Hilbertin nöqteyi – nəzərincə, riyazi obyektlərin intuitiv əsasda (intuisionizm) və ya məntiqi texnologiyalar, mühakimələr şəklində (məntiqilik) şərhi əsasızdır. Hilbertin riyaziyyatın əsaslandırılmasına dair irəli sürdüyü proqrama əsasən, ixtiyari riyazi nəzəriyyə, müstəsna olaraq onun ziddiyyətsizliyinə istinad etməlidir. Onun fikrincə ixtiyari riyazi nəzəriyyə 2 mərhələdə işlənib hazırlanmalıdır.

I mərhələdə riyazi nəzəriyyə formal aksiomatik nəzəriyyə kimi işlənib hazırlanmalıdır.

II mərhələdə isə, bu qaydada formalizə olunmuş nəzəriyyənin ziddiyyətsizliyi təmin edilməlidir.

Öz növbəsində, Hilbertin irəli sürdüyü baxılan şərtlər daxilində formal aksiomatik sistemin ziddiyyətsizliyi, bu sistemin tərkibində bir-biri ilə ziddiyyət təşkil edən teoremlərin olmamasıdır.

Özü-özlüyündə formal aksiomatik nəzəriyyələrin ziddiyyətsizliyi 2 şərt əsasında həyata keçirilir.

1. Baxılan formala aksiomak nəzəriyyənin ziddiyətsizliyi elə bir modelin qurulmasını şərtləndirir ki, onun bütün aksiomaları həqiqi olsun.

2. Baxılan modelə daxil olan bütün terminlər hər hansı digər bir nəzəriyyə vasitəsilə interpretasiya oluna bilsinlər.

Hilbertin irəli sürdüyü bu şərtlər daxilində formal aksiomatik sistemin ziddiyyətsizliyi, bu sistemin tərkibində bir-birinə zidd teoremlərin olmaması ilə şərtləndirilir.

Bu isə, öz növbəsində teoremlərin ziddiyyətsizliyini aşkar edən prosedurların, isbat nəzəriyyəsinin işlənib hazırlanması və icrası ilə bağlıdır.

Hilbertə görə isbat nəzəriyyəsi, finit metodları adlanan intuitiv metodlara əsaslanmalıdır.

Hilbertin bu təklifi , ilk növbədə ziddiyyətsizliyin isbatında aktual sonsuzluğun sərf nəzər edilməsini nəzərdə tutur. Bu isə öz növbəsində hər hansı formal aksiomatik sistemin ziddiyyətsizliyinin limit metodlarla əldə olunmasının mümkünlüyünü ifadə edir.

Bütövlükdə riyaziyyatn əsaslarına dair Hilbertin irəli sürdüyü müddəalar, riyaziyyat elminin formal aksiomatizasiya metodu əsasında qurulmasını nəzərdə tutur.

Riyaziyyatın əsaslarına dair formalist və intusionist mövqelər arasındakı diskussiya nəticə etibarilə, bəzi qarşılıqlı güzəştlərin qəbul edilməsini şərtləndirdi. Belə ki, ümumən intusionist mövqein tərəfdarları, Hilbertin formal aksiomatik metodunu inkar etməyərək, yalnız bir şərti irəli sürürlər.

Bu şərt intuitiv əsası olmayan, yalnız ziddiyyətsizlik prinsipi əsasında formalaşan müddəaların real məzmuna malik olmasının inkarını nəzərdə tutur.

Müasir dövrdə Riyaziyyatın elmi sistem olmaq etibarilə inkişafı, tam formalizə olunmuş aksiomatik sistemlərin işlənib hazırlanması ilə bağlıdır. Bu isə öz növbəsində riyazi-məntiq nəzəriyyəsinin formalaşması və inkişafını nəzərdə tutur.

Belə ki, məlum olduğu kimi, yarım formal aksiomatik sistemlərdə məntiqi mühakimələrlə yanaşı təbii dilin anlayışlarından da istifadə edilir.

Tam formalizə edilmiş aksiomatik sistemlərdə riyazi məntiqin instrumental aparatından istifadə etməklə, bu çatışmamazlıq aradan götürülür. Baxılan halda riyazi simvolika məntiqi simvolika ilə üzvü vəhdət halında birləşir.

Bull, Pirs, Freqe, Uaytxed, Rassel və digərləri tərəfindən yaradılmış loqistik sistemlər, tam formalizə olunmuş məntiqi sistemlər kimi təşəkkül taparaq, qurulma qaydaları ilə mühakimə qaydalarının sinkretik vəhdəti kimi çıxış edirlər. Burada, bu qaydada yaradılmış formal aksiomatik sistemlərdə, formalizə olunmuş sistemin və ondan alınan nəticələrin təsviri, digər metanəzəriyyədə ifadə edilmiş olur. Bu halda formal sistemdəki dilə analoji olaraq, metadildən istifadə olunur.

Baxılan metadilin çərçivəsində formal sistemin riyazi metodlarla təhlili metariyaziyat və ya isbat nəzəriyyəsi adlanır.

Müvafiq anlayışlarla manipulyasiya etməklə, biz mülahizələr hesabı və predikatlar hesabını əldə etmiş oluruq. Bütövlükdə Riyazi məntiq, mülahizələr hesabına və predikatlar hesabına istinadən riyazi nəzəriyyələrin işlənib hazırlanmasını təmin etmiş olur.

Əvvəlki paraqrafda göstərildiyi kimi, Kantorun yaratdığı çoxluqlar nəzəriyyəsi qısa bir müddət ərzində sürətli inkişaf yolu keçməsinə baxmayaraq, məntiqi və semantik paradokslar ilə əlaqədar, bir sıra prinsipial xarakterli çətinliklərlə üzləşmiş oldu. Bu çətinliklərin aradan qaldirilmasi cəhdləri, riyaziyyatçılar tərəfindən qeyri-naiv çoxluqlar nəzəriyyəsinin aksiomatik, məntiqi və intusionist mövqelərdən qurulmasına ,aksiomatik çoxluqlar nəzəriyyəsinin inkişafına səbəb oldu. Aksiomatik çoxluqlar nəzəriyyəsinin inkişafında mühüm istiqamətlər Tsermelonun, fon Nöymanın, Bernays və Gödelin, nəhayət Kuaynın işləri ilə müəyyən olunmuşdur. Aksiomatik çoxluqlar nəzəriyyəsinin araşdırılmasına biz Tsermelo sisteminin qurulması ilə başlayacaqiq.

Bu proqram qarşıya qoyduğumuz məqsədə, aksiomatik yolla qeyri-Kantor (qeyri naiv) çoxluqlar nəzəriyyəsinin qurulmasına tamamilə cavab verir.

HƏCM AKSIOMU VƏ INDIVIDLƏR

Bildiyiniz kimi hər bir aksiomatik nəzəriyyə müəyyən bazis nəzəriyyəyə, baxılan nəzəriyyə üçün spesifik olan bir neçə yeni aksiomaların əlavə edilməsi yolu ilə qurulur. Bizim baxdığımız hal üçün I tərtib funksional hesabı bazisi nəzəriyyə kimi qəbul edirik. I tərtib funksional hesabın məntiqi əməliyyatları olan inkar, konyuksiya, dizyunksiya, implikasiya, ekvivalentlik, ümumilik kvantoru, varlıq kvantoru, aşağıdakı simvollarla işarə edilir.

“$\sim$”, “ $\propto$ ”, “V”, “$\supset$”, “ $\equiv$ ”, “(A)”, “E”

Mötərizə daxilində kvantorlardan sonra gələn nöqtə, bağlı, yəni kvantorun təsir oblastına düşən dəyişəni əvəz edir. Baxılan nəzəriyyənin ifadələri barəsində mühakimələr yürüdülməsində istifadə olunan dil metadil adanır. Bu nəzəriyyənin ifadə olunduğu dil isə predmet dili adlanır. Çox vaxt metadildə baxılan nəzəriyyənin müəyyən ifadəsinin adından istifadə etmək lazım gəldikdə metadilin öz işarələrindən istifadə edəcəyik.

Bazis nəzəriyyədə individ dəyişənlərinin sonsuz siyahısından və vergül, mötərizə kimi köməkçi simvollardan əlavə aidiyyat münasibətini ifadə edən iki yerli $\in$ predikat simvolu daxil edilir. Belə ki, $x \in y$ ifadəsi **x**, y-ə aiddir və yaxud **x**, y-in üzvüdür kimi oxunur. ~ $x \in y$ ifadəsini şərti olaraq $x \notin y$ kimi işarə edəcəyik. İxtiyari - $\in$ - şəkilli ifadələr harada ki, nöqtə və tire dəyişənləri əvəz edir, düzgün qurulmuş elə atomar formulalardır ki, onların əsasında məntiqi bağlılar və kvantorlar vasitə ilə bütün düzgün qurulmuş formulalar alınır. Qəbul edirik ki, fərz olunan intepretasiyada individ dəyişənlərinin oblastı, baxılan mühakimələr universumunda predmetlərin düzgün təyin edilmiş boş olmayan çoxluğudur. Heç olmazsa bir predmetə üzv olan predmetlər sinfinin, yəni aidiyyat münasibətinin təyin oblastının, elementlərdən ibarət olduğunu şərtləşək. Bu halda aidiyyat münasibətinin qiymətlər oblastının, yəni bir üzv kimi heç olmazsa bir predmeti özündə saxlayan predmetlər sinfinin, çoxluqlardan təşkil olunduğunu qəbul edəcəyik. Çoxluq olmayan elmentləri individ adlandıracağıq. Kuayn belə bir təklif irəli sürmüşdür ki, individlərin özü də, yeganə elementi yalnız özü olan xüsusi növ bir çoxluq kimi qəbul edilsin. Biz heç bir üzvü olmayan yeganə bir predmetdən başqa bütün qalan predmetləri çoxluq hesab edəcəyik. Eyni zamanda bizim sistemdə element olmayan obyektlərin varlığına yol verilmir. Beləliklə, bütün predmetlər elementdirlər və eyni zamanda bütün predmetlər yeganə bir predmeti çıxmaq şərtilə çoxluqdurlar.

Məqsədə uyğundur ki, iki predmet yalnız o vaxt bir-birinə bərabər olsunlar ki, onlar eyni üzvlərə malikdirlər və eyni bir çoxluğun üzvüdürlər. Bu iki şərtdən ixtiyari birini tərif qəbul edib, digərini aksiom şəklində verə bilərik. Bu \nöqteyi nəzərdən çoxluq terminini meydanın bütün üzvlərinə aid edirik. Heç bir üzvü olmayan yeganə predmeti isə boş çoxluq adlandıracağıq. Bir daha qeyd edək ki, bizim sistemdə yeganə spesifik, müəyyən olunmayan $\in$ predikat simvolu vardır.

Belə bir tərif qəbul edək:

Tərif 1:

Əgər $x \in y$ olan bütün x-lər üçün $x \in z$ olarsa, onda deyirik ki, - y, z-in alt çoxluğudur.

Əgər əlavə olaraq belə bir ω varsa ki, $\omega \in z$ ancaq $\omega \in y$ onda y, z-ın məxsusi alt çoxluğu adlanır.

Uyğun simvollar belə yazılır: $y \subseteq z$, $y \subset z$

Tərif I-dən aşağıdakı teoremi alırıq.

Teorem: Hər bir çoxluq özünün alt çoxluğudur.

$(x \subseteq x)$; $x \subseteq y$ və $y \subset z$ isə, onda $x \subseteq z$

Başqa sözlə $\subseteq$ münasibəti refleksiv və tranzitivdir. Eyni zamanda $\subset$ qeyri refleksiv, qeyri simmetrik və tranzitivdir. Anlaşılmamazlıq baş verməməsi üçün qeyd etmək lazımdır ki, ilkin münasibət olan $\in$ bir predmetin digərini bir üzv kimi özündə saxladığını ifadə etdiyi halda, bündan fərqli olaraq, törəmə münasibət olan $\subseteq$ bir predmetin digərinin bir hissəsi olduğunu göstərir.

Çoxluq anlayışı təbirincə bu faktı belə başa düşmək lazımdır ki, hər bir çoxluq özünü və alt çoxluqlarını özünə daxil edir, Lakin nə özünü, nə də alt çoxluqlarını özündə saxlamır. Qeyd etmişdik ki, bərabərlik münasibəti iki yolla təyin oluna bilər. Bu iki halı nəzərdən keçirək.

Tərif IIa: Onda və yalnız onda **x=y** olar ki, bütün **z**-lər üçün $\mathbf{x} \in \mathbf{z}$ isə onda $\mathbf{y} \in \mathbf{z}$ olar və əksinə $\mathbf{y} \in \mathbf{z}$ isə onda $\mathbf{x} \in \mathbf{z}$ olar. Yəni o vaxt **x=y** olar ki, **x** və **y**-dən ixtiyari birini özündə saxlayan çoxluq, digərini də özündə saxlasın. **X,y** bərabər deyildirlərsə, onda fərqlidirlər deyəcəyik, və belə işarə edəcəyik **x≠y.** Simvolik yazılışda

$$x = y = (Az)\ (x \in z \equiv y \in z)$$

Tərif II b: O vaxt və yalnız o vaxt **x=y** deyirik ki, eyni zamanda $\mathbf{x} \subseteq \mathbf{y}$ və $\mathbf{y} \leq \mathbf{x}$ olsun. Başqa sözlə **x**, o vaxt **y**-ə bərabər olar ki, bu iki çoxluğun hər hansı birinin hissəsi eyni zamada o birinin də hissəsi olsun.

Əks təqdirdə **x** və **y** fərqlidirlər deyəcəyik.

Simvolik yazılışda

$$x = y = (A\,z)\ (z \in x \equiv z \in y)$$

Hər iki tərifdən belə nəticəyə gəlmək olar ki, bərabərlik münasibəti refleksiv, simmetrik və tranzitivdir və eyni zamanda $\in$–nin sağ arqumentinə görə yerdəyişmə xassəsinə malikdir. Yəni **z**$\in$**x** və **x=y** isə, onlardan alırıq ki, **z**$\in$**y**. Lakin II b-də müəyyən edilmiş ekstensionallıq xassəsi II a-dan alına bilməz. Eləcə də sol tərəf yerdəyişməsi (**x**$\in$**z** və **x=y** alınır ki, **y**$\in$**z**) II b-dən alına bilməz. Odur ki, IIa və IIb təriflərinə əlavə olaraq iki variantlı xüsusi bir aksiom daxil edirik.

Aksiom I a: x$\subseteq$**y** və **y**$\subseteq$**x**-dən alırıq ki, **x=y**. Yəni eyni hissələri özlərində saxlayan çoxluqlar bir-birinə bərabərdirlər.

Simvolik yazılışda

$$(Ax)\ (Ay)\ [(Az)\ (z \in x \equiv z \in y) \supset x = y]$$

Aksiom I b: x$\in$**z** və **x=y**-dən alırıq ki, **y**$\in$**z**. Başqa sözlə, bərabər çoxluqlar eyni bir çoxluğun üzvüdürlər. Simvolik yazılışda

$$(Ax)(Ay)\ [x = y \supset (Az)\ (x \in z \supset y \in z)\ ]$$

Biz IIa-nı bərabərlik üçün tərif qəbul edib, uyğun Ia aksiomunu ona qoşsaq və ya IIb tərifinə Ib aksiomunu əlavə etsək, alınan hər iki struktur eyni güclü olacaq. Ona görə də gələcəkdə variantları qeyd etmədən, ancaq bərabərlik tərifi və ekstensionallıq aksiomu kəlmələrini işlədəcəyik.

II tərifi və I aksiomuna əsasən, hər bir çoxluq öz elementləri ilə müəyyən olunduğuna görə, a, b, c... üzvlərini özündə saxlayan çoxluq {a, b, c...} işarə edilir.

Tərif III: Ümumi üzvləri olmayan iki çoxlq kəsişməyən adlanır.

S çoxluğunun üzvləri cüt-cüt kəsişmirlərsə, **S** parçalanmış və ya dizyunkt çoxluq adlanır. Tsermelo sisteminin II aksiomu iki müxtəlif çoxluğun birləşərək bir çoxluq əmələ gətirməsini ifadə edir.

Cüt aksiomu: İxtiyari iki müxtəlif a və b çoxluğu üçün a və b-ni dəqiq olaraq özündə saxlayan (yəni yalnız və yalnız a və b üzvlərinə malik olan) bir çoxluq mövcuddur. Simvolik yazılışda

$$(Aa)\ (Ab)\{a \neq b \supset (Ep)(Ax)[x \in p \equiv (x = aVx = b)\ ]\}$$

P çoxluğu a və b-nin cütü adlanır və {a, b} kimi işarə olunur.

Cüt-cüt müxtəlif a, b, c... çoxluqlarından cüt aksiomunun təkrar tətbiqi vasitəsilə, müxtəlif mürəkkəb çoxluqlar ala bilərik. Lakin bu qayda ilə qurulmuş çoxluqlar dəqiq olaraq iki üzvə malikdirlər. Daha ümumi şəkilli çoxluq əldə etmək məqsədilə cəm-çoxluq aksiomunu daxil edək.

Cəm-çoxluq aksiomu: Heç olmazsa bir üzvü olan ixtiyari a çoxluğu üçün elə tamamilə müəyyən çoxluq mövcuddur ki, onun üzvləri dəqiq olaraq **a** çoxluğunun üzvlərinin üzvlərindən ibarətdir.

Belə çoxluq **a** çoxluğunun cəm-çoxluğu (birləşməsi) adlanır və ya ilə işarə olunur. Simvolik yazılışda

$$(Aa)\left\{(Eb)b \in a \supset (Ey)(Ax)\left[x \in y\right] \equiv (Ez)(x \in z \propto z \in 0)\right\}$$

Bildiyiniz kimi, Kantor daha güclü çoxluq əldə etmək məqsədilə qüvvətə yüksəltmə əməliyyatından istifadə etmişdi. Böyük güclü çoxluqların qurulması üçün verilmiş aşağıdakı aksiomda da, məhz bu prinsipdən istifadə edilir.

Qüvvət çoxluq aksiomu: İxtiyari a çoxluğu üçün elə bir tamam müəyyən olunmuş çoxluq var ki, dəqiq olaraq a çoxluğunun bütün alt çoxluqları onun üzvləridirlər. Simvolik yazılışda

$$(Aa)\ (Ey)(Ax)(x \in y \equiv x \subseteq a)$$

a çoxluğunun bütün alt çoxluqları çoxluğu a çoxluüğunun qüvvət çoxluğu adlanır və Ca simvolu ilə işarə olunur. Qüvvət-çoxluq aksiomunun geniş çoxluqlar qurulmasında böyük əhəmiyyəti olduğuna baxmayaraq, hal-hazırkı mərhələdə bu aksiom öz rolunu tam oynaya bilmir. Bu ondan irəli gəlir ki, alt çoxluqların varlığı və qurulması problemləri hələlik həll edilməmişdir. Buradan da veritlmiş çoxluğun alt çoxluğunun qurulmasına imkan verə bilən aşağıdakı aksiomun zəruriliyi meydana çıxır:

Ayirma aksiomu: İxtiyari **a** çoxluğu və bu çoxluğun bütün **x** üzvləri üçün mənası olan ixtiyari, bir yerli predikatı üçün, elə tamam müəyyən olunmuş çoxluq mövcuddur ki, bu çoxluq **a** çoxluğunun dəqiq olaraq β predikatını ödəyən bütün üzvlərini özündə saxlayır.

Aydındır ki, bu çoxluq a çoxluğunun alt çoxluğudur və a_β simvolu ilə işarə edilir. Aksiomun simvolik yazılışı belədir:

$$(Aa)(Ey)(Ax)\left[(x \in y) \equiv (x \in a \propto \beta(x))\right]$$

Burada **β**, x-i özündə yeganə azad dəyişən kimi saxlayır. Biz Skolemin (Kuaynın) belə bir ideyasını qəbul edrik ki, hər bir müəyyən olunmuş predikat elementar düzgün qurulmuş formula kimi başa düşülür. I-Y aksiomlarından aşağıdakı nəticələri alırıq:

Tərif: Heç bir üzvü olmayan II çoxluğuna boş çoxluq deyilir və 0 simvolu ilə işarə olunur.

Teorem 1: Dəqiq olaraq yeganə bir çoxluq mövcuddur.

Teorem 2: İxtiyari b çoxluğu üçün, b-ni özündə saxlayan (yeganə üzv kimi) tamam müəyyən olunmuş b çoxluğu var. Bu çoxluq b çoxluğunun vahid çoxluğu adlanır.

Teorem 3: İxtiyari iki a və b çoxluğu üçün eyni zamanda hər iki çoxluğa daxil olan üzvlərdən ibarət olan çoxluq var və bu 2 çoxluğun kəsişməsi adlanır.

Teorem 4: İxtiyari parçalanmış t çoxluğu üçün tamam müəyyən olunmuş elə bir çoxluq var ki, onun üzvləri dəqiq olaraq t-nin hər bir üzvündən yeganə bir üzvü özündə saxlayn çoxluqlardan ibarətdir. Bu çoxluq t-nin üzvlərinin düz hasili adlanır və Pt ilə işarə olunur. Əgər t çoxlugu 0-ı özündə saxlayırsa, onda Pt=0.

SEÇKI AKSIOMU

Ayırma aksiomun vasitəsilə, biz verilmiş ixtiyari çoxluğun, hər hansı müəyyən olunmuş predikatla xarakterizə olunan alt çoxluğunu qurmaq imkanını əldə etdik. Bu zaman təbiidir ki, digər üsulla alt çoxluqların alınmasının mümkünlüyü və lüzumu məsələlərini araşdırmalı olduq. Boş olmayan çoxluqların parçalanmış t çoxluğunu götürək. Teorem 4-ə görə Pt dekart hasili vardır. Bir çoxluq kimi Pt-nin üzvləri Ut çoxluğunun elə alt çoxluqlarıdır ki, onların hər birinin t çoxluğunun ixtiyari biz üzvü ilə kəsişməsi vahid çoxluq verir. Bilirik ki, (teorem 4-ə əsasən) $0 \in t$ olduqda Pt=0 mülahizəsi aşağıdakı mühakimə qaydasına əsaslanır.

Aydındır ki, t çoxlğunun hər bir üzvü heç olmazsa bir üzvə malikdir və hər bir $y \in t$-dən bir üzv ayırmaq olar. Əgər bütün bu cür götürülmüş üzvlərdən ibarət bir c çoxluğu varsa, onda c, Ut-nin alt çoxluğudur və Pt-nin üzvü olmaq şərtini ödəyir. Beləliklə, $c \in Pt$ və Pt=0 olduğu isbat olunur. Ümumiyyətlə, bu üsul ayırma aksiomuna uyğun deyildir. Çünki c alt çoxluğunu müəyyən edə bilən heç bir şərt göstərilməmişdir. Bu halda seçki aksiomunun zəruriliyi meydana çıxır.

Seçki aksiomu: Əgər t boş olmayan çoxluqların parçalanmış sinfindirsə, onda Pt dekart hasili boş çoxluq deyil. Başqa sözlə, Ut-nin heç olmazsa bir elə alt çoxluğu var ki, onun t çoxluğunun ixtiyari bir üzvü ilə kəsişməsi vahid çoxluq verir. Ut çoxluğunun hər bir belə U alt çoxluğuna t çoxluğunun nümayəndələr çoxluğu deyilir. Aydındır ki, nümayəndələr çoxluğu ümumiyyətlə yeganə deyil. Funksiya anlayışını (y,x) nizamlanmış cütlər çoxluğu kimi başa düşsək və y=(x) kimi işarə etsək, onda bu aksiomu belə ifadə etmək olar.

Boş olmayan çoxluqların ixtiyari parçalanmış S çoxluğu üçün elə f(S) funksiyası var ki, onun təyin oblastı S çoxluğudur və f(S), S-in üzvüdür.

Hər bir belə funksiya S-in nümayəndələr çoxluğunu təyin edir. Bu aksiomun adının ifadə etdiyi seçki ideyasını Tsermelo belə izah edir:

Verilmiş çoxluğunun M, L, K... üzvlərindən hər birindən yeganə bir element seçərək, bir çoxluq təşkil etmək olar.

Bu sahədə alınan mühüm nəticələrdən biri 1938-1939-cu illərdə Gedel tərəfindən seçki aksiomunun ziddiyyətsizliyinin isbat olunmasıdır. Seçki aksiomunun kontinium-hipoteza ilə əlaqəsinə gəldikdə isə, əvvəlcə kontinium-hipoteza ilə əlaqədar bir sıra nəzəri materialın verilməsi lazım gəlir.

KONTINIUM-HIPOTEZA

Hər bir A çoxluğuna qarşı bu çoxluğun gücü adlanan bir (A) obyekti qarşıya qoyaq. Belə ki, (A)-(B) o vaxt və yalnız o vaxt ki, A çoxluğunun B çoxluğu üzərinə qarşılıqlı birqiymətli inikası mövcud olsun. Xüsusi halda, uyğun olaraq, boş çoxluğunun gücü sifətilə 0 ədədini, II elementindən ibarət {b......a} çoxluğu üçün isə II ədədini qəbul edirik. Çoxluqların gücü kardinal ədədlər yaxud kardinallar adlanır. Bütün natural ədədlər çoxluğunun gücü N_0 (alef-sıfır) simvolu ilə, bütün həqiqi ədədlər çoxluğunun gücü isə N_0 (alef) simvolu ilə işarə olunur. N_0 gücü kontinium gücü adlanır, N_0 güclü çoxluq hesabi çoxluq adlanır. Tutaq ki, a=(A), b=(B). Qəbul edək ki, o vaxt a=b olar ki, A çoxluğunun B çoxluğuna birqiymətli inikası mövcud olsun. Aydındır ki, bu konstruksiya (qeyri formal mənada) kardinal ədədlər arasındakı münaisbəti ifadə edir və **A, B** çoxluqlarından asılı deyildir.

Teorem I: Kardinal ədədlərin ixtiyari çoxluğunda $\le$ münasibəti xətti nizamdır. $\le$ münasibətinin strukturundan aydın olur ki, bu münasibət üçün refleksivlik, tranzitivlik ödənir. $\le$ münasibətinin antisimmetrikliyi isə Kantor-Bernşteynin aşağıdakı teoremindən alınır.

Teorem 2: Əgər αA çoxluğunun öz alt çoxluğu $\alpha(A)$ ya birqiymətli qarşılıqlı inikasıdırsa, onda ixtiyari $C \subseteq (A \setminus \alpha(A))$ çoxluğu üçün A çoxluğunun $\alpha^{*}(A) = C \cup \alpha(A)$ çoxluğuna qarşılıqlı birqiymətli inikası vardır. Fərz edək ki, a≤b və b≤a. Bu o deməkdir ki, elə qarşılıqlı birqiymətli inikasi var ki,

$$\alpha \ ; \quad A \to \alpha(A), \quad \alpha(A) \le B$$

$$\beta \ ; \quad B \to \beta(B), \quad \beta(B) \le A$$

$\gamma = \alpha\beta$ A çoxluğunun $\gamma(A) = \beta(\alpha(A))$ çoxluğu üzərinə qarşılıqlı birrqiymətli inikası olacaq. Teorem 2-yə görə ixtiyari $C \subset (A \setminus \gamma(A))$ çoxluğu üçün A çoxluğunun $C \cup \alpha(A))$ çoxluğu üzərinə qarşılıqlı birqiymətli γ inikası var.

C çoxluğunu $C = \beta(B \setminus \gamma(A)$ kimi quraq. Alırıq ki, $\gamma^*(A) = \beta(B)$..

Nəticədə alırıq ki, $\gamma^* \beta^{-1}$ A-nın B-ə qarşılıqlı birqiymətli inikasıdır və a=ς.

Bununla da münasibətinin qeyri simmetrikliyi müəyyən olunur. Nəhayət ixtiyari a, ς kardinal ədədlərinin müqayisə edilə bilən olduqlarından alırıq ki, ≤ münasibəti xətti nizamdır. Əgər A çoxluğunu B çoxluğuna qarşılıqlı birqiymətli olaraq nizamı saxlayan, yəni a≤b-dən $a\,\Im \le \beta\,\Im$ (a, b $\in$ A) alınan, inikası varsa, onda xətti nizamlanmış A çoxluğu, xətti nizamlanmış B çoxluğuna izomorf adlanır. Hər bir xətti nizmlanmış A çoxluğuna nizam tipli adlanan bir O(A) obyekti qarşıya qoyaq. Belə ki, O(A)=O(B) yalnız və yalnız o vaxt ki, A, B xətti nizamlanmış çoxluqları izomorf olsunlar. Lakin nizam tiplərinin bərabərliyi O(A)=O(B) çoxluqların güclərinin bərabərliyinə səbəb olduğuna görə hər bir nizam tipinə müəyyən bir güc qarşıya qoymaq olar ki, bu da həmin nizam tipinin gücü adlanır. N dənə elementdən ibarət (a_1.........a_n) çoxluğunda n! sayda üsulla xətti nizamlanma aparmaq olar. Bu halda əldə edəcəyimiz bütün xətti nizamlanmış çoxluqlar N-lə işarə edilən eyni bir nizam tipinə malik olacaqlar. Boş çoxluğun nizam tipi O-dır. Artmaya görə xətti nizamlanmış natural ədədlər çoxluğunun nizam tipi ω ilə, ikili xətti nizamlanmış $<N,>^{-1}>$ çoxluğunun nizam tipi isə ω^* ilə işarə edilir. Tam nizamlanmış A çoxluğunun nizam tipi nizam və ya transfivit ədəd, yaxud sadəcə olaraq ordinal adlanır. Buradan nəticə olaraq alınır ki, II, ω tipləri nizam ədədləri olduğu halda ω^* tipi nizam ədədi deyil. Əgər $<A,\leq>$ ixtiyari tam nizamlanmış və a onun hər hansı bir elementidirsə, onda A çoxluğunun a-dan ciddi kiçik elementlərinin $Pa =< \{x / x \in A, x,a\} \leq >$ tam nizamlanmış alt çoxluğu, **A** çoxluğunun **a**-ya uyğun parçası adlanır.

lemma: Əgər $\Im$ tam nizamlanmış A çoxluğunun özünün B alt çoxluğuna izomorf inikasıdırsa, onda ixtiyari $a \in A$ elementi üçün $\Im(a) \geq 0$ olur.

NƏTİCƏ: Tam nizamlanmış çoxluq öz parçasına izomorf ola bilməz.

Tutaq ki, $\alpha = 0(A)$, $\beta = 0(B)$ nizam ədədləri verilmişdir. Qoy A çoxluğu B çoxluğunun hər hansı bir parçasına izomorf olduqda $\alpha < \beta$ olsun. $< \cup =$-dən yeni bir $\leq$ münasibəti alırıq. Nizam ədədindən ciddi kiçik olan nizam ədədləri çoxluğunu $w(\alpha)$ ilə işarə edək.

Teorema 3: $w(\alpha), \leq >$ çoxluğu nizam tipi α olan tam nizamlanmış çoxluqdur. Beləliklə α tipli ixtiyari tam nizamlanmış A çoxluğu $w(\alpha)$ nizam ədədləri çoxluğuna izomorfdur. Belə ki, A çoxluğunun elementlərini $w(\alpha)$-dən götürülmüş ədədlərlə elə nömrələmək olar ki, $A = \{a\xi / \zeta < \alpha\}$ haradakı ξ indeksi A çoxluğunun a_ζ elementinə qarşı qoyulan Pa_ξ parçasının tipidir.

Teorema 4: İxtiyari iki α, β nizam ədədləri həmişə müqayisə oluna biləndir.

Tam nizamlanma aksiomundan və teorem 4-dən alırıq ki, ixtiyari iki, $a\zeta$, ξ kardinal ədədləri də müqayisə oluna biləndirlər.

Beləliklə, teorem I tamamilə isbat olunur. Əgər $a\zeta$ kardinal ədədi $a\zeta$ <N0 olarsa, sonlu $a\zeta$ >N0 isə sonsuz və ya alef adlanır. Hər bir nizam ədədi onun gücünün sonlu və ya sonsuz olmasına uyğun olaraq sonlu və ya sonsuz ola bilər.

Teorem 5: İxtiyari boş olmayan nizami ədədlər çoxluğunun ən kiçik ədədi var.Başqa sözlə, ixtiyari nizam ədədlərinin ixtiyari çoxluğu tam nizamlanmışdır.

Nəticə: Kardinal ədədlərin ixtiyari A çoxluğu tam nizamlanmışdır.

Kantorun aşağıdakı mühüm teoremini verək.

Kantor teoremi: İxtyiari A çoxluğunun bütün S (A) alt çoxluqları çoxluğunun gücü A çoxluğunun gücündən ciddi olaraq böyükdür.

Nəticə: İxtiyari $\mathbf{a}_{\zeta}$ kardinalı üçün (α ordinatı) elə ən kiçik ξ kardinalı (α ordinatı) var ki, $\mathbf{a}_{\zeta} < \xi$ ($\alpha < \beta$).

Bütün bu hazırlıqdan sonra kantinum-hipotezanı aşağıdakı üç şəkildə ifadə edə bilərik.

I. Əgər **C** transfinit kardinal ədədidirsə, onda heç bir d kardinal ədədi $c < d < 2^c$ münasibətini ödəmir.

II. Əgər **a** alefdirsə, onda heç bird gücü $c < d < 2^c$ münasibətini ödəmir.

III. İxtiyari α nizam ədədi üçün $2^{N_0} = N_{a+1}$.

1946-cı ildə Sertinski göstərmişdir ki, I hipotezi seçki aksiomunun zəruriliyinə səbəb olur. Lindenbaum-Tarski də belə bir fərziyə irəli sürmüşdürlər ki, II və III ekvivalentdirlər və onların ixtiyarı birinə seçki aksiomunu əlavə etsək, I-yə ekvivalent hipotezanı alarıq.

UNIVERSUM AKSIOMU

Bizim qurduğumuz sistemin çərçivəsi daxilində verdiyimiz I-VI aksiomları ancaq sonlu çoxluqların qurulmasına imkan verir. Dolğun aksiomatik sistemin qurulması üçün sonsuz çoxluqlar qurmaq imkanı verən aksiomun verilməsinin mühüm əhəmiyyəti vardır. Z sistemində belə bir sonsuzluq aksiomunu Tsermelo vermişdir. Bəzi aksiomatik nəzəriyyələrdə sonsuzluq aksiomu əvəzinə daha güclü olan universum aksiomu qəbul edilir. Bu yolun ən qiymətli cəhəti ondadır ki, bizi çoxluq olmayan siniflərə rast gəlmək məcburiyyətindən azad edir. Belə bir tərif verək.

Tərif: Əgər hər hansı biri U çoxluğu aşağıdakı şərtləri ödəyirsə, onda bu çoxluğa universal çoxluğ deyilir.

(I) Əgər $X \in U$ onda $X \subseteq U$

(II) Əgər $X \in U$ onda $B(x) \in U$

Burda $B(x) = \{x / A \subseteq X\}$

(III) Əgər $X, Y \in U$ onda $\{x, Y\} \in U$

Burada $\{x, Y\} = \{\{X\}, \{X, Y\}\}$

(IV) Əgər $F = (F_i) i \in J$ harada ki, $F_i \in U$ və $J \in U$ onda $UF \in U$

Universum aksiomu belə ifadə olunur.

Universum aksiomu: Hər bir çoxluq müəyyən bir universal çoxluğun elementidir.

Qöründüyü kimi bu aksiom antinomiyaya gətirib çıxaran halları ləğv edir.

Bu aksiomun imkanlarını kifayət dərəcədə dərk etmək məqsədilə, onun natural ədədlərin təyin olunmasında və natural ədədlər çoxluğunun qurulmasında necə istifadə olunduğuna nəzər salaq.

U universal çoxluğudur və $\varnothing \in U$.

Müvqqəti olaraq $X \in \vee$ olduqda $\varnothing \in \vee$ və $X \vee \{X\} \in \vee$ olarsa, ona U çoxluğunun Y alt çoxluğunu ədədi çoxluq adlandırırıq. Məsələn U çoxluğu özü ədədi çoxluqdur.

İxtiyari $X \in \vee$ onda $\{X\} \in U$ onda $\{X, \{X\}\} \in U$ və $X \cup \{X\} \in U$ lazım olan nəticəni alarıq.

Tutaq ki, N, U-nun bütün ədədi alt çoxluqlarının kəsişməsidir. Onda **N** ədədi çoxluqdur.

$X \cup \{X\} \in U$-nı **x**-lə işarə edəcəyik. N-in aşağıdakı xassələrini qeyd edək.

I. $\varnothing \in N$.

II. Əgər $x \in N$ onda $x' \in N$

III. **N** çoxluğunun I, II bəndləri ödəyən hər bir alt çoxluğu **N** ilə üst-üstə düşür.

III bənd sadəcə olaraq induksiya prinsipin ifadə edir.

İndi natural ədədləri N-in elementləri kimi aşağıdakı qayda ilə təyin edək.

$0=\varnothing$ $\quad 1=\{0\}$ $\quad 2=\{0,1\}$ $\quad 3=\{0,1,2\}$

Sıfırdan fərqli natural ədədi müsbət ədəd adlandırırıq. Elə siniflərə sonlu deyəcəyik ki, o natural ədədlə indekslənə bilsin. Əks halda isə sinif sonsuzdur deyəcəyik. Bu tərifin köməyi ilə natural ədədlərin sonsuzluğunu göstərək. Əvvəlcə aşağıdakı faktları qeyd edək.

a) Əgər $n \in N$ isə, onda $n' \not\subset 0$. Doğrudan da $n' = n \cup \{n\} \neq 0$ harda ki, 0=(0)

b) Əgər m, n və $m \in n$ isə, onda $m \in n$.

Aydındır ki, $n=0$ olduqda bu şərt ödənmir. Belə ki, bu halda $m \notin n$ bütün $m \in n$-lər üçün.

Tutaq ki, M ilə $n \in N$-lərin çoxluğudur ki, $m \in n$ şərtini ödəyən bütün $m \in N$-lər üçün $m \subseteq n$ ödənilir. Əgər $n \in M$ və $m \in n'$ onda ya $m = n$, ya da $m \in n$. Hər iki halda $m \subseteq n$.

Eyni zamanda $n \subseteq n'$ olduğundan $m \subseteq n'$ alınır. Beləliklə, $n \in M$ isə, onda $n' \in M$.

M isə O-ı da özündə saxladığından N-lə üst-üstə düşür.

c) Əgər $m'' \subseteq n'$ onda $m \subseteq n$ Doğrudan da əgər $m \cup \{m\} \subseteq n \cup \{n\}$. Onda $m \in n \cup \{n\}$.

Beləliklə, alarıq ki, ya $m \in n$ (onda b-yə əsasən $m \subseteq n$ olacaq) ya da $m = n$.

m-lə n–in yerini dəyişərək c bəndini tətbiq etsək alarıq

d) Əgər $m' = n'$ onda $m = n$

bütün bulardan istifadə edərək aşağıdakı teoremin isbatını verə bilərik.

Teorem i: Natural ədədlər çoxluğu sonsuzdur.

Tərifə görə hər bir boş olmayan universal çoxluq özündə $\varnothing$ çoxluğunu saxlayır. Onda alırıq ki,

Nəticə: Hər bir boş olmayan universal çoxluq sonsuzdur. Beləliklə, universum aksiomu bizə universal çoxluğun elementləri olan sonsuz çoxluqlar əldə etmək imkanı verir. Tsermelo sistemində isə sonsuzluq aksiomu belə verilir:

Sonsuzluq aksiomu: Aşağıdakı xassələri ödəyən ən azı bir z çoxluğu vardır.

a) $0 \in Z$ b) əgər $x \in Z$ onda $\{x\} \in Z$

Lakin I-VII aksiomlarının vasitəsilə hesabi çoxluqların varlığını təmin etmək mümkün olmasına baxmayaraq, bəzi tip çoxluqları qurmaq mümkün olmur. Bu məqsədlə Tsermelo sistemində aşağıdakı şəkildə aksiom verilir.

Əvəzetmə aksiomu: İxtiyari S çoxluğu və ixtiyari sərbəst x dəyişənli, hər hansı bir *f* funksiyası üçün elə tam müəyyən olunmuş çoxluq tapmaq olar ki, *f(x)*-nı dəqiq olaraq $x \in S$ şərtini ödəyən üzvlərindən ibarət olsun.

ÖZÜL VƏ YA BÜNÖVRƏ AKSIOMU

Biz gördük ki, geniş çoxluqlar qurmaq cəhdləri VII, VIII aksiomların verilməsi ilə nəticələndi. Eyni zamanda hələ 1917-ci ildə məlum oldu ki, ekstraordinar adlanan çoxluqlar, aksiomlar sistemi ilə uzlaşmır. Ekstraordinar çoxluqlar xüsusi quruluşlu çoxluğa deyilir. Hər hansı bir ekstraordinar çoxluğu aşağıdakı xassəyə malik ola bilər.

$$..... \in S_{k+1} \in S_k ..... \in S_2 \in S_1 \in S$$

Yəni, ekstraordinar çoxluğun öz üzvlərinin üzvləri sonsuz azalan ardıcıllıq təşkil edə bilər. Xüsusi halda S_1, S-in yeganə üzvü, ümumiyyətlə S_{k+1}, S_k-nın yeganə üzvü ola bilər. Eyni zamanda heç də həmişə $k \neq n$ olduqda $S_k \neq S$ ödənmir. Hətta çoxluğun ancaq özünü saxladığı hal da mümkündür. Bizim sistemdə geniş bir oblastda varlığı nə inkar, nə də iqrar olunan müxtəlif çoxluqlar mövcuddur. Xüsusi halda ekstraordinar çoxluqlar buna misal ola bilər. Fon Neyman ekstraordinar çoxluqların heç olmazsa bir hissəsini aradan cıxarmaq üçün məhdudiyyət aksiomunu vermisdir.

MƏHDUDIYYƏT AKSIOMU

Hər hansı bos olmajan a coxluqu elə b uzvunu özundə saxlajir ki, a və b umumi uzvlərə malik olmasmlar. Yəni, elə bir a coxluqu yoxdur ki, onun uzvunun uzvu, a coxluqunun da uzvu olsun. Onda ,hec vaxt elə s, t və s.coxluq tapmaq olmaz ki, $S \in S$; $S \in t$ və $t \in S$ şərtini ödəyən olsun.

Bununla da, Tsermelo sistemini qurmus oluruq.

SKOLEM PARADOKSU

Qeyd etdiyimiz kimi, Tsermelo sistemi antinomiyalara gətirib çıxarmayan bir sıra çoxluqların varlığını göstərmək iqtidarında deyil. Bu hala nəzərən Fon Neyman belə bir ideya irəli sürmüşdür ki, ziddiyyətlərə gətirib çıxaran səbəb, hədsiz geniş çoxluqların, digər bir coxluqun üzvü sifətilə qəbul edilməsidir. Bu nöqteyi nəzərdən ayirma aksiomunda belə bir şərti atmaq olar ki, hər hansı bir predikata uyğun gələn ixtiyari bir çoxluq, hökmən əvvəlcədən alınmış digər bir çoxluğun üzvü olsun. Beləliklə X=X predikatına uyğun universal sinfin varlığını qəbul etmək mümkün olur. Fon Neymanın sistemində heç bir çoxluğun üzvü olmayan obyektlər sinif adlanır və müvafiq aksiom vasitəsilə universal siniflərlə eyni həcmli siniflərin heç bir obyektin üzvü olmaması şərti təmin edilir. 1915-ci ildə Levengeym aşağıdakı teoremi verdi.

Teorem: I tərtib funksional hesabın ixtiyari düzgün qurulmuş formulu, deməli belə formulların hər hansı sonsuz bir oblastda ödənilən ixtiyari sonlu sistemi, hesabi oblastda da (məsələn tam ədədlər oblastında) ödənilәndir. Başqa sözlə, sonsuz modelə maliksə, onda hesabi modelə də malikdir. Aydındır ki, Tsermelonun sistemi hesabi çoxluq təşkil edir. Onda Levengeym-Skolem teoreminə əsasən bu sistem hesabi oblastda da ödənilәndir.

Digər tərəfdən Kantor teoremi və sonsuzluq aksiomu bizi qeyri-hesabi sonsuz çoxluqlara gətirib çıxarır ki, bu da Skolem paradoksu adlanır.

Göstərilmişdir ki, ixtiyrı aksiomatik çoxluqlar nəzəriyyəsi üçün elə daha geniş nəzəriyyə qurmaq olar ki, Σ - dakı bütün sonsuz çoxluqlar hesabi olsunlar. Lakin bu nəticəni Σ sisteminin öz vasitələri ilə göstərmək mümkün deyildir. Bu hal müəyyən mənada Gödelin qeyri tamlıq haqdakı teoremi ilə səslənir. Beləliklə, biz ilk dəfə Skolem tərəfindən qeyd edilmiş güclərin nisbiliyi ilə rastlaşırıq. Belə ki, biz Kantorun naiv çoxluqlar nəzəriyyəsində mütləq qeyri hesabilik anlayışını verə bildiyimiz halda, aksiomatik çoxluqlar nəzəriyyəsində bu qeyri-mümkündür. Çünki aksiomatik çoxluqlar nəzəriyyəsində hər hansı bir sistemdə hesabi olmayan çoxluq, daha güclü bir sistemdə hesabi olur. Qeyd etmək laımdır ki, bu nisbilik sonlu çoxluqlara da aiddir.

ƏDƏBİYYAT

1. Э. Мельдельсон. Введение в математическую логику. –М.:Наука, 1976.
2. П. С. Новиков. Элементы математической логики. –М.:Наука, 1973.
3. Ю.Л. Ершов, Е.А. Палютин. Математическая логика. –М.:Наука, 1979.
4. Ф.Л. Варпаховский. Лекции по математической логике.- М.: Жизнь и мысль, 2012 г
5. В.И. Игошин. Задачник-практикум по математической логике. – М.: Просвещение, 2010.
6. Клини С. К. Математическая логика / С. К. Клини. – М.: Мир, 1973. – 480 с.
7. В.И. Игошин. Задачник-практикум по математической логике. – М.: Просвещение, 1986 г.

Çapa imzalanmış 18 .0 2. 2015-ci il
Kağız formatı 60x84 1/16, çap vərəqi 12
Sifariş 50 sayı 200

ADPU-nun mətbəəsi
Bakı, Ü.Hacıbəyov küçəsi, 68
Tel: (+912) 493-74-10
E.mail. ADPU@Box.az