B.P.DEMİDOVİÇ

RİYAZİ ANALİZDƏN MƏSƏLƏ VƏ MİSALLAR

14-CÜ NƏŞRDƏN TƏRCÜMƏ

BAKI - 2003

UOT 517 (075.8)

Demidoviç Boris Pavloviç. Riyazi analizdən məs
misallar. Dərs vəsaiti. 14-cü nəşrdən tərcümə. Bakı.
554 s.

Tərcümənin elmi redaktoru:

f.-r.e.n., dosent İ.M.Nəbiyev

Tərcümə edənlər:

Əliyev A.R., Xəlilov E.H., Məmmədov X.R., Məmmədov

MÜNDƏRİCAT

BİRİNCİ HİSSƏ. BİRDƏYİŞƏNLİ FUNKSİYALAR

İ K İ N C İ H İ S S Ə. ÇOXDƏYİŞƏNLİ FUNKSİYALAR

TƏRCÜMƏYƏ ÖN SÖZ

Müstəqilliyə qədəm qoyduqdan sonra elm və texnikanın inkişafı, iqtisadiyyatın yüksəldilməsi respublikamız üçün xüsusi əhəmiyyət kəsb edən məsələlərdir və bu sahədə yüksək ixtisaslı kadrların hazırlanması bilavasitə ali təhsil ocaqlarının ən ümdə vəzifəsidir. Son vaxtlar kitab qıtlığı, xüsusilə ana dilində elmi-texniki ədədiyyatın, dərslik və dərs vəsaitlərinin çatışmaması yaxud heç olmaması belə bir məsuliyyətli işin həyata keçirilməsində çətinlik yaradır. Hesab edirik ki, sizə təqdim olunan dərsliyin tərcüməsi bu çətinliyin aradan qaldırılmasında müəyyən rol oynayacaqdır.

Dərsliyin tərcüməsində müasir Azərbaycan dilinin terminologiyasından istifadə olunmuşdur.

Dərslik ali məktəblərdə riyaziyyat, informatika, fizika və texniki ixtisaslar üzrə təhsil alan tələbələr üçün nəzərdə tutulmuşdur.

Kitabın tərcümə olunması təklifi Bakı Dövlət Universitetinin "Tətbiqi riyaziyyat" kafedrasının dosenti, f.-r.e.n. X.R.Məmmədova məxsusdur.

Tərcümənin müəllifləri f.-r.e.d., prof. H.M.Hüseynova, f.-r.e.d., prof. N.B.Kərimova və tərcümənin elmi redaktoru f.-r.e.n., dosent İ.M.Nəbiyevə dəyərli məsləhətlərinə və göstərdikləri diqqətə görə öz dərin təşəkkürlərini bildirirlər.

Nəzərinizə çatdırmaq istərdik ki, bu müəlliflərin tərcümə istiqamətində gördüyü ilk cəhddir və odur ki, təklif və qeydlərinizi aşağıda göstərilən ünvana göndərməyinizi xahiş edirik.

Ünvan: 370148, Bakı, Z.Xəlilov küç., 23,
Bakı Dövlət Universiteti,
"Tətbiqi riyaziyyat" kafedrası

BİRİNCİ HİSSƏ

BİRDƏYİŞƏNLİ FUNKSİYALAR

I BÖLMƏ

ANALİZƏ GİRİŞ

§ 1. Həqiqi ədədlər

1°. Riyazi induksiya üsulu. İstənilən natural n ədədi üçün hər hansı teoremin doğruluğunu isbat etmək üçün bu teoremin 1) $n=1$ olduqda doğru olduğunu və 2) hər hansı natural n ədədi üçün doğruluğunu qəbul edərək sonrakı natural $(n+1)$ ədədi üçün də doğru olduğunu isbat etmək kifayətdir.

2°. Kəsik. Əgər aşağıdakı şərtlər ödənilərsə, onda rasional ədədlərin iki A və B siniflərinə bölgüsü *kəsik* adlanır: 1) hər iki sinif boş deyil, 2) istənilən rasional ədəd yalnız və yalnız bir sinfə daxildir, 3) A (*aşağı sinif*) sinfinə daxil olan istənilən ədəd B (*yuxarı sinif*) sinfinə daxil olan istənilən ədəddən kiçikdir. A aşağı sinfinin ən böyük ədədi və ya B yuxarı sinfinin ən kiçik ədədi olduqda A/B kəsiyi rasional ədəd təyin edir. A sinfinin ən böyük ədədi, B sinfinin isə ən kiçik ədədi olmadıqda A/B kəsiyi irrasional ədəd təyin edir. Rasional və irrasional ədədlərə həqiqi ədədlər deyilir*).

3°. Mütləq qiymət. x həqiqi ədədinin *mütləq qiyməti*

$$|x| = \begin{cases} -x, & x<0 \text{ olduqda}, \\ x, & x \geq 0 \text{ olduqda} \end{cases}$$

şərtləri ilə təyin olunan, mənfi olmayan ədədə deyilir.

İstənilən x və y həqiqi ədədləri üçün

$$|x|-|y| \leq |x+y| \leq |x|+|y|$$

bərabərsizliyi doğrudur.

4°. Yuxarı və aşağı sərhədlər. Tutaq ki, $X=\{x\}$ - məhdud həqiqi ədədlər çoxluğudur. Aşağıdakı şərtlər ödəndikdə

$$m = \inf\{x\}$$

ədədi X çoxluğunun *aşağı sərhədi* adlanır:

1) istənilən $x \in X$ **)

$$x \geq m$$

bərabərsizliyini ödəyir,

2) istənilən $\varepsilon>0$ üçün elə $x' \in X$ var ki,

$$x' < m+\varepsilon.$$

Analoji olaraq, aşağıdakı şərtlər ödəndikdə

$$M = \sup\{x\}$$

ədədi X çoxluğunun *yuxarı sərhədi* adlanır:

1) istənilən $x \in X$

$$x \leq M$$

bərabərsizliyini ödəyir,

2) istənilən $\varepsilon>0$ üçün elə $x'' \in X$ var ki,

$$x'' > M-\varepsilon.$$

---

*) Əgər xüsusi qeyd göstərilməyibsə, sonralar *ədəd* dedikdə biz *həqiqi ədəd* nəzərdə tutacağıq.

**) $x \in X$ yazılışı x ədədinin X çoxluğuna daxil olduğunu göstərir.

Əgər X çoxluğu aşağıdan məhdud deyilsə, onda

$$\inf\{x\} = -\infty$$

və əgər X çoxluğu yuxarıdan məhdud deyilsə, onda

$$\sup\{x\} = +\infty$$

kimi yazmaq qəbul olunub.

5°. **Mütləq və nisbi xəta.** Əgər ölçülən kəmiyyətin dəqiq qiyməti a $(a \neq 0)$, təqribi qiyməti isə x olarsa, onda

$$\Delta = |x-a|$$

ədədi ölçülən kəmiyyətin *mütləq xətası*,

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|}$$

ədədi isə *nisbi xətası* adlanır.

Əgər x ədədinin mütləq xətası onun n-ci qiymətli rəqəminin durduğu mərtəbə vahidinin yarısından böyük deyilsə, onda deyilir ki, x ədədi *n sayda doğru rəqəmə* malikdir.

Riyazi induksiya üsulunu tətbiq edərək isbat edin ki, istənilən natural n ədədi üçün aşağıdakı bərabərliklər doğrudur:

1. $1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2. $1^2+2^2+\ldots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. $1^3+2^3+\ldots+n^3 = (1+2+\ldots+n)^2$.

4. $1+2+2^2+\ldots+2^{n-1} = 2^n-1$.

5. Tutaq ki,

$$a^{[n]} = a(a-h)\ldots[a-(n-1)h] \text{ və } a^{[0]} = 1.$$

İsbat edin ki,

$$(a+b)^{[n]} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{[n-m]} b^{[m]},$$

burada C_n^m - n elementli çoxluğun m elementli (nizamsız) altçoxluqlarının sayıdır. Buradan *Nyuton binomu* düsturunu çıxarın.

6. *Bernulli bərabərsizliyini* isbat edin:

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\ldots+x_n,$$

burada $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - -1-dən böyük olan eyni işarəli ədədlərdir.

7. İsbat edin ki, $x > -1$ olarsa, onda

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad (n > 1)$$

bərabərsizliyi doğrudur, belə ki, bərabərlik işarəsi yalnız $x = 0$ olduqda doğrudur.

8. $n > 1$ olduqda

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

bərabərsizliyini isbat edin

Göstəriş.

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>2 \quad (n=1,2,\ldots)$$

bərabərsizliyindən istifadə edin.

9. $n>1$ olduqda

$$2!\cdot 4!\ldots(2n)!>\left[(n+1)!\right]^n$$

bərabərsizliyini isbat edin.

10. Bərabərsizliyi isbat edin:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\ldots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

10.1. Bərabərsizlikləri isbat edin:

a) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n} \quad (n\geq 2);$

b) $n^{n+1}>(n+1)^n \quad (n\geq 3);$

c) $\left|\sin\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\right|\leq\sum_{k=1}^{n}\sin x_k$

$$(0\leq x_k\leq\pi;\ k=1,2,\ldots,n);$$

d) $(2n)!<2^{2n}(n!)^2.$

11. Tutaq ki, c - hər hansı tam ədədin kvadratı olmayan müsbət ədəddir və A/B - $\sqrt{c}$ həqiqi ədədini təyin edən kəsikdir, burada B sinfinə $b^2>c$ şərtini ödəyən bütün müsbət rasional b ədədləri, A sinfinə isə qalan bütün rasional ədədlər daxildir. İsbat edin ki, A sinfində ən böyük, B sinfində isə ən kiçik ədəd yoxdur.

12. $\sqrt[3]{2}$ ədədini təyin edən A/B kəsiyi aşağıdakı qaydada qurulmuşdur: A sinfi $a^3<2$ şərtini ödəyən bütün rasional a ədədlərindən, B sinfi isə qalan bütün rasional ədədlərdən ibarətdir. İsbat edin ki, A sinfində ən böyük, B sinfində isə ən kiçik ədəd yoxdur.

13. Uyğun kəsikləri quraraq aşağıdakı bərabərlikləri isbat edin:

a) $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}$; *b)* $\sqrt{2}\sqrt{3}=\sqrt{6}$.

14. $2^{\sqrt{2}}$ ədədini təyin edən kəsiyi qurun.

15. İsbat edin ki, istənilən boş olmayan aşağıdan məhdud ədədi çoxluğun aşağı sərhədi, istənilən boş olmayan yuxarıdan məhdud ədədi çoxluğun isə yuxarı sərhədi var.

16. Göstərin ki, bütün

$$\frac{m}{n}$$

düzgün rasional kəsrlər çoxluğunun ən kiçik və ən böyük elementi yoxdur, burada m və n - natural ədədlərdir və $0<m<n$. Bu çoxluğun aşağı və yuxarı sərhədini tapın.

17. $r^2 < 2$ bərabərsizliyini ödəyən bütün r rasional ədədlər çoxluğunun aşağı və yuxarı sərhədini təyin edin.

18. Tutaq ki, $\{-x\}$ $x \in \{x\}$ ədədlərinə əks olan ədədlər çoxluğudur. İsbat edin ki,

a) $\inf\{-x\} = -\sup\{x\}$; *b)* $\sup\{-x\} = -\inf\{x\}$.

19. Tutaq ki, $\{x+y\}$ bütün $x+y$ cəmləri çoxluğudur, burada $x \in \{x\}$ və $y \in \{y\}$. Bərabərlikləri isbat edin:

a) $\inf\{x+y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\}$;

b) $\sup\{x+y\} = \sup\{x\} + \sup\{y\}$.

20. Tutaq ki, $\{xy\}$ bütün xy hasilləri çoxluğudur, burada $x \in \{x\}$ və $y \in \{y\}$, belə ki, $x \ge 0$ və $y \ge 0$. Bərabərlikləri isbat edin:

a) $\inf\{xy\} = \inf\{x\}\inf\{y\}$; *b)* $\sup\{xy\} = \sup\{x\}\sup\{y\}$.

21. Bərabərsizlikləri isbat edin:

a) $|x-y| \ge \big||x|-|y|\big|$;

b) $|x+x_1+\ldots+x_n| \ge |x| - (|x_1|+\ldots+|x_n|)$.

Bərabərsizlikləri həll edin:

22. $|x+1| < 0{,}01$.

23. $|x-2| \ge 10$.

24. $|x| > |x+1|$.

25. $|2x-1| < |x-1|$.

26. $|x+2| + |x-2| \le 12$.

27. $|x+2| - |x| > 1$.

28. $\big||x+1| - |x-1|\big| < 1$.

29. $|x(1-x)| < 0{,}05$.

30. Eyniliyi isbat edin:

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2 = x^2.$$

31. 10 *sm* uzunluğu ölçdükdə mütləq xəta 0,5 *mm*-ə bərabərdir; 500 *km* məsafəni ölçdükdə mütləq xəta 200 *m*-ə bərabərdir. Hansı ölçü daha dəqiqdir?

32. x=2,3752 ədədinin nisbi xətası 1% təşkil edirsə, bu ədəd neçə doğru rəqəmə malikdir?

33. x=12,125 ədədi 3 doğru rəqəmə malikdir. Bu ədədin nisbi xətasını təyin edin.

34. Düzbucaqlının tərəfləri

$$x = 2{,}50\ sm \pm 0{,}01\ sm,$$
$$y = 4{,}00\ sm \pm 0{,}02\ sm\text{-ə}$$

bərabərdir. Bu düzbucaqlının S sahəsi hansı aralıqda yerləşir? Düzbucaqlının tərəflərinin əvəzinə onların orta qiymətini götürsək, onun sahəsinin Δ mütləq xətası və δ nisbi xətası neçə olar?

35. Cismin çəkisi $p = 12{,}59\ Q \pm 0{,}01\ Q$, həcmi isə $v = 3{,}2\ sm^3 \pm 0{,}2\ sm^3$-dir. Cismin çəkisinin və həcminin əvəzinə onların orta qiymətini götürərək cismin xüsusi çəkisini təyin edin, xüsusi çəkinin mütləq və nisbi xətasını qiymətləndirin.

36. Dairənin radiusu

$$r = 7{,}2\ m \pm 0{,}1\ m\text{-dir.}$$

Əgər π=3,14 qəbul etsək, dairənin sahəsi hansı minimal nisbi xəta ilə təyin olunar?

37. Paralelepipedin ölçüləri

$$x = 24{,}7\ m \pm 0{,}2\ m,$$

$$y = 6{,}5\ m \pm 0{,}1\ m,$$

$$z = 1{,}2\ m \pm 0{,}1\ m\text{-dir.}$$

Bu paralelepipedin həcmi hansı aralıqda dəyişir? Ölçülərin əvəzinə onların orta qiymətini qəbul etsək, paralelepipedin həcmi hansı mütləq və nisbi xəta ilə təyin olunar?

38. Kvadratın x tərəfini hansı mütləq xəta ilə ölçmək lazımdır ki, bu kvadratın sahəsini 0,001 m^2-ə qədər dəqiqliklə təyin etmək mümkün olsun, burada $2\ m<x<3\ m$?

39. Düzbucaqlının x və y tərəflərinin hər biri təxminən 10 m-dən çox deyilsə, onları hansı Δ mütləq xətası ilə ölçmək lazımdır ki, düzbucaqlının sahəsi 0,01 m^2-ə qədər dəqiqliklə hesablanmış olsun?

40. Tutaq ki, $\delta(x)$ və $\delta(y)$ - x və y ədədlərinin nisbi xətaları, $\delta(xy)$ isə xy ədədinin nisbi xətasıdır.

İsbat edin ki,

$$\delta(xy) \le \delta(x) + \delta(y) + \delta(x)\,\delta(y).$$

§ 2. Ardıcıllıqlar nəzəriyyəsi

1°. Ardıcıllığın limiti anlayışı. Tutaq ki, x_n ardıcıllığı və müəyyən a ədədi üçün istənilən $\varepsilon>0$ ədədinə görə elə $N=N(\varepsilon)$ natural ədədi var ki, $n>N$ olduqda

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

şərti ödənilir. Onda a ədədinə $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ yaxud x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ ardıcıllığının limiti deyilir (qısaca, ardıcıllıq a-ya *yığılır*), yəni

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Xüsusi halda,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

olarsa, onda x_n ardıcıllığı *sonsuz kiçilən* adlanır.

Limiti olmayan ardıcıllıq *dağılan* ardıcıllıq adlanır.

2⁰. **Limitin varlığı əlamətləri.**

1) Əgər

$$y_n \le x_n \le z_n$$

və

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = c$$

olarsa, onda

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c\,.$$

2) Monoton və məhdud ardıcıllığın limiti var.

3) **Koşi meyarı.** x_n ardıcıllığının yığılan olması üçün zəruri və kafi şərt ixtiyari $\varepsilon>0$ ədədinə görə elə $N=N(\varepsilon)$ ədədinin varlığıdır ki, istənilən $n>N$ və $p>0$ üçün

$$\left|x_n - x_{n+p}\right| < \varepsilon$$

şərti ödənilsin.

3⁰. **Ardıcıllığın limiti haqqında əsas teoremlər.**

$$\lim_{n\to\infty} x_n \quad \text{və} \quad \lim_{n\to\infty} y_n$$

limitlərinin varlığını qəbul edərək alırıq ki:

1) əgər $x_n \le y_n$ olarsa, onda $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

4) əgər $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \ne 0$ olarsa, onda $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$.

4⁰. ***e* ədədi.**

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (n=1,2,\ldots)$$

ardıcıllığının sonlu

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}7182818284\ldots$$

limiti var.

5⁰. **Sonsuz limit.**

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

simvolik yazılışı o deməkdir ki, ixtiyari $E>0$ üçün elə $N=N(E)$ ədədi var ki, $n>N$ olduqda

$$|x_n| > E$$

şərti ödənilir.

6⁰. **Limit nöqtəsi.** Tutaq ki, ξ ədədi (və ya ∞) üçün x_n $(n=1, 2, \ldots)$ ardıcıllığının elə

$$x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_n}, \ldots \quad (1 \le p_1 < p_2 < \ldots)$$

altardıcıllığı var ki,

$$\lim_{n\to\infty} x_{p_n} = \xi$$

olur. Onda ξ ədədi (və ya ∞) bu ardıcıllığın *xüsusi limiti* (*limit nöqtəsi*) adlanır.

İstənilən məhdud ardıcıllığın ən azı bir sonlu xüsusi limiti var (*Bolsano-Veyerştrass prinsipi*). Əgər bu xüsusi limit yeganədirsə, onda bu elə verilmiş ardıcıllığın sonlu limitidir.

x_n ardıcıllığının ən kiçik

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$$

(sonlu və ya sonsuz) xüsusi limiti onun *aşağı limiti*, ən böyük

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$$

xüsusi limiti isə bu ardıcıllığın *yuxarı limiti* adlanır.

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$$

bərabərliyi x_n ardıcıllığının (sonlu və ya sonsuz) limitinin varlığı üçün zəruri və kafi şərtdir.

41. Tutaq ki,

$$x_n = \frac{n}{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1$$

olduğunu isbat etmək üçün hər bir $\varepsilon>0$ üçün elə $N=N(\varepsilon)$ ədədi tapın ki, $n>N$ olduqda

$$|x_n - 1| < \varepsilon$$

olsun. Aşağıdakı cədvəli doldurun:

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001	...
N					

42. *a*) $x_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$; *c*) $x_n = \dfrac{1}{n!}$;

b) $x_n = \dfrac{2n}{n^3+1}$; *d*) $x_n = (-1)^n \cdot 0{,}999^n$

ardıcıllıqlarının *sonsuz kiçilən* (yəni limitinin 0-a bərabər) olduğunu isbat etmək üçün istənilən $\varepsilon>0$ ədədinə görə elə $N=N(\varepsilon)$ ədədi tapın ki, $n>N$ olduqda $|x_n| < \varepsilon$ olsun.

Bu halların hər biri üçün aşağıdakı cədvəli doldurun:

ε	0,1	0,001	0,0001	...
N				

43. *a)* $x_n=(-1)^n n$; *b)* $x_n=2^{\sqrt{n}}$; *c)* $x_n=\lg(\lg n)$ $(n\geq 2)$

ardıcıllıqlarının $n\to\infty$ olduqda sonsuz limiti (yəni *sonsuz böyüyən*) olduğunu isbat etmək üçün istənilən $E>0$ ədədinə görə elə $N=N(E)$ ədədi tapın ki, $n>N$ olduqda $|x_n|>E$ olsun.

Bu halların hər biri üçün aşağıdakı cədvəli doldurun:

E	10	100	1000	10000	...
N					

44. Göstərin ki,

$$x_n=n^{(-1)^n}\qquad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

ardıcıllığı qeyri-məhduddur, lakin $n\to\infty$ olduqda sonsuz böyüyən deyil.

45. Bərabərsizliklərin köməyi ilə aşağıdakı təklifləri ifadə edin:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$; *b)* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$; *c)* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$.

n-in natural ədədlər çoxluğunda dəyişdiyini fərz edərək aşağıdakı ifadələrin qiymətlərini təyin edin:

46. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10000\,n}{n^2+1}$.

47. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

48. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$.

49. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$.

50. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n}$ $(|a|<1,\ |b|<1)$.

51. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

52. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n}-\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}n}{n}\right|$.

53. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\ldots+\dfrac{(n-1)^2}{n^3}\right]$.

54. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{3^2}{n^3}+\ldots+\dfrac{(2n-1)^2}{n^3}\right]$.

55. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\ldots+\dfrac{2n-1}{2^n}\right)$.

56. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$.

57. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\,\sqrt[4]{2}\,\sqrt[8]{2}\ldots\sqrt[2^n]{2}\right).$

Aşağıdakı bərabərlikləri isbat edin:

58. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{2^n}=0.$ **63.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=1\,(a>0).$

59. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0.$ **64.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\log_a n}{n}=0\,(a>1).$

60. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0\,(a>1).$ **65.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

61. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0.$ **66.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.$

62. $\lim\limits_{n\to+\infty}nq^n=0$, əgər $|q|<1.$

67. Kifayət qədər böyük n üçün hansı ifadə böyükdür:
a) $100n+200$ yoxsa $0{,}01n^2$?; *b*) 2^n yoxsa n^{1000}?; *c*) 1000^n yoxsa $n!$?

68. İsbat edin ki,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right)=0.$$

G ö s t ə r i ş. Misal 10-a bax.

69. İsbat edin ki,

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (n=1,2,\ldots)$$

ardıcıllığı monoton artan və yuxarıdan məhduddur,

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (n=1,2,\ldots)$$

ardıcıllığı isə monoton azalan və aşağıdan məhduddur. Buradan bu ardıcıllıqların eyni

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e$$

limiti olduğunu çıxarın.

G ö s t ə r i ş. $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$, $\dfrac{y_n}{y_{n-1}}$ nisbətlərini qurun və misal 7-dəki bərabərsizlikdən istifadə edin.

70. İsbat edin ki,

$$0<e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{3}{n} \quad (n=1,2,\ldots).$$

n-in hansı qiymətlərində $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ ifadəsi e ədədindən 0,001-dən az fərqlənəcək?

71. Tutaq ki, p_n $(n=1, 2, \dots)$ $+\infty$-a yaxınlaşan istənilən ədədlər ardıcıllığı və q_n $(n=1, 2, \dots)$ $-\infty$-a yaxınlaşan istənilən ədədlər ardıcıllığıdır $(p_n, q_n \notin [-1, 0])$. İsbat edin ki,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = e.$$

72. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ olduğunu bilərək isbat edin ki,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}\right) = e.$$

Buradan

$$e = 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!n} \qquad (*)$$

düsturunu çıxarın və e ədədini 10^{-5} dəqiqliklə hesablayın, burada $0<\theta_n<1$.

73. İsbat edin ki, e ədədi irrasionaldır.

74. Bərabərsizliyi isbat edin:

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

75. Bərabərsizliyi isbat edin:

$$a)\quad \frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n},$$

burada n - istənilən natural ədəddir;

$$b)\quad 1+\alpha < e^{\alpha},$$

burada α - sıfırdan fərqli həqiqi ədəddir.

76. İsbat edin ki,

$$\lim_{n\to\infty} n(a^{\frac{1}{n}}-1) = \ln a \qquad (a>0),$$

burada $\ln a$ a ədədinin $e=2{,}718\dots$ əsasdan loqarifmidir.

Monoton və məhdud ardıcıllığın limitinin varlığı haqqında teoremdən istifadə edərək aşağıdakı ardıcıllıqların yığılan olduğunu isbat edin:

77. $$x_n = p_0+\frac{p_1}{10}+\dots+\frac{p_n}{10^n} \quad (n=1,2,\dots),$$

burada p_i $(i=0, 1, 2, \dots)$ - mənfi olmayan və p_1-dən başlayaraq 9-u aşmayan tam ədədlərdir.

78. $x_n = \frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\cdots\frac{n+9}{2n-1}$.

79. $x_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$.

80. $x_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

81. $x_1 = \sqrt{2},\ x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}},\ \ldots,\ x_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n\ \text{sayda}},\ \ldots$

Koşi meyarından istifadə edərək aşağıdakı ardıcıllıqların yığılan olduğunu isbat edin:

82. $x_n = a_0 + a_1 q + \ldots + a_n q^n$,

burada

$$|a_k| < M \ (k = 0, 1, 2, \ldots) \text{ və } |q| < 1.$$

83. $x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n}{2^n}$.

84. $x_n = \frac{\cos 1!}{1\cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}$.

85. $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$.

G ö s t ə r i ş. $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ bərabərsizliyindən istifadə edin.

86. Tutaq ki, x_n $(n=1, 2, \ldots)$ ardıcıllığı üçün elə C ədədi var ki,

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \ldots + |x_n - x_{n-1}| < C \quad (n = 2, 3, \ldots)$$

şərti ödənilir. Onda deyilir ki, x_n ardıcıllığı *məhdud variasiyaya* malikdir.

İsbat edin ki, məhdud variasiyalı ardıcıllıq yığılandır.

Məhdud variasiyalı olmayan yığılan ardıcıllığa aid misal qurun.

87. Verilmiş ardıcıllıq üçün Koşi meyarının ödənilməməsini ifadə edin.

88. Koşi meyarından istifadə edərək

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

ardıcıllığının dağılan olduğunu isbat edin.

89. İsbat edin ki, x_n ardıcıllığı yığılandırsa, onda onun istənilən x_{p_n} altardıcıllığı da həmin limitə yığılır:

$$\lim_{n\to\infty} x_{p_n} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

90. İsbat edin ki, əgər monoton ardıcıllığın hər hansı altardıcıllığı yığılandırsa, onda özü də yığılandır.

91. İsbat edin ki,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

olarsa, onda

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|.$$

92. Əgər $x_n \to a$ olarsa, onda

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

limiti haqda nə demək olar?

93. İsbat edin ki, yığılan ədədi ardıcıllıq məhduddur.

94. İsbat edin ki, yığılan ədədi ardıcıllıq özünün ya yuxarı sərhəd, ya aşağı sərhəd, ya da hər iki sərhəd qiymətlərini alır. Hər üç növ ardıcıllıqlara aid misal qurun.

95. İsbat edin ki, $+\infty$-a yaxınlaşan x_n $(n=1, 2, \ldots)$ ədədi ardıcıllığı aşağı sərhəd qiymətini alır.

x_n $(n=1, 2, \ldots)$ ardıcıllığının ən böyük həddini tapın:

96. $x_n = \dfrac{n^2}{2^n}$. **97.** $x_n = \dfrac{\sqrt{n}}{100+n}$. **98.** $x_n = \dfrac{1000^n}{n!}$.

x_n $(n=1, 2, \ldots)$ ardıcıllığının ən kiçik həddini tapın:

99. $x_n = n^2 - 9n - 100$. **100.** $x_n = n + \dfrac{100}{n}$.

x_n $(n=1, 2, \ldots)$ ardıcıllığı üçün $\inf x_n$, $\sup x_n$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ və $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$-ni tapın:

101. $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$.

101.1. $x_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \dfrac{3}{n}\right)$. **102.** $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$.

103. $x_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

104. $x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

105. $x_n = \dfrac{n-1}{n+1}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$. **108.** $x_n = n^{(-1)^n}$.

106. $x_n = (-1)^n n$. **109.** $x_n = 1 + n\sin\dfrac{n\pi}{2}$.

107. $x_n = -n[2+(-1)^n]$. **110.** $x_n = \dfrac{1}{n-10{,}2}$.

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ və $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$-ni tapın:

111. $x_n = \dfrac{n^2}{1+n^2}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$.

112. $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \cdot (-1)^n + \sin\dfrac{n\pi}{4}$.

113. $x_n = \dfrac{n}{n+1}\sin^2\dfrac{n\pi}{4}$.

114. $x_n = \sqrt[n]{1+2^{n(-1)^n}}$.

115. $x_n = \cos^n\dfrac{2n\pi}{3}$.

Aşağıdakı ardıcıllıqların xüsusi limitlərini tapın:

116. $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{7}{8}, \ldots, \dfrac{1}{2^n}, \dfrac{2^n-1}{2^n}, \ldots$

117. $1, \dfrac{1}{2}, 1+\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, 1+\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, 1+\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4},$
$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \ldots, \dfrac{1}{n}, 1+\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}, \ldots, \dfrac{1}{n-1}+\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n+1}, \ldots$

118. $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{2}{4}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}, \ldots$

119. $x_n = 3\cdot\left(1-\dfrac{1}{n}\right) + 2(-1)^n$.

120. $x_n = \dfrac{1}{2}\left[(a+b)+(-1)^n(a-b)\right]$.

121. Xüsusi limitləri verilmiş

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_p$$

ədədləri olan ədədi ardıcıllığa aid misal qurun.

122. Elə ədədi ardıcıllıq qurun ki, verilmiş

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

ardıcıllığının bütün hədləri onun xüsusi limitləri olsun. Qurulan ardıcıllıq yenə başqa hansı xüsusi limitlərə malik olmalıdır?

123. *a*) Sonlu xüsusi limiti olmayan;
b) yeganə sonlu xüsusi limiti olan, lakin yığılan olmayan;
c) sonsuz sayda xüsusi limiti olan;
d) xüsusi limiti istənilən həqiqi ədəd olan ardıcıllıqlara aid misal qurun.

124. İsbat edin ki, x_n və $y_n = x_n\sqrt[n]{n}$ $(n=1, 2, \ldots)$ ardıcıllıqlarının yalnız eyni xüsusi limitləri var.

125. İsbat edin ki, məhdud x_n $(n=1, 2, \ldots)$ ardıcıllığından həmişə yığılan x_{p_n} $(n=1, 2, \ldots)$ altardıcıllığı ayırmaq mümkündür.

126. İsbat edin ki, x_n $(n=1, 2, \ldots)$ ardıcıllığı məhdud deyilsə, onda elə x_{p_n} altardıcıllığı var ki,

$$\lim_{n\to\infty} x_{p_n} = \infty$$

olar.

127. Tutaq ki, x_n $(n=1, 2, \ldots)$ ardıcıllığı yığılan, y_n $(n=1, 2, \ldots)$ ardıcıllığı isə dağılandır.

$$a)\ x_n+y_n; \quad b)\ x_n y_n$$

ardıcıllıqlarının yığılması haqda nə hökm etmək olar?

Uyğun misallar qurun.

128. Tutaq ki, x_n və y_n $(n=1, 2, \ldots)$ ardıcıllıqları dağılandır. Hökm etmək olarmı ki,

$$a)\ x_n+y_n; \qquad b)\ x_n y_n$$

ardıcıllıqları dağılandır?

Uyğun misallar qurun.

129. Tutaq ki,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

və y_n $(n=1, 2, \ldots)$ - ixtiyari ardıcıllıqdır. Hökm etmək olarmı ki,

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0\,?$$

Uyğun misallar qurun.

130. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$ olmasından ya $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, ya da $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ olması alınırmı?

Misala baxın: $x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$, $y_n = \dfrac{1-(-1)^n}{2}$ $(n=1, 2, \ldots)$.

131. İsbat edin ki,

$$a)\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n + \underline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n \le \underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n) \le \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n$$

və

$$b)\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n \le \overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n) \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n .$$

Bu münasibətlərdə ciddi bərabərsizliklər olan hala aid misallar qurun.

132. Tutaq ki, $x_n \ge 0$ və $y_n \ge 0$ $(n=1, 2, \ldots)$. İsbat edin ki,

$$a)\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \cdot \underline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n \le \underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n) \le \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n$$

və

$$b)\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n \le \overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n) \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n .$$

Bu münasibətlərdə ciddi bərabərsizliklər olan hala aid misallar qurun.

133. İsbat edin ki, əgər $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ varsa, onda istənilən y_n $(n=1, 2, \ldots)$ ardıcıllığı üçün aşağıdakı bərabərliklər doğrudur:

$$a)\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=\underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}\,y_n$$

və

$$b)\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n)=\underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\,y_n\quad (x_n\ge 0).$$

134. İsbat edin ki, əgər müəyyən x_n $(n=1, 2, \ldots)$ və istənilən y_n $(n=1, 2, \ldots)$ ardıcıllığı üçün

$$a)\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}\,y_n$$

və ya

$$b)\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\,y_n\quad (x_n\ge 0).$$

bərabərliklərindən heç olmasa biri ödənərsə, onda x_n ardıcıllığı yığılandır.

135. İsbat edin ki, $x_n>0$ $(n=1, 2, \ldots)$ və

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{1}{x_n}=1$$

olarsa, onda x_n ardıcıllığı yığılandır.

136. İsbat edin ki, x_n $(n=1, 2, \ldots)$ ardıcıllığı məhduddursa və

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$$

olarsa, onda bu ardıcıllığın xüsusi limitləri onun yuxarı və aşağı limitləri arasında hər yerdə sıx yerləşmişdir, yəni

$$l=\underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n \quad \text{və}\quad L=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n$$

olarsa, onda $[l, L]$ parçasından olan istənilən ədəd verilmiş ardıcıllığın xüsusi limitidir.

137. Tutaq ki, $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ədədi ardıcıllığı

$$0\le x_{m+n}\le x_m+x_n \qquad (m, n=1, 2, \ldots)$$

şərtini ödəyir. İsbat edin ki, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}$ limiti var.

138. İsbat edin ki, x_n $(n=1, 2, \ldots)$ ardıcıllığı yığılandırsa, onda

$$\xi_n=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n) \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

ədədi orta ardıcıllığı da yığılandır və

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

Təklifin tərsi doğru deyil: misal qurun.

139. İsbat edin ki,

$$\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty$$

olarsa, onda

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}=+\infty.$$

140. İsbat edin ki, x_n $(n=1, 2, \ldots)$ ardıcıllığı yığılandırsa və $x_n>0$ olarsa, onda

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

141. İsbat edin ki, $x_n>0$ $(n=1, 2, \ldots)$ olarsa, onda

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n},$$

burada qəbul edirik ki, bərabərliyin sağ tərəfində duran limit mövcuddur.

142. İsbat edin ki,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e.$$

143. Ştols teoremini isbat edin: əgər

a) $y_{n+1}>y_n$ $(n=1, 2, \ldots)$, *b)* $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$ limiti varsa,

onda

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

144. Tapın:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2}{a^n}$ $(a>1)$; *b)* $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\lg n}{n}$.

145. İsbat edin ki, p - natural ədəddirsə, onda

a) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{p+1};$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^p}-\frac{n}{p+1}\right)=\frac{1}{2};$$

c) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+3^p+\ldots+(2n-1)^p}{n^{p+1}}=\frac{2^p}{p+1}.$$

146. İsbat edin ki,

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n \quad (n=1, 2, \ldots)$$

ardıcıllığı yığılandır.

Beləliklə,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=C+\ln n+\varepsilon_n$$

düsturu doğrudur, burada $C = 0{,}577216\ldots$ *Eyler sabiti* adlanır və $n \to \infty$ olduqda $\varepsilon_n \to 0$.

147. Tapın:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right).$$

148. x_n $(n=1, 2, \ldots)$ ardıcıllığı aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_n = \frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2} \quad (n=3,\ 4,\ \ldots).$$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$-ni tapın.

149 (y). Tutaq ki, x_n $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ ardıcıllığı aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$x_0 > 0, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

İsbat edin ki,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$

150. İsbat edin ki,

$$x_1 = a,\ y_1 = b,\ x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n},\ y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

düsturları ilə təyin olunan x_n və y_n $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ ardıcıllıqlarının

$$\mu(a,b) = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

ortaq limiti (*a* və *b* ədədlərinin *ədədi-həndəsi ortası*) var.

§ 3. Funksiya anlayışı

1°. **F u n k s i y a a n l a y ı ş ı.** Əgər $X = \{x\}$ çoxluğuna daxil olan hər bir x qiymətinə qarşı $Y = \{y\}$ çoxluğundan yeganə $y = f(x)$ həqiqi qiyməti uyğun olarsa, onda y dəyişəni verilmiş X oblastında x dəyişəninin birqiymətli f *funksiyası* adlanır.

X çoxluğu $f(x)$ funksiyasının *təyin oblastı* və ya *varlıq oblastı*, $Y_f = \{y \in Y :$ $\exists x \in X,\ f(x) = y\}$ çoxluğu isə bu funksiyanın *qiymətlər çoxluğu (və ya qiymətlər oblastı)* adlanır. Sadə hallarda X çoxluğu ya $]a,b[= (a,b): a < x < b$ *interval*, ya $]a,b] = (a,b]: a < x \le b$, $[a,b[= [a,b): a \le x < b$ *yarıminterval*, ya da $[a,b]: a \le x \le b$ *parça* götürülür, burada a və b - hər hansı həqiqi ədədlər və ya $-\infty$ və $+\infty$ simvollarıdır (axırıncı hallarda bərabərlik olmur). Əgər X-ə daxil olan hər bir x qiymətinə bir və ya bir neçə $y = f(x)$ qiyməti uyğun gələrsə, onda y x-in *çoxqiymətli funksiyası* adlanır.

2°. T ə r s f u n k s i y a. $f(x)$ funksiyasının Y qiymətlər çoxluğuna daxil olan hər bir y ədədinə

$$f(x)=y$$

tənliyinin köklərini qarşı qoyan uyğunluq Y çoxluğunda $f(x)$ funksiyasının *tərsi* adlanan, ümumiyyətlə desək, çoxqiymətli

$$x=f^{-1}(y)$$

funksiyasını təyin edir. Əgər $y=f(x)$ funksiyası ciddi monotondursa, yəni $x_2>x_1$ olduqda $f(x_2)>f(x_1)$ (və ya $f(x_2)<f(x_1)$) olarsa, onda $x=f^{-1}(y)$ tərs funksiyası birqiymətlidir və ciddi monotondur.

Aşağıdakı funksiyaların təyin oblastını tapın:

151. $y=\dfrac{x^2}{1+x}$.

152. $y=\sqrt{3x-x^3}$.

153. $y=(x-2)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

154. *a)* $y=\log(x^2-4)$;

b) $y=\log(x+2)+\log(x-2)$.

155. $y=\sqrt{\sin(\sqrt{x})}$.

156. $y=\sqrt{\cos x^2}$.

157. $y=\lg\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$.

158. $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\sin\pi x}$.

159. $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x}$.

160. $y=\arccos(2\sin x)$.

161. $y=\lg[\cos(\lg x)]$.

162(y). $y=(x+|x|)\sqrt{x\sin^2\pi x}$.

163. $y=\operatorname{ctg}\pi x+\arccos(2^x)$.

164. $y=\arcsin(1-x)+\lg(\lg x)$.

165. $y=(2x)!$

165.1. $y=\log_2\log_3\log_4 x$.

165.2. $y=\sqrt[4]{\lg\operatorname{tg} x}$.

165.3. $y=\sqrt{\sin 2x}+\sqrt{\sin 3x}$.

$(0\le x\le 2\pi)$.

Aşağıdakı funksiyaların təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu tapın:

166. $y=\sqrt{2+x-x^2}$.

167. $y=\lg(1-2\cos x)$.

168. $y=\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$.

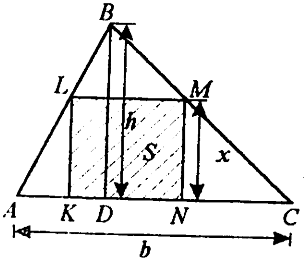
169. $y=\arcsin\left(\lg\dfrac{x}{10}\right)$.

170. $y=(-1)^x$.

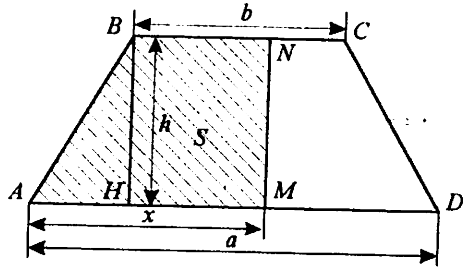
171. Oturacağı $AC=b$ və hündürlüyü $BD=h$ olan ABC üçbucağının (şək. 1) daxilinə hündürlüyü $NM=x$ olan $KLMN$ düzbucaqlısı çəkilmişdir. $KLMN$ düzbucaqlısının P perimetrini və S sahəsini x-dən asılı funksiya kimi ifadə edin.

$P=P(x)$ və $S=S(x)$ funksiyalarının qrafiklərini qurun.

172. ABC üçbucağında $AB=6$ *sm*, $AC=8$ *sm* və $\angle BAC=x$-dir. $BC=a$ tərəfini və $ABC=S$ sahəsini x dəyişənindən asılı funksiya kimi ifadə edin. $a=a(x)$ və $S=S(x)$ funksiyalarının qrafiklərini qurun.



Şək. 1.



Şək. 2.

173. Oturacaqları $AD=a$ və $BC=b$ $(a>b)$, hündürlüyü isə $HB=h$ olan $ABCD$ bərabəryanlı trapesiyasında (şək. 2) A təpəsindən $AM=x$ məsafədə $MN\|HB$ olmaqla MN düz xətti çəkilmişdir. $ABNMA$ fiqurunun S sahəsini x dəyişənindən asılı funksiya kimi ifadə edin. $S=S(x)$ funksiyasının qrafikini qurun:

174. Ox oxunun $0\le x\le 1$ parçasında 2 *qramlıq* kütlə müntəzəm paylanmışdır. Bu oxun $x=2$ və $x=3$ nöqtələrində isə hər biri 1 *qrama* bərabər olan kütlə yerləşmişdir. Ədədi qiymətcə $(-\infty, x)$ intervalında yerləşmiş kütləyə bərabər olan $m=m(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ funksiyasının analitik ifadəsini yazın və bu funksiyanın qrafikini qurun.

175. $y=\operatorname{sgn} x$ funksiyası aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0 \text{ olduqda;}\\ 0, & x=0 \text{ olduqda;}\\ 1, & x>0 \text{ olduqda.}\end{cases}$$

Bu funksiyanın qrafikini qurun. Göstərin ki,

$$|x|=x\operatorname{sgn} x.$$

176. $y=[x]$ (x ədədinin *tam hissəsi*) funksiyası aşağıdakı qaydada təyin olunur: $x=n+r$ (burada n - tam ədəddir və $0\le r<1$) olduqda $[x]=n$.

Bu funksiyanın qrafikini qurun.

177. Tutaq ki,

$$y=\pi(x) \quad (x\ge 0)$$

x ədədini aşmayan sadə ədədlərin sayını müəyyən edir. Arqumentin $0\le x\le 20$ qiymətləri üçün bu funksiyanın qrafikini qurun.

$y=f(x)$ funksiyası E_x çoxluğunu hansı E_y çoxluğuna inikas etdirir:

178(y). $y=x^2,\quad E_x=\{-1\le x\le 2\}.$

179. $y=\lg x,\quad E_x=\{10<x<1000\}.$

180. $y=\frac{1}{\pi}\operatorname{arcctg} x,\quad E_x=\{-\infty<x<+\infty\}.$

181. $y=\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{4},\quad E_x=\{0<|x|\le 1\}.$

182. $y=|x|,\quad E_x=\{1\le|x|\le 2\}.$

Əgər x dəyişəni $0<x<1$ intervalında dəyişirsə, onda y dəyişəni hansı çoxluqda dəyişir:

183. $y=a+(b-a)x.$

184. $y=\frac{1}{1-x}.$

185. $y=\frac{x}{2x-1}.$

186. $y=\sqrt{x-x^2}.$

187. $y=\operatorname{ctg}\pi x.$

188. $y=x+[2x].$

189. $f(x)=x^4-6x^3+11x^2-6x$ üçün $f(0), f(1), f(2), f(3), f(4)$ -ü tapın.

190. $f(x)=\lg x^2$ üçün $f(-1), f(-0{,}001), f(100)$ -ü tapın.

191. $f(x)=1+[x]$ üçün $f(0{,}9), f(0{,}99), f(0{,}999), f(1)$ -i tapın.

192. $f(x)=\begin{cases}1+x, & -\infty<x\le 0 \text{ olduqda};\\ 2^x, & 0<x<+\infty \text{ olduqda}\end{cases}$

üçün $f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)$ -ni tapın.

193. $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ üçün $f(0), f(-x), f(x+1), f(x)+1, f\left(\frac{1}{x}\right), \frac{1}{f(x)}$ -i tapın.

194. Əgər:

a) $f(x)=x-x^3$; *b)* $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$; *c)* $f(x)=(x+|x|)(1-x)$

olarsa, 1) $f(x)=0$; 2) $f(x)>0$; 3) $f(x)<0$ üçün x-in qiymətlərini tapın.

195. Əgər:

a) $f(x)=ax+b$; *b)* $f(x)=x^2$; *c)* $f(x)=a^x$

olarsa,

$$\varphi(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\text{ -i}$$

tapın.

196. Tutaq ki,

$$f(x)=ax^2+bx+c.$$

Göstərin ki,

$$f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)\equiv 0.$$

197. $f(0)=-2$ və $f(3)=5$ olarsa,

$$f(x)=ax+b$$

tam xətti funksiyasını tapın.

$f(1)$ və $f(2)$ nəyə bərabərdir (*xətti interpolyasiya*)?

198. $f(-2)=0$, $f(0)=1$, $f(1)=5$ olarsa, ikidərəcəli

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

tam rasional funksiyasını tapın.

$f(-1)$ və $f(0{,}5)$ nəyə bərabərdir (*kvadratik interpolyasiya*)?

199. $f(-1)=0$, $f(0)=2$, $f(1)=-3$, $f(2)=5$ olarsa, üçdərəcəli

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

tam rasional funksiyasını tapın.

200. $f(0)=15$, $f(2)=30$, $f(4)=90$ olarsa,

$$f(x)=a+bc^x$$

şəklində olan funksiyanı tapın.

201. İsbat edin ki, əgər

$$f(x)=ax+b$$

xətti funksiyası üçün arqumentin $x=x_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ qiymətləri ədədi silsilə əmələ gətirirsə, onda funksiyanın uyğun $y_n=f(x_n)$ $(n=1, 2, \ldots)$ qiymətləri də ədədi silsilə əmələ gətirir.

202. İsbat edin ki, əgər

$$f(x)=a^x \quad (a>0)$$

üstlü funksiyası üçün arqumentin $x=x_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ qiymətləri ədədi silsilə əmələ gətirirsə, onda funksiyanın uyğun $y_n=f(x_n)$ $(n=1, 2, \ldots)$ qiymətləri həndəsi silsilə əmələ gətirir.

203. Tutaq ki, $f(u)$ funksiyası $0<u<1$ olduqda təyin olunmuşdur. Aşağıdakı funksiyaların təyin oblastını tapın:

a) $f(\sin x)$; *b)* $f(\ln x)$; *c)* $f\left(\dfrac{|x|}{x}\right)$.

204. Tutaq ki,

$$f(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x}) \quad (a>0).$$

Göstərin ki,

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y).$$

205. Tutaq ki,

$$f(x)+f(y)=f(z).$$

z-i təyin edin:

a) $f(x)=ax$; *c)* $f(x)=\operatorname{arctg} x$ $(|x|<1)$;

b) $f(x)=\dfrac{1}{x}$; *d)* $f(x)=\log\dfrac{1+x}{1-x}$.

$\varphi[\varphi(x)]$, $\psi[\psi(x)]$, $\varphi[\psi(x)]$ və $\psi[\varphi(x)]$-i tapın:

206. $\varphi(x) = x^2$ və $\psi(x) = 2^x$.

207. $\varphi(x) = \operatorname{sgn} x$ və $\psi(x) = \dfrac{1}{x}$.

208. $\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \text{ olduqda}, \\ x, & x > 0 \text{ olduqda} \end{cases}$ və $\psi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \text{ olduqda}, \\ -x^2, & x > 0 \text{ olduqda}. \end{cases}$

209. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ olarsa, $f[f(x)]$, $f\{f[f(x)]\}$ -i tapın.

210. Tutaq ki,

$$f_n(x) = \underbrace{f(f(\ldots f(x)))}_{n \text{ dəfə}}.$$

Əgər

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

olarsa, $f_n(x)$ -i tapın.

211. $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$ olarsa, $f(x)$-i tapın.

212. $f\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ $(|x| \ge 2)$ olarsa, $f(x)$-i tapın.

213. $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}$ $(x > 0)$ olarsa, $f(x)$-i tapın.

213.1. $f\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = x^2$ olarsa, $f(x)$-i tapın.

İsbat edin ki, aşağıdakı funksiyalar göstərilən aralıqlarda monoton artandır:

214. $f(x) = x^2$ $(0 \le x < +\infty)$.

215. $f(x) = \sin x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}\right)$.

216. $f(x) = \operatorname{tg} x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

217. $f(x) = 2x + \sin x$ $(-\infty < x < +\infty)$.

İsbat edin ki, aşağıdakı funksiyalar göstərilən aralıqlarda monoton azalandır:

218. $f(x) = x^2$ $(-\infty < x \le 0)$. **219.** $f(x) = \cos x$ $(0 \le x \le \pi)$.

220. $f(x) = \operatorname{ctg} x$ $(0 < x < \pi)$.

221. Aşağıdakı funksiyaların monotonluğunu araşdırın:

a) $f(x) = ax + b$; *b)* $f(x) = ax^2 + bx + c$;

c) $f(x)=x^3$; *d)* $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$; *e)* $f(x)=a^x \quad (a>0)$.

222. Bərabərsizliyi hədbəhəd loqarifmləmək olarmı?

223. Tutaq ki, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ və $f(x)$ - monoton artan funksiyalardır. İsbat edin ki, əgər

$$\varphi(x)\le f(x)\le \psi(x)$$

olarsa, onda

$$\varphi[\varphi(x)]\le f[f(x)]\le \psi[\psi(x)].$$

$x=\varphi(y)$ tərs funksiyasını və onun təyin oblastını tapın:

224. $y=2x+3 \quad (-\infty<x<+\infty)$.

225. $y=x^2$; *a)* $-\infty<x\le 0$; *b)* $0\le x<+\infty$.

226. $y=\dfrac{1-x}{1+x} \quad (x\ne -1)$.

227. $y=\sqrt{1-x^2}$; *a)* $-1\le x\le 0$; *b)* $0\le x\le 1$.

228. $y=\operatorname{sh} x$, burada $\operatorname{sh} x=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x}) \quad (-\infty<x<+\infty)$.

229. $y=\operatorname{th} x$, burada $\operatorname{th} x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \quad (-\infty<x<+\infty)$.

230. $$y=\begin{cases} x, & -\infty<x<1 \text{ olduqda;}\\ x^2, & 1\le x\le 4 \text{ olduqda;}\\ 2^x, & 4<x<+\infty \text{ olduqda.}\end{cases}$$

231. $(-l,l)$ simmetrik intervalında təyin olunmuş $f(x)$ funksiyası

$$f(-x)=f(x)$$

olduqda *cüt*;

$$f(-x)=-f(x)$$

olduqda *tək* adlanır.

Verilmiş $f(x)$ funksiyalarından hansının cüt, hansının isə tək olduğunu müəyyən edin:

a) $f(x)=3x-x^3$;

b) $f(x)=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$;

c) $f(x)=a^x+a^{-x} \quad (a>0)$;

d) $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$;

e) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

232. İsbat edin ki, $(-l,l)$ simmetrik intervalında təyin olunmuş istənilən funksiyanı cüt və tək funksiyaların cəmi şəklində göstərmək mümkündür.

233. Tutaq ki, E çoxluğunda təyin olunmuş $f(x)$ funksiyası üçün elə $T>0$ ədədi (funksiyanın periodu) var ki, $x\in E$ olduqda

$$f(x \pm T) = f(x)$$

olur, onda $f(x)$ funksiyası *periodik* adlanır.

Verilmiş funksiyalardan hansının periodik olduğunu aydınlaşdırın və onların ən kiçik periodlarını təyin edin:

a) $f(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$;

b) $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$;

c) $f(x) = 2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 3\,\mathrm{tg}\frac{x}{3}$;

d) $f(x) = \sin^2 x$;

e) $f(x) = \sin x^2$;

f) $f(x) = \sqrt{\mathrm{tg}\, x}$;

g) $f(x) = \mathrm{tg}\sqrt{x}$;

h) $f(x) = \sin x + \sin(x\sqrt{2})$.

234. İsbat edin ki,

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ rasional olduqda}, \\ 0, & x \text{ irrasional olduqda} \end{cases}$$

Dirixle funksiyası üçün istənilən rasional ədəd perioddur.

235. İsbat edin ki, eyni çoxluqda təyin olunmuş və periodları nisbəti rasional ədəd olan iki periodik funksiyanın cəmi və hasili də periodik funksiyadır.

235.1. Əgər

$$f(x+T) \equiv -f(x) \quad (T > 0)$$

olarsa, onda $f(x)$ funksiyası *antiperiodik* adlanır. İsbat edin ki, $f(x)$ - periodu $2T$ olan periodik funksiyadır.

236. İsbat edin ki, əgər $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ funksiyası üçün $f(x+T) = kf(x)$ bərabərliyi ödənirsə, onda $f(x) = a^x\varphi(x)$, burada k və T - müsbət sabitlər, a - sabit, $\varphi(x)$ isə periodu T olan periodik funksiyadır.

§ 4. Funksiyanın qrafiki təsviri

1°. $y=f(x)$ funksiyasının qrafikini qurmaq üçün: 1) funksiyanın $X=\{x\}$ təyin oblastını müəyyən edirlər, 2) X-dən arqumentin $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qiymətlərinin kifayət qədər sıx şəbəkəsini seçirlər və funksiyanın uyğun qiymətlərinin cədvəlini tərtib edirlər:

$$y_i = f(x_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

3) $M_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ nöqtələrini Oxy koordinat müstəvisində qeyd edirlər və bu nöqtələri aralıq nöqtələrinin vəziyyətinə uyğun gələn xətlərlə birləşdirirlər.

2°. Funksiyanın qrafikini daha düzgün qurmaq üçün bu funksiyanın ümumi xassələrini öyrənmək lazımdır.

Birinci növbədə: 1) $f(x)=0$ tənliyini həll edərək funksiyanın qrafikinin Ox oxu ilə kəsişmə nöqtələrini (*funksiyanın sıfırlarını*) təyin etmək, 2) funksiyanın müsbət və ya mənfi olduğu yerlərdə arqumentin dəyişmə oblastını müəyyənləşdirmək, 3) əgər mümkünsə, *monotonluq* (artma və ya azalma) *aralıqlarını* aydınlaşdırmaq, 4) arqument funksiyanın təyin oblastının sərhəd nöqtələrinə qeyri-məhdud yaxınlaşdıqda funksiyanın xüsusiyyətini öyrənmək lazımdır.

Bu paraqrafda nəzərdə tutulur ki, sadə elementar funksiyaların - qüvvət, üstlü, triqonometrik və digər funksiyaların xassələri oxucuya məlumdur.

Bu xassələrdən istifadə edərək böyük hesablama işləri aparmadan bir çox funksiyaların qrafiklərinin eskizini tez çəkmək olur. Çox hallarda başqa qrafikləri bu sadə qrafiklərin kombinasiyasına (cəminə və ya hasilinə və i.a.) gətirmək mümkündür.

237. $a=0;\ \frac{1}{2};\ 1;\ 2;\ -1$ olduqda

$$y=ax$$

xətti bircins funksiyasının qrafikini qurun.

238. $b=0,\ 1,\ 2,\ -1$ olduqda

$$y=x+b$$

xətti funksiyasının qrafikini qurun.

239. Xətti funksiyaların qrafiklərini qurun:

a) $y=2x+3$; *b)* $y=2-0{,}1x$; *c)* $y=-\frac{x}{2}-1$.

240. Dəmirin xətti genişlənməsinin temperatur əmsalı $a=1{,}2\cdot 10^{-6}$ -dır. Uyğun miqyasda

$$l=f(T) \qquad (-40^0 \le T \le 100^0)$$

funksiyasının qrafikini qurun, burada T - dərəcələrlə temperaturdur və l – dəmir çubuğun T temperaturunda uzunluğudur, belə ki, $T=0^0$ olduqda $l=100$.

241. Ədəd oxu üzərində iki maddi nöqtə hərəkət edir. Bu nöqtələrdən biri zamanın $t=0$ başlanğıc anında koordinat başlanğıcından 20 *m* solda yerləşmişdir və sürəti $v_1=10$ *m/dəq*-dir, ikincisi isə həmin anda *O* nöqtəsindən 30 *m* sağda yerləşmişdir və sürəti $v_2=-20$ *m/dəq*-dir. Bu nöqtələrin hərəkət tənliklərinin qrafiklərini qurun, onların görüşmə vaxtını və yerini tapın.

242. İkidərəcəli tam rasional funksiyaların qrafiklərini (*parabolaları*) qurun:

a) $y=ax^2$, $a=1, \frac{1}{2}, 2, -1$ olduqda;

b) $y=(x-x_0)^2$, $x_0=0, 1, 2, -1$ olduqda;

c) $y=x^2+c$, $c=0, 1, 2, -1$ olduqda.

243. $y=ax^2+bx+c$ *kvadrat üçhədlisini*

$$y=y_0+a(x-x_0)^2$$

şəklinə gətirərək qrafikini qurun.

Misallara baxın:

a) $y=8x-2x^2$; *b)* $y=x^2-3x+2$;

c) $y=-x^2+2x-1$; *d*) $y=\frac{1}{2}x^2+x+1$.

244. Maddi nöqtə $v_0=600$ *m/san* başlanğıc sürətlə $\alpha=45^0$ bucaq altında üfüqi müstəviyə atılmışdır. Hərəkət trayektoriyasının qrafikini qurun, ən böyük qalxma hündürlüyünü və uçuş məsafəsini tapın (təqribən $g\approx 10$ *m/san²* hesab edin, havanın müqavimətini nəzərə almayın).

Dərəcəsi ikidən yuxarı olan tam rasional funksiyaların qrafiklərini qurun:

245. $y=x^3+1$. **247.** $y=x^2-x^4$.

246. $y=(1-x^2)(2+x)$. **248.** $y=x(a-x)^2(a+x)^3$ $(a>0)$.

Kəsr-xətti funksiyaların qrafiklərini (*hiperbolaları*) qurun:

249. $y=\frac{1}{x}$. **250.** $y=\frac{1-x}{1+x}$.

251. $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq 0,\ c\neq 0)$ kəsr-xətti funksiyasını

$$y=y_0+\frac{m}{x-x_0}$$

şəklinə gətirərək qrafikini qurun.

$$y=\frac{3x+2}{2x-3}$$

misalına baxın.

252. Təzyiq p_0=1 *atm.* olduqda qaz $v_0=12$ *m³* həcm tutur. Sabit temperaturda p təzyiqindən asılı olaraq qazın v həcminin dəyişməsi qrafikini qurun (*Boyl-Mariott qanunu*).

Kəsr-rasional funksiyaların qrafiklərini qurun:

253. $y=x+\frac{1}{x}$ (hiperbola).

254. $y=x^2+\frac{1}{x}$ (Nyuton üçdişlisi).

255. $y=x+\frac{1}{x^2}$. **256.** $y=\frac{1}{1+x^2}$ (Anezi əyrisi).

257. $y=\frac{2x}{1+x^2}$ (Nyuton serpentini).

258. $y=\frac{1}{1-x^2}$. **261.** $y=\frac{1}{1+x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{1-x}$.

259. $y=\frac{x}{1-x^2}$. **262.** $y=\frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$.

260. $y=\frac{1}{1+x}-\frac{2}{x}+\frac{1}{1-x}$.

263. $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{a_1x+b_1}$ $(a_1\neq 0)$ funksiyasını

$$y=kx+m+\frac{n}{x-x_0}$$

şəklinə gətirərək qrafikinin eskizni qurun.

$$y=\frac{x^2-4x+3}{x+1}$$

misalına baxın.

264. Cazibə mərkəzindən x məsafədə yerləşən maddi nöqtənin F cazibə qüvvəsinin mütləq qiymətinin qrafikini qurun, burada $x=1$ *m* olduqda $F=10$ *kQ* (*Nyuton qanunu*).

265. *Van-der-Vaals* qanununa əsasən sabit temperaturda real qazın v həcmi və p təzyiqi arasında əlaqə

$$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=c$$

düsturu ilə verilir. $a=2$, $b=0{,}1$ və $c=10$ olarsa, $p=p(v)$ funksiyasının qrafikini qurun.

İrrasional funksiyaların qrafiklərini qurun:

266. $y=\pm\sqrt{-x-2}$ (parabola).

267. $y=\pm x\sqrt{x}$ (Neyl parabolası).

268. $y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{100-x^2}$ (ellips).

269. $y=\pm\sqrt{x^2-1}$ (hiperbola).

270. $y=\pm\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

271. $y=\pm x\sqrt{100-x^2}$.

272. $y=\pm x\sqrt{\dfrac{x}{10-x}}$ (sissoid).

273. $y=\pm\sqrt{(x^2-1)(9-x^2)}$.

274. *a*) $n=1,\ 3,\ 5;$ *b*) $n=2,\ 4,\ 6$ olduqda

$$y=x^n$$

qüvvət funksiyasının qrafikini qurun.

275. *a*) $n=-1,-3;$ *b*) $n=-2,-4$ olduqda

$$y=x^n$$

qüvvət funksiyasının qrafikini qurun.

276. *a*) $m=2,\ 4;$ *b*) $m=3,\ 5$ olduqda

$$y = \sqrt[m]{x}$$

funksiyasının qrafikini qurun.

277. $y = \sqrt[m]{x^k}$ funksiyasının qrafikini qurun:

a) $m = 2,\ k = 1;$
b) $m = 2,\ k = 3;$
c) $m = 3,\ k = 1;$
d) $m = 3,\ k = 2;$
e) $m = 3,\ k = 4;$
f) $m = 4,\ k = 2;$
g) $m = 4,\ k = 3.$

278. $a = \frac{1}{2}$, 1, 2, e, 10 olduqda

$$y = a^x$$

üstlü funksiyasının qrafikini qurun.

279. $y = e^{y_1}$ mürəkkəb üstlü funksiyasının qrafikini qurun:

a) $y_1 = x^2;$ *c)* $y_1 = \frac{1}{x};$ *e)* $y_1 = -\frac{1}{x^2};$

b) $y_1 = -x^2;$ *d)* $y_1 = \frac{1}{x^2};$ *f)* $y_1 = \frac{2x}{1 - x^2}.$

280. $a = \frac{1}{2}$, 2, e, 10 olduqda

$$y = \log_a x$$

loqarifmik funksiyasının qrafikini qurun.

281. Funksiyaların qrafiklərini qurun:

a) $y = \ln(-x);$ *b)* $y = -\ln x.$

282. $y = \ln y_1$ mürəkkəb loqarifmik funksiyasının qrafikini qurun:

a) $y_1 = 1 + x^2;$ *b)* $y_1 = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3;$

c) $y_1 = \frac{1-x}{1+x};$ *d)* $y_1 = \frac{1}{x^2};$ *e)* $y_1 = 1 + e^x.$

283. Funksiyanın qrafikini qurun:

$$y = \log_x 2.$$

284. $A = 1, 10, -2$ olduqda

$$y = A \sin x$$

funksiyasının qrafikini qurun.

285. $x_0 = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$ olduqda

$$y = \sin(x - x_0)$$

funksiyasının qrafikini qurun.

286. $n = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ olduqda

$$y = \sin nx$$

funksiyasının qrafikini qurun.

287. $y = a\cos x + b\sin x$ funksiyasını

$$y = A\sin(x - x_0)$$

şəklinə gətirərək qrafikini qurun.

Misala baxın: $y = 6\cos x + 8\sin x$.

Triqonometrik funksiyaların qrafiklərini qurun:

288. $y=\cos x$.
289. $y=\operatorname{tg} x$.
290. $y=\operatorname{ctg} x$.
291. $y=\sec x$.
292. $y=\operatorname{cosec} x$.
293. $y=\sin^2 x$.
294. $y=\sin^3 x$.
295. $y=\operatorname{ctg}^2 x$.
296. $y=\sin x \cdot \sin 3x$.
297. $y=\pm\sqrt{\cos x}$.

Funksiyaların qrafikini qurun:

298. $y=\sin x^2$.
299. $y=\sin\frac{1}{x}$.
300. $y=\cos\frac{\pi}{x}$.
300.1. $y=\sin x \cdot \sin\frac{1}{x}$.
301. $y=\operatorname{tg}\frac{\pi}{x}$.
301.1. $y=\sec\frac{1}{x}$.
302. $y=x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)$.
303. $y=\pm\sqrt{1-x^2}\sin\frac{\pi}{x}$.
304. $y=\frac{\sin x}{x}$.
305. $y=e^x\cos x$.
306. $y=\pm 2^{-x}\sqrt{\sin \pi x}$.
307. $y=\frac{\cos x}{1+x^2}$.
308. $y=\ln(\cos x)$.
309. $y=\cos(\ln x)$.
310. $y=e^{\frac{1}{\sin x}}$.

Aşağıdakı tərs funksiyaların qrafikini qurun:

311. $y = \arcsin x$.
312. $y = \arccos x$.
313. $y = \operatorname{arctg} x$.
314. $y = \operatorname{arcctg} x$.
315. $y = \arcsin\frac{1}{x}$.
316. $y = \arccos\frac{1}{x}$.
317. $y = \operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$.
318. $y = \arcsin(\sin x)$.
319. $y = \arcsin(\cos x)$.
320. $y = \arccos(\cos x)$.
321. $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.
322. $y = \arcsin(2\sin x)$.

323. $y=\arcsin y_1$ funksiyasının qrafikini qurun:

a) $y_1 = 1 - \frac{x}{2}$; *c)* $y_1 = \frac{1-x}{1+x}$;

b) $y_1 = \frac{2x}{1+x^2}$; *d)* $y_1 = e^x$.

324. $y = \operatorname{arctg} y_1$ funksiyasının qrafikini qurun:

a) $y_1 = x^2$; *b)* $y_1 = \frac{1}{x^2}$; *c)* $y_1 = \ln x$; *d)* $y_1 = \frac{1}{\sin x}$.

324. 1. Funksiyaların qrafiklərini qurun:

a) $y = x^3 - 3x + 2$;

b) $y = \frac{x^3}{(1-x)(1+x)^2}$;

c) $y = \frac{x^2}{|x|-1}$;

d) $y = \sqrt{x(1-x^2)}$;

e) $y = 3\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$;

f) $y = \operatorname{ctg}\frac{\pi x}{1+x^2}$;

g) $y = \frac{1}{1 - 2^{\frac{x}{1-x}}}$;

h) $y = \lg(x^2 - 3x + 2)$;

i) $y = \arcsin\left(\frac{3}{2} - \sin x\right)$;

j) $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}\right)$;

k) $y = \log_{\cos x} \sin x$;

l) $y = (\sin x)^{\operatorname{ctg} x}$.

325. $y = f(x)$ funksiyasının qrafikini bilərək aşağıdakı funksiyaların qrafiklərini qurun:

a) $y = -f(x)$; *b)* $y = f(-x)$; *c)* $y = -f(-x)$.

326. $y = f(x)$ funksiyasının qrafikini bilərək aşağıdakı funksiyaların qrafiklərini qurun:

a) $y = f(x - x_0)$; *c)* $y = f(2x)$;

b) $y = y_0 + f(x - x_0)$; *d)* $y = f(kx + b)$ $(k \neq 0)$.

326.1. Tutaq ki,

$$f(x)=\begin{cases}1-|x|, & |x|\le 1 \text{ olduqda}\\ 0, & |x|>1 \text{ olduqda}.\end{cases}$$

$t=0$, $t=1$ və $t=2$ olduqda

$$y=\frac{1}{2}[f(x-t)+f(x+t)]$$

funksiyasının qrafikini qurun.

327. Funksiyaların qrafiklərini qurun:

a) $y=2+\sqrt{1-x}$; *d)* $y=-\arcsin(1+x)$;

b) $y=1-e^{-x}$; *e)* $y=3+2\cos 3x$.

c) $y=\ln(1+x)$;

328. $y=f(x)$ funksiyasının qrafikini bilərək aşağıdakı funksiyaların qrafiklərini qurun:

a) $y=|f(x)|$; *b)* $y=\frac{1}{2}(|f(x)|+f(x))$; *c)* $y=\frac{1}{2}(|f(x)|-f(x))$.

329. $y=f(x)$ funksiyasının qrafikini bilərək aşağıdakı funksiyaların qrafiklərini qurun:

a) $y=f^2(x)$; *d)* $y=f(f(x))$;

b) $y=\sqrt{f(x)}$; *e)* $y=\operatorname{sgn} f(x)$;

c) $y=\ln f(x)$; *f)* $y=[f(x)]$.

329.1. Tutaq ki,

$$f(x)=(x-a)(b-x) \quad (a<b).$$

Aşağıdakı funksiyaların qrafiklərini qurun:

a) $y=f(x)$; *e)* $y=e^{f(x)}$;

b) $y=f^2(x)$; *f)* $y=\lg f(x)$;

c) $y=\dfrac{1}{f(x)}$; *g)* $y=\operatorname{arcctg} f(x)$.

d) $y=\sqrt{f(x)}$;

329.2. Əgər: 1) $f(x)=x^2$; 2) $f(x)=x^3$ olarsa, aşağıdakı funksiyaların qrafiklərini qurun:

a) $y=\arcsin[\sin f(x)]$; *d)* $y=\arccos[\cos f(x)]$;

b) $y=\arcsin[\cos f(x)]$; *e)* $y=\operatorname{arctg}[\operatorname{tg} f(x)]$.

c) $y=\arccos[\sin f(x)]$;

330. $y=f(x)$ və $y=g(x)$ funksiyalarının qrafiklərini bilərək aşağıdakı funksiyaların qrafiklərini qurun:

a) $y=f(x)+g(x)$; *b)* $y=f(x)\,g(x)$; *c)* $y=f(g(x))$.

Qrafiklərin toplanması qaydasını tətbiq edərək aşağıdakı funksiyaların qrafiklərini qurun:

331. $y=1+x+e^x$.

332. $y=(x+1)^{-2}+(x-1)^{-2}$.

333. $y=x+\sin x$.

334. $y=x+\operatorname{arctg} x$.

335. $y=\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{3}\cos 3x$.

336. $y=\sin x-\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x$.

337. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

338. $y=|1-x|+|1+x|$.

339. $y=|1-x|-|1+x|$.

340. Hiperbolik funksiyaların qrafiklərini qurun:

a) $y=\operatorname{ch} x$, burada $\operatorname{ch} x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$;

b) $y=\operatorname{sh} x$, burada $\operatorname{sh} x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$;

c) $y=\operatorname{th} x$, burada $\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

Qrafiklərin vurulması qaydasını tətbiq edərək aşağıdakı funksiyaların qrafiklərini qurun:

341. $y=x\sin x$.

342. $y=x\cos x$.

343. $y=x^2\sin^2 x$.

344. $y=\frac{\sin x}{1+x^2}$.

345. $y=e^{-x^2}\cos 2x$.

346. $y=x\operatorname{sgn}(\sin x)$.

347. $y=[x]|\sin\pi x|$.

348. $y=\cos x\cdot\operatorname{sgn}(\sin x)$.

349. Tutaq ki,

$$f(x)=\begin{cases}1-|x|, & |x|\le 1 \text{ olduqda;}\\ 0, & |x|>1 \text{ olduqda.}\end{cases}$$

a) $a=0$; *b)* $a=1$; *c)* $a=2$ olduqda

$$y=f(x)f(a-x)$$

funksiyasının qrafikini qurun.

350. Funksiyanın qrafikini qurun:

$$y=x+\sqrt{x}\operatorname{sgn}(\sin\pi x).$$

$y=\frac{1}{f(x)}$ funksiyasının qrafikini qurun:

351. $f(x)=x^2(1-x^2)$.

352. $f(x)=x(1-x)^2$.

353. $f(x)=\sin^2 x$.

354. $f(x)=\ln x$.

355. $f(x)=e^x\sin x$.

356. $u = 2\sin x$ və

$$f(u) = \begin{cases} -1, & -\infty < u < -1 \text{ olduqda;} \\ u, & -1 \le u \le 1 \text{ olduqda;} \\ 1, & 1 < u < +\infty \text{ olduqda} \end{cases}$$

olarsa, $y = f(u)$ mürəkkəb funksiyasının qrafikini qurun.

357. Tutaq ki,

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(x + |x|\right) \quad \text{və} \quad \psi(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \text{ olduqda;} \\ x^2, & x \ge 0 \text{ olduqda.} \end{cases}$$

Aşağıdakı funksiyaların qrafiklərini qurun:

a) $y = \varphi[\varphi(x)]$; *c)* $y = \psi[\varphi(x)]$;
b) $y = \varphi[\psi(x)]$; *d)* $y = \psi[\psi(x)]$.

358. Tutaq ki,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 1 \text{ olduqda;} \\ 0, & |x| > 1 \text{ olduqda} \end{cases}$$

və

$$\psi(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & |x| \le 2 \text{ olduqda;} \\ 2, & |x| \ge 2 \text{ olduqda.} \end{cases}$$

Aşağıdakı funksiyaların qrafiklərini qurun:

a) $y = \varphi[\varphi(x)]$; *c)* $y = \psi[\varphi(x)]$;
b) $y = \varphi[\psi(x)]$; *d)* $y = \psi[\psi(x)]$.

359. $x > 0$ müsbət oblastında təyin olunmuş $f(x)$ funksiyasını $x<0$ mənfi oblastına elə davam etdirin ki, alınan funksiya 1) cüt; 2) tək olsun:

a) $f(x) = 1 - x$; *d)* $f(x) = \sin x$;
b) $f(x) = 2x - x^2$; *e)* $f(x) = e^x$;
c) $f(x) = \sqrt{x}$; *f)* $f(x) = \ln x$.

Funksiyaların uyğun qrafiklərini qurun.

360. Funksiyaların qrafiklərinin hansı şaquli oxlara nəzərən simmetrik olduqlarını təyin edin:

a) $y = ax^2 + bx + c$; *c)* $y = \sqrt{a + x} + \sqrt{b - x}$ $(0 < a < b)$;

b) $y = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(1-x)^2}$; *d)* $y = a + b\cos x$.

361. Funksiyaların qrafiklərinin hansı mərkəzlərə nəzərən simmetrik olduqlarını təyin edin:

a) $y = ax + b$; *d)* $y = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-3}$;

b) $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$; *e)* $y = 1 + \sqrt[3]{x - 2}$.

c) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$;

362. Periodik funksiyaların qrafiklərini qurun:

a) $y=|\sin x|$; *b)* $y=\operatorname{sgn}\cos x$;

c) $y=f(x)$, burada $f(x+2l)\equiv f(x)$ və $0\le x\le 2l$ olduqda $f(x)=A\frac{x}{l}\left(2-\frac{x}{l}\right)$;

d) $y=[x]-2\left[\frac{x}{2}\right]$;

e) $y=(x)$, burada (x) x ədədi ilə ona ən yaxın olan tam ədəd arasındakı məsafədir.

363. İsbat edin ki, əgər $y=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ funksiyasının qrafiki iki $x=a$ və $x=b$ $(b>a)$ şaquli oxlarına nəzərən simmetrikdirsə, onda $f(x)$ funksiyası periodikdir.

364. İsbat edin ki, əgər $y=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ funksiyasının qrafiki iki A (a, y_0) və B (b, y_1) $(b>a)$ nöqtələrinə nəzərən simmetrikdirsə, onda $f(x)$ funksiyası xətti funksiyanın və periodik funksiyanın cəmi şəklindədir. Xüsusi halda, $y_0=y_1$ olarsa, onda $f(x)$ funksiyası periodikdir.

365. İsbat edin ki, əgər $y=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ funksiyasının qrafiki A (a, y_0) nöqtəsinə və $x=b$ $(b\ne a)$ düz xəttinə nəzərən simmerikdirsə, onda $f(x)$ funksiyası periodikdir.

366. $f(x+1)=2f(x)$ və $0\le x\le 1$ olduqda $f(x)=x(1-x)$ olarsa, $y=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ funksiyasının qrafikini qurun.

367. $f(x+\pi)=f(x)+\sin x$ və $0\le x\le\pi$ olduqda $f(x)=0$ olarsa, $y=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ funksiyasının qrafikini qurun.

368. $y=y(x)$ funksiyasının qrafikini qurun:

a) $x=y-y^3$; *c)* $x=y-\ln y$;

b) $x=\frac{1-y}{1+y^2}$; *d)* $x^2=\sin y$.

369. Parametrik şəkildə verilmiş $y=y(x)$ funksiyasının qrafikini qurun:

a) $x=1-t$, $y=1-t^2$;

b) $x=t+\frac{1}{t}$, $y=t+\frac{1}{t^2}$;

c) $x=10\cos t$, $y=\sin t$ (ellips);

d) $x=\operatorname{ch} t$, $y=\operatorname{sh} t$ (hiperbola);

e) $x=5\cos^2 t$, $y=3\sin^2 t$;

f) $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$ (sikloid);

g) $x = \sqrt[t+1]{t}$, $y = \sqrt[t]{t+1}$ $(t > 0)$.

370. Qeyri-aşkar funksiyaların qrafiklərini qurun:

a) $x^2 - xy + y^2 = 1$ (ellips);

b) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ (dekart yarpağı);

c) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ (parabola);

d) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$ (astroid);

e) $\sin x = \sin y$;

f) $\cos(\pi x^2) = \cos(\pi y)$;

g) $x^y = y^x$ $(x > 0,\ y > 0)$;

h) $x - |x| = y - |y|$.

370.1. Qeyri-aşkar funksiyaların qrafiklərini qurun:

a) $\min(x, y) = 1$; *c*) $\max(|x|, |y|) = 1$;

b) $\max(x, y) = 1$; *d*) $\min(x^2, y) = 1$.

371. $(r,\ \varphi)$ polyar koordinat sistemində $r = r(\varphi)$ funksiyasının qrafikini qurun:

a) $r = \varphi$ (Arximed spiralı);

b) $r = \dfrac{\pi}{\varphi}$ (hiperbolik spiral);

c) $r = \dfrac{\varphi}{\varphi + 1}$ $(0 \le \varphi < +\infty)$;

d) $r = 2^{\frac{\varphi}{2\pi}}$ (loqarifmik spiral);

e) $r = 2(1 + \cos\varphi)$ (kardiod);

f) $r = 10\sin 3\varphi$ (üçləçəkli qızılgül);

g) $r^2 = 36\cos 2\varphi$ (Bernulli lemniskatı);

h) $\varphi = \dfrac{r}{r-1}$ $(r > 1)$;

i) $\varphi = 2\pi \sin r$.

371.1. r və φ polyar koordinat sistemində aşağıdakı funksiyaların qrafiklərini qurun:

a) $\varphi = 4r - r^2$; *c*) $r^2 + \varphi^2 = 100$.

b) $\varphi = \dfrac{12r}{1 + r^2}$;

371.2. r və φ polyar koordinat sistemində parametrik şəkildə verilmiş funksiyaların qrafiklərini qurun ($t \geq 0$ - parametrdir):

$$a)\ \left.\begin{array}{l}\varphi = t\cos^2 t,\\ r = t\sin^2 t,\end{array}\right\} \qquad b)\ \left.\begin{array}{l}\varphi = 1 - 2^{-t}\sin\dfrac{\pi t}{2},\\ r = 1 - 2^{-t}\cos\dfrac{\pi t}{2}.\end{array}\right\}$$

372. $y = x^3 - 3x + 1$ funksiyasının qrafikini quraraq

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

tənliyini təqribi həll edin.

Aşağıdakı tənlikləri qrafiki həll edin:

373. $x^3 - 4x - 1 = 0$.

374. $x^4 - 4x + 1 = 0$.

375. $x = 2^{-x}$.

376. $\lg x = 0{,}1x$.

377. $10^x = x^2$.

378. $\operatorname{tg} x = x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$

Tənliklər sistemini qrafiki həll edin:

379. $x + y^2 = 1, \qquad 16x^2 + y = 4.$

380. $x^2 + y^2 = 100, \qquad y = 10(x^2 - x - 2).$

§ 5. Funksiyanın limiti

1°. **F u n k s i y a n ı n   m ə h d u d l u ğ u.** Tutaq ki, (a,b) aralığında verilmiş $f(x)$ fuknsiyası üçün elə m və M ədədləri var ki, $x \in (a,b)$ olduqda

$$m \leq f(x) \leq M$$

şərti ödənilir. Onda $f(x)$ funksiyası verilmiş (a,b) aralığında məhdud adlanır.

Verilmiş (a,b) aralığında $m_0 = \inf\limits_{x \in (a,b)} \{f(x)\} = \max m$ ədədi $f(x)$ funksiyasının *aşağı sərhədi*, $M_0 = \sup\limits_{x \in (a,b)} \{f(x)\} = \min M$ ədədi isə $f(x)$ funksiyasının *yuxarı sərhədi* adlanır. $M_0 - m_0$ fərqi (a,b) aralığında *funksiyanın rəqsi* adlanır.

2°. **F u n k s i y a n ı n   n ö q t ə d ə   l i m i t i.** Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası a limit nöqtəsi olan $X = \{x\}$ çoxluğunda təyin olunmuşdur.

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \tag{1}$$

yazılışı o deməkdir ki, istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ədədi var ki, $0 < |x - a| < \delta$ şərtini ödəyən və $f(x)$-in təyin oblastından olan bütün x-lər üçün

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Funksiyanın (1) limitinin varlığı üçün zəruri və kafi şərt a-ya yığılan istənilən x_n $(x_n \neq a;\ x_n \in X;\ n = 1, 2, \ldots)$ ardıcıllığı üçün

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$$

bərabərliyinin ödənilməsidir.

İki görkəmli limit doğrudur:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \qquad 2)\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

K o ş i   m e y a r ı. $f(x)$ funksiyasının a nöqtəsində limitinin varlığı üçün zəruri və kafi şərt istənilən $\varepsilon>0$ üçün elə $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ ədədinin olmasıdır ki, $f(x)$ funksiyasının təyin oblastından olan və $0<|x'-a|<\delta$, $0<|x''-a|<\delta$ şərtini ödəyən ixtiyari x' və x'' nöqtələri üçün

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

bərabərsizliyi ödənilsin.

3⁰. B i r t ə r ə f l i   l i m i t l ə r. Əgər $0<a-x<\delta(\varepsilon)$ olduqda

$$|A'-f(x)|<\varepsilon$$

olarsa, A' ədədi $f(x)$ funksiyasının a nöqtəsində *soldan limiti* adlanır:

$$A'=\lim_{x\to a-0}f(x)=f(a-0).$$

Analoji olaraq, əgər $0<x-a<\delta(\varepsilon)$ olduqda

$$|A''-f(x)|<\varepsilon$$

olarsa, A'' ədədi $f(x)$ funksiyasının a nöqtəsində *sağdan limiti* adlanır:

$$A''=\lim_{x\to a+0}f(x)=f(a+0).$$

$f(x)$ funksiyasının a nöqtəsində limitinin varlığı üçün zəruri və kafi şərt

$$f(a-0)=f(a+0)$$

olmasıdır.

4⁰. S o n s u z   l i m i t. $\lim_{x\to a}f(x)=\infty$ yazılışı o deməkdir ki, istənilən $E>0$ üçün $0<|x-a|<\delta(E)$ olduqda

$$|f(x)|>E$$

bərabərsizliyi doğrudur.

5⁰. X ü s u s i   l i m i t. Əgər a-ya yaxınlaşan müəyyən x_n $(x_n\neq a)$ ardıcıllığı üçün

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=B$$

olarsa, onda B ədədi (və ya ∞ simvolu) a nöqtəsində $f(x)$ *funksiyasının xüsusi limiti* adlanır.

Bu xüsusi limitlərin ən kiçiyi və ən böyüyü

$$\underline{\lim}_{x\to a}f(x) \quad \text{və} \quad \overline{\lim}_{x\to a}f(x)$$

kimi işarə olunur və uyğun olaraq a nöqtəsində $f(x)$ funksiyasının *aşağı* və *yuxarı limiti* adlanır.

$$\underline{\lim}_{x\to a}f(x)=\overline{\lim}_{x\to a}f(x)$$

bərabərliyi a nöqtəsində $f(x)$ funksiyasının (sonlu və ya sonsuz) limitinin varlığı üçün zəruri və kafi şərtdir.

381. Tutaq ki, m və n - qarşılıqlı sadə tam ədədlərdir və $n>0$. Göstərin ki,

$$f(x)=\begin{cases} n, & x=\frac{m}{n} \text{ olduqda;} \\ 0, & x - \text{irrasional olduqda} \end{cases}$$

funksiyası sonludur, lakin hər bir x nöqtəsində məhdud deyil (yəni bu nöqtənin istənilən ətrafında qeyri-məhduddur).

382. Əgər $f(x)$ funksiyası: *a*) intervalın; *b*) parçanın istənilən nöqtəsində təyin olunub və lokal məhduddursa, onda bu funksiya verilmiş intervalda və ya uyğun parçada məhduddurmu? Uyğun misallar göstərin.

383. Göstərin ki,

$$f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}$$

funksiyası $-\infty<x<+\infty$ intervalında məhduddur.

384. Göstərin ki,

$$f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$$

funksiyası $x=0$ nöqtəsinin ixtiyari ətrafında qeyri-məhduddur, lakin $x\to 0$ olduqda sonsuz böyük deyil.

385. $0<x<\varepsilon$ intervalında

$$f(x)=\ln x\cdot\sin^2\frac{\pi}{x}$$

funksiyasının məhdudluğunu araşdırın.

386. Göstərin ki, $0\le x<+\infty$ oblastında

$$f(x)=\frac{x}{1+x}$$

funksiyasının aşağı sərhədi $m=0$, yuxarı sərhədi isə $M=1$-dir.

387. $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında təyin olunub və monoton artandır. Bu parçada onun aşağı və yuxarı sərhədi nəyə bərabərdir?

Funksiyaların aşağı və yuxarı sərhədlərini təyin edin:

388. $f(x)=x^2$, $[-2,5)$-də.

389. $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, $(-\infty,+\infty)$-da.

390. $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$, $(0,+\infty)$-da.

391. $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$, $(0,+\infty)$-da.

392. $f(x)=\sin x$, $(0,+\infty)$-da.

393. $f(x)=\sin x+\cos x$, $[0,\ 2\pi]$ -də.

394. $f(x)=2^x$, $(-1,\ 2)$ -də.

395. $f(x)=[x]$: *a)* $(0,2)$ -də və *b)* $[0,\ 2]$-də.

396. $f(x)=x-[x]$, $[0,\ 1]$ -də.

397. *a)* $(1;\ 3)$; *b)* $(1{,}9;\ 2{,}1)$; *c)* $(1{,}99;\ 2{,}01)$; *d)* $(1{,}999;\ 2{,}001)$ intervallarında $f(x)=x^2$ funksiyasının rəqsini təyin edin.

398. *a)* $(-1;\ 1)$; *b)* $(-0{,}1;\ 0{,}1)$; *c)* $(-0{,}01;\ 0{,}01)$; *d)* $(-0{,}001;\ 0{,}001)$ intervallarında $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ funksiyasının rəqsini təyin edin.

399. Tutaq ki, $m\ [f]$ və $M\ [f]$ - (a,b) aralığında $f(x)$ funksiyasının uyğun olaraq aşağı və yuxarı sərhədidir. İsbat edin ki, əgər $f_1(x)$ və $f_2(x)$ (a,b)-də təyin olunmuş funksiyalardırsa, onda

$$m[f_1+f_2]\geq m[f_1]+m[f_2]$$

və

$$M[f_1+f_2]\leq M[f_1]+M[f_2].$$

Elə $f_1(x)$ və $f_2(x)$ funksiyaları qurun ki, axırıncı münasibətlərdə: *a)* bərabərlik halı; *b)* bərabərsizlik halı ödənsin.

400. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a,+\infty)$ oblastında təyin olunub və hər bir $[a,b]\subset[a,\ +\infty)$ parçasında məhduddur.

$$m(x)=\inf_{a\leq\xi\leq x} f(\xi)$$

və

$$M(x)=\sup_{a\leq\xi\leq x} f(\xi)$$

götürək. *a)* $f(x)=\sin x$; *b)* $f(x)=\cos x$ olarsa,

$$y=m(x) \text{ və } y=M(x)$$

funksiyalarının qrafiklərini qurun,

401. "$\varepsilon-\delta$"-mühakiməsinin köməyi ilə isbat edin ki,

$$\lim_{x\to 2} x^2=4.$$

Aşağıdakı cədvəli doldurun:

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001	...
δ					

402. "$E-\delta$" dilində isbat edin ki,

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{(1-x)^2}=+\infty.$$

Aşağıdakı cədvəli doldurun:

E	10	100	1000	10000	...
δ					

403. Bərabərsizliklərin köməyi ilə aşağıdakı təklifləri ifadə edin:

a) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$; *b)* $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b$; *c)* $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b$.

Uyğun misallar göstərin.

Bərabərsizliklərin köməyi ilə aşağıdakı təklifləri ifadə edin və uyğun misallar göstərin:

404. *a)* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$; *b)* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$; *c)* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$.

405. *a)* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$;
b) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$;
c) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$;
d) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$;
e) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=-\infty$;
f) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=+\infty$;
g) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$;
h) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=-\infty$;
i) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=+\infty$.

406. *a)* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$;
b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$;
c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$;
d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$;
e) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$;
f) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$;
g) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$;
h) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$;
i) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

407. Tutaq ki, $y=f(x)$. Bərabərsizliklərin köməyi ilə aşağıdakı təklifləri ifadə edin:

a) $y\to b-0$, $x\to a$ olduqda;
b) $y\to b-0$, $x\to a-0$ olduqda;
c) $y\to b-0$, $x\to a+0$ olduqda;
d) $y\to b+0$, $x\to a$ olduqda;
e) $y\to b+0$, $x\to a-0$ olduqda;
f) $y\to b+0$, $x\to a+0$ olduqda;
g) $y\to b-0$, $x\to\infty$ olduqda;
h) $y\to b-0$, $x\to-\infty$ olduqda;
i) $y\to b-0$, $x\to+\infty$ olduqda;
j) $y\to b+0$, $x\to\infty$ olduqda;
k) $y\to b+0$, $x\to-\infty$ olduqda;
l) $y\to b+0$, $x\to+\infty$ olduqda.

Uyğun misallar göstərin.

408. Tutaq ki,

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n,$$

burada a_i $(i = 0, 1, \ldots, n;\ n \geq 1,\ a_0 \neq 0)$ - həqiqi ədədlərdir.

İsbat edin ki,

$$\lim_{x\to\infty} |P(x)| = +\infty .$$

409. Tutaq ki,

$$R(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m},$$

burada $a_0 \neq 0$ və $b_0 \neq 0$.

İsbat edin ki,

$$\lim_{x\to\infty} R(x) = \begin{cases} \infty, & n > m \text{ olduqda;} \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & n = m \text{ olduqda;} \\ 0, & n < m \text{ olduqda.} \end{cases}$$

410. Tutaq ki,

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

burada $P(x)$ və $Q(x)$ x-dən asılı çoxhədlilərdir və

$$P(a) = Q(a) = 0 .$$

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

limitinin hansı mümkün qiymətləri var?

Aşağıdakı limitləri tapın:

411. *a)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; *b)* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; *c)* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

412. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$.

413. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$.

414. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$ (m və n - natural ədədlərdir).

415. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$.

416. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$.

417. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)(x^2+1)\,\dots\,(x^n+1)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}}$.

418. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$.

419. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$.

420. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$.

421. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$.

422. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$.

423. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$.

424. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+x^2+\dots+x^n-n}{x-1}$.

424.1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$.

425. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ (m və n - natural ədədlərdir).

426. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$ (n - natural ədəddir).

427. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$ (n - natural ədəddir).

428. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$ (m və n - natural ədədlərdir).

429. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left[\left(x+\dfrac{a}{n}\right)+\left(x+\dfrac{2a}{n}\right)+\dots+\left(x+\dfrac{(n-1)a}{n}\right)\right]$.

430. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left[\left(x+\dfrac{a}{n}\right)^2+\left(x+\dfrac{2a}{n}\right)^2+\dots+\left(x+\dfrac{(n-1)a}{n}\right)^2\right]$.

Göstəriş. Misal 2-yə bax.

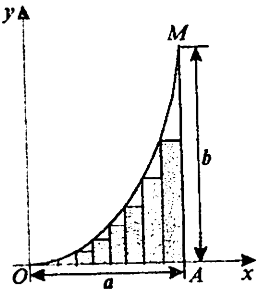
431. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+3^2+\dots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+\dots+(2n)^2}$.

432. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^3}-\dfrac{n}{4}\right)$.

G ö s t ə r i ş. Misal 3-ə bax.

433. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^3+4^3+7^3+\ldots+(3n-2)^3}{[1+4+7+\ldots+(3n-2)]^2}$.

434. $y=b\left(\dfrac{x}{a}\right)^2$ parabolası, Ox oxu və $x=a$ düz xətti ilə hüdudlanmış OAM əyrixətli üçbucağının (şək. 3) sahəsini onun daxilinə çəkilmiş və oturacaqları $\dfrac{a}{n}$ olan düzbucaqlıların sahələri cəminin ($n\to\infty$ olduqda) limiti kimi hesablayın.



Şək. 3.

Limitləri tapın:

435. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

436. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$.

437. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

438. $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

439. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $(a>0)$.

440. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.

441. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$.

442. $\lim\limits_{x\to16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.

443. $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

444. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$ (n - tam ədəddir).

445. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x}$.

446. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}$.

447. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$.

448. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

449. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$.

450. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}$.

451. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$.

452. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$ (m və n - tam ədədlərdir).

453. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\,\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$ (m və n - tam ədədlərdir).

454. Tutaq ki, $P(x)=a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ və m - tam əddədir. İsbat edin ki,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+P(x)}-1}{x}=\frac{a_1}{m}.$$

Limitləri tapın:

455. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$ (m və n - tam ədədlərdir).

455.1. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-\sqrt{x}}-\frac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$.

456. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\ldots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$.

457. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right]$.

458. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$.

459. $\lim\limits_{x\to +\infty}x\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right)$.

460. $\lim\limits_{x\to +0}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}\right)$.

461. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)$.

462. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$.

463. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{3}}\left[(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}\right]$.

464. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)$.

465. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[n]{(x+a_1)\ \dots\ (x+a_n)}-x\right]$.

466. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n}{x^n}$ (n - natural ədəddir).

467. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n-\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^n}{x}$ (n - natural ədəddir).

468. b ($b\neq0$) və c əmsalları sabit olarsa, a əmsalı isə sıfra yaxınlaşarsa, $ax^2+bx+c=0$ kvadrat tənliyinin x_1 və x_2 kökləri necə dəyişir?

469. a və b sabitlərini

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$$

şərtindən tapın.

470. a_i və b_i (i=1, 2) sabitlərini

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1\right)=0 \quad \text{və} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-a_2x-b_2\right)=0$$

şərtlərindən tapın.

Limitləri tapın:

471. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{x}$.

472. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

473. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$

(m və n – tam ədədlərdir).

474. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

474.1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$.

474.2. $\lim\limits_{x\to0} x\operatorname{ctg}3x$.

475. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}$.

476. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$.

477. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$.

478. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$.

479. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}2x\ \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$.

480. $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

481. Bərabərlikləri isbat edin:

a) $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$; b) $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$;

c) $\lim\limits_{x\to a}\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}a \quad \left(a\neq\dfrac{2n-1}{2}\pi;\ n=0,\pm1,\pm2,\ldots\right)$.

Limitləri tapın:

482. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

483. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$.

484. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}a}{x-a}$.

485. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}a}{x-a}$.

486. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sec x-\sec a}{x-a}$.

487. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{cosec}x-\operatorname{cosec}a}{x-a}$.

488. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+2x)-2\sin(a+x)+\sin a}{x^2}$.

489. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(a+2x)-2\cos(a+x)+\cos a}{x^2}$.

490. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(a+2x)-2\operatorname{tg}(a+x)+\operatorname{tg}a}{x^2}$.

491. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ctg}(a+2x)-2\operatorname{ctg}(a+x)+\operatorname{ctg}a}{x^2}$.

492. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)\sin(a+2x)-\sin^2 a}{x}$.

493. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$.

494. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$.

495. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$.

496. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\operatorname{tg}^3 x-3\operatorname{tg}x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$.

497. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(a+x)\operatorname{tg}(a-x)-\operatorname{tg}^2 a}{x^2}$.

498. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\operatorname{ctg}^3 x}{2-\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}^3 x}$.

499. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

500. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

501. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

502. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$.

503. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos(\sqrt{x})}$.

504. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$.

505. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$.

506. *a)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$; *b)* $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$; *c)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$.

507. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$.

508. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}$.

509. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin^n\frac{2\pi n}{3n+1}\right)$.

510. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}+0}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\operatorname{tg}2x}$.

511. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$.

512. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$.

513. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

514. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$.

515. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}$.

516. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^{x}$ $(a_1>0, a_2>0)$.

517. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

518. $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x}$.

519. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

519.1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$.

520. $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$.

521. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

522. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$.

523. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$.

524. $\lim\limits_{x\to 0}\left[tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]^{\operatorname{ctg}x}$.

525. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}$.

526. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.

527. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+x}{n-1}\right)^{n}$.

528. $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n\frac{x}{\sqrt{n}}$.

529. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

530. $\lim\limits_{x\to+\infty} x[\ln(x+1)-\ln x]$.

531. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}$ $(a>0)$.

532. $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sin\ln(x+1)-\sin\ln x]$.

533. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$.

534. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\lg\frac{100+x^2}{1+100x^2}\right)$.

535. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}$.

536. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\ln(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$.

537. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\log(x+h)+\log(x-h)-2\log x}{h^2}$ $(x>0)$.

538. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+ax\right)}{\sin bx}$.

539. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$.

540. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln\dfrac{nx+\sqrt{1-n^2x^2}}{x+\sqrt{1-x^2}}\right)$.

540.1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(nx+\sqrt{1-n^2x^2})}{\ln(x+\sqrt{1-x^2})}$.

541. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x}$ $(a>0)$.

542. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^x-x^a}{x-a}$ $(a>0)$.

543. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^x-a^a}{x-a}$ $(a>0)$.

544. $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$.

545. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x\cdot 2^x}{1+x\cdot 3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

545.1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x}\right)^{\operatorname{ctg}^3 x}$.

545.2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(\pi x^\alpha)}{\sin(\pi x^\beta)}$.

545.3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin^2(\pi\cdot 2^x)}{\ln[\cos(\pi\cdot 2^x)]}$.

546. $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{tg}^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)$.

547. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$.

548. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^\alpha-a^\alpha}{x^\beta-a^\beta}$ $(a>0)$.

549. $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{a^x-a^b}{x-b}$ $(a>0)$.

550. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}$ $(a>0)$.

551. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$.

552. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x}-1)$ $(x>0)$.

553. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x})$ $(x>0)$.

554. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n$ $(a>0,\ b>0)$.

555. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$ $(a>0,\ b>0)$.

556. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$.

557. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$.

558. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a>0,\ b>0)$.

559. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2}$ $(a>0,\ b>0)$.

560. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-x^a}$ $(a>0)$.

561. *a*) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$; *b*) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$.

562. $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln(1+2^x)\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$.

563. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\log_x 2$.

564. İsbat edin ki,

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^n}{a^x}=0 \quad (a>1,\ n>0).$$

565. İsbat edin ki,

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\log_a x}{x^{\varepsilon}}=0 \quad (a>1,\ \varepsilon>0).$$

Limitləri tapın:

566. *a*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$; *b*) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$.

567. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+xe^x)}{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$.

568. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[(x+2)\ln(x+2)-2(x+1)\ln(x+1)+x\ln x\right]$.

569. $\lim\limits_{x\to +0}\left[\ln(x\ln a)\cdot\ln\left(\dfrac{\ln ax}{\ln(x/a)}\right)\right]$ $(a>1)$.

570. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\ln\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\ln^{-2}\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.

571. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$.

572. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(xe^{x})-\cos(xe^{-x})}{x^{3}}$.

573. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2e^{\frac{x}{x+1}}-1\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$.

574. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\sec\frac{\pi x}{2}}$.

575. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin^{\alpha+\beta}x}{\sqrt{(1-\sin^{\alpha}x)(1-\sin^{\beta}x)}}$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$.

576. *a)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh}x}{x}$; *b)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch}x-1}{x^{2}}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{th}x}{x}$ (misal 340-a bax).

576.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh}^2 x}{\ln(\operatorname{ch}3x)}$ (misal 340-a bax).

577. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{x^2+x}-\operatorname{sh}\sqrt{x^2-x}}{\operatorname{ch}x}$.

577.1. *a)* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{sh}x-\operatorname{sh}a}{x-a}$; *б)* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{ch}x-\operatorname{ch}a}{x-a}$.

577.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\operatorname{ch}x}{\ln\cos x}$.

578. $\lim\limits_{x\to +\infty}(x-\ln\operatorname{ch}x)$.

579. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\operatorname{th}x}$.

580. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)^{n^2}$.

581. $\lim\limits_{x\to\infty}\arcsin\dfrac{1-x}{1+x}$.

582. $\lim\limits_{x\to +\infty}\arccos(\sqrt{x^2+x}-x)$.

583. $\lim\limits_{x\to 2}\operatorname{arctg}\dfrac{x-4}{(x-2)^2}$.

584. $\lim\limits_{x\to -\infty}\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

585. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}(x+h)-\operatorname{arctg}x}{h}$.

586. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\frac{1+x}{1-x}}{\operatorname{arctg}(1+x)-\operatorname{arctg}(1-x)}$.

587. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n(x^2+1)+x}\cdot\operatorname{tg}^{n}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2n}\right)\right]$.

588. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}\right)$.

589. $\lim\limits_{x\to +\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

590. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right]^{\operatorname{cosec}(\pi\sqrt{1+n^2})}$.

591. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{100}}e^{-\frac{1}{x^2}}$. **592.** $\lim\limits_{x\to +0} x\ln x$.

593. *a)* $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$; *b)* $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$.

594. *a)* $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$;

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$.

594. 1. $f(x)=\ln\dfrac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{x+\sqrt{x^2+b^2}}$ üçün $h=\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)-\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)$ ifadəsinin qiymətini tapın.

595. *a)* $\lim\limits_{x\to 1-0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x}$; *b)* $\lim\limits_{x\to 1+0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x}$.

596. *a)* $\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$; *b)* $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

597. *a)* $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$; *b)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$.

598. İsbat edin ki,

a) $x\to -\infty$ olduqda $\dfrac{2x}{1+x}\to 2+0$;

b) $x\to +\infty$ olduqda $\dfrac{2x}{1+x}\to 2-0$.

599. İsbat edin ki,

a) $x\to -0$ olduqda $2^x\to 1-0$;

b) $x\to +0$ olduqda $2^x\to 1+0$.

600. $f(x)=x+[x^2]$ üçün $f(1)$, $f(1-0)$, $f(1+0)$-ı tapın.

601. $f(x)=\operatorname{sgn}(\sin\pi x)$ üçün $f(n)$, $f(n-0)$, $f(n+0)$-ı $(n=0,\pm 1,\ldots)$ tapın.

Tapın:

602. $\lim\limits_{x\to 0}x\sqrt{\cos\dfrac{1}{x}}$. **605.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$.

603. $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]$. **606.** $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sin\sin\ldots\sin}_{n\ \text{dəfə}} x$.

604. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

607. $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A$ və $\lim\limits_{x\to A}\psi(x)=B$ olarsa, buradan alınırmı ki,

$$\lim_{x\to a}\psi(\varphi(x)) = B?$$

Misala baxın:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \text{ olduqda}, \\ 0, & x - \text{irrasional olduqda}, \end{cases}$$

burada p və q - qarşılıqlı sadə tam ədədlərdir;

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \text{ olduqda}, \\ 0, & x = 0 \text{ olduqda}; \end{cases}$$

belə ki, $x \to 0$.

608. Koşi teoremini isbat edin: əgər $f(x)$ funksiyası $(a, +\infty)$ intervalında təyin olunub və hər bir sonlu (a, b) intervalında məhduddursa, onda

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1) - f(x)]$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}$ $(f(x) \geq C > 0)$,

burada qəbul edilir ki, bərabərliklərin sağ tərəfindəki limitlər var.

609. İsbat edin ki, əgər a) $f(x)$ funksiyası $x>a$ oblastında təyin olunubsa, b) hər bir sonlu $a<x<b$ oblastında məhduddursa,

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1) - f(x)] = \infty$ olarsa, onda

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \infty.$$

610. İsbat edin ki, əgər 1) $f(x)$ funksiyası $x>a$ oblastında təyin olunubsa, 2) hər bir sonlu $a<x<b$ oblastında məhduddursa, 3) sonlu və ya sonsuz

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1) - f(x)}{x^n} = l$$

limiti varsa, onda

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}} = \frac{l}{n+1}.$$

611. İsbat edin ki,

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) = e^x$.

612. İsbat edin ki, $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2\pi e n!) = 2\pi$.

Göstəriş. Misal 72-dəki (*) düsturundan istifadə edin.

Funksiyaların qrafikini qurun:

613. a) $y = 1 - x^{100}$; b) $y = \lim\limits_{n\to\infty}(1 - x^{2n})$ $(-1 \leq x \leq 1)$.

614. *a)* $y=\dfrac{x^{100}}{1+x^{100}}$ $(x\ge 0)$; *b)* $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}$ $(x\ge 0)$.

615. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$ $(x\ne 0)$.

616. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n^2}}$.

617. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}$ $(x\ge 0)$.

618. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}$ $(x\ge 0)$.

619. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}}{\sqrt{2^{2n}+x^{2n}}}$ $(x\ge 0)$.

620. *a)* $y=\sin^{1000}x$; *b)* $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^{2n}x$.

621. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(2^n+x^n)}{n}$ $(x\ge 0)$.

622. $y=\lim\limits_{n\to\infty}(x-1)\operatorname{arctg}x^n$.

623. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+e^{n(x+1)}}$.

624. $y=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+e^{tx}}{1+e^{tx}}$.

625. $y=\lim\limits_{t\to x}\dfrac{1}{t-x}\ln\dfrac{t}{x}$ $(x>0)$.

625.1. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x\operatorname{tg}^{2n}\dfrac{\pi x}{4}+\sqrt{x}}{\operatorname{tg}^{2n}\dfrac{\pi x}{4}+1}$ $(x\ge 0)$.

625.2. $y=\lim\limits_{n\to\infty}x\operatorname{sgn}|\sin^2(n!\pi x)|$.

625. 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x|^n+|y|^n}=1$ əyrisini qurun.

626. Əgər

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(kx+b)]=0$$

olarsa, onda $y=kx+b$ düz xətti $y=f(x)$ əyrisi üçün (maili) *asimptot* adlanır. Bu tənlikdən istifadə edərək asimptotun varlığı üçün zəruri və kafi şərti çıxarın.

627. Aşağıdakı əyrilərin asimptotlarını tapın və bu əyriləri qurun:

a) $y=\dfrac{x^3}{x^2+x-2}$;

b) $y=\sqrt{x^2+x}$;

c) $y=\sqrt[3]{x^2-x^3}$;

d) $y=\dfrac{xe^x}{e^x-1}$;

e) $y=\ln(1+e^x)$;

f) $y=x+\arccos\dfrac{1}{x}$.

Aşağıdakı limitləri tapın:

628. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\dfrac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\ldots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}\right]$.

629. $\lim\limits_{n\to\infty}[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^n})]$, $|x|<1$ olduqda.

630. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\ldots\cos\dfrac{x}{2^n}\right)$.

631. Tutaq ki,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1$$

və $n\to\infty$ olduqda $\alpha_{mn}\rightrightarrows 0$ $(m=1,2,\ldots)$, yəni $m=1,2,\ldots$ və $n>N(\varepsilon)$ olduqda $|\alpha_{mn}|<\varepsilon$, burada $\psi(x)>0$. İsbat edin ki,

$$\lim_{n\to\infty}[\varphi(\alpha_{1n})+\varphi(\alpha_{2n})+\ldots+\varphi(\alpha_{nn})]=$$
$$=\lim_{n\to\infty}[\psi(\alpha_{1n})+\psi(\alpha_{2n})+\ldots+\psi(\alpha_{nn})], \qquad (1)$$

burada qəbul edirik ki, (1) bərabərliyinin sağ tərəfindəki limit var.

Əvvəlki teoremdən istifadə edərək aşağıdakı limitləri tapın:

632. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{k}{n^2}}-1\right)$.

633. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sin\dfrac{ka}{n^2}\right)$.

634. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(a^{\frac{k}{n^2}}-1\right)$ $(a>0)$.

635. $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right)$.

636. $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{ka}{n\sqrt{n}}$.

637. x_n ardıcıllığı aşağıdakı bərabərliklərlə verilmişdir:

$$x_1=\sqrt{a},\ x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}},\ x_3=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}},\ \ldots\ (a>0).$$

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$-i tapın.

637. 1. x_n ardıcıllığı aşağıdakı qaydada verilir:

$$x_1=0,\quad x_2=1,$$
$$x_n=\frac{1}{2}(x_{n-1}+x_{n-2})\qquad (n=2,3,\ldots).$$

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$-i tapın.

637.2. y_n ardıcıllığı x_n ardıcıllığının köməyi ilə aşağıdakı qaydada təyin olunur:

$$y_0=x_0,\ y_n=x_n-\alpha x_{n-1}\qquad (n=1,2,\ldots),$$

burada $|\alpha|<1$. $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$ olarsa, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$-i tapın.

637.3. x_n ardıcıllığı aşağıdakı qaydada təyin olunur:

$$x_0 = 1, \quad x_n = \frac{1}{1+x_{n-1}} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ -i tapın.

Göstəriş. $x = \frac{1}{1+x}$ tənliyinin kökləri ilə x_n arasındakı fərqə baxın.

638. $y_n = y_n(x)$ $(0 \le x \le 1)$ funksiyalar ardıcıllığı aşağıdakı qaydada təyin olunur:

$$y_1 = \frac{x}{2}, \quad y_n = \frac{x}{2} - \frac{y_{n-1}^2}{2} \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ -i tapın.

639. $y_n = y_n(x)$ $(0 \le x \le 1)$ funksiyalar ardıcıllığı aşağıdakı qaydada təyin olunur:

$$y_1 = \frac{x}{2}, \quad y_n = \frac{x}{2} + \frac{y_{n-1}^2}{2} \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ -i tapın.

639.1. Tutaq ki, $x>0$ və $y_n = y_{n-1}(2 - xy_{n-1})$ $(n=1, 2, \ldots)$. İsbat edin ki, $y_i > 0$ $(i = 0, 1)$ olarsa, onda y_n ardıcıllığı yığılandır və

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{x}.$$

Göstəriş. $\frac{1}{x} - y_n$ fərqini araşdırın.

639. 2. $y = \sqrt{x}$ -i (burada $x > 0$) tapmaq üçün aşağıdakı proses tətbiq olunur: $y_0 > 0$ - ixtiyaridir,

$$y_n = \frac{1}{2}\left(y_{n-1} + \frac{x}{y_{n-1}}\right) \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

İsbat edin ki,

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \sqrt{x}.$$

Göstəriş.

$$\frac{y_n - \sqrt{x}}{y_n + \sqrt{x}} = \left(\frac{y_{n-1} - \sqrt{x}}{y_{n-1} + \sqrt{x}}\right)^2 \qquad (n \ge 1)$$

düsturundan istifadə edin.

640.

$$x - \varepsilon \sin x = m \qquad (0 < \varepsilon < 1) \tag{1}$$

Kepler tənliyinin təqribi həlli üçün

$$x_0 = m, \quad x_1 = m + \varepsilon \sin x_0, \ldots, \quad x_n = m + \varepsilon \sin x_{n-1}, \ldots$$

götürürlər (*ardıcıl yaxınlaşma üsulu*). İsbat edin ki, $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ var və ξ ədədi (1) tənliyinin yeganə köküdür.

641. Əgər $\omega_h[f]$ $f(x)$ funksiyasının $|x-\xi| \le h$ $(h>0)$ parçasında rəqsidirsə, onda

$$\omega_0[f] = \lim_{h\to 0} \omega_h[f]$$

ədədi ξ *nöqtəsində* $f(x)$ *funksiyasının rəqsi* adlanır.

$f(x)$ funksiyasının $x=0$ nöqtəsində rəqsini təyin edin:

a) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$;

b) $f(x) = \frac{1}{x^2}\cos^2\frac{1}{x}$;

c) $f(x) = x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)$;

d) $f(x) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$;

e) $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$;

f) $f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$;

g) $f(x) = (1+|x|)^{\frac{1}{x}}$.

642. Tutaq ki, $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. İsbat edin ki, $-1 \le \alpha \le 1$ şərtini ödəyən istənilən α ədədi üçün elə $x_n \to 0$ $(n=1,2,\ldots)$ ardıcıllığı var ki, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha$ olar.

643. $l = \varliminf\limits_{x\to 0} f(x)$ və $L = \varlimsup\limits_{x\to 0} f(x)$ -i təyin edin:

a) $f(x) = \sin^2\frac{1}{x} + \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$;

b) $f(x) = (2-x^2)\cos\frac{1}{x}$;   *c)* $f(x) = \left(1+\cos^2\frac{1}{x}\right)^{\sec^2\frac{1}{x}}$.

644. $l = \varliminf\limits_{x\to\infty} f(x)$ və $L = \varlimsup\limits_{x\to\infty} f(x)$ -i təyin edin:

a) $f(x) = \sin x$;

b) $f(x) = x^2\cos^2 x$;

c) $f(x) = 2^{\sin x^2}$;

d) $f(x) = \frac{x}{1+x^2\sin^2 x}$ $(x \ge 0)$.

§ 6. *O*-simvolu

1°. $x \in X$ olduqda $\varphi(x) = O(\psi(x))$ yazılışı o deməkdir ki, elə A sabiti var ki, $x \in X$ üçün

$$|\varphi(x)| \le A|\psi(x)|. \tag{1}$$

Əgər (1) bərabərsizliyi a nöqtəsinin hər hansı U_a ətrafında ödənirsə, onda analoji olaraq

$$\varphi(x)=O(\psi(x)),\quad x\to a \tag{2}$$

yazırlar. Xüsusi halda, $x\in U_a$ olduqda $\psi(x)\neq 0$ olarsa, onda sonlu $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}\neq 0$ limiti olduqda (2) münasibəti doğrudur. Bu halda $\varphi(x)=O^*(\psi(x))$ yazılır.

Əgər

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x^p}=k\neq 0\quad (p>0)$$

olarsa, onda $\varphi(x)$ x sonsuz kiçiyinə nəzərən p *tərtibli sonsuz kiçik* adlanır. Analoji olaraq, əgər

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x^p}=k\neq 0\quad (p>0)$$

olarsa, onda $\psi(x)$ x sonsuz böyüyünə nəzərən p *tərtibli sonsuz böyük* adlanır.

2°. $\varphi(x)=o(\psi(x)),\ x\to a$ yazılışı o deməkdir ki,

$$\varphi(x)=\alpha(x)\psi(x)\qquad (x\in U_a), \tag{3}$$

burada $x\to a$ olduqda $\alpha(x)\to 0$. Əgər $x\in U_a$ olduqda $\psi(x)\neq 0$ olarsa, onda (3) bərabərliyi

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=0$$

təklifinə ekvivalentdir.

3°. Əgər

$$\varphi(x)-\psi(x)=o(\psi(x)),\quad x\to a \tag{4}$$

olarsa, onda $\varphi(x)$ və $\psi(x)$ funksiyaları $x\to a$ olduqda *ekvivalent* ($\varphi(x)\sim\psi(x)$) adlanırlar. Əgər $x\in U_a$ olduqda $\psi(x)\neq 0$ olarsa, onda (4)-dən alarıq ki,

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1\,.$$

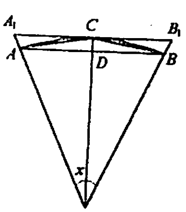
$x\to 0$ olduqda aşağıdakı ekvivalentlik münasibətləri doğrudur:

$$\sin x\sim x;\ \ \mathrm{tg}\,x\sim x;\ \ a^x-1\sim x\ln a\ (a>0);\ \ \ln(1+x)\sim x;\ \ \sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n}.$$

Ümumiyyətlə,

$$\varphi(x)+o(\varphi(x))\sim\varphi(x)\,.$$

$x\to a$ olduqda iki sonsuz kiçik (və ya sonsuz böyük) funksiyaların nisbətinin limitini tapmaq üçün verilən funksiyaları ekvivalent funksiyalarla əvəz etmək olar.



Şək. 4.

645. $AOB=x$ (şək. 4) mərkəzi bucağını 1-ci tərtib sonsuz kiçik hesab etməklə, aşağıdakı kəmiyyətlərin kiçiklik tərtibini müəyyən edin: *a)* AB vətəri; *b)* CD oxu; *c)* AOB sektorunun sahəsi; *d)* ABC üçbucağının sahəsi; *e)* ABB_1A_1 trapesiyasının sahəsi; *f)* ABC seqmentinin sahəsi.

646. Tutaq ki, $o(f(x))$ $x \to a$ olduqda $f(x)$ funksiyasına nisbətən daha aşağı artma tərtibinə malik olan ixtiyari funksiyadır və $O(f(x))$ $x \to a$ olduqda $f(x)$ funksiyası ilə eyni artma tərtibinə malik olan istənilən funksiyadır, burada $f(x)>0$. Göstərin ki,

a) $o(o(f(x))) = o(f(x))$; *d)* $O(O(f(x))) = O(f(x))$;

b) $O(o(f(x))) = o(f(x))$; *e)* $O(f(x)) + o(f(x)) = O(f(x))$.

c) $o(O(f(x))) = o(f(x))$;

647. Tutaq ki, $x \to 0$ və $n > 0$. Göstərin ki,

a) $CO(x^n) = O(x^n)$ ($C \neq 0$ - sabitdir);

b) $O(x^n) + O(x^m) = O(x^n)$ $(n < m)$;

c) $O(x^n)\, O(x^m) = O(x^{n+m})$.

648. Tutaq ki, $x \to +\infty$ və $n > 0$. Göstərin ki,

a) $CO(x^n) = O(x^n)$ ($C \neq 0$ - sabitdir);

b) $O(x^n) + O(x^m) = O(x^n)$ $(n > m)$;

c) $O(x^n)\, O(x^m) = O(x^{n+m})$.

649. Göstərin ki, ~ simvolu aşağıdakı xassələri ödəyir: 1) refleksivlik: $\varphi(x) \sim \varphi(x)$, 2) simmetriklik: $\varphi(x) \sim \psi(x)$ olarsa, onda $\psi(x) \sim \varphi(x)$, 3) tranzitivlik: $\varphi(x) \sim \psi(x)$ və $\psi(x) \sim \chi(x)$ olarsa, onda $\varphi(x) \sim \chi(x)$.

650. Tutaq ki, $x \to 0$. Aşağıdakı bərabərlikləri isbat edin:

a) $2x - x^2 = O(x)$; *c)* $x \sin\frac{1}{x} = O(|x|)$;

b) $x \sin\sqrt{x} = O(x^{\frac{3}{2}})$; *d)* $\ln x = o\left(\frac{1}{x^{\varepsilon}}\right)$ $(\varepsilon > 0)$;

e) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt[8]{x}$; *f)* $\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = O(1)$;

g) $(1+x)^n = 1 + nx + o(x)$.

651. Tutaq ki, $x \to +\infty$. Aşağıdakı bərabərlikləri isbat edin:

a) $2x^3 - 3x^2 + 1 = O(x^3)$; *e)* $\ln x = o(x^{\varepsilon})$ $(\varepsilon > 0)$;

b) $\frac{x+1}{x^2+1} = O\left(\frac{1}{x}\right)$; *f)* $x^p e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$;

c) $x + x^2 \sin x = O(x^2)$; *g)* $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt{x}$;

d) $\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$; *h)* $x^2 + x \ln^{100} x \sim x^2$.

652. İsbat edin ki, kifayət qədər böyük $x > 0$ üçün aşağıdakı bərabərsizliklər doğrudur:

a) $x^2+10x+100<0{,}001x^3$; *b*) $\ln^{1000} x<\sqrt{x}$; *c*) $x^{10}e^x<e^{2x}$.

652.1. $x\to+\infty$ olduqda
$$\sqrt{x^2+px+q}=x+\frac{p}{2}+O\left(\frac{1}{x}\right)$$
asimptotik düsturunu isbat edin.

653. Tutaq ki, $x\to 0$. Aşağıdakı funksiyaların Cx^n (C-sabitdir) şəklində baş həddini ayırın və x dəyişəninə nəzərən hansı tərtibli sonsuz kiçik olduğunu müəyyən edin:

a) $2x-3x^3+x^5$; *c*) $\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}$;

b) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$; *d*) $\operatorname{tg} x-\sin x$.

654. Tutaq ki, $x\to 0$. Göstərin ki,

a) $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$; *b*) $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$

sonsuz kiçiyi istənilən n ($n>0$) üçün x^n sonsuz kiçiyi ilə müqayisə olunmayandır, yəni heç bir n üçün $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^n}=k$ bərabərliyi doğru ola bilməz, burada k - sıfırdan fərqli sabit kəmiyyətdir.

655. Tutaq ki, $x\to 1$. Aşağıdakı funksiyaların $C(x-1)^n$ şəklində baş həddini ayırın və $x-1$ sonsuz kiçiyinə nəzərən hansı tərtibli sonsuz kiçik olduğunu müəyyən edin:

a) x^3-3x+2; *c*) $\ln x$; *e*) x^x-1.

b) $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$; *d*) e^x-e;

656. Tutaq ki, $x\to+\infty$. Aşağadakı funksiyaların Cx^n şəklində baş həddini ayırın və x sonsuz böyüyünə nəzərən artma tərtibini müəyyən edin:

a) $x^2+100x+10000$; *c*) $\sqrt[3]{x^2-x}+\sqrt{x}$;

b) $\dfrac{2x^5}{x^3-3x+1}$; *d*) $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}$.

657. Tutaq ki, $x\to+\infty$. Aşağıdakı funksiyaların $C\left(\dfrac{1}{x}\right)^n$ şəklində baş həddini ayırın və $\dfrac{1}{x}$ sonsuz kiçiyinə nəzərən hansı tərtibli sonsuz kiçik olduğunu müəyyən edin:

a) $\dfrac{x+1}{x^4+1}$; *c*) $\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$;

b) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$; *d*) $\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$.

658. Tutaq ki, $x \to 1$. Aşağıdakı funksiyaların $C\left(\frac{1}{x-1}\right)^n$ şəkilli baş həddini ayırın və $\frac{1}{x-1}$ sonsuz böyüyəninə nəzərən artma tərtibini müəyyən edin:

a) $\frac{x^2}{x^2-1}$; *c)* $\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$; *e)* $\frac{\ln x}{(1-x)^2}$.

b) $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$; *d)* $\frac{1}{\sin \pi x}$;

659. Tutaq ki, $x \to +\infty$ və $f_n(x) = x^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. İsbat edin ki, 1) $f_n(x)$ funksiyalarının hər biri özündən əvvəlki $f_{n-1}(x)$ funksiyasına nisbətən daha sürətlə artır; 2) e^x funksiyası $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ funksiyalarının hər birindən daha sürətlə artır.

660. Tutaq ki, $x \to +\infty$ və

$$f_n(x) = \sqrt[n]{x} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

İsbat edin ki, 1) $f_n(x)$ funksiyalarından hər biri özündən əvvəlki $f_{n-1}(x)$ funksiyasına nisbətən daha aşağı sürətlə artır; 2) $f(x) = \ln x$ funksiyası $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ funksiyalarının hər birindən daha aşağı sürətlə artır.

661. İsbat edin ki, ixtiyari

$$f_1(x),\ f_2(x), \ldots,\ f_n(x), \ldots \qquad (x_0 < x < +\infty)$$

funksiyalar ardıcıllığı üçün elə $f(x)$ funksiyası qurmaq olar ki, o, $x \to +\infty$ olduqda $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ funksiyalarının hər birindən daha sürətlə artsın.

§7. Funksiyanın kəsilməzliyi

1°. **Funksiyanın kəsilməzliyi.** Əgər

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (1)$$

olarsa, yəni $f(x)$ funksiyası $x = x_0$-da təyin olunub və istənilən $\varepsilon > 0$ üçün elə $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ ədədi var ki, $|x - x_0| < \delta$ şərtini ödəyən və $f(x)$-in təyin oblastından olan istənilən x üçün

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

bərabərsizliyi doğrudursa, onda $f(x)$ funksiyası $x = x_0$-da (və ya x_0 *nöqtəsində*) *kəsilməz* adlanır.

Əgər $f(x)$ funksiyası verilmiş $X = \{x\}$ çoxluğunun (intervalın, parçanın və i.a.)

bütün nöqtələrində kəsilməzdirsə, bu funksiya *X çoxluğunda kəsilməz* adlanır.

Əgər $f(x)$ funksiyasının $X=\{x\}$ təyin oblastına daxil olan və ya bu çoxluğun limit nöqtəsi olan hər hansı $x=x_0$ nöqtəsində (1) bərabərliyi ödənmirsə (yəni ya (a) $f(x_0)$ ədədi yoxdur, başqa sözlə, funksiya $x=x_0$ nöqtəsində təyin olunmayıb, ya (b) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ yoxdur, ya da (c) (1) düsturunun hər iki tərəfinin mənası var, lakin onlar bir-birinə bərabər deyil), onda x_0 nöqtəsi $f(x)$ funksiyasının *kəsilmə nöqtəsi* adlanır.

Kəsilmə nöqtələrini aşağıdakı kimi fərqləndirirlər: 1) *I növ kəsilmə nöqtəsi* elə x_0 nöqtəsinə deyilir ki, bu nöqtədə sonlu sol və sağ limitləri

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x)\,, \qquad f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)$$

var; 2) *II növ kəsilmə* nöqtələri - bütün qalan nöqtələrdir.

$$f(x_0+0)-f(x_0-0)$$

fərqi x_0 nöqtəsində funksiyanın *sıçrayışı* adlanır.

Əgər

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)$$

bərabərliyi ödənərsə, onda x_0 kəsilmə nöqtəsi *aradan qaldırıla bilən* adlanır.

Əgər $f(x_0-0)$ və ya $f(x_0+0)$ limitlərindən heç olmasa biri ∞ simvoluna bərabərdirsə, onda x_0 *sonsuz kəsilmə nöqtəsi* adlanır.

Əgər

$$f(x_0-0)=f(x_0) \quad (\, f(x_0+0)=f(x_0)\,)$$

bərabərliyi ödənərsə, onda $f(x)$ funksiyasına x_0 nöqtəsində *soldan (sağdan) kəsilməz* deyilir. $f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində kəsilməzliyi üçün zəruri və kafi şərt üç ədədin bərabərliyidir:

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$$

2°. Elementar funksiyaların kəsilməzliyi. Əgər $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları $x=x_0$ nöqtəsində kəsilməzdirlərsə, onda

$$a)\ f(x)\pm g(x); \qquad b)\ f(x)g(x); \qquad c)\ \frac{f(x)}{g(x)}\ \ (g(x_0)\neq 0)$$

funksiyaları da $x=x_0$-da kəsilməzdir.

Xüsusi halda: a) tam rasional

$$P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$$

funksiyası istənilən x nöqtəsində kəsilməzdir; b) kəsr rasional

$$R(x)=\frac{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m}$$

funksiyası məxrəcin sıfra çevrilmədiyi hər bir x nöqtəsində kəsilməzdir.

Ümumiyyətlə, elementar funksiyalar: x^n, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, a^x, $\log_a x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$,... təyin olunduqları bütün nöqtələrdə kəsilməzdir.

Daha ümumi nəticə aşağıdakıdır: əgər $f(x)$ funksiyası $x=x_0$-da kəsilməzdirsə və $g(y)$ funksiyası $y=f(x_0)$-da kəsilməzdirsə, onda $g(f(x))$ funksiyası $x=x_0$-da kəsilməzdir.

3[0]. **Kəsilməz funksiyalar haqqında əsas teoremlər.** Əgər $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməzdirsə, onda: 1) $f(x)$ bu parçada məhduddur; 2) bu parçada $f(x)$ özünün m aşağı sərhədini və M yuxarı sərhədini alır (*Veyerştrass teoremi*); 3) istənilən $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$ intervalında $f(x)$ funksiyası $f(\alpha)$ və $f(\beta)$ arasındakı bütün qiymətləri alır (*Koşi teoremi*). Xüsusi halda, əgər $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$ olarsa, onda elə γ $(\alpha<\gamma<\beta)$ ədədi var ki, $f(\gamma)=0$ olar.

662. Kəsilməz $y=f(x)$ funksiyasının qrafiki verilmişdir. Verilmiş a nöqtəsi və $\varepsilon>0$ ədədi üçün həndəsi olaraq elə $\delta>0$ ədədi göstərin ki, $|x-a|<\delta$ olduqda $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ olsun.

663. Tərəfi $x_0=10\,sm$ olan metal kvadrat təbəqə hazırlamaq tələb olunur. Əgər təbəqənin $y=x^2$ sahəsi layihələndirilmiş $y_0=100\ sm^2$ sahədən *a*) $\pm$ 1 sm^2-dən; *b*) $\pm$ 0,1 sm^2-dən; *c*) $\pm$ 0,01 sm^2-dən; *d*) $\pm\varepsilon$ sm^2-dən çox olmayaraq fərqlənirsə, onda bu təbəqənin x tərəfini hansı aralıqda dəyişmək mümkündür?

664. Kubun tili 2 m və 3 m arasında yerləşir. Bu kubun x tilini hansı Δ mütləq xətası ilə ölçmək lazımdır ki, onun y həcmini ε m^3-nu aşmayan mütləq xəta ilə hesablamaq mümkün olsun: *a*) $\varepsilon=0,1\ m^3$; *b*) $\varepsilon=0,01\ m^3$; *c*) $\varepsilon=0,001\ m^3$?

665. $x_0=100$ nöqtəsinin hansı maksimal ətrafında $y=\sqrt{x}$ funksiyasının qrafikinin ordinatı $y_0=10$ ordinatından $\varepsilon=10^{-n}$-dən $(n\geq 0)$ az fərqlənir? $n=0, 1, 2, 3$ olduqda bu ətrafın ölçüsünü təyin edin.

666. "$\varepsilon-\delta$"-mühakiməsinin köməyi ilə isbat edin ki, $f(x)=x^2$ funksiyası $x=5$-də kəsilməzdir.

Aşağıdakı cədvəli doldurun:

ε	1	0,1	0,01	0,001	...
δ					

667. Tutaq ki, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ və $\varepsilon=0{,}001$. $x_0=0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ldots$ nöqtələri üçün elə ən böyük müsbət $\delta=\delta(\varepsilon, x_0)>0$ ədədi tapın ki, $|x-x_0|<\delta$ bərabərsizliyindən $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ bərabərsizliyi alınsın.

Verilmiş $\varepsilon=0{,}001$ üçün elə $\delta>0$ seçmək olarmı ki, (0, 1) intervalının hər bir x_0 qiymətləri üçün yararlı olsun, yəni istənilən $x_0\in(0,1)$ üçün $|x-x_0|<\delta$ olduqda $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ olsun?

668. Aşağıdakı təklifi "$\varepsilon-\delta$" dilində ifadə edin: x_0 nöqtəsində təyin olunmuş $f(x)$ funksiyası bu nöqtədə kəsilməz deyil.

669. Tutaq ki, hər hansı $\varepsilon>0$ ədədi üçün elə uyğun $\delta=\delta(\varepsilon, x_0)>0$ ədədi tapmaq olar ki, $|x-x_0|<\delta$ olduqda $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ olsun. Əgər: *a*) ε ədədləri sonlu çoxluq əmələ gətirərsə; *b*) ε ədədləri sonsuz $\varepsilon=\frac{1}{2^n}$ $(n=1, 2, \ldots)$ ikilik kəsrlər çoxluğu əmələ gətirərsə, hökm etmək olarmı ki, $f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində kəsilməzdir?

670. Tutaq ki,

$$f(x)=x+0{,}001\,[x]$$

funksiyası verilmişdir.

Göstərin ki, istənilən $\varepsilon>0{,}001$ üçün elə $\delta=\delta(\varepsilon, x)>0$ seçmək olar ki, $|x'-x|<\delta$ olduqda $|f(x')-f(x)|<\varepsilon$ olsun, $0<\varepsilon\leq 0{,}001$ olduqda isə x-in bütün qiymətləri üçün bunu etmək mümkün deyil.

Hansı nöqtələrdə bu funksiyanın kəsilməzliyi pozulur?

671. Tutaq ki, kifayət qədər kiçik istənilən $\delta>0$ ədədi üçün elə $\varepsilon=\varepsilon(\delta, x_0)>0$ var ki, $|x-x_0|<\delta$ olduqda $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ bərabərsizliyi ödənilir. Buradan alınırmı ki, $f(x)$ funksiyası $x=x_0$-da kəsilməzdir? Verilmiş bərabərsizliklərlə $f(x)$ funksiyasının hansı xassəsi ifadə olunur?

672. Tutaq ki, istənilən $\varepsilon>0$ ədədi üçün elə $\delta=\delta(\varepsilon, x_0)>0$ ədədi var ki, $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ olduqda $|x-x_0|<\delta$ olur. Buradan alınırmı ki, $f(x)$ funksiyası $x=x_0$ nöqtəsində kəsilməzdir? Verilmiş bərabərsizliklərlə $f(x)$ funksiyasının hansı xassəsi ifadə olunur?

673. Tutaq ki, istənilən $\delta>0$ ədədi üçün elə $\varepsilon=\varepsilon(\delta, x_0)>0$ ədədi var ki, $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ olduqda $|x-x_0|<\delta$ olur. Buradan alınırmı ki, $f(x)$ funksiyası $x=x_0$-da kəsilməzdir? Verilmiş bərabərsizliklərlə $f(x)$ funksiyasının hansı xassəsi ifadə olunur?

Misala baxın:

$$f(x)=\begin{cases} \operatorname{arctg} x, & x \text{ rasional olduqda,} \\ \pi-\operatorname{arctg} x, & x \text{ irrasional olduqda.} \end{cases}$$

674. "$\varepsilon-\delta$" - mühakiməsinin köməyi ilə aşağıdakı funksiyaların kəsilməzliyini isbat edin:

a) $ax+b$; *b*) x^2; *c*) x^3; *d*) $\sqrt{x}$; *e*) $\sqrt[3]{x}$; *f*) $\sin x$; *g*) $\cos x$; *h*) $\operatorname{arctg} x$.

Aşağıdakı funksiyaların kəsilməzliyini araşdırın və qrafikini qurun:

675. $f(x)=|x|$.

676. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2 \text{ olduqda;} \\ A, & x=2 \text{ olduqda.} \end{cases}$

677. $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$, $x\neq -1$ olduqda və $f(-1)$ - ixtiyaridir.

678. *a)* $f_1(x)=\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|$, $x\neq 0$ olduqda və $f_1(0)=1$;

b) $f_2(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$, $x\neq 0$ olduqda və $f_2(0)=1$.

679. $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$, $x\neq 0$ olduqda və $f(0)$ - ixtiyaridir.

680. $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$, $x\neq 0$ olduqda və $f(0)=0$.

681. $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$, $x\neq 0$ olduqda və $f(0)=0$.

682. $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$, $x\neq 1$ olduqda və $f(1)$ - ixtiyaridir.

683. $f(x)=x\ln x^2$, $x\neq 0$ olduqda və $f(0)=a$.

684. $f(x)=\operatorname{sgn} x$.

685. $f(x)=[x]$.

686. $f(x)=\sqrt{x}-[\sqrt{x}]$.

Funksiyaların kəsilmə nöqtələrini təyin edin və bu nöqtələrin xüsusiyyətini araşdırın:

687. $y=\dfrac{x}{(1+x)^2}$.

688. $y=\dfrac{1+x}{1+x^3}$.

689. $y=\dfrac{x^2-1}{x^3-3x+2}$.

690. $y=\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}$.

691. $y=\dfrac{x}{\sin x}$.

692. $y=\sqrt{\dfrac{1-\cos\pi x}{4-x^2}}$.

693. $y=\cos^2\dfrac{1}{x}$.

694. $y=\operatorname{sgn}\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$.

695. $y=\dfrac{\cos\frac{\pi}{x}}{\cos\frac{\pi}{x}}$.

696. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$

697. $y=\sqrt{x}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

698. $y=e^{x+\frac{1}{x}}$.

699. $y=\dfrac{1}{\ln x}$.

700. $y=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$.

Aşağıdakı funksiyaların kəsilməzliyini araşdırın və qrafiklərinin eskizini çəkin:

701. $y = \operatorname{sgn}(\sin x)$.

702. $y = x - [x]$.

703. $y = x[x]$.

704. $y = [x]\sin \pi x$.

705. $y = x^2 - [x^2]$.

706. $y = \left[\frac{1}{x}\right]$.

707. $y = x\left[\frac{1}{x}\right]$.

708. $y = \operatorname{sgn}\left(\cos\frac{1}{x}\right)$.

709. $y = \left[\frac{1}{x^2}\right]\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$.

710. $y = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{x}$.

711. $y = \sec^2\frac{1}{x}$.

712. $y = (-1)^{[x^2]}$.

713. $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}\right)$.

714. $y = \frac{1}{x^2\sin^2 x}$.

715. $y = \frac{1}{\sin(x^2)}$.

716. $y = \ln\frac{x^2}{(x+1)(x-3)}$.

717. $y = e^{-\frac{1}{x}}$.

718. $y = 1 - e^{-\frac{1}{x^2}}$.

719. $y = \operatorname{th}\frac{2x}{1-x^2}$.

Aşağıdakı funksiyaların kəsilməzliyini araşdırın və qrafiklərini qurun:

720. $y = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^n}$ $(x \ge 0)$.

721. $y = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}$.

722. $y = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}$.

723. $y = \lim\limits_{n\to\infty}\cos^{2n} x$.

724. $y = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{1+(2\sin x)^{2n}}$.

725. $y = \lim\limits_{n\to\infty}[x\operatorname{arctg}(n\operatorname{ctg} x)]$.

726. $y = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x + x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}$.

727. $y = \lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln(1+e^{xt})}{\ln(1+e^t)}$.

728. $y = \lim\limits_{t\to+\infty}(1+x)\operatorname{th} tx$.

729. Verilmiş

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1 \text{ olduqda}, \\ 2-x, & 1 < x \le 2 \text{ olduqda} \end{cases}$$

funksiyası kəsilməzdirmi?

730. Tutaq ki,

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \text{ olduqda}, \\ a+x, & x \ge 0 \text{ olduqda}. \end{cases}$$

a-nın hansı qiymətində $f(x)$ funksiyası kəsilməz olar?

731. Aşağıdakı funksiyaların kəsilməzliyini araşdırın və kəsilmə nöqtələrinin xüsusiyyətini aydınlaşdırın:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x\le 1 \text{ olduqda}, \\ 2-x, & 1<x\le 2 \text{ olduqda}; \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} x, & |x|\le 1 \text{ olduqda}, \\ 1, & |x|>1 \text{ olduqda}; \end{cases}$

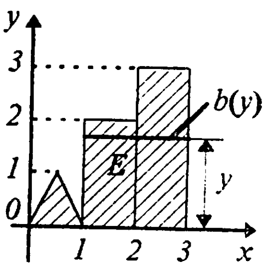
c) $f(x)=\begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{2}, & |x|\le 1 \text{ olduqda}, \\ |x-1|, & |x|>1 \text{ olduqda}; \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} \mathrm{ctg}^2\pi x, & x \text{ tam olmadıqda}, \\ 0, & x \text{ tam olduqda}; \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} \sin\pi x, & x \text{ rasional olduqda}, \\ 0, & x \text{ irrasional olduqda}. \end{cases}$

732. $d=d(x)$ funksiyası Ox oxunun x nöqtəsi ilə bu oxun $0\le x\le 1$ və $2\le x\le 3$ parçalarının nöqtələrindən ibarət çoxluq arasındakı ən qısa məsafəni ifadə edir. d funksiyasının analitik ifadəsini tapın, onun qrafikini qurun və kəsilməzliyini araşdırın.

733. E fiquru oturacağı və hündürlüyü 1-ə bərabər olan bərabəryanlı üçbucaqdan, hər birinin oturacağı 1, hündürlükləri isə 2-yə və 3-ə bərabər olan iki düzbucaqlıdan ibarətdir (şək.5). $S=S(y)$ $(0\le y<+\infty)$ funksiyası E fiqurunun $Y=0$ və $Y=y$ paralelləri arasında yerləşən hissəsinin sahəsini ifadə edir; $b=b(y)$ $(0\le y<+\infty)$ funksiyası isə E fiqurunun $Y=y$ paraleli ilə kəsiyinin uzunluğudur. S və d funksiyalarının analitik ifadələrini tapın, onların qrafiklərini qurun və kəsilməzliyini araşdırın.



Şək.5

734. İsbat edin ki,

$$\chi(x)=\lim_{m\to\infty}\left\{\lim_{n\to\infty}\cos^n(\pi m!\,x)\right\}$$

Dirixle funksiyası x-in istənilən qiymətində kəsiləndir.

735. $f(x)=x\chi(x)$ funksiyasının kəsilməzliyini araşdırın, burada $\chi(x)$ Dirixle funksiyasıdır (əvvəlki misala bax). Bu funksiyanın qrafikinin eskizini qurun.

736. İsbat edin ki,

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{n}, & x=\dfrac{m}{n} \text{ olduqda, burada } m \text{ və } n \text{ qarşılıqlı sadə ədədlərdir}; \\ 0, & x \text{ irrasional olduqda} \end{cases}$$

Riman funksiyası x-in istənilən rasional qiymətlərində kəsiləndir və x-in istənilən irrasional qiymətlərində kəsilməzdir. Bu funksiyanın qrafikinin eskizini qurun.

737. Aşağıdakı şəkildə verilmiş $f(x)$ funksiyasının kəsilməzliyini araşdırın:

$$f(x)=\frac{nx}{n+1},$$

x ixtisar olunmayan $\frac{m}{n}$ $(n\geq 1)$ rasional kəsri olduqda;

və

$$f(x)=|x|,$$

x - irrasional ədəd olduqda.

Bu funksiyanın qrafikinin eskizini qurun.

738. $f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}$ funksiyası x arqumentinin $x=0$-dan başqa bütün qiymətlərində təyin olunmuşdur. $f(x)$ funksiyası üçün $x=0$ nöqtəsində hansı qiyməti yazmaq lazımdır ki, bu funksiya $x=0$-da kəsilməz olsun?

739. Göstərin ki, $f(1)$ ədədinin istənilən seçimində $f(x)=\frac{1}{1-x}$ funksiyası x=1-də kəsilən olacaq.

740. $f(x)$ funksiyası $x=0$ olduqda mənasını itirir. $f(0)$ ədədini elə təyin edin ki, $f(x)$ funksiyası $x=0$-da kəsilməz olsun:

a) $f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$;

b) $f(x)=\frac{\operatorname{tg}2x}{x}$;

c) $f(x)=\sin x\sin\frac{1}{x}$;

d) $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$;

e) $f(x)=\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}$;

f) $f(x)=x^x \quad (x>0)$;

g) $f(x)=x\ln^2 x$.

741. Əgər: a) $x=x_0$-da $f(x)$ funksiyası kəsilməz, $g(x)$ funksiyası isə kəsilən olarsa; b) $x=x_0$-da hər iki $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları kəsilən olarsa, onda iki funksiyanın $f(x)+g(x)$ cəmi verilmiş x_0 nöqtəsində kəsiləndirmi? Uyğun misallar qurun.

742. Əgər: a) $x=x_0$ nöqtəsində $f(x)$ funksiyası kəsilməz, $g(x)$ funksiyası isə kəsiləndirsə; b) hər iki $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları $x=x_0$ nöqtəsində kəsiləndirsə, onda iki funksiyanın $f(x)\,g(x)$ hasili verilmiş x_0 nöqtəsində kəsiləndirmi?

743. Hökm etmək olarmı ki, kəsilən funksiyanın kvadratı da kəsilən funksiyadır? Kvadratı kəsilməz olan hər yerdə kəsilən funksiyaya aid misal qurun.

744. $f[g(x)]$ və $g[f(x)]$ funksiyalarının kəsilməzliyini araşdırın:

a) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ və $g(x) = 1 + x^2$;

b) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ və $g(x) = x(1 - x^2)$;

c) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ və $g(x) = 1 + x - [x]$.

745. $$f(u) = \begin{cases} u, & 0 < u \le 1 \text{ olduqda;} \\ 2 - u, & 1 < u < 2 \text{ olduqda} \end{cases}$$

və

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & x \text{ rasional olduqda;} \\ 2 - x, & x \text{ irrasional olduqda} \end{cases}$$

($0<x<1$) olarsa, $y=f(x)$ mürəkkəb funksiyasının kəsilməzliyini araşdırın, burada $u=\varphi(x)$.

746. İsbat edin ki, $f(x)$ funksiyası kəsilməzdirsə, onda

$$F(x) = |f(x)|$$

funksiyası da kəsilməzdir.

747. İsbat edin ki, $f(x)$ funksiyası kəsilməzdirsə, onda

$$f_c(x) = \begin{cases} -c, & f(x) < -c \text{ olduqda;} \\ f(x), & |f(x)| \le c \text{ olduqda;} \\ c, & f(x) > c \text{ olduqda} \end{cases}$$

funksiyası da kəsilməzdir, burada c - istənilən müsbət ədəddir.

748. İsbat edin ki, $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməzdirsə, onda

$$m(x) = \inf_{a \le \xi \le x} \{f(\xi)\} \quad \text{və} \quad M(x) = \sup_{a \le \xi \le x} \{f(\xi)\}$$

funksiyaları da $[a,b]$-də kəsilməzdir.

749. İsbat edin ki, $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları kəsilməzdirsə, onda həmçinin

$$\varphi(x) = \min[f(x), g(x)] \quad \text{və} \quad \psi(x) = \max[f(x), g(x)]$$

funksiyaları da kəsilməzdir.

750. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında təyin olunub və məhduddur. İsbat edin ki,

$$m(x) = \inf_{a \le \xi < x} \{f(\xi)\} \quad \text{və} \quad M(x) = \sup_{a \le \xi < x} \{f(\xi)\}$$

funksiyaları $[a,b]$ parçasında soldan kəsilməzdir.

751. İsbat edin ki, əgər $f(x)$ funksiyası $a \le x < +\infty$ aralığında kəsilməzdirsə və sonlu

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

limiti varsa, onda bu funksiya verilmiş aralıqda məhduddur.

752. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $(x_0, +\infty)$ intervalında kəsilməzdir və məhduddur. İsbat edin ki, istənilən T ədədi üçün elə $x_n \to +\infty$ ardıcıllığı var ki,

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n+T)-f(x_n)]=0$$

olar.

753. Tutaq ki, $\varphi(x)$ və $\psi(x)$ - $-\infty<x<+\infty$ olduqda təyin olunmuş, periodik kəsilməz funksiyalardır və

$$\lim_{x\to+\infty}[\varphi(x)-\psi(x)]=0.$$

İsbat edin ki,

$$\varphi(x)\equiv\psi(x).$$

754. İsbat edin ki, məhdud monoton funksiyaların bütün kəsilmə nöqtələri 1-ci növdür.

755. İsbat edin ki, $f(x)$ funksiyası 1) $[a,b]$ parçasında təyin olunub və monotondursa, 2) $f(a)$ və $f(b)$ arasındakı bütün qiymətləri alırsa, onda bu funksiya $[a,b]$-də kəsilməzdir.

756. Göstərin ki, $f(x)=\sin\dfrac{1}{x-a}$, $x\neq a$ olduqda və $f(a)=0$ funksiyası $[a,b]$ parçasında $f(a)$ və $f(b)$ arasındakı bütün aralıq qiymətlərini alır, lakin $[a,b]$-də kəsilməz deyil.

757. İsbat edin ki, əgər $f(x)$ funksiyası (a,b) intervalında kəsilməzdirsə və $x_1, x_2, .., x_n$ - bu intervalın istənilən nöqtələridirsə, onda bunların arasında elə ξ ədədi tapmaq olar ki,

$$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)]$$

olar.

758. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası (a,b) intervalında kəsilməzdir və

$$l=\underline{\lim}_{x\to a}f(x) \text{ və } L=\overline{\lim}_{x\to a}f(x).$$

İsbat edin ki, $l\leq\lambda\leq L$ şərtini ödəyən istənilən λ ədədi üçün elə $x_n\to a$ $(n=1, 2, \ldots)$ ardıcıllığı var ki,

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lambda.$$

§ 8. Tərs funksiya. Parametrik şəkildə verilmiş funksiyalar

1°. Tərs funksiyanın varlığı və kəsilməzliyi. Əgər $y=f(x)$ funksiyası 1) (a,b) intervalında təyin olunub və kəsilməzdirsə, 2) bu intervalda ciddi monotondursa, onda (A,B) intervalında təyin olunmuş, kəsilməz və ciddi monoton birqiymətli $x=f^{-1}(y)$ tərs funksiyası var, burada $A=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ və $B=\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$.

Verilmiş $y=f(x)$ kəsilməz funksiyasının çoxqiymətli tərs funksiyasının *birqiymətli kəsilməz budağı* dedikdə, özünün təyin olunduğu ən geniş oblastda $f[g(y)]=y$ tənliyini ödəyən istənilən birqiymətli kəsilməz $x=g(y)$ funksiyası başa düşülür.

2^0. **Parametrik şəkildə verilmiş funksiyanın kəsilməzliyi.** Əgər $\varphi(t)$ və $\psi(t)$ funksiyaları (α,β) intervalında təyin olunub, kəsilməzdirsə və $\varphi(t)$ funksiyası bu intervalda ciddi monotondursa, onda

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t)$$

tənliklər sistemi (a,b) intervalında y-i x-dən asılı birqiymətli kəsilməz funksiya kimi təyin edir:

$$y=\psi(\varphi^{-1}(x)),$$

burada $a=\lim\limits_{t\to\alpha+0}\varphi(t)$ və $b=\lim\limits_{t\to\beta-0}\varphi(t)$.

759. Kəsr-xətti funksiyanın tərs funksiyasını tapın:

$$y=\frac{ax+b}{cx+d} \qquad (ad-bc\neq 0).$$

Hansı halda tərs funksiya verilmiş funksiya ilə üst-üstə düşür.

760. $y=x+[x]$ olarsa, $x=x(y)$ tərs funksiyasını tapın.

761. Göstərin ki,

$$y-\varepsilon\sin y=x \qquad (0\leq\varepsilon<1)$$

Kepler tənliyini ödəyən yeganə kəsilməz $y=y(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ funksiyası var.

762. Göstərin ki,

$$\operatorname{ctg} x=kx$$

tənliyinin istənilən həqiqi k $(-\infty<k<+\infty)$ ədədi üçün $0<x<\pi$ intervalında yeganə kəsilməz $x=x(k)$ kökü var.

763. Monoton olmayan $y=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ funksiyasının birqiymətli tərs funksiyası ola bilərmi?

Misala baxın:

$$y=\begin{cases} x, & x \text{ rasional olduqda;} \\ -x, & x \text{ irrasional olduqda.}\end{cases}$$

764. Hansı halda $y=f(x)$ funksiyası ilə $x=f^{-1}(y)$ tərs funksiyası eyni bir funksiyanı ifadə edir?

765. Göstərin ki, kəsilən

$$y=(1+x^2)\operatorname{sgn} x$$

funksiyasının tərs funksiyası kəsilməzdir.

766. İsbat edin ki, əgər $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında təyin olunub, ciddi monotondursa və

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(a) \qquad (a\leq x_n\leq b)$$

olarsa, onda

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a.$$

Aşağıdakı funksiyalar üçün tərs funksiyaların birqiymətli kəsilməz budağını təyin edin:

767. $y = x^2$.

768. $y = 2x - x^2$.

769. $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

770. $y = \sin x$.

771. $y = \cos x$.

772. $y = \operatorname{tg} x$.

773. Göstərin ki,

$$y = 1 + \sin x$$

kəsilməz funksiyasının $(0 < x < 2\pi)$ intervalına uyğun qiymətlər çoxluğu parçadır.

774. Bərabərliyi isbat edin:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

775. Bərabərliyi isbat edin:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x \qquad (x \neq 0).$$

776. Arktangenslərin toplanması teoremini isbat edin:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi,$$

burada $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$ 0; 1; –1 qiymətlərindən birini alan funksiyadır. y-in hansı qiyməti üçün x-in verilmiş qiymətində ε funksiyası kəsilən olur? Oxy müstəvisində ε funksiyasının kəsilməzliyinə uyğun oblastı qurun və alınan oblastda bu funksiyanın qiymətini təyin edin.

777. Arksinusların toplanması teoremini isbat edin:

$$\arcsin x + \arcsin y = (-1)^{\varepsilon} \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) + \varepsilon\pi, \quad (|x| \leq 1, \ |y| \leq 1),$$

burada

$$xy \leq 0 \text{ və ya } x^2 + y^2 \leq 1 \text{ olduqda } \varepsilon = 0$$

və

$$xy > 0, \quad x^2 + y^2 > 1 \text{ olduqda } \varepsilon = \operatorname{sgn} x.$$

778. Arkkosinusların toplanması teoremini isbat edin:

$$\arccos x + \arccos y = (-1)^{\varepsilon} \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) + 2\pi\varepsilon$$

$(|x| \leq 1, \ |y| \leq 1)$, burada

$$x + y \geq 0 \text{ olduqda } \varepsilon = 0$$

və

$$x + y < 0 \text{ olduqda } \varepsilon = 1.$$

779. Funksiyaların qrafikini qurun:

a) $y = \arcsin x - \arcsin\sqrt{1-x^2}$;

b) $y = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) - 2\arcsin x$.

780. $x = \operatorname{arctg} t$, $y = \operatorname{arcctg} t$ $(-\infty < t < +\infty)$ tənlikləri ilə verilən $y = y(x)$ funksiyasını tapın. Bu funksiya hansı oblastda təyin olunmuşdur?

781. Tutaq ki,

$$x = \operatorname{ch} t, \quad y = \operatorname{sh} t \quad (-\infty < t < +\infty).$$

t parametrinin hansı dəyişmə oblastında y dəyişəninə x dəyişəninin birqiymətli funksiyası kimi baxmaq olar? Müxtəlif oblastlar üçün y-in ifadəsini tapın.

782.
$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (\alpha < t < \beta)$$

tənliklər sistemindən y-i x-in birqiymətli funksiyası kimi təyin etmək üçün zəruri və kafi şərt hansıdır? Misala baxın: $x = \sin^2 t$, $y = \cos^2 t$.

783. Hansı şərtlər daxilində iki

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (a < t < b)$$

və

$$x = \varphi(\chi(\tau)), \quad y = \psi(\chi(\tau)) \quad (\alpha < \tau < \beta)$$

tənliklər sistemi eyni bir $y = y(x)$ funksiyasını ifadə edir?

784. Tutaq ki, $\varphi(x)$ və $\psi(x)$ funksiyaları (a,b) intervalında təyin olunub, kəsilməzdir və

$$A = \inf_{a<x<b} \varphi(x), \quad B = \sup_{a<x<b} \varphi(x).$$

Hansı halda (A,B) intervalında təyin olunmuş elə birqiymətli $f(x)$ funksiyası var ki, $a < x < b$ olduqda $\psi(x) = f(\varphi(x))$ olur?

§ 9. Funksiyanın müntəzəm kəsilməzliyi

1^0. **Müntəzəm kəsilməzliyin tərifi.** Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası verilmiş $X=\{x\}$ çoxluğunda (intervalında, parçasında və i.a.) təyin olunub və istənilən $\varepsilon>0$ üçün elə $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ var ki,

$$|x' - x''| < \delta$$

şərtini ödəyən istənilən $x', x'' \in X$ üçün

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

bərabərsizliyi ödənilir. Onda $f(x)$ funksiyası X çoxluğunda *müntəzəm kəsilməz* adlanır.

2^0. **Kantor teoremi.** $[a,b]$ parçasında kəsilməz olan $f(x)$ funksiyası bu parçada müntəzəm kəsilməzdir.

785. Zavodun sexi x tərəfi 1 *sm*-dən 10 *sm* arasında dəyişə bilən kvadrat lövhəciklər istehsal edir. Bu lövhəciklərin tərəflərini hansı δ dəqiqliyi ilə işləmək lazımdır ki, onların (göstərilən aralıqda) uzunluqlarından asılı olmayaraq y sahələri nəzərdə tutulmuş sahədən ε-dan az fərqlənsin? *a*) $\varepsilon = 1$ *sm*^{2}; *b*) $\varepsilon = 0{,}01$ *sm*^{2}; *c*) $\varepsilon = 0{,}0001$ *sm*^{2} olduqda ədədi hesablama aparın.

786. Eni ε, uzunluğu δ olan silindrik mufta $y=\sqrt[3]{x}$ əyrisinə geydirilmiş və oxu Ox oxuna paralel qalmaq şərtilə əyri boyunca sürüşür. δ nəyə bərabər olmalıdır ki, bu mufta $-10 \le x \le 10$ bərabərsizliyi ilə təyin olunan əyri hissəsini sərbəst keçə bilsin: *a)* $\varepsilon = 1$; *b)* $\varepsilon = 0{,}1$; *c)* $\varepsilon = 0{,}01$; *d)* ε kifayət qədər kiçikdir?

787. Aşağıdakı təklifi "ε–δ" dilində ifadə edin: $f(x)$ funksiyası hər hansı çoxluqda (intervalda, parçada və i.a.) kəsilməzdir, lakin bu çoxluqda müntəzəm kəsilməz deyil.

788. Göstərin ki,

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

funksiyası $(0, 1)$ intervalında kəsilməzdir, lakin bu intervalda müntəzəm kəsilməz deyil.

789. Göstərin ki,

$$f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$$

funksiyası $(0, 1)$ intervalında məhduddur və kəsilməzdir, lakin bu intervalda müntəzəm kəsilməz deyil.

790. Göstərin ki,

$$f(x) = \sin x^2$$

funksiyası sonsuz $-\infty < x < +\infty$ intervalında məhduddur və kəsilməzdir, lakin bu intervalda müntəzəm kəsilməz deyil.

791. İsbat edin ki, əgər $f(x)$ funksiyası $a \le x < +\infty$ oblastında təyin olunub, kəsilməzdirsə və sonlu

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

limiti varsa, onda $f(x)$ funksiyası bu oblastda müntəzəm kəsilməzdir.

792. Göstərin ki, qeyri-məhdud

$$f(x) = x + \sin x$$

funksiyası $-\infty < x < +\infty$ oxunda müntəzəm kəsilməzdir.

793. $f(x) = x^2$ funksiyası *a)* $(-l, l)$ intervalında, burada l - kifayət qədər böyük olan ixtiyari müsbət ədəddir; *b)* $(-\infty, +\infty)$ intervalında müntəzəm kəsilməzdirmi?

Aşağıdakı funksiyaların verilmiş oblastlarda müntəzəm kəsilməzliyini araşdırın:

794. $f(x) = \dfrac{x}{4 - x^2}$ $\quad (-1 \le x \le 1)$.

795. $f(x) = \ln x$ $\quad (0 < x < 1)$.

796. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ $\quad (0 < x < \pi)$.

797. $f(x)=e^x\cos\frac{1}{x}$ $(0<x<1)$.

798. $f(x)=\operatorname{arctg}x$ $(-\infty<x<+\infty)$.

799. $f(x)=\sqrt{x}$ $(1\le x<+\infty)$.

800. $f(x)=x\sin x$ $(0\le x<+\infty)$.

801. Göstərin ki, $f(x)=\frac{|\sin x|}{x}$ funksiyası

$$J_1=(-1<x<0) \quad \text{və} \quad J_2=(0<x<1)$$

intervallarının hər birində müntəzəm kəsilməzdir, lakin

$$J_1+J_2=\{0<|x|<1\}$$

çoxluğunda müntəzəm kəsilməz deyil.

801.1. İsbat edin ki, əgər $f(x)$ funksiyası $[a,c]$ və $[c,b]$ parçalarının hər birində müntəzəm kəsilməzdirsə, onda bu funksiya $[a,b]$ parçasında da müntəzəm kəsilməzdir.

802. $\varepsilon>0$ üçün elə $\delta=\delta(\varepsilon)$ (hər hansı!) tapın ki, verilmiş aralıqda $f(x)$ funksiyası üçün müntəzəm kəsilməzlik şərti ödənilsin:

a) $f(x)=5x-3$ $(-\infty<x<+\infty)$;

b) $f(x)=x^2-2x-1$ $(-2\le x\le 5)$;

c) $f(x)=\frac{1}{x}$ $(0{,}1\le x\le 1)$;

d) $f(x)=\sqrt{x}$ $(0\le x<+\infty)$;

e) $f(x)=2\sin x-\cos x$ $(-\infty<x<+\infty)$;

f) $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$ və $f(0)=0$ $(0\le x\le \pi)$.

803. $[1,10]$ parçasını neçə bərabər parçaya bölmək lazımdır ki, bu parçaların hər birində $f(x)=x^2$ funksiyasının rəqsi 0,0001-dən kiçik olsun?

804. İsbat edin ki, (a,b) intervalında müntəzəm kəsilməz olan sonlu sayda funksiyaların cəmi və hasili bu intervalda müntəzəm kəsilməzdir.

805. İsbat edin ki, əgər məhdud və monoton $f(x)$ funksiyası sonlu və ya sonsuz (a,b) intervalında kəsilməzdirsə, onda bu funksiya (a,b) intervalında müntəzəm kəsilməzdir.

806 (y). İsbat edin ki, əgər $f(x)$ funksiyası sonlu (a,b) intervalında müntəzəm kəsilməzdirsə, onda

$$A=\lim_{x\to a+0}f(x) \quad \text{və} \quad B=\lim_{x\to b-0}f(x)$$

limitləri var. Bu teorem sonsuz (a,b) intervalı üçün doğrudurmu?

806.1. İsbat edin ki, sonlu (a,b) intervalında təyin olunan kəsilməz $f(x)$ funksiyasını $[a,b]$ parçasında kəsilməz davam etdirmək üçün zəruri və kafi şərt $f(x)$ funksiyasının (a,b) intervalında müntəzəm kəsilməz olmasıdır.

807. $$\omega_f(\delta) = \sup|f(x_1) - f(x_2)|$$
funksiyası (a,b) aralığında $f(x)$ funksiyasının *kəsilməzlik modulu* adlanır, burada x_1 və x_2 - (a,b)-nin $|x_1 - x_2| \le \delta$ şərtini ödəyən istənilən nöqtələridir.

İsbat edin ki, (a,b) aralığında $f(x)$ funksiyasının müntəzəm kəsilməzliyi üçün zəruri və kafi şərt
$$\lim_{\delta \to +0} \omega_f(\delta) = 0$$
olmasıdır.

808. Aşağıdakı funksiyalar üçün $\omega_f(\delta)$ kəsilməzlik modulunun (əvvəlki məsələyə bax)
$$\omega_f(\delta) \le C \cdot \delta^{\alpha}$$
şəkilli qiymətləndirilməsini alın, burada C və α - sabitlərdir:

a) $f(x) = x^3$ $\quad (0 \le x \le 1)$;

b) $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad (0 \le x \le a)$ və $(a < x < +\infty)$;

c) $f(x) = \sin x + \cos x$ $\quad (0 \le x \le 2\pi)$.

§10. Funksional tənliklər

809. İsbat edin ki, x və y-in bütün həqiqi qiymətləri üçün
$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (1)$$
tənliyini ödəyən yeganə kəsilməz $f(x)$ funksiyası xətti bircins funksiyadır:
$$f(x) = ax,$$
burada $a = f(1)$ - ixtiyari sabitdir.

810. İsbat edin ki, (1) tənliyini ödəyən monoton $f(x)$ funksiyası xətti bircins funksiyadır.

811. İsbat edin ki, (1) tənliyini ödəyən və kifayət qədər kiçik $(-\varepsilon, \varepsilon)$ intervalında məhdud olan $f(x)$ funksiyası xətti bircins funksiyadır.

812. İsbat edin ki, x və y-in bütün qiymətləri üçün
$$f(x+y) = f(x)\,f(y) \qquad (2)$$
tənliyini ödəyən, eynilik kimi sıfra bərabər olmayan yeganə kəsilməz $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ funksiyası üstlü funksiyadır:
$$f(x) = a^x,$$
burada $a = f(1)$ - müsbət sabitdir.

813. İsbat edin ki, (2) tənliyini ödəyən və $(0, \varepsilon)$ intervalında məhdud olan, eynilik kimi sıfra bərabər olmayan $f(x)$ funksiyası üstlü funksiyadır.

814. İsbat edin ki, x və y-in bütün müsbət qiymətləri üçün
$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

tənliyini ödəyən, eynilik kimi sıfra bərabər olmayan yeganə kəsilməz $f(x)$ $(0<x<+\infty)$ funksiyası loqarifmik funksiyadır:

$$f(x)=\log_a x,$$

burada a - müsbət sabitdir və $a\neq 1$.

815. İsbat edin ki, x və y-in bütün müsbət qiymətləri üçün

$$f(xy)=f(x)f(y) \tag{3}$$

tənliyini ödəyən, eynilik kimi sıfra bərabər olmayan yeganə kəsilməz $f(x)$ $(0<x<+\infty)$ funksiyası qüvvət funksiyasıdır:

$$f(x)=x^a,$$

burada a - sabitdir.

816. x və y-in bütün həqiqi qiymətləri üçün (3) tənliyini ödəyən bütün kəsilməz $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ funksiyalarını tapın.

817. Göstərin ki, kəsilən

$$f(x)=\operatorname{sgn} x$$

funksiyası (3) tənliyini ödəyir.

818. x və y-in bütün həqiqi qiymətləri üçün

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$$

tənliyini ödəyən bütün kəsilməz $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ funksiyalarını tapın.

819. x və y-in bütün həqiqi qiymətləri üçün

$$f(x+y)=f(x)f(y)-g(x)g(y)$$
$$g(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x)$$

tənliklər sistemini, bundan əlavə

$$f(0)=1 \text{ və } g(0)=0$$

normallaşdırma şərtlərini ödəyən bütün məhdud kəsilməz $f(x)$ və $g(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ funksiyalarını tapın.

Göstəriş. $F(x)=f^2(x)+g^2(x)$ funksiyasına baxın.

820. Tutaq ki,

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$$

və

$$\Delta^2 f(x)=\Delta\{\Delta f(x)\}$$

$f(x)$ funksiyasının uyğun olaraq birinci və ikinci tərtib sonlu fərqidir. İsbat edin ki, əgər $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ funksiyası kəsilməzdirsə və

$$\Delta^2 f(x)\equiv 0$$

olarsa, onda bu funksiya xətti funksiyadır, yəni

$$f(x)=ax+b,$$

burada a və b - sabitlərdir.

II BÖLMƏ

BİRDƏYİŞƏNLİ FUNKSİYALARIN DİFERENSİAL HESABI

§1. Aşkar funksiyanın törəməsi

1°. Törəmənin tərifi. Əgər x və $x_1 = x + \Delta x$ sərbəst dəyişənin qiymətləri olarsa, onda

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

fərqi $y = f(x)$ funksiyasının $[x, x_1]$ parçasında *artımı* adlanır.

Əgər

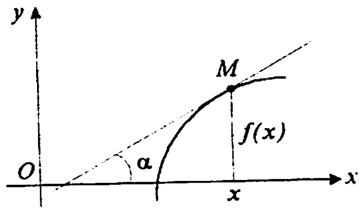
$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{1}$$

ifadəsinin mənası varsa, onda bu ifadə *törəmə*, $f(x)$ funksiyası isə *diferensiallanan* funksiya adlanır.

Həndəsi olaraq $f'(x)$ ədədi $y = f(x)$ funksiyasının qrafikinə x nöqtəsində çəkilmiş toxunanının bucaq əmsalıdır $(\operatorname{tg}\alpha = f'(x))$ (şək. 6).

2°. Törəmənin tapılması üçün əsas qaydalar. Əgər c - sabit kəmiyyətdirsə və $u = u(x)$, $\upsilon = \upsilon(x)$, $w = w(x)$ funksiyalarının törəməsi varsa, onda

1) $c' = 0$;
2) $(cu)' = cu'$;
3) $(u + \upsilon - w)' = u' + \upsilon' - w'$;
4) $(u\upsilon)' = u'\upsilon + \upsilon' u$;
5) $\left(\frac{u}{\upsilon}\right)' = \frac{u'\upsilon - u\upsilon'}{\upsilon^2}$ $\quad(\upsilon \neq 0)$;



Şək. 6.

6) $(u^n)' = nu^{n-1}u'$ (n - sabit ədəddir);
7) $y = f(u)$ və $u = \varphi(x)$ funksiyalarının törəməsi varsa, onda

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

3°. Əsas düsturlar. Əgər x - sərbəst dəyişəndirsə, onda

I. $(x^n)' = nx^{n-1}$
(n - sabit ədəddir).

II. $(\sin x)' = \cos x$.

III. $(\cos x)' = -\sin x$.

IV. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

V. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

VI. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

VII. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

VIII. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

IX. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

X. $(a^x)' = a^x \ln a$ $(a > 0)$;
$(e^x)' = e^x$.

XI. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0)$;
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

XII. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.

XIII. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

XIV. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$. XV. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

4°. Birtərəfli törəmələr.

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{və} \quad f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ifadələri $f(x)$ funksiyasının x nöqtəsində uyğun olaraq *sol* və *sağ* törəmələri adlanır.

$f'(x)$ törəməsinin varlığı üçün zəruri və kafi şərt

$$f'_-(x) = f'_+(x)$$

olmasıdır.

5°. Sonsuz törəmələr. Əgər $f(x)$ funksiyası x nöqtəsində kəsilməzdirsə və

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \infty$$

olarsa, onda deyirlər ki, x nöqtəsində $f(x)$ funksiyasının *sonsuz törəməsi* var. Bu halda x nöqtəsində $y = f(x)$ funksiyasının qrafikinə çəkilmiş toxunan Ox oxuna perpendikulyardır.

821. x arqumenti 1-dən 1000-ə qədər dəyişdikdə Δx artımını və $y = \lg x$ funksiyasının uyğun Δy artımını təyin edin.

822. x arqumenti 0,01-dən 0,001-ə qədər dəyişdikdə Δx artımını və $y = \dfrac{1}{x^2}$ funksiyasının uyğun Δy artımını təyin edin.

823. x arqumenti Δx artımı alır. *a)* $y = ax + b$; *b)* $y = ax^2 + bx + c$; *c)* $y = a^x$ olarsa, Δy artımını təyin edin.

824. İsbat edin ki,

a) $\Delta[f(x) + g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x)$;

b) $\Delta[f(x)g(x)] = g(x+\Delta x)\Delta f(x) + f(x)\Delta g(x)$.

825. $y = x^2$ əyrisinin $A(2, 4)$ və $A'(2+\Delta x,\ 4+\Delta y)$ nöqtələrindən AA' kəsəni keçirilmişdir. Əgər: *a)* $\Delta x = 1$; *b)* $\Delta x = 0{,}1$; *c)* $\Delta x = 0{,}01$; d) Δx kifayət qədər kiçik olarsa, bu kəsənin bucaq əmsalını tapın.

A nöqtəsində verilən əyriyə çəkilmiş toxunanın bucaq əmsalı nəyə bərabərdir?

826. Ox oxunun $1 \le x \le 1+h$ parçası $y = x^3$ funksiyasının köməyi ilə Oy oxuna inikas olunur. Dartılmanın orta əmsalını təyin edin və əgər: *a)* $h = 0{,}1$; *b)* $h = 0{,}01$; *c)* $h = 0{,}001$ olarsa, ədədi hesablama aparın.

Bu inikas zamanı $x = 1$ nöqtəsində dartılma əmsalı nəyə bərabərdir?

827. Cismin Ox oxu boyunca hərəkət tənliyi

$$x = 10t + 5t^2$$

düsturu ilə verilmişdir, burada t - zaman (*saniyə*) və x - məsafədir (*metr*). $20 \le t \le 20+\Delta t$ zaman aralığında hərəkətin orta sürətini tapın və əgər: *a*) $\Delta t = 1$; *b*) $\Delta t = 0{,}1$; *c*) $\Delta t = 0{,}01$ olarsa, ədədi hesablama aparın. Zamanın $t = 20$ anında hərəkətin sürəti nəyə bərabərdir?

828. Törəmənin tərifindən istifadə edərək verilmiş funksiyaların törəməsini tapın: *a*) x^2; *b*) x^3; *c*) $\frac{1}{x}$; *d*) $\sqrt{x}$; *e*) $\sqrt[3]{x}$; *f*) $\operatorname{tg} x$; *g*) $\operatorname{ctg} x$; *h*) $\arcsin x$; *i*) $\arccos x$; *j*) $\operatorname{arctg} x$.

829. $f(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$ olduqda $f'(1)$, $f'(2)$ və $f'(3)$-ü tapın.

830. $f(x)=x^2\sin(x-2)$ olduqda $f'(2)$-ni tapın.

831. $f(x)=x+(x-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}$ olduqda $f'(1)$-i tapın.

832. Əgər $f(x)$ funksiyası a nöqtəsində diferensiallanandırsa,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

limitini tapın.

833. İsbat edin ki, əgər $f(x)$ funksiyası diferensiallanandırsa və n - natural ədəddirsə, onda

$$\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]=f'(x). \qquad (1)$$

Tərsinə, əgər $f(x)$ funksiyası üçün (1) limiti varsa, onda bu funksiyanın törəməsi varmı? Dirixle funksiyası misalına bax (I bölmə, məsələ 734-ə bax).

Törəmələr cədvəlindən istifadə edərək aşağıdakı funksiyaların törəməsini tapın:

834. $y=2+x-x^2$. $y'(0)$; $y'\left(\frac{1}{2}\right)$; $y'(1)$; $y'(-10)$ nəyə bərabərdir.

835. $y=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x$; x-in hansı qiymətlərində: *a*) $y'(x)=0$; *b*) $y'(x)=-2$; *c*) $y'(x)=10$ olur?

836. $y=a^5+5a^3x^2-x^5$.

837. $y=\frac{ax+b}{a+b}$.

838. $y=(x-a)(x-b)$.

839. $y=(x+1)(x+2)^2(x+3)^3$.

840. $y=(x\sin\alpha+\cos\alpha)(x\cos\alpha-\sin\alpha)$.

841. $y=(1+nx^m)(1+mx^n)$.

842. 1. $y=(5+2x)^{10}(3-4x)^{20}$.

842. $y=(1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^3$.

843. $y=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}$.

844. $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)' = \dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$ düsturunu isbat edin.

Funksiyaların törəməsini tapın:

845. $y=\dfrac{2x}{1-x^2}$.

846. $y=\dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$.

847. $y=\dfrac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$.

848. $y=\dfrac{(2-x^2)(3-x^3)}{(1-x)^2}$.

849. $y=\dfrac{(1-x)^p}{(1+x)^q}$.

850. $y=\dfrac{x^p(1-x)^q}{1+x}$.

851. $y=x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$.

852. $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

853. $y=\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

854. $y=x\sqrt{1+x^2}$.

855. $y=(1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}$.

856. $y=\sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}$.

857. $y=\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

858. $y=\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$.

859. $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}\,(x+\sqrt{1+x^2})}$.

860. $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

861. $y=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}$.

862. $y=\cos 2x-2\sin x$

863. $y=(2-x^2)\cos x+2x\sin x$.

864. $y=\sin(\cos^2 x)\cdot\cos(\sin^2 x)$.

865. $y=\sin^n x\cos nx$.

866. $y=\sin[\sin(\sin x)]$.

867. $y=\dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}$.

868. $y=\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}$.

869. $y=\dfrac{1}{\cos^n x}$.

870. $y=\dfrac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$.

871. $y=\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}-\mathrm{ctg}\dfrac{x}{2}$.

872. $y=\mathrm{tg}\,x-\dfrac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x+\dfrac{1}{5}\mathrm{tg}^5 x$.

873. $y=4\sqrt[3]{\mathrm{ctg}^2 x}+\sqrt[3]{\mathrm{ctg}^8 x}$.

874. $y=\sec^2\dfrac{x}{a}+\mathrm{cosec}^2\dfrac{x}{a}$.

875. $y=\sin[\cos^2(\mathrm{tg}^3 x)]$.

876. $y=e^{-x^2}$.

877. $y=2^{tg\frac{1}{x}}$.

878. $y=e^x(x^2-2x+2)$.

879. $y=\left[\frac{1-x^2}{2}\sin x-\frac{(1+x)^2}{2}\cos x\right]e^{-x}$.

880. $y=e^x\left(1+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)$.

881. $y=\frac{\ln 3\cdot\sin x+\cos x}{3^x}$.

882. $y=e^{ax}\frac{a\sin bx-b\cos bx}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

883. $y=e^x+e^{e^x}+e^{e^{e^x}}$.

884. $y=\left(\frac{a}{b}\right)^x\left(\frac{b}{x}\right)^a\left(\frac{x}{a}\right)^b$. $(a>0,\ b>0)$.

885. $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}$ $(a>0)$.

886. $y=\lg^3 x^2$.

887. $y=\ln(\ln(\ln x))$.

888. $y=\ln(\ln^2(\ln^3 x))$.

889. $y=\frac{1}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2(1+x)}$.

890. $y=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

891. $y=\frac{1}{4(1+x^4)}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{1+x^4}$.

892. $y=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

893. $y=\frac{1}{1-k}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{\sqrt{k}}{1-k}\ln\frac{1+x\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}}$ $(0<k<1)$.

894. $y=\sqrt{x+1}-\ln(1+\sqrt{x+1})$.

895. $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

896. $y=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$.

897. $y=x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2x$.

898. $y=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$.

899. $y=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}$ $(a>0,\ b>0)$.

900. $y=\frac{2+3x^2}{x^4}\sqrt{1-x^2}+3\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$.

901. $y=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

902. $y=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$.

903. $y=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x+\ln\sin x$.

904. $y=\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$.

905. $y=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{\sin x}}$.

906. $y=\ln\dfrac{b+a\cos x+\sqrt{b^2-a^2}\sin x}{a+b\cos x}$ $\quad (0\le|a|<|b|)$.

907. $y=\dfrac{1}{x}\left(\ln^3 x+3\ln^2 x+6\ln x+6\right)$.

908. $y=\dfrac{1}{4x^4}\ln\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{16x^4}$.

909. $y=\dfrac{3}{2}(1-\sqrt[3]{1+x^2})^2+3\ln(1+\sqrt[3]{1+x^2})$.

910. $y=\ln\left[\dfrac{1}{x}+\ln\left(\dfrac{1}{x}+\ln\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

911. $y=x\left[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)\right]$.

912. $y=\ln \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-\cos x\cdot\ln \operatorname{tg} x$.

913. $y=\arcsin\dfrac{x}{2}$.

914. $y=\arccos\dfrac{1-x}{\sqrt{2}}$.

915. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{a}$.

916. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcctg}\dfrac{\sqrt{2}}{x}$.

917. $y=\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

918. $y=x+\sqrt{1-x^2}\cdot\arccos x$.

919. $y=x\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}$.

920. $y=\arccos\dfrac{1}{x}$.

921. $y=\arcsin(\sin x)$.

922. $y=\arccos(\cos^2 x)$.

923. $y=\arcsin(\sin x-\cos x)$.

924. $y=\arccos\sqrt{1-x^2}$.

925. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$.

926. $y=\operatorname{arcctg}\left(\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right)$.

927. $y=\dfrac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)$ $\quad (a>b\ge 0)$.

928. $y=\arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

929. $y=\dfrac{1}{\arccos^2(x^2)}$.

930. $y=\operatorname{arctg}x+\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}(x^3)$.

931. $y=\ln(1+\sin^2 x)-2\sin x\cdot\operatorname{arctg}(\sin x)$.

932. $y=\ln\left(\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

933. $y=\ln\dfrac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}}+\dfrac{a}{b}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{b}$ $\quad (b\ne 0)$.

934. $y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\qquad (a>0).$

935. $y=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$

936. $y=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}.$

937. $y=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x.$

938. $y=\frac{\arccos x}{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}.$

939. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}.$

940. $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}.$

941. $y=\frac{1}{12}\ln\frac{x^4-x^2+1}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2x^2-1}.$

942. $y=\frac{x^6}{1+x^{12}}-\operatorname{arcctg}x^6.$

943. $y=\ln\frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{1+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3}}.$

944. $y=\operatorname{arctg}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}.$

945. $y=\operatorname{arcctg}\frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}}\qquad (a>0).$

946. $y=\frac{3-x}{2}\sqrt{1-2x-x^2}+2\arcsin\frac{1+x}{\sqrt{2}}.$

947. $y=\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}.$

948. $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x).$

949. $y=\sqrt{1-x^2}\cdot\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+$

$$+\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x^2}+\arcsin x.$$

950. $y=x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2.$

951. $y=\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}}).$ 952. $y=\operatorname{arctg}(x+\sqrt{1+x^2}).$

953. $y=\arcsin\left(\frac{\sin a\sin x}{1-\cos a\cos x}\right).$

954. $y=\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{x^2+2}-x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+2}+x\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}.$

955. $y=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{1+x^4}-x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}+x\sqrt{2}}.$

956. $y=\frac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arcctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}.$

957. $y=\arccos(\sin x^2-\cos x^2).$

958. $y=\arcsin(\sin x^2)+\arccos(\cos x^2).$

959. $y=e^{m\arcsin x}\left[\cos(m\arcsin x)+\sin(m\arcsin x)\right].$

960. $y=\operatorname{arctg}e^x-\ln\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}.$

960.1. $y=\sqrt{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{1+x^4}}}.$

960.2. $y=\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg}\frac{1}{x^2}}}.$

960.3. $y=\ln^2(\sec 2^{\sqrt[3]{x}}).$

961. $y=x+x^x+x^{x^x}\qquad(x>0).$

962. $y=x^{x^a}+x^{a^x}+a^{x^x}\qquad(a>0,\ x>0).$

963. $y=\sqrt[x]{x}\qquad(x>0).$

964. $y=(\sin x)^{\cos x}+(\cos x)^{\sin x}.$

965. $y=(\ln x)^x : x^{\ln x}.$

965.1. $y=\left[\frac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)}\right]^{\operatorname{arctg}^2 x}.$

966. $y=\log_x e.$

967. $y=\ln(\operatorname{ch}x)+\frac{1}{2\operatorname{ch}^2 x}.$

968. $y=\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}^2 x}-\ln\left(\operatorname{cth}\frac{x}{2}\right).$

969. $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{th}x).$

970. $y=\arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch}x}\right).$

971. $y=\frac{b}{a}x+\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{a}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{th}\frac{x}{2}\right)\qquad\left(0\le|b|<a\right).$

972. $u=\cos^2 x$ aralıq dəyişənini daxil etməklə

$$y=\ln(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x})$$

funksiyasının törəməsini tapın.

972-ci misalda göstərilmiş üsuldan istifadə edərək aşağıdakı funksiyaların törəməsini tapın:

973. $y=(\arccos x)^2\left[\ln^2(\arccos x)-\ln(\arccos x)+\frac{1}{2}\right].$

974. $y=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\sqrt[4]{1+x^4}\right)+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+1}{\sqrt[4]{1+x^4}-1}.$

975. $y=\frac{e^{-x^2}\arcsin(e^{-x^2})}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}}+\frac{1}{2}\ln\left(1-e^{-2x^2}\right).$

976. $y=\frac{a^x}{1+a^{2x}}-\frac{1-a^{2x}}{1+a^{2x}}\operatorname{arcctg} a^{-x}.$

977. Törəmələri tapın, funksiyaların və onların törəmələrinin qrafiklərini qurun:

a) $y=|x|$; *b)* $y=x|x|$; *c)* $y=\ln|x|$.

978. Aşağıdakı funksiyaların törəməsini tapın:

a) $y=\left|(x-1)^2(x+1)^3\right|$; *c)* $y=\arccos\frac{1}{|x|}$;

b) $y=|\sin^3 x|$; *d)* $y=[x]\sin^2\pi x$.

Törəmələri tapın, funksiyaların və onların törəmələrinin qrafiklərini qurun:

979.

$$y=\begin{cases}1-x, & -\infty<x<1 \text{ olduqda;}\\ (1-x)(2-x), & 1\le x\le 2 \text{ olduqda;}\\ -(2-x), & 2<x<+\infty \text{ olduqda.}\end{cases}$$

980. $y=\begin{cases}(x-a)^2(x-b)^2, & a\le x\le b \text{ olduqda;}\\ 0, & [a,b]-\text{dən kənarda.}\end{cases}$

981. $y=\begin{cases}x, & x<0 \text{ olduqda;}\\ \ln(1+x), & x\ge 0 \text{ olduqda.}\end{cases}$

982. $y=\begin{cases}\operatorname{arctg} x, & |x|\le 1 \text{ olduqda;}\\ \frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} x+\frac{x-1}{2}, & |x|>1 \text{ olduqda.}\end{cases}$

983. $y=\begin{cases}x^2e^{-x^2}, & |x|\le 1 \text{ olduqda;}\\ \frac{1}{e}, & |x|>1 \text{ olduqda.}\end{cases}$

984. Verilmiş $y=f(x)$ funksiyasının loqarifminin törəməsi bu funksiyanın *loqarifmik törəməsi* adlanır:

$$\frac{y'}{y}=\frac{d}{dx}\ln|f(x)|\equiv\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

y funksiyasının loqarifmik törəməsini tapın:

a) $y = x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; c) $y = (x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\dots(x-a_n)^{\alpha_n}$;

b) $y = \dfrac{x^2}{1-x}\sqrt{\dfrac{3-x}{(3+x)^2}}$; d) $y = \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^n$.

985. Tutaq ki, $\varphi(x)$ və $\psi(x)$ - x-dən asılı diferensiallanan funksiyalardır. y funksiyasının törəməsini tapın:

a) $y = \sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$; b) $y = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$;

c) $y = \sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}$ $\quad(\varphi(x)\neq 0;\ \psi(x)>0)$;

d) $y = \log_{\varphi(x)}\psi(x)$ $\quad(\varphi(x)>0;\ \psi(x)>0)$.

986. y'-i tapın:

a) $y = f(x^2)$; c) $y = f\left(e^x\right)\cdot e^{f(x)}$;

b) $y = f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$; d) $y = f\{f[f(x)]\}$,

burada $f(u)$ - diferensiallanan funksiyadır.

986.1. $f(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-1000)$ üçün $f'(0)$-ı tapın.

987. n tərtibli determinant üçün aşağıdakı diferensiallama qaydasını isbat edin:

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \dots & f_{kn}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}' = \sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \dots & f'_{kn}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

988. $F(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix}$ üçün $F'(x)$-i tapın.

989. $F(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}$ üçün $F'(x)$-i tapın.

990. Funksiyanın qrafiki verilmişdir. Onun törəməsinin qrafikini təqribi qurun.

991. İsbat edin ki,

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \text{ olduqda;} \\ 0, & x=0 \text{ olduqda} \end{cases}$$

funksiyası kəsilən törəməyə malikdir.

992. Hansı şərt daxilində

$$f(x)=x^n\sin\frac{1}{x} \quad (x\neq 0) \text{ və } f(0)=0$$

funksiyası *a*) $x=0$ olduqda kəsilməzdir; *b*) $x=0$ olduqda diferensiallanandır; *c*) $x=0$ olduqda kəsilməz törəməyə malikdir?

993. Hansı şərt daxilində

$$f(x)=|x|^n\sin\frac{1}{|x|^m} \ (x\neq 0) \text{ və } f(0)=0 \ (m>0)$$

funksiyası *a*) koordinat başlanğıcı ətrafında məhdud törəməyə; *b*) bu ətrafda qeyri-məhdud törəməyə malikdir?

994. $f(x)=(x-a)\varphi(x)$ olarsa, $f'(a)$-nı tapın, burada $\varphi(x)$ funksiyası $x=a$ nöqtəsində kəsilməzdir.

995. Göstərin ki,

$$f(x)=|x-a|\varphi(x)$$

funksiyasının a nöqtəsində törəməsi yoxdur, burada $\varphi(x)$ - kəsilməz funksiyadır və $\varphi(a)\neq 0$.

Birtərəfli $f'_-(a)$ və $f'_+(a)$ törəmələri nəyə bərabərdir?

996. Verilmiş $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nöqtələrində törəməsi olmayan kəsilməz funksiyaya aid misal qurun.

997. Göstərin ki,

$$f(x)=x^2\left|\cos\frac{\pi}{x}\right| \quad (x\neq 0) \text{ və } f(0)=0$$

funksiyası $x=0$ nöqtəsinin istənilən ətrafında diferensiallanan deyil, lakin bu nöqtədə funksiya diferensiallanandır.

Funksiyanın qrafikinin eskizini qurun.

998. Göstərin ki,

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x \text{ rasional olduqda;} \\ 0, & x \text{ irrasional olduqda} \end{cases}$$

funksiyası yalnız $x=0$ nöqtəsində törəməyə malikdir.

999. Aşağıdakı funksiyaların diferensiallanmasını araşdırın:

a) $y=\left|(x-1)(x-2)^2(x-3)^3\right|$; *b*) $y=|\cos x|$;

c) $y=\left|\pi^2-x^2\right|\sin^2 x$; *d*) $y=\arcsin(\cos x)$;

$$e)\ y=\begin{cases} \dfrac{x-1}{4}(x+1)^2, & |x|\le 1 \text{ olduqda;} \\ |x|-1, & |x|>1 \text{ olduqda.} \end{cases}$$

$f(x)$ funksiyasının $f'_-(x)$ sol və $f'_+(x)$ sağ törəmələrini tapın:

1000. $f(x)=|x|$.

1001. $f(x)=[x]\sin \pi x$.

1002. $f(x)=x\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right| \quad (x\ne 0),\quad f(0)=0$.

1003. $f(x)=\sqrt{\sin x^2}$.

1004. $f(x)=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} \quad (x\ne 0),\quad f(0)=0$.

1005. $f(x)=\sqrt{1-e^{-x^2}}$.

1006. $f(x)=|\ln|x|| \quad (x\ne 0)$.

1007. $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$.

1008. $f(x)=(x-2)\,\mathrm{arctg}\dfrac{1}{x-2} \quad (x\ne 2),\quad f(2)=0$.

1009. Göstərin ki,

$$f(x)=x\sin\frac{1}{x} \quad (x\ne 0) \quad \text{və} \quad f(0)=0$$

funksiyası $x=0$ nöqtəsində kəsilməzdir, lakin bu nöqtədə nə sağ, nə də sol törəməyə malikdir.

1009.1. Tutaq ki, x_0 $f(x)$ funksiyasının 1-ci növ kəsilmə nöqtəsidir.

$$f'_-(x_0)=\lim_{h\to -0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-0)}{h}$$

və

$$f'_+(x_0)=\lim_{h\to +0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0+0)}{h}$$

ifadələri $f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində *ümumiləşmiş birtərəfli* (uyğun olaraq sol və sağ) *törəmələri* adlanır.

$f(x)$ funksiyasının x_0 kəsilmə nöqtəsində $f'_-(x_0)$ və $f'_+(x_0)$ törəmələrini tapın:

a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x^3}}{x}$; *b)* $f(x)=\mathrm{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$; *c)* $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

1010. Tutaq ki,

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le x_0 \text{ olduqda;} \\ ax+b, & x>x_0 \text{ olduqda.} \end{cases}$$

a və b əmsallarını necə seçmək lazımdır ki, $f(x)$ funksiyası $x = x_0$ nöqtəsində kəsilməz və diferensiallanan olsun?

1011. Tutaq ki,

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \le x_0 \text{ olduqda;} \\ ax + b, & x > x_0 \text{ olduqda,} \end{cases}$$

burada $f(x)$ funksiyası $x = x_0$ nöqtəsində sağdan diferensiallanandır. a və b əmsallarını necə seçmək lazımdır ki, $F(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində kəsilməz və diferensiallanan olsun?

1012. $a \le x \le b$ parçasında iki

$$y = k_1(x - a) \quad (-\infty < x < a) \quad \text{və} \quad y = k_2(x - b) \quad (b < x < +\infty)$$

yarımdüzxətlərinin qoşmasını

$$y = A(x - a)(x - b)(x - c)$$

kub parabolasının köməyi ilə qurun (burada A və c parametrləri təyin olunmalıdır).

1013. $y = \dfrac{m^2}{|x|}$ $(|x| > c)$ əyrisinin hissəsini

$$y = a + bx^2 \quad (|x| \le c)$$

(burada a və b naməlum parametrlərdir) parabolası ilə elə tamamlayın ki, hamar əyri alınsın.

1014. Əgər: *a)* $f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində törəməsi varsa, $g(x)$ funksiyasının isə bu nöqtədə törəməsi yoxdursa; *b)* hər iki $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarının x_0 nöqtəsində törəmələri yoxdursa, hökm etmək olarmı ki,

$$F(x) = f(x) + g(x)$$

cəminin $x = x_0$ nöqtəsində törəməsi yoxdur?

1015. Əgər: a) $f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində törəməsi varsa, $g(x)$ funksiyasının isə bu nöqtədə törəməsi yoxdursa; b) hər iki $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarının x_0 nöqtəsində törəmələri yoxdursa, hökm etmək olarmı ki,

$$F(x) = f(x)g(x)$$

hasilinin $x = x_0$ nöqtəsində törəməsi yoxdur?

$x_0 = 0$ götürməklə, misallara baxın: *a)* $f(x) = x$, $g(x) = |x|$; *b)* $f(x) = |x|$, $g(x) = |x|$.

1016. Əgər: *a)* $f(x)$ funksiyasının $x = g(x_0)$ nöqtəsində törəməsi varsa, $g(x)$ funksiyasının isə $x = x_0$ nöqtəsində törəməsi yoxdursa; *b)* $f(x)$ funksiyasının $x = g(x_0)$ nöqtəsində törəməsi yoxdursa, $g(x)$ funksiyasının isə $x = x_0$ nöqtəsində törəməsi varsa; *c)* $f(x)$ funksiyasının $x = g(x_0)$

nöqtəsində, $g(x)$ funksiyasının isə $x = x_0$ nöqtəsində törəməsi yoxdursa, $F(x) = f(g(x))$ funksiyasının $x = x_0$ nöqtəsində diferensiallanan olması haqqında nə demək olar?

$x_0 = 0$ götürməklə misallara baxın: *a*) $f(x) = x^2$, $g(x) = |x|$;

b) $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2$; *c*) $f(x) = 2x + |x|$, $g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|$.

1017. Hansı nöqtələrdə

$$y = x + \sqrt[3]{\sin x}$$

funksiyasının qrafikinin şaquli toxunanları var?

Bu qrafiki qurun.

1018. $f(x)$ funksiyası öz kəsilmə nöqtəsində: *a*) sonlu törəməyə; *b*) sonsuz törəməyə malik ola bilərmi?

Misala baxın: $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

1019. Əgər $f(x)$ funksiyası məhdud (a,b) intervalında diferensiallanandırsa və

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

olarsa, onda buradan alınırmı ki,

$$1)\ \lim_{x \to a} f'(x) = \infty; \qquad 2)\ \overline{\lim_{x \to a}} |f'(x)| = \infty\ ?$$

Misala baxın: $f(x) = \frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}$, $x \to 0$ olduqda.

1020. Əgər $f(x)$ funksiyası məhdud (a, b) intervalında diferensiallanandırsa və

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

olarsa, onda buradan alınırmı ki,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty\ ?$$

Misala baxın: $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \to 0$ olduqda.

1021. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $(x_0, +\infty)$ intervalında diferensiallanandır və $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ var; buradan alınırmı ki, $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$ də var?

Misala baxın: $f(x) = \dfrac{\sin(x^2)}{x}$.

1022. Tutaq ki, məhdud $f(x)$ funksiyası $(x_0, +\infty)$ intervalında diferensiallanandır və $\lim\limits_{x \to \infty} f'(x)$ var. Buradan alınırmı ki, sonlu və ya sonsuz $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ də var?

Misala baxın: $f(x) = \cos(\ln x)$.

1023. Funksiyalar arasındakı bərabərsizliyi hədbəhəd diferensiallamaq olarmı?

1024.
$$P_n = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$$
və
$$Q_n = 1^2 + 2^2 x + 3^2 x^2 + \ldots + n^2 x^{n-1}.$$
cəmləri üçün düstur çıxarın.

G ö s t ə r i ş. $(x + x^2 + \ldots + x^n)'$ -ə baxın.

1025.
$$S_n = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$$
və
$$T_n = \cos x + 2\cos 2x + \ldots + n\cos nx$$
çəmləri üçün düstur çıxarın.

1025.1.
$$S_n = \operatorname{ch} x + 2\operatorname{ch} 2x + \ldots + n\operatorname{ch} nx$$
cəmi üçün düstur çıxarın.

G ö s t ə r i ş. $S_n = (\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} 2x + \ldots + \operatorname{sh} nx)'$.

1026.
$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}}$$
eyniliyindən istifadə edərək
$$S_n = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}$$
cəmi üçün düstur çıxarın.

1027. İsbat edin ki, diferensiallanan cüt funksiyanın törəməsi tək funksiya, diferensiallanan tək funksiyanın törəməsi isə cüt funksiyadır.

Bu faktın həndəsi izahını verin.

1028. İsbat edin ki, diferensiallanan periodik funksiyanın törəməsi yenidən eyni periodlu periodik funksiyadır.

1029. Əgər dairənin radiusu 2 *sm/san* sürətlə müntəzəm artırsa, dairənin radiusu $R = 10$ *sm* olan anda bu dairənin sahəsi hansı sürətlə artar?

1030. Əgər düzbucaqlının birinci tərəfi 1 *m/san* sürətlə azalırsa, ikinci tərəfi isə 2 *m/san* sürətlə artırsa, bir tərəf x=20 *m*, digər tərəf isə y=15 *m* olan anda düzbucaqlının sahəsi və diaqonalı hansı sürətlə dəyişər?

1031. Bir limandan eyni vaxtda şimal istiqamətdə A paroxodu və şərq istiqamətdə B paroxodu çıxır. A paroxodunun sürəti 30 *km/saat*, B paroxodunun sürəti isə 40 *km/saat* olarsa, onlar arasındakı məsafə hansı sürətlə artır?

1032. Tutaq ki,
$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 2 \text{ olduqda;} \\ 2x - 2, & 2 < x < +\infty \text{ olduqda} \end{cases}$$

və $S(x)$ – $y=f(x)$ əyrisi, Ox oxu və x $(x \geq 0)$ nöqtəsində Ox oxuna çəkilmiş perpendikulyar ilə hüdudlanmış sahədir.

$S(x)$ funksiyasının analitik ifadəsini tərtib edin, $S'(x)$ törəməsini tapın və $y=S'(x)$ funksiyasının qrafikini qurun.

1033. $S(x)$ funksiyası $y=\sqrt{a^2-x^2}$ çevrəsinin qövsü, Ox oxu, 0 və x $(|x| \leq a)$ nöqtələrində Ox oxuna çəkilmiş iki perpendikulyar ilə məhdudlanan sahədir.

$S(x)$ funksiyasının analitik ifadəsini tərtib edin, $S'(x)$ törəməsini tapın və bu törəmənin qrafikini qurun.

§2. Tərs funksiyanın törəməsi. Parametrik şəkildə verilmiş funksiyanın törəməsi. Qeyri-aşkar şəkildə verilmiş funksiyanın törəməsi

1°. Tərs funksiyanın törəməsi. $f'(x) \neq 0$ törəməsinə malik diferensiallanan $y=f(x)$ $(a<x<b)$ funksiyasının birqiymətli kəsilməz $x=f^{-1}(y)$ tərs funksiyası var, bu tərs funksiya da diferensiallanandır və aşağıdakı düstur doğrudur:

$$x'_y=\frac{1}{y'_x}.$$

2°. Parametrik şəkildə verilmiş funksiyanın törəməsi.

$$\left.\begin{aligned} x&=\varphi(t), \\ y&=\psi(t) \end{aligned}\right\} \quad (\alpha<t<\beta)$$

(burada $\varphi(t)$ və $\psi(t)$ - funksiyaları diferensiallanandır və $\varphi'(t) \neq 0$) tənliklər sistemi hər hansı oblastda y-i x-dən asılı birqiymətli diferensiallanan funksiya kimi təyin edir:

$$y=\psi(\varphi^{-1}(x)),$$

bu zaman funksiyanın törəməsi

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}$$

düsturu ilə tapıla bilər.

3°. Qeyri-aşkar şəkildə verilmiş funksiyanın törəməsi. Əgər diferensiallanan $y=y(x)$ funksiyası

$$F(x, y)=0$$

tənliyini ödəyirsə, onda bu qeyri-aşkar funksiyanın $y'=y'(x)$ törəməsi

$$\frac{d}{dx}[F(x, y)]=0$$

düsturundan tapıla bilər, burada $F(x, y)$ -ə x-dən asılı mürəkkəb funksiya kimi baxılır.

(Qeyri-aşkar funksiyaların diferensiallanması haqqında daha geniş II hissə, VI bölmə, §3-ə bax).

1034. Göstərin ki,

$$y^3 + 3y = x$$

tənliyi ilə təyin olunan birqiymətli $y = y(x)$ funksiyası var və onun y'_x törəməsini tapın.

1035. Göstərin ki,

$$y - \varepsilon \sin y = x \qquad (0 \le \varepsilon < 1)$$

tənliyi ilə təyin olunan birqiymətli $y = y(x)$ funksiyası var və onun y'_x törəməsini tapın.

1036. $x = x(y)$ tərs funksiyasının təyin oblastını və törəməsini tapın:

a) $y = x + \ln x$ $(x > 0)$; *b*) $y = \operatorname{sh} x$;

c) $y = x + e^x$; *d*) $y = \operatorname{th} x$.

1037. $x = x(y)$ tərs funksiyasının birqiymətli kəsilməz budaqlarını ayırın, onların törəməsini tapın və qrafikini qurun:

a) $y = 2x^2 - x^4$; *b*) $y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$; *c*) $y = 2e^{-x} - e^{-2x}$.

1038. $x = -1 + 2t - t^2$, $y = 2 - 3t + t^3$ olarsa, $y = y(x)$ funksiyasının qrafikinin eskizini qurun və y'_x törəməsini tapın. $x = 0$ və $x = -1$ olduqda $y'_x(x)$ nəyə bərabərdir? Hansı $M(x, y)$ nöqtəsində $y'_x(x) = 0$ olur?

y'_x törəməsini tapın (parametrlər müsbətdir):

1039. $x = \sqrt[3]{1-\sqrt{t}}$, $y = \sqrt{1-\sqrt[3]{t}}$.

1040. $x = \sin^2 t$, $y = \cos^2 t$.

1041. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

1042. $x = a\operatorname{ch} t$, $y = b\operatorname{sh} t$.

1043. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

1044. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

1045.. $x = e^{2t}\cos^2 t$, $y = e^{2t}\sin^2 t$.

1046. $x = \arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $y = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

1047. Göstərin ki,

$$x = 2t + |t|, \quad y = 5t^2 + 4t|t|$$

tənliklər sistemi ilə təyin olunan $y = y(x)$ funksiyası $t = 0$ olduqda diferensiallanandır, lakin bu nöqtədə onun törəməsi məlum düsturla hesablana bilməz.

Qeyri-aşkar şəkildə verilmiş aşağıdakı funksiyaların y'_x törəməsini tapın:

1048. $x^2+2xy-y^2=2x$.

$x=2$, $y=4$ və $x=2$, $y=0$ olduqda y' nəyə bərabərdir?

1049. $y^2=2px$ (parabola).

1050. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (ellips).

1051. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ (parabola).

1052. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ (astroid).

1053. $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ (loqarifmik spiral).

1054. y'_x -i tapın:

a) $r=a\varphi$ (Arximed spiralı);

b) $r=a(1+\cos\varphi)$ (kardioid);

c) $r=ae^{m\varphi}$ (loqarifmik spiral),

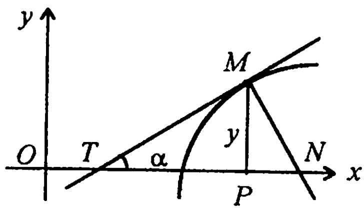
burada $r=\sqrt{x^2+y^2}$ və $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ - polyar koordinatlardır.

§3. Törəmənin həndəsi mənası

1°. Toxunanın və normalın tənlikləri. $y=f(x)$ diferensiallanan funksiyasının qrafikinə $M(x,y)$ nöqtəsində çəkilmiş (şək. 7) MT *toxunanının* və MN *normalının* tənlikləri uyğun olaraq aşağıdakı kimidir:

$$Y-y=y'(X-x)$$

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x),$$



Şək. 7.

burada X, Y - toxunanın və normalın cari koordinatları, $y'=f'(x)$ isə toxunma nöqtəsində törəmənin qiymətidir.

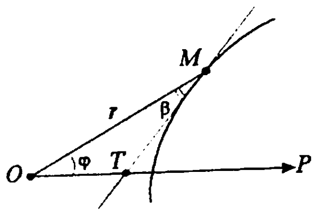
2°. Toxunanın və normalın parçaları. Toxunan və normalın parçaları üçün: PT - toxunanaltı, PN - normalaltı, MT - toxunan, MN - normaldır (şək. 7); $\operatorname{tg}\alpha=y'$ olduğunu nəzərə alaraq aşağıdakı

$$PT=\left|\frac{y}{y'}\right|, \qquad PN=|yy'|,$$

$$MT=\left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1+y'^2}, \qquad MN=|y|\sqrt{1+y'^2}$$

qiymətlərini alırıq.

3°. Toxunan və toxunma nöqtəsinin radius-vektoru arasındakı bucaq. Əgər $r=f(\varphi)$ - polyar koordinat sistemində



Şək. 8.

əyirinin tənliyi və β - MT toxunanı ilə M toxunma nöqtəsinin OM radius-vektoru arasında qalan bucaqdırsa (şək. 8), onda

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{r}{r'}.$$

1055. Verilmiş nöqtələrdə $y=(x+1)\sqrt[3]{3-x}$ əyrisinə çəkilmiş toxunanın və normalın tənliyini yazın: *a*) $A(-1, 0)$; *b*) $B(2, 3)$; *c*) $C(3, 0)$.

1056. $y=2+x-x^2$ əyrisinin hansı nöqtələrində ona çəkilmiş toxunan *a*) Ox oxuna paraleldir; *b*) birinci koordinat bucağının tənbölməninə paraleldir?

1057. İsbat edin ki,

$$y=a(x-x_1)(x-x_2) \quad (a\neq 0,\ x_1<x_2)$$

parabolası Ox oxunu bir-birinə bərabər α və β $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2},\ 0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$ bucaqları altında kəsir.

1058. $y=2\sin x$ $(-\pi\le x\le\pi)$ əyrisində "əyrinin dikliyinin" (yəni $|y'|$-in) 1-dən böyük olan hissələrini tapın.

1059. $y=x$ və $y_1=x+0{,}01\sin 1000\pi x$ funksiyaları bir-birindən ən çoxu 0,01 qədər fərqlənirlər. Bu funksiyaların törəmələri fərqinin maksimal qiyməti haqqında nə demək olar? Uyğun qrafikləri qurun.

1060. $y=\ln x$ əyrisi Ox oxunu hansı bucaq altında kəsir?

1061. Verilmiş əyrilər hansı bucaq altında kəsişirlər:

$$y=x^2 \text{ və } x=y^2?$$

1062. Verilmiş əyrilər hansı bucaq altında kəsişirlər:

$$y = \sin x \text{ və } y = \cos x\,?$$

1063. n parametrinin hansı qiymətində

$$y = \operatorname{arctg} nx \quad (n > 0)$$

əyrisi Ox oxunu 89^0-dən çox bucaq altında kəsir?

1063.1. Göstərin ki,

$$y = |x|^{\alpha}$$

əyrisi *a*) $0 < \alpha < 1$ olduqda Oy oxuna toxunur; *b*) $1 < \alpha < +\infty$ olduqda Ox oxuna toxunur.

1063.2. Göstərin ki,

$$y = \begin{cases} |x|^{\alpha}, & \alpha \neq 0 \text{ və } x \neq 0 \text{ olduqda;} \\ 1, & x = 0 \text{ olduqda} \end{cases}$$

əyrisi $A(0, 1)$ nöqtəsində Oy oxuna toxunur.

1064. Əyriyə çəkilmiş sağ və sol toxunanlar arasındakı bucağı tapın:

a) $y = \sqrt{1 - e^{-a^2x^2}}$, $x = 0$ nöqtəsində;

b) $y = \arcsin \dfrac{2x}{1 + x^2}$, $x = 1$ nöqtəsində.

1065. Göstərin ki,

$$r = ae^{m\varphi} \quad (a \text{ və } b \text{ - sabitlərdir})$$

loqarifmik spiralına çəkilmiş toxunan toxunma nöqtəsinin radius-vektoru ilə sabit bucaq əmələ gətirir.

1066. $y = ax^n$ əyrisinə çəkilmiş toxunanaltının uzunluğunu təyin edərək bu əyriyə çəkilmiş toxunanın qurulma üsulunu verin.

1067. İsbat edin ki,

$$y^2 = 2px$$

parabolasının

a) toxunanaltısı toxunma nöqtəsinin absisinin iki mislinə bərabərdir;

b) normalaltı sabitdir.

Parabolaya toxunanın qurulma üsulunu verin.

1068. İsbat edin ki,

$$y = a^x \quad (a > 0)$$

əyrisi sabit toxunanaltıya malikdir. Bu əyriyə toxunanın qurulma üsulunu verin.

1069. $y = a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$ zəncirvari əyrisinə onun istənilən $M(x_0, y_0)$ nöqtəsində çəkilmiş normalın uzunluğunu tapın.

1070. İsbat edin ki,

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad (a > 0)$$

astroidi üçün toxunanın koordinat oxları arasında qalan parçasının uzunluğu sabit kəmiyyətdir.

1071. a, b və c əmsalları arasında hansı münasibət ödənməlidir ki,

$$y = ax^2 + bx + c$$

parabolası Ox oxuna toxunsun?

1072. Hansı şərt daxilində

$$y = x^3 + px + q$$

kub parabolası Ox oxuna toxunur?

1073. a parametrinin hansı qiymətində

$$y = ax^2$$

parabolası $y = \ln x$ əyrisinə toxunur?

1074. İsbat edin ki,

$$y = f(x) \quad (f(x) > 0)$$

və

$$y = f(x) \sin ax$$

əyriləri ortaq nöqtələrində bir-birinə toxunurlar, burada $f(x)$ - diferensiallanan funksiyadır.

1075. Göstərin ki,

$$x^2 - y^2 = a$$

və

$$xy = b$$

hiperbolalar ailəsi *ortoqonal tor* əmələ gətirir, yəni bu ailənin əyriləri düz bucaq altında kəsişirlər.

1076. İsbat edin ki,

$$y^2 = 4a(a - x) \quad (a > 0)$$

və

$$y^2 = 4b(b + x) \quad (b > 0)$$

parabolalar ailəsi ortoqonal tor əmələ gətirir.

1077. $x = 2t - t^2, \quad y = 3t - t^3$

əyrisinə verilmiş nöqtələrdə çəkilmiş toxunanın və normalın tənliyini yazın: a) $t = 0$, b) $t = 1$.

1078. $x = \dfrac{2t + t^2}{1 + t^3}, \quad y = \dfrac{2t - t^2}{1 + t^3}$

əyrisinə verilmiş nöqtələrdə çəkilmiş toxunanın və normalın tənliyini yazın: *a)* $t = 0$, *b)* $t = 1$, *c)* $t = \infty$.

1079. İxtiyari $t = t_0$ nöqtəsində

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

sikloidinə çəkilmiş toxunanın tənliyini yazın. Sikloidə toxunanın qurulma üsulunu verin.

1080. İsbat edin ki,

$$x = a\left(\ln \operatorname{tg}\frac{t}{2} + \cos t\right), \quad y = a \sin t \qquad (a > 0,\ 0 < t < \pi)$$

traktrisası sabit uzunluqlu toxunan parçaya malikdir.

Verilmiş nöqtələrdə aşağıdakı əyrilərə çəkilmiş toxunanın və normalın tənliklərini yazın:

1081. $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1, \quad M(6;\ 6{,}4).$

1082. $xy+\ln y=1, \quad M(1;\ 1).$

§4. Funksiyanın diferensialı

1°. Funksiyanın diferensialı. Əgər x sərbəst dəyişənindən asılı $y=f(x)$ funksiyasının artımı

$$\Delta y=A(x)dx+o(dx)$$

şəklində göstərilə bilərsə, onda bu artımın baş xətti hissəsi y funksiyasının *diferensialı* adlanır:

$$dy=A(x)dx,$$

burada $dx=\Delta x$. $y=f(x)$ funksiyasının diferensiallanan olması üçün zəruri və kafi şərt sonlu $y'=f'(x)$ törəməsinin varlığıdır, bu zaman

$$dy=y'dx. \qquad (1)$$

(1) düsturu x dəyişəni yeni sərbəst dəyişəndən asılı funksiya olduqda da doğrudur (*birinci diferensialın invariantlıq xassəsi*).

2°. Funksiyanın kiçik artımlarının qiymətləndirilməsi. $f(x)$ diferensiallanan funksiyasının kiçik artımlarının hesablanması üçün

$$f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\Delta x$$

(təqribi) düsturundan istifadə etmək olar, bu zaman $f'(x)\neq 0$ olduqda onun nisbi xətası kifayət qədər kiçik $|\Delta x|$ üçün istənilən qədər kiçikdir.

Xüsusi halda, əgər x sərbəst dəyişəni $|\Delta_x|$-ə bərabər limit mütləq xəta*) ilə təyin olunursa, onda $y=f(x)$ funksiyasının Δ_y limit mütləq və δ_y limit nisbi xətaları**) təqribi olaraq aşağıdakı düsturlarla ifadə olunurlar:

$$\Delta_y=|y'|\Delta_x$$

və

$$\delta_y=\left|\frac{y'}{y}\right|\Delta_x.$$

1083. Verilmiş

$$f(x)=x^3-2x+1$$

funksiyası üçün: *a)* $\Delta x=1$; *b)* $\Delta x=0{,}1$; *c)* $\Delta x=0{,}01$ olduqda 1) $\Delta f(1)$; 2) $df(1)$-i təyin edin və onları müqayisə edin.

1084. Hərəkət tənliyi

$$x=5t^2$$

düsturu ilə verilir, burada t - saniyələrlə, x isə metrlərlə ölçülür.

---

*) Mütləq xətaların yuxarı sərhədinin ən kiçik qiyməti.

**) Nisbi xətaların yuxarı sərhədinin ən kiçik qiyməti.

Zamanın $t = 2$ *san* anı üçün yolun Δx artımını və dx diferensialını hesablayın, onları müqayisə edin:

a) $\Delta t = 1$ *san*; *b)* $\Delta t = 0{,}1$ *san*; *c)* $\Delta t = 0{,}001$ *san*.

y funksiyasının diferensialını tapın:

1085. $y = \dfrac{1}{x}$.

1086. $y = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$ $(a \neq 0)$.

1087. $y = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|$.

1088. $y = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right|$.

1089. $y = \arcsin\dfrac{x}{a}$ $(a \neq 0)$.

1090. Tapın:

a) $d(xe^x)$;

b) $d(\sin x - x\cos x)$;

c) $d\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$;

d) $d\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$;

e) $d\left(\sqrt{a^2 + x^2}\right)$;

f) $d\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$;

g) $d\ln(1 - x^2)$;

h) $d\left(\arccos\dfrac{1}{|x|}\right)$;

i) $d\left[\dfrac{\sin x}{2\cos^2 x} + \dfrac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right|\right]$.

Tutaq ki, u, v, w - x-dən asılı diferensiallanan funksiyalardır. y funksiyasının diferensialını tapın:

1091. $y = uvw$.

1092. $y = \dfrac{u}{v^2}$.

1093. $y = \dfrac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}$.

1094. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{u}{v}$.

1095. $y = \ln\sqrt{u^2 + v^2}$.

1096. Tapın: *a)* $\dfrac{d}{d(x^3)}\left(x^3 - 2x^6 - x^9\right)$;

b) $\dfrac{d}{d(x^2)}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$;

c) $\dfrac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$;

d) $\dfrac{d(\operatorname{tg} x)}{d(\operatorname{ctg} x)}$;

e) $\dfrac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)}$.

1097. Dairəvi sektorda radius $R = 100$ *sm* və mərkəzi bucaq $\alpha = 60^0$-dir. Əgər: *a)* R radiusu 1 *sm* artırılarsa; *b)* α bucağı 30' azaldılarsa, bu sektorun sahəsi nə qədər dəyişər? Dəqiq və təqribi həlli verin.

1098. Rəqqasın rəqs periodu (saniyələrlə)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

düsturu ilə təyin olunur, burada l - rəqqasın santimetrlərlə uzunluğu və $g=981$ sm/san^2 - ağırlıq qüvvəsinin təcilidir.

Rəqqasın $l = 20$ sm uzunluğunu nə qədər dəyişmək lazımdır ki, T periodu 0,05 san artsın?

Funksiya artımını diferensialla əvəz edərək aşağıdakı qiymətləri təqribi olaraq tapın:

1099. $\sqrt[3]{1,02}$.

1100. $\sin 29^0$.

1101. $\cos 151^0$.

1102. $\operatorname{arctg} 1,05$.

1103. $\lg 11$.

1104. $$\sqrt{a^2+x} \approx a + \frac{x}{2a} \quad (a>0)$$

təqribi düsturunu isbat edin, burada $|x| << a$ (müsbət A və B ədədləri üçün $A << B$ münasibəti onu bildirir ki, A B ilə müqayisədə çox kiçikdir).

Bu düsturun köməyi ilə aşağıdakı ədədləri təqribi hesablayın və cədvəl verilənləri ilə müqayisə edin:

a) $\sqrt{5}$; *b)* $\sqrt{34}$; *c)* $\sqrt{120}$.

1104.1. $$\sqrt{a^2+x} = a + \frac{x}{2a} - r \quad (a>0,\ x>0)$$

düsturunu isbat edin, burada

$$0 < r < \frac{x^2}{8a^3}.$$

1105. $$\sqrt[n]{a^n+x} \approx a + \frac{x}{na^{n-1}} \quad (a>0)$$

təqribi düsturunu isbat edin, burada $|x| << a$.

Bu düsturun köməyi ilə aşağıdakı ədədləri təqribi hesablayın:

a) $\sqrt[3]{9}$; *b)* $\sqrt[4]{80}$; *c)* $\sqrt[7]{100}$; *d)* $\sqrt[10]{1000}$.

1106. Kvadratın tərəfi $x = 2,4m \pm 0,05m$ -dir. Bu kvadratın sahəsini hansı limit mütləq və nisbi xətalarla hesablamaq olar?

1107. Kürənin R radiusunu hansı nisbi xəta ilə ölçdükdə kürənin həcmini 1% dəqiqliklə təyin etmək mümkün olur?

1108. Ağırlıq qüvvəsinin təcilini rəqqasın rəqslərinin köməyi ilə təyin etmək üçün

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

düsturundan istifadə edirlər, burada l - rəqqasın uzunluğu, T - rəqqasın rəqslərinin tam periodudur. a) l uzunluğunu; b) T periodunu ölçdükdə δ nisbi xətası g-nin qiymətinə necə təsir edir?

1109. x $(x>0)$ ədədinin nisbi xətası δ olarsa, bu ədədin onluq loqarifminin mütləq xətasını təyin edin.

1110. İsbat edin ki, müəyyən bucaq onluq işarələrinin sayı eyni olan sinusların loqarifmik cədvəlinə nisbətən tangenslərin loqarifmik cədvəli vasitəsilə daha dəqiq hesablanır.

§5. Yüksək tərtibli törəmələr və diferensiallar

1°. Ə s a s   t ə r i f l ə r. $y=f(x)$ funksiyasının *yüksək tərtibli törəmələri* ardıcıl olaraq

$$f^{(n)}(x)=\{f^{(n-1)}(x)\}' \qquad (n=2,3,\ldots)$$

münasibətləri ilə təyin olunur (nəzərdə tutulur ki, uyğun əməllərin mənası var!).

Əgər $f(x)$ funksiyasının (a,b) intervalında kəsilməz $f^{(n)}(x)$ törəməsi varsa, onda qısaca $f(x)\in C^{(n)}(a,b)$ yazırlar. Xüsusi halda, əgər $f(x)$ funksiyasının (a,b) intervalında istənilən tərtib törəməsi varsa, onda $f(x)\in C^{(\infty)}(a,b)$ yazılışından istifadə olunur.

$y=f(x)$ funksiyasının *yüksək tərtibli diferensialları* ardıcıl olaraq

$$d^n y=d(d^{n-1}y) \qquad (n=2,3,\ldots)$$

münasibətləri ilə təyin olunur, burada $d^1y=dy=y'dx$ qəbul edilmişdir.

Əgər x sərbəst dəyişəndirsə, onda

$$d^2x=d^3x=\ldots=0.$$

Bu halda aşağıdakı düsturlar doğrudur:

$$d^n y=y^{(n)}dx^n \quad \text{və} \quad y^{(n)}=\frac{d^n y}{dx^n}.$$

2^0. Ə s a s   d ü s t u r l a r:

I. $(a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a \quad (a>0); \qquad (e^x)^{(n)}=e^x.$

II. $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right).$

III. $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right).$

IV. $(x^m)^{(n)}=m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}.$

V. $(\ln x)^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$

3^0. L e y b n i s   d ü s t u r u. Əgər $u=\varphi(x)$ və $v=\psi(x)$ funksiyalarının n-ci tərtib törəməsi varsa (n dəfə diferensiallanandırlarsa), onda

$$(uv)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}C_n^i\,u^{(i)}\,v^{(n-i)},$$

burada $u^{(0)}=u$, $v^{(0)}=v$ və C_n^i - n elementli çoxluğun i elementli (nizamsız) altçoxluqlarının sayıdır.

Analoji olaraq $d^n(uv)$ diferensialı üçün

$$d^n(uv)=\sum_{i=0}^{n}C_n^i d^{n-i}u\, d^i v,$$

olduğunu alarıq, burada $d^0u=u$ və $d^0v=v$ qəbul olunmuşdur.

y'' -i tapın:

1111. $y=x\sqrt{1+x^2}$.

1112. $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1113. $y=e^{-x^2}$.

1114. $y=\operatorname{tg}x$.

1115. $y=(1+x^2)\operatorname{arctg}x$.

1116. $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1117. $y=x\ln x$.

1118. $y=\ln f(x)$.

1119. $y=x[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)]$.

1120. $y=e^{\sin x}\cos(\sin x)$ üçün $y(0)$, $y'(0)$ və $y''(0)$ -ı tapın.

Tutaq ki, $u=\varphi(x)$ və $v=\psi(x)$ iki dəfə diferensiallanan funksiyalardır. y'' -i tapın:

1121. $y=u^2$.

1122. $y=\ln\dfrac{u}{v}$.

1123. $y=\sqrt{u^2+v^2}$.

1124. $y=u^v$ $(u>0)$.

Tutaq ki, $f(x)$ - üç dəfə diferensiallanan funksiyadır. y'' və y''' -i tapın:

1125. $y=f(x^2)$.

1126. $y=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1127. $y=f(e^x)$.

1128. $y=f(\ln x)$.

1129. $y=f(\varphi(x))$, burada $\varphi(x)$ - kifayət qədər diferensiallanan funksiyadır.

1130. $y=e^x$ funksiyası üçün d^2y -i iki halda: *a)* x - sərbəst dəyişən olduqda; *b)* x -asılı dəyişən olduqda tapın.

x-i sərbəst dəyişən hesab edərək d^2y -i tapın:

1131. $y=\sqrt{1+x^2}$.

1132. $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

1133. $y=x^x$.

Tutaq ki, u və v - x-dən asılı iki dəfə diferensiallanan funksiyalardır. d^2y -i tapın:

1134. $y=uv$.

1135. $y=\dfrac{u}{v}$.

1136. $y=u^m v^n$ (m və n - sabitlərdir).

1137. $y = a^u \quad (a>0)$.

1138. $y = \ln\sqrt{u^2+v^2}$.

1139. $y = \operatorname{arctg}\frac{u}{v}$.

Parametrik şəkildə verilmiş $y = y(x)$ funksiyasının y'_x, y''_{x^2}, y'''_{x^3} törəmələrini tapın:

1140. $x = 2t - t^2$, $\quad y = 3t - t^3$.

1141. $x = a\cos t$, $\quad y = a\sin t$.

1142. $x = a(t - \sin t)$, $\quad y = a(1-\cos t)$.

1143. $x = e^t \cos t$, $\quad y = e^t \sin t$.

1144. $x = f'(t)$, $\quad y = tf'(t) - f(t)$.

1145. Tutaq ki, $y = f(x)$ kifayət qədər diferensiallanan funksiyadır. $x = f^{-1}(y)$ tərs funksiyasının x', x'', x''', x^{IV} törəmələrinin varlığını qəbul edərək onları tapın.

Qeyri-aşkar şəkildə verilmiş $y = y(x)$ funksiyasının y'_x, y''_{x^2} və y'''_{x^3} törəmələrini tapın:

1146. $x^2 + y^2 = 25$. $M(3, 4)$ nöqtəsində y', y'' və y''' nəyə bərabərdir?

1147. $y^2 = 2px$.

1148. $x^2 - xy + y^2 = 1$.

y'_x və y''_{x^2}-i tapın:

1149. $y^2 + 2\ln y = x^4$.

1150. $\sqrt{x^2+y^2} = ae^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} \quad (a>0)$.

1151. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $x \le x_0$ olduqda təyin olunub və iki dəfə diferensiallanandır. a, b və c parametrlərini necə seçmək lazımdır ki,

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \le x_0 \text{ olduqda}; \\ a(x-x_0)^2 + b(x-x_0) + c, & x > x_0 \text{ olduqda} \end{cases}$$

funksiyası iki dəfə diferensiallanan olsun.

1152. Nöqtə

$$s = 10 + 20t - 5t^2$$

qanunu ilə düzxətli hərəkət edir. Hərəkətin sürətini və təcilini tapın. Zamanın $t = 2$ anında sürət və təcil nəyə bərabərdir?

1153. $M(x, y)$ nöqtəsi $x^2 + y^2 = a^2$ çevrəsi üzrə bir dövrə T *san* sərf edərək müntəzəm hərəkət edir. Əgər $t = 0$ anında M nöqtəsi $M_0(a, 0)$-da olarsa, onda həmin nöqtənin Ox oxuna proyeksiyasının v sürətini və j təcilini tapın.

1154. $M(x,y)$ ağır maddi nöqtəsi üfüqi müstəvi ilə α bucağı əmələ gətirərək v_0 başlanğıc sürətlə Oxy şaquli müstəvisinə atılıb. Hərəkət tənliyini (havanın müqavimətini nəzərə almadan) tərtib edin, v sürətini və j təcilini, həmçinin hərəkət trayektoriyasını təyin edin. Nöqtənin ən yuxarı qalxma hündürlüyünü və uçuş məsafəsini tapın.

1155. Nöqtənin hərəkət tənliyi

$$x = 4\sin\omega t - 3\cos\omega t, \qquad y = 3\sin\omega t + 4\cos\omega t$$

kimi verilib (ω - sabitdir). Hərəkətin trayektoriyasını, sürətin və təcilin qiymətini təyin edin.

Göstərilən tərtibli törəmələri tapın:

1156. $y = x(2x-1)^2(x+3)^3$; $y^{(6)}$ və $y^{(7)}$ – ni tapın.

1157. $y = \dfrac{a}{x^m}$; y''' – i tapın.

1158. $y = \sqrt{x}$; $y^{(10)}$ – u tapın.

1159. $y = \dfrac{x^2}{1-x}$; $y^{(8)}$ – i tapın.

1160. $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$; $y^{(100)}$ – ü tapın.

1161. $y = x^2 e^{2x}$; $y^{(20)}$ – ni tapın.

1162. $y = \dfrac{e^x}{x}$; $y^{(10)}$ – u tapın.

1163. $y = x\ln x$; $y^{(5)}$ – i tapın.

1164. $y = \dfrac{\ln x}{x}$; $y^{(5)}$ – i tapın.

1165. $y = x^2 \sin 2x$; $y^{(50)}$ – ni tapın.

1166. $y = \dfrac{\cos 3x}{\sqrt[3]{1-3x}}$; y''' – i tapın.

1167. $y = \sin x \sin 2x \sin 3x$; $y^{(10)}$ – u tapın.

1168. $y = x\,\mathrm{sh}\,x$; $y^{(100)}$ – ü tapın.

1169. $y = e^x \cos x$; y^{IV} – ü tapın.

1170. $y = \sin^2 x \ln x$; $y^{(6)}$ – nı tapın.

Aşağıdakı misallarda x-i sərbəst dəyişən hesab edərək göstərilən tərtibli diferensialları tapın:

1171. $y = x^5$; d^5y – i tapın.

1172. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; d^3y – i tapın.

1173. $y = x\cos 2x$; $d^{10}y$ – i tapın.

1174. $y = e^x \ln x$; d^4y – i tapın.

1175. $y = \cos x \cdot \mathrm{ch}\,x$; d^6y – i tapın.

Aşağıdakı misallarda u - x-dən asılı kifayət qədər diferensiallanan funksiyadırsa, göstərilən tərtibli diferensialları tapın:

1176. $y=u^2$; $d^{10}y$-i tapın.

1177. $y=e^u$; d^4y-i tapın.

1178. $y=\ln u$; d^3y-i tapın.

1179. x-i hər hansı sərbəst dəyişəndən asılı funksiya hesab edərək $y=f(x)$ funksiyasının d^2y, d^3y və d^4y diferensiallarını tapın.

1180. x-i sərbəst dəyişən qəbul etmədən $y=f(x)$ funksiyasının y'' və y''' törəmələrini x və y dəyişənlərinin ardıcıl diferensialları ilə ifadə edin.

1181. Göstərin ki,

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x$$

funksiyası

$$y''+y=0$$

tənliyini ödəyir, burada C_1 və C_2 - ixtiyari sabitlərdir.

1182. Göstərin ki,

$$y=C_1\,\mathrm{ch}\,x+C_2\,\mathrm{sh}\,x$$

funksiyası

$$y''-y=0$$

tənliyini ödəyir, burada C_1 və C_2 - ixtiyari sabitlərdir.

1183. Göstərin ki,

$$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$$

funksiyası

$$y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2y=0$$

tənliyini ödəyir, burada C_1 və C_2 - ixtiyari sabitlər, λ_1 və λ_2 - sabitlərdir.

1184. Göstərin ki,

$$y=x^n\,[C_1\cos(\ln x)+C_2\sin(\ln x)]$$

funksiyası

$$x^2y''+(1-2n)xy'+(1+n^2)y=0$$

tənliyini ödəyir, burada C_1 və C_2 - ixtiyari sabitlər və n - sabitdir.

1185. Göstərin ki,

$$y=e^{\frac{x}{\sqrt2}}\left(C_1\cos\frac{x}{\sqrt2}+C_2\sin\frac{x}{\sqrt2}\right)+e^{-\frac{x}{\sqrt2}}\left(C_3\cos\frac{x}{\sqrt2}+C_4\sin\frac{x}{\sqrt2}\right)$$

funksiyası

$$y^{IV}+y=0$$

tənliyini ödəyir, burada C_1, C_2, C_3 və C_4 - ixtiyari sabitlərdir.

1186. İsbat edin ki, əgər $f(x)$ funksiyasının n-ci tərtib törəməsi varsa, onda

$$[f(ax+b)]^{(n)}=a^nf^{(n)}(ax+b).$$

1187. $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ üçün $P^{(n)}(x)$ -i tapın.

$y^{(n)}$ -i tapın:

1188. $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

1189. $y = \dfrac{1}{x(1-x)}$.

1190. $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$.

Göstəriş. Funksiyanı sadə kəsrlərə ayırın.

1191. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$.

1192. $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$.

1193. $y = \sin^2 x$.

1194. $y = \cos^2 x$.

1195. $y = \sin^3 x$.

1196. $y = \cos^3 x$.

1197. $y = \sin ax \sin bx$.

1198. $y = \cos ax \cos bx$.

1199. $y = \sin ax \cos bx$.

1200. $y = \sin^2 ax \cos bx$.

1201. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

1202. $y = x \cos ax$.

1203. $y = x^2 \sin ax$.

1204. $y = (x^2 + 2x + 2)\, e^{-x}$.

1205. $y = \dfrac{e^x}{x}$.

1206. $y = e^x \cos x$.

1207. $y = e^x \sin x$.

1208. $y = \ln \dfrac{a+bx}{a-bx}$.

1209. $y = e^{ax}P(x)$, burada $P(x)$ - çoxhədlidir.

1210. $y = x \operatorname{sh} x$.

$d^n y$ -i tapın:

1211. $y = x^n e^x$.

1212. $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

1213. Bərabərlikləri isbat edin:

1) $[e^{ax} \sin(bx+c)]^{(n)} = e^{ax}\left(a^2 + b^2\right)^{\frac{n}{2}} \sin(bx + c + n\varphi)$

və

2) $[e^{ax} \cos(bx+c)]^{(n)} = e^{ax}(a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \cos(bx + c + n\varphi)$,

burada

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{və} \quad \cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

1214. a) $y = \operatorname{ch} ax \cos bx$; b) $y = \operatorname{ch} ax \sin bx$

olduqda $y^{(n)}$ -i tapın.

1215. $f(x)=\sin^{2p}x$ funksiyasını $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{p}A_k\cos 2kx$ triqonometrik çoxhədlisinə çevirərək $f^{(n)}(x)$ -i tapın, burada p - natural ədəddir.

Göstəriş. $\sin x=\frac{1}{2i}(t-\bar{t})$ qəbul edin və Muavr düsturundan istifadə edin, burada $t=\cos x+i\sin x$ və $\bar{t}=\cos x-i\sin x$.

1216. $f^{(n)}(x)$ -i tapın:

a) $f(x)=\sin^{2p+1}x$;
b) $f(x)=\cos^{2p}x$;
c) $f(x)=\cos^{2p+1}x$,

burada p - natural ədəddir (əvvəlki misala bax).

Əgər

$$f(x)=f_1(x)+if_2(x)$$

olarsa, onda tərifə görə

$$f'(x)=f_1'(x)+if_2'(x)$$

qəbul edirik, burada i - xəyali vahid və $f_1(x)$, $f_2(x)$ - x həqiqi dəyişənindən asılı həqiqi funksiyalardır.

1217. $\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x+i}\right)$ eyniliyindən istifadə edərək isbat edin ki,

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}}\sin[(n+1)\operatorname{arcctg}x].$$

Göstəriş. Muavr düsturunu tətbiq edin.

1218. Verilmiş

$$f(x)=\operatorname{arctg}x$$

funksiyasının n-ci tərtib törəməsini tapın.

$f^{(n)}(0)$ -i tapın:

1219. a) $f(x)=\frac{1}{(1-2x)(1+x)}$; b) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x}}$.

1220. a) $f(x)=x^2e^{ax}$; b) $f(x)=\operatorname{arctg}x$; c) $f(x)=\arcsin x$.

1221. a) $f(x)=\cos(m\arcsin x)$; b) $f(x)=\sin(m\arcsin x)$.

1222. a) $f(x)=(\operatorname{arctg}x)^2$; b) $f(x)=(\arcsin x)^2$.

1223. $f(x)=(x-a)^n\varphi(x)$ olarsa, $f^{(n)}(a)$-nı tapın, burada $\varphi(x)$ funksiyası a nöqtəsinin ətrafında $(n$-1) tərtibli kəsilməz törəməyə malikdir.

1224. İsbat edin ki,

$$f(x)=\begin{cases} x^{2n}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \text{ olduqda}, \\ 0, & x=0 \text{ olduqda} \end{cases}$$

(n - natural ədəddir) funksiyasının $x=0$ nöqtəsində n tərtibə qədər (n-ci də daxil olmaqla) törəməsi var, lakin (n+1)-ci tərtib törəməsi yoxdur.

1225. İsbat edin ki,

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \text{ olduqda}, \\ 0, & x=0 \text{ olduqda} \end{cases}$$

funksiyası $x=0$ olduqda sonsuz diferensiallanandır.

Bu funksiyanın qrafikini qurun.

1226. İsbat edin ki,

$$T_m(x)=\frac{1}{2^{m-1}}\cos(m\arccos x) \qquad (m=1,2,\ldots)$$

Çebışev çoxhədlisi

$$(1-x^2)T_m''(x)-xT_m'(x)+m^2T_m(x)=0$$

tənliyini ödəyir.

1227. İsbat edin ki,

$$P_m(x)=\frac{1}{2^m m!}\left[(x^2-1)^m\right]^{(m)} \qquad (m=0,1,2,\ldots)$$

Lejandr çoxhədlisi

$$(1-x^2)P_m''(x)-2xP_m'(x)+m(m+1)P_m(x)=0$$

tənliyini ödəyir.

G ö s t ə r i ş. $(x^2-1)u'=2mxu$ bərabərliyini $m+1$ dəfə diferensiallayın, burada $u=(x^2-1)^m$.

1228. *Çebışev-Laqerra çoxhədlisi*

$$L_m(x)=e^x(x^me^{-x})^{(m)} \qquad (m=0,1,2,\ldots)$$

düsturu ilə təyin olunur. $L_m(x)$ çoxhədlisinin aşkar ifadəsini tapın.

İsbat edin ki, $L_m(x)$ funksiyası

$$xL_m''(x)+(1-x)L_m'(x)+mL(x)=0$$

tənliyini ödəyir.

Göstəriş. $xu'+(x-m)u=0$ bərabərliyindən istifadə edin, burada $u=x^me^{-x}$.

1229. Tutaq ki, $y=f(u)$ və $u=\varphi(x)$, burada $f(u)$ və $\varphi(x)$ - n-dəfə diferensiallanan funksiyalardır.

İsbat edin ki,

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\sum_{k=1}^{n}A_k(x)f^{(k)}(u),$$

burada $A_k(x)$ $(k=0,1,\ldots,n)$ əmsalları $f(u)$ funksiyasından asılı deyil.

1230. İsbat edin ki, $y = f(x^2)$ mürəkkəb funksiyanın n-ci tərtib törəməsi üçün

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (2x)^n f^{(n)}(x^2) + \frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2} f^{(n-1)}(x^2) +$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4} f^{(n-2)}(x^2) + \ldots$$

düsturu doğrudur.

1231. *Çebışev-Ermit çoxhədlisi*

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2}(e^{-x^2})^{(m)} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

düsturu ilə təyin olunur. $H_m(x)$ çoxhədlisinin aşkar ifadəsini tapın.

İsbat edin ki, $H_m(x)$ funksiyası

$$H''_m(x) - 2xH'_m(x) + 2mH_m(x) = 0$$

tənliyini ödəyir.

G ö s t ə r i ş. $u' + 2xu = 0$ bərabərliyindən istifadə edin, burada $u = e^{-x^2}$.

1232. Bərabərliyi isbat edin:

$$(x^{n-1} e^{\frac{1}{x}})^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}}.$$

G ö s t ə r i ş: Riyazi induksiya üsulunu tətbiq edin.

1232.1. Aşağıdakı düsturu isbat edin:

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^n \ln x) = n!\left(\ln x + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) \quad (x > 0).$$

1232.2. Aşağıdakı düsturu isbat edin:

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{(2n)!}{x^{2n+1}}\left[C_n(x)\sin x - S_n(x)\cos x\right],$$

burada

$$C_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

və

$$S_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

1233. Tutaq ki, $\frac{d}{dx} = D$ diferensiallama əməliyyatını göstərir və

$$f(D) = \sum_{k=0}^{n} p_k(x) D^k$$

simvolik diferensial çoxhədlidir, burada $p_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ - x-dən asılı kəsilməz funksiyadır.

İsbat edin ki,

$$f(D)\{e^{\lambda x}u(x)\} = e^{\lambda x} f(D+\lambda)\, u(x),$$

burada λ - sabitdir.

1234. İsbat edin ki,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} = 0$$

tənliyində

$$x = e^t$$

(burada t - sərbəst dəyişəndir) götürsək, bu tənlik aşağıdakı şəkildə olar:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k D(D-1)\ldots(D-k+1)y = 0,$$

burada $D = \frac{d}{dt}$.

§6. Roll, Laqranj və Koşi teoremləri

1°. **Roll teoremi.** Əgər: 1) $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməzdirsə, 2) bu parçanın daxilində $f(x)$-in sonlu $f'(x)$ törəməsi varsa, 3) $f(a) = f(b)$ olarsa, onda (a,b) intervalına daxil olan elə c ədədi var ki,

$$f'(c) = 0$$

olar.

2°. **Laqranj teoremi.** Əgər: 1) $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməzdirsə, 2) (a,b) intervalında $f(x)$-in sonlu $f'(x)$ törəməsi varsa, onda (a,b) intervalına daxil olan elə c ədədi var ki,

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

(*sonlu artımlar düsturu*) olar.

3°. **Koşi teoremi.** Əgər: 1) $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları $[a,b]$ parçasında kəsilməzdirlərsə, 2) $(a;b)$ intervalında $f(x)$ və $g(x)$-in sonlu $f'(x)$ və $g'(x)$ törəmələri varsa, 3) $a<x<b$ olduqda $f'^2(x) + g'^2(x) \neq 0$, 4) $g(a) \neq g(b)$ olarsa, onda (a,b) intervalına daxil olan elə c ədədi var ki,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

olar.

1235. $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ funksiyası üçün Roll teoremini yoxlayın.

1236. $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ funksiyası $x_1 = -1$ və $x_2 = 1$ olduqda sıfra çevrilir, lakin $-1 \le x \le 1$ olduqda $f'(x) \neq 0$ olur. Roll teoreminin nə üçün ödənmədiyini izah edin.

1237. Tutaq ki, sonlu və ya sonsuz (a, b) intervalının hər bir nöqtəsində $f(x)$ funksiyasının sonlu $f'(x)$ törəməsi var və

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to b-0} f(x).$$

İsbat edin ki, (a, b) intervalının hər hansı c nöqtəsi üçün

$$f'(c) = 0.$$

1238. Tutaq ki: 1) $f(x)$ funksiyası $[x_0, x_n]$ parçasında təyin olunub və $(n-1)$ tərtibli kəsilməz $f^{(n-1)}(x)$ törəməsi var, 2) $f(x)$ funksiyasının (x_0, x_n) intervalında n tərtibli $f^{(n)}(x)$ törəməsi var və 3) aşağıdakı bərabərlik ödənir:

$$f(x_0) = f(x_1) = \ldots = f(x_n) \quad (x_0 < x_1 < \ldots < x_n).$$

İsbat edin ki, (x_0, x_n) intervalında elə ξ nöqtəsi var ki,

$$f^{(n)}(\xi) = 0.$$

1239. Tutaq ki: 1) $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında təyin olunub və $(p+q)$ tərtibli kəsilməz $f^{(p+q)}(x)$ törəməsi var, 2) $f(x)$ funksiyasının (a, b) intervalında $(p+q+1)$ tərtibli $f^{(p+q+1)}(x)$ törəməsi var və 3) aşağıdakı bərabərliklər ödənir:

$$f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(p)}(a) = 0,$$

$$f(b) = f'(b) = \ldots = f^{(q)}(b) = 0.$$

İsbat edin ki, bu halda (a, b) intervalının müəyyən c nöqtəsi üçün

$$f^{(p+q+1)}(c) = 0.$$

1240. İsbat edin ki, a_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ həqiqi əmsallı

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

çoxhədlisinin bütün kökləri həqiqidirsə, onda $P_n'(x), P_n''(x), \ldots, P_n^{(n-1)}(x)$ çoxhədliləri də yalnız həqiqi köklərə malikdir.

1241. İsbat edin ki,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left\{(x^2-1)^n\right\}$$

Lejandr çoxhədlisinin bütün kökləri həqiqidir və $(-1, 1)$ intervalının daxilində yerləşir.

1242. İsbat edin ki,

$$L_n(x) = e^x\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right)$$

Çebışev-Laqerra çoxhədlisinin bütün kökləri müsbətdir.

1243. İsbat edin ki,

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$$

Çebışev-Ermit çoxhədlisinin bütün kökləri həqiqidir.

1244. $y = x^3$ əyrisində elə nöqtə tapın ki, bu nöqtədə çəkilən toxunan $A(-1,\ -1)$ və $B(2,\ 8)$ nöqtələrini birləşdirən vətərə paralel olsun.

1245. $ab < 0$ olarsa, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ funksiyası üçün $[a,\ b]$ parçasında sonlu artımlar düsturu doğrudurmu?

1246. Elə $\theta = \theta\,(x,\ \Delta x)$ funksiyası tapın ki,

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x f'\,(x + \theta \Delta x) \qquad (0 < \theta < 1)$$

olsun:

a) $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$; *c)* $f(x) = \dfrac{1}{x}$;

b) $f(x) = x^3$; *d)* $f(x) = e^x$.

1246.1. Tutaq ki, $f(x) \in C^{(1)}(-\infty,\ +\infty)$ və istənilən x, h üçün

$$f(x + h) - f(x) \equiv hf'(x)$$

eyniliyi doğrudur. İsbat edin ki,

$$f(x) = ax + b,$$

burada a və b - sabitlərdir.

1246.2. Tutaq ki, $f(x) \in C^{(2)}(-\infty,\ +\infty)$ və istənilən x, h üçün

$$f(x + h) - f(x) \equiv hf'\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

eyniliyi doğrudur.

İsbat edin ki,

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

burada a, b və c - sabitlərdir.

1247. İsbat edin ki, $x \geq 0$ olduqda

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x + \theta\,(x)}}$$

olar, burada

$$\frac{1}{4} \leq \theta\,(x) \leq \frac{1}{2}$$

və

$$\lim_{x \to +0} \theta\,(x) = \frac{1}{4}, \qquad \lim_{x \to +\infty} \theta\,(x) = \frac{1}{2}.$$

1248. Tutaq ki,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2}, & 0\le x\le 1 \quad \text{olduqda},\\ \dfrac{1}{x}, & 1<x<+\infty \quad \text{olduqda}.\end{cases}$$

$f(x)$ funksiyası üçün [0, 2] parçasında sonlu artımlar düsturundakı c aralıq qiymətini təyin edin.

1249. Tutaq ki, $f(x)-f(0)=xf'(\xi(x))$, burada $0<\xi(x)<x$. İsbat edin ki,

$$f(x)=x\sin(\ln x),\ x>0 \text{ olduqda və } f(0)=0$$

olarsa, onda $\xi=\xi(x)$ funksiyası istənilən qədər kiçik $(0,\varepsilon)$ intervalında kəsiləndir, burada $\varepsilon>0$.

1250. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyasının (a,b) intervalında kəsilməz $f'(x)$ törəməsi var. (a,b) intervalının istənilən ξ nöqtəsi üçün bu intervaldan elə x_1 və x_2 nöqtələri tapmaq mümkündürmü ki,

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi) \qquad (x_1<\xi<x_2)$$

olsun?

Misala baxın: $f(x)=x^3$ $\quad(-1\le x\le 1)$, burada $\xi=0$.

1251. Bərabərsizlikləri isbat edin:

a) $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$;

b) $py^{p-1}(x-y)\le x^p-y^p\le px^{p-1}(x-y)$, $(0<y<x$ və $p>1)$;

c) $|\operatorname{arctg} a-\operatorname{arctg} b|\le|a-b|$;

d) $\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}$, $(0<b<a)$.

1252. Nə üçün

$$f(x)=x^2 \quad \text{və} \quad g(x)=x^3$$

funksiyaları üçün [−1, 1] parçasında Koşi düsturu doğru deyil?

1253. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[x_1, x_2]$ parçasında diferensiallanandır və $x_1x_2>0$.

İsbat edin ki,

$$\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2\\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi),$$

burada $x_1<\xi<x_2$.

1254. İsbat edin ki, əgər $f(x)$ funksiyası diferensiallanandırsa, lakin (a,b) intervalında qeyri-məhduddursa, onda onun $f'(x)$ törəməsi də (a,b) intervalında qeyri-məhdud olacaq. Əks teorem doğru deyil (misal qurun).

1255. İsbat edin ki, əgər $f(x)$ funksiyasının sonlu və ya sonsuz (a,b) intervalında məhdud $f'(x)$ törəməsi varsa, onda $f(x)$ funksiyası (a,b) intervalında müntəzəm kəsilməzdir.

1256. İsbat edin ki, əgər $f(x)$ funksiyası sonsuz $(x_0, +\infty)$ intervalında diferensiallanandırsa və

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$$

olarsa, onda

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

olar, yəni $f(x) = o(x)$, $x \to +\infty$.

1257. İsbat edin ki, əgər $f(x)$ funksiyası sonsuz $(x_0, +\infty)$ intervalında diferensiallanandırsa və

$$f(x) = o(x), \ x \to +\infty$$

olarsa, onda

$$\underline{\lim_{x\to+\infty}} |f'(x)| = 0.$$

Xüsusi halda, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = k$ olarsa, onda $k = 0$ olar.

1258. *a*) İsbat edin ki, əgər: 1) $f(x)$ funksiyası $[x_0, X]$ parçasında kəsilməzdirsə, 2) $f(x)$-in (x_0, X) intervalında sonlu $f'(x)$ törəməsi varsa, 3) sonlu və ya sonsuz

$$\lim_{x\to x_0+0} f'(x) = f'(x_0+0)$$

limiti varsa, onda ona uyğun olaraq sonlu və ya sonsuz birtərəfli $f'_+(x_0)$ törəməsi var və

$$f'_+(x_0) = f'(x_0+0).$$

b) Göstərin ki,

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x} \quad (x \neq 1) \quad \text{və} \quad f(1) = 0$$

funksiyası üçün sonlu

$$\lim_{x\to 1} f'(x)$$

limiti var, lakin $f(x)$-in birtərəfli $f'_-(1)$ və $f'_+(1)$ törəmələri yoxdur.

Bu faktın həndəsi izahını verin.

1259. İsbat edin ki, $a<x<b$ olduqda $f'(x) = 0$ olarsa, onda $a<x<b$ olduqda $f(x) = \text{const}$ olar.

1260. İsbat edin ki, törəməsi sabit

$$f'(x) = k$$

olan $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ funksiyası

$$f(x) = kx + b$$

xətti funksiyasıdır.

1261. $f^{(n)}(x) = 0$ olarsa, $f(x)$ funksiyası haqqında nə demək olar?

1261.1. Tutaq ki, $f(x) \in C^{(\infty)}$ $(-\infty, +\infty)$ və hər bir x üçün elə n_x $(n_x \le n)$ natural ədədi var ki,

$$f^{(n_x)}(x) = 0.$$

İsbat edin ki, $f(x)$ funksiyası çoxhədlidir.

1262. İsbat edin ki,

$$y' = \lambda y \quad (\lambda = \text{const})$$

tənliyini ödəyən $y = y(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ funksiyası

$$y = Ce^{\lambda x}$$

üstlü funksiyasıdır, burada C - ixtiyari sabitdir.

G ö s t ə r i ş. Bax: $(ye^{-\lambda x})'$.

1263. $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$ və $g(x) = \operatorname{arctg} x$

funksiyalarının

$$1)\ x < 1 \quad \text{və} \quad 2)\ x > 1$$

oblastlarında eyni törəməyə malik olduqlarını yoxlayın.

Bu funksiyalar arasındakı asılılığı müəyyən edin.

1264. Eynilikləri isbat edin:

a) $2\operatorname{arctg} x + \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} = \pi \operatorname{sgn} x$, $|x| \ge 1$ olduqda;

b) $3\arccos x - \arccos(3x - 4x^3) = \pi$, $|x| \le \dfrac{1}{2}$ olduqda.

1265. İsbat edin ki, əgər: 1) $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında kəsilməzdirsə, 2) bu parçanın daxilində sonlu $f'(x)$ törəməsi varsa, 3) xətti deyilsə, onda (a, b) intervalında elə c nöqtəsi var ki,

$$|f'(c)| > \left|\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right|$$

olar.

Bu faktın həndəsi təsvirini verin.

1266. İsbat edin ki, əgər: 1) $f(x)$ funksiyasının $[a, b]$ parçasında ikinci tərtib $f''(x)$ törəməsi varsa və 2) $f'(a) = f'(b) = 0$ olarsa, onda (a, b) intervalında elə c nöqtəsi var ki,

$$|f''(c)| \ge \frac{4}{(b-a)^2}|f(b) - f(a)|$$

olar.

1267. Avtomobil başlanğıc məntəqədən hərəkətə başlayaraq t *san.*-dən sonra s *m* məsafə yol gedərək dayandı. İsbat edin ki, müəyyən zaman anında avtomobilin hərəkət təcilinin mütləq qiyməti $\frac{4s}{t^2}\ \frac{m}{san^2}$-dən kiçik olmayıb.

§7. Funksiyanın artması və azalması. Bərabərsizliklər

1°. Funksiyanın artması və azalması. Əgər $f(x)$ funksiyası

$$a \le x_1 < x_2 \le b \quad \text{olduqda} \quad f(x_2) > f(x_1) \quad \left(f(x_2) < f(x_1)\right)$$

şərtini ödəyirsə, onda $f(x)$ $[a, b]$ parçasında *artan* (*azalan*) funksiya adlanır.

Əgər diferensiallanan $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında artandırsa (azalandırsa), onda

$$a \le x \le b \quad \text{olduqda} \quad f'(x) \ge 0 \quad \left(f'(x) \le 0\right)$$

olar.

2. **Funksiyanın artan (azalan) olması üçün kafi şərt.** Əgər $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında kəsilməzdirsə və onun daxilində müsbət (mənfi) $f'(x)$ törəməsi varsa, onda $f(x)$ funksiyası $[a, b]$-də artır (azalır).

Aşağıdakı funksiyaların monotonluq (artma və ya azalma) aralıqlarını tapın:

1268. $y = 2 + x - x^2$.

1269. $y = 3x - x^3$.

1270. $y = \dfrac{2x}{1 + x^2}$.

1271. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x + 100}$ $(x \ge 0)$.

1272. $y = x + \sin x$.

1273. $y = x + |\sin 2x|$.

1274. $y = \cos\dfrac{\pi}{x}$.

1275. $y = \dfrac{x^2}{2^x}$.

1276. $y = x^n e^{-x}$ $(n > 0,\ x \ge 0)$.

1277. $y = x^2 - \ln x^2$.

1278. $f(x) = x\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}} + \sin\ln x\right)$, $x > 0$ olduqda və $f(0) = 0$.

1279. İsbat edin ki, çevrə daxilinə çəkilmiş düzgün n-bucaqlının tərəflərinin sayı artdıqda onun p_n perimetri artır, çevrə xaricinə çəkilmiş düzgün n-bucaqlının P_n perimetri isə azalır. Bundan istifadə edərək isbat edin ki, $n \to \infty$ olduqda p_n və P_n eyni limitə yığılırlar.

1280. İsbat edin ki,

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

funksiyası $(-\infty, -1)$ və $(0, +\infty)$ intervallarında artandır.

1281. İsbat edin ki,

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \qquad (n \ge 1,\ a_n \ne 0)$$

tam rasional funksiyası $(-\infty, -x_0)$ və $(x_0, +\infty)$ intervallarında monotondur, burada x_0 - kifayət qədər böyük müsbət ədəddir.

1282. İsbat edin ki, eyniliklə sabitə bərabər olmayan rasional

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m} \qquad (a_n b_m \ne 0)$$

funksiyası $(-\infty, -x_0)$ və $(x_0, +\infty)$ intervallarında monotondur, burada x_0 - kifayət qədər böyük müsbət ədəddir.

1283. Monoton funksiyanın törəməsi monotondurmu?
$f(x) = x + \sin x$ misalına baxın.

1284. İsbat edin ki, əgər $\varphi(x)$ - monoton artan diferensiallanan funksiyadırsa və

$$x \ge x_0 \text{ olduqda } |f'(x)| \le \varphi'(x)$$

olarsa, onda

$$x \ge x_0 \text{ olduqda } |f(x) - f(x_0)| \le \varphi(x) - \varphi(x_0)$$

olar. Bu faktın həndəsi izahını verin.

1285. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $a \le x < +\infty$ aralığında kəsilməzdır və $x > a$ olduqda $f'(x) > k > 0$, burada k - sabitdir.

İsbat edin ki, $f(a) < 0$ olarsa, onda $f(x) = 0$ tənliyinin

$$\left(a,\ a - \frac{f(a)}{k}\right)$$

intervalında yalnız və yalnız bir kökü var.

1286. Əgər x_0 nöqtəsinin müəyyən $|x - x_0| < \delta$ ətrafında $f(x)$ funksiyasının $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ artımının işarəsi arqumentin $\Delta x_0 = x - x_0$ artımının işarəsi ilə eynidirsə, onda $f(x)$ funksiyası x_0 *nöqtəsində artan* funksiya adlanır.

İsbat edin ki, əgər $f(x)$ $(a < x < b)$ funksiyası sonlu və ya sonsuz (a, b) intervalının hər bir nöqtəsində artandırsa, onda o, bu intervalda artandır.

1287. Göstərin ki,

$$f(x) = x + x^2 \sin\frac{2}{x},\quad x \ne 0 \text{ olduqda və } f(0) = 0$$

funksiyası $x = 0$ nöqtəsində artır, lakin bu nöqtəni əhatə edən istənilən

$(-\varepsilon, \varepsilon)$ intervalında artan deyil, burada $\varepsilon > 0$ - istənilən kiçik ədəddir. Funksiyanın qrafikinin eskizini qurun.

1288. Aşağıdakı teoremi isbat edin: əgər 1) $\varphi(x)$ və $\psi(x)$ funksiyaları n-dəfə diferensiallanandırlarsa, 2) $\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, 3) $x > x_0$ olduqda $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x)$ olarsa, onda

$$x > x_0 \quad \text{olduqda} \quad \varphi(x) > \psi(x)$$

bərabərsizliyi doğrudur.

1289. Aşağıdakı bərabərsizlikləri isbat edin:

a) $e^x > 1 + x$, $\quad x \neq 0$ olduqda;

b) $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$, $\quad x > 0$ olduqda;

c) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$, $\quad x > 0$ olduqda;

d) $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$, $\quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$ olduqda;

e) $(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$, $\quad x > 0, y > 0$ $0 < \alpha < \beta$ olduqda.

a) -e) bərabərsizliklərinin həndəsi təsvirini verin.

1290. Aşağıdakı bərabərsizliyi isbat edin:

$$\frac{2}{\pi}x < \sin x < x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \quad \text{olduqda.}$$

1291. İsbat edin ki, $x > 0$ olduqda

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

bərabərsizliyi doğrudur.

1292. Bütün hədləri müsbət olan ədədi və həndəsi silsilələrin hədlərinin sayı və uyğun kənar hədləri eynidir. İsbat edin ki, ədədi silsilənin hədləri cəmi həndəsi silsilənin hədləri cəmindən böyükdür.

1293. $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2 \geq 0$

bərabərsizliyindən istifadə edərək

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

Koşi bərabərsizliyini isbat edin, burada x, a_k, b_k $(k = 1, \ldots, n)$ - həqiqi ədədlərdir.

1294. İsbat edin ki, müsbət ədədlərin ədədi ortası bu ədədlərin kvadratlarının ədədi ortasından böyük deyil, yəni

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \le \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\,.$$

1295. İsbat edin ki, müsbət ədədlərin həndəsi ortası bu ədədlərin ədədi ortasından böyük deyil, yəni

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \le \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\,.$$

G ö s t ə r i ş. Riyazi induksiya üsulunu tətbiq edin.

1296. İki müsbət a və b ədədləri üçün s *tərtibli orta* aşağıdakı bərabərliklərlə təyin olunan funksiyaya deyilir:

$$\Delta_s(a,\, b) = \left(\frac{a^s + b^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}}, \quad s \ne 0 \text{ olduqda}$$

və

$$\Delta_0(a,\, b) = \lim_{s \to 0} \Delta_s(a,\, b)\,.$$

Xüsusi halda, $s=-1$ olduqda *harmonik orta*, $s=0$ olduqda *həndəsi orta* (isbat edin!), $s=1$ olduqda *ədədi orta*, $s=2$ olduqda isə *kvadratik orta* alınır.

İsbat edin ki,

1) $\min(a,\, b) \le \Delta_s(a,\, b) \le \max(a,\, b)$;

2) $a \ne b$ olduqda $\Delta_s(a,\, b)$ funksiyası s dəyişənindən asılı artan funksiyadır;

3) $\lim\limits_{s \to -\infty} \Delta_s(a,\, b) = \min(a,\, b)$;

$\lim\limits_{s \to +\infty} \Delta_s(a,\, b) = \max(a,\, b)$.

G ö s t ə r i ş: $\frac{d}{ds}\left[\ln \Delta_s(a,\, b)\right]$ -ni araşdırın.

1297 (y). Aşağıdakı bərabərsizlikləri isbat edin:

a) $x^\alpha - 1 > \alpha(x-1)$; $\alpha \ge 2,\ x > 1$ olduqda;

b) $\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{x-a}$; $n > 1$ və $x > a > 0$ olduqda;

c) $1 + 2\ln x \le x^2$; $x > 0$ olduqda.

§8. Çöküklük istiqaməti. Əyilmə nöqtəsi

1°. Ç ö k ü k l ü k ü ç ü n k a f i ş ə r t. Əgər diferensiallanan $y=f(x)$ funksiyasının $[a, b]$ parçasına uyğun olan qrafik hissəsi bu parçada qrafikə çəkilmiş istənilən toxunandan yuxarıda (aşağıda) yerləşərsə, onda $y=f(x)$ ($a \le x \le b$) funksiyasının qrafiki həmin parçada *yuxarıya doğru çökük* (*aşağıya* *doğru çökük*) adlanır. $a \le x \le b$ olduqda ikinci tərtib $f''(x)$ törəməsi varsa, onda qrafikin yuxarıya doğru (aşağıya doğru) çökükIüyü üçün kafi şərt $a \le x \le b$ olduqda $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) olmasıdır.

2°. Əyilmə nöqtəsi üçün kafi şərt. Funksiyanın qrafikinin çökükIük istiqamətini dəyişmə nöqtələri *əyilmə nöqtələri* adlanır. $f''(x_0) = 0$ və ya $f''(x_0)$ -ın olmadığı x_0 nöqtəsi üçün $f''(x)$ bu nöqtədən keçdikdə işarəsini dəyişirsə, onda bu nöqtə *əyilmə* nöqtəsidir.

1298. $A(-1, 0)$, $B(1, 2)$ və $C(0, 0)$ nöqtələrində

$$y = 1 + \sqrt[3]{x}$$

əyrisinin çökükIük istiqamətini təyin edin.

Aşağıdakı funksiyaların müəyyən işarəli çökükIük aralıqlarını və əyilmə nöqtələrini tapın:

1299. $y = 3x^2 - x^3$.

1300. $y = \dfrac{a^3}{a^2 + x^2}$ $(a > 0)$.

1301. $y = x + x^{\frac{5}{3}}$.

1302. $y = \sqrt{1 + x^2}$.

1303. $y = x + \sin x$.

1304. $y = e^{-x^2}$.

1305. $y = \ln(1 + x^2)$.

1306. $y = x \sin(\ln x)$ $(x > 0)$.

1307. $y = x^x$ $(x > 0)$.

1308. Göstərin ki,

$$y = \frac{x+1}{x^2+1}$$

əyrisinin bir düz xətt üzərində yerləşən üç əyilmə nöqtəsi var.

Bu funksiyanın qrafikini qurun.

1309. h parametrinin hansı qiymətində

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} \qquad (h > 0)$$

"ehtimal əyrisi" $x = \pm\sigma$ əyilmə nöqtəsinə malikdir?

1310. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(a > 0)$ sikloidinin əyilmə istiqamətini araşdırın.

1311. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $a \le x < +\infty$ aralığında iki dəfə diferensiallanandır və 1) $f(a) = A > 0$, 2) $f'(a) < 0$, 3) $x > a$ olduqda $f''(x) \le 0$.

İsbat edin ki, $f(x) = 0$ tənliyinin $(a, +\infty)$ intervalında yalnız və yalnız bir kökü var.

1312. Əgər (a, b) intervalında $f(x)$ funksiyası bu intervalın istənilən x_1, x_2 nöqtələri və ixtiyari λ_1, λ_2 ($\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$) ədədləri üçün

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

bərabərsizliyini (uyğun olaraq

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) > \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

əks bərabərsizliyini) ödəyirsə, onda $f(x)$ funksiyası bu intervalda *aşağıya doğru* (*yuxarıya doğru*) *qabarıq* adlanır.

İsbat edin ki, 1) əgər $a<x<b$ olduqda $f''(x)>0$ olarsa, onda $f(x)$ funksiyası (a, b)-də aşağıya doğru qabarıqdır; 2) əgər $a<x<b$ olduqda $f''(x)<0$ olarsa, onda $f(x)$ funksiyası (a, b)-də yuxarıya doğru qabarıqdır.

1313. Göstərin ki,

$$x^n \quad (n>1), \; e^x, \; x\ln x$$

funksiyaları $(0, +\infty)$ intervalında aşağıya doğru qabarıq,

$$x^n \quad (0<n<1), \quad \ln x$$

funksiyaları isə $(0, +\infty)$ intervalında yuxarıya doğru qabarıqdır.

1314. Aşağıdakı bərabərsizlikləri isbat edin və həndəsi mənasını izah edin:

a) $\frac{1}{2}\left(x^n + y^n\right) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n \quad (x>0, y>0, x \neq y, n>1)$;

b) $\frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}} \quad (x \neq y)$;

c) $x\ln x + y\ln y > (x+y)\ln\frac{x+y}{2}$, $x>0$ və $y>0$ olduqda.

1314.1. Tutaq ki, $a \le x \le b$ oluqda $f''(x) \ge 0$. İsbat edin ki, istənilən x_1, $x_2 \in [a, b]$ üçün

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)].$$

1315. İsbat edin ki, məhdud qabarıq funksiya hər yerdə kəsilməzdir və birtərəfli sağ və sol törəmələrə malikdir.

1316. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası (a,b) intervalında iki dəfə diferensiallanandır və $f''(\xi) \neq 0$, burada $a<\xi<b$.

İsbat edin ki, (a,b) intervalında elə x_1 və x_2 nöqtələri var ki,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)$$

olar.

1317. İsbat edin ki, əgər $f(x)$ funksiyası sonsuz $(x_0, +\infty)$ intervalında iki dəfə diferensiallanandırsa və

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

olarsa, onda $(x_0, +\infty)$ intervalında elə ξ nöqtəsi var ki, $f''(\xi) = 0$ olar.

§9. Qeyri-müəyyənliklərin açılışı

1-ci **L o p i t a l q a y d a s ı** ($\frac{0}{0}$ şəklində qeyri-müəyyənliyin açılışı).

Əgər: 1) $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları a (burada a - ədəd və ya ∞ simvoludur) nöqtəsinin müəyyən U_ε *) ətrafında kəsilməzdirlərsə və $x \to a$ olduqda hər iki funksiya sıfra yaxınlaşırsa:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0,$$

2) a nöqtəsinin U_ε ətrafında (ola bilsin a nöqtəsi istisna olmaqla) $f'(x)$ və $g'(x)$ törəmələri varsa və $x \neq a$ olduqda eyni vaxtda bu törəmələr sıfra çevrilmirlərsə, 3) sonlu və ya sonsuz

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

limiti varsa, onda

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2-ci **L o p i t a l q a y d a s ı** ($\frac{\infty}{\infty}$ şəklində qeyri-müəyyənliyin açılışı).

Əgər: 1) $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarının hər ikisi $x \to a$ olduqda sonsuzluğa yaxınlaşırsa:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty,$$

burada a - ədəd və ya ∞ simvoludur, 2) a nöqtəsinin U_ε ətrafında a-dan fərqli olan bütün x-lər üçün $f'(x)$ və $g'(x)$ törəmələri varsa və

$x \in U_\varepsilon$ və $x \neq a$ olduqda $f'^2(x) + g'^2(x) \neq 0$ olarsa,

3) sonlu və ya sonsuz

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

limiti varsa, onda

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Birtərəfli limitlər üçün də analoji qaydalar doğrudur.

$0\cdot\infty, \infty-\infty, 1^\infty, 0^0$ və bunlara oxşar qeyri-müəyyənliklərin açışılı cəbri çevirmələr və loqarifmləmələr vasitəsilə iki əsas növ

$$\frac{0}{0} \quad \text{və} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

kimi qeyri-müəyyənliklərin açılışına gətirilir.

---

*) a nöqtəsinin U_ε ətrafı dedikdə: 1) a - ədəd olduqda $|x-a|<\varepsilon$ və 2) a - ∞ simvolu olduqda isə $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$ bərabərsizliyini ödəyən x ədədləri çoxluğu başa düşülür.

Aşağıdakı limitləri hesablayın:

1318. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$

1319. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch} x-\cos x}{x^2}$.

1320. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-x}{x-\sin x}$.

1321. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\operatorname{tg} 4x-12\operatorname{tg} x}{3\sin 4x-12\sin x}$.

1322. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$.

1323. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\operatorname{ctg} x-1}{x^2}$.

1324. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}-1}{2\sin^2 x-1}$.

1325. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$.

1326. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$.

1327. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}$.

1328. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{a}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{a}}-\sqrt{b}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{b}}\right)$.

1329. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-a^{\sin x}}{x^3}$ $(a>0)$.

1330. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^x-x}{\ln x-x+1}\right)$.

1331. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$.

1332. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$.

1333. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

1334. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\operatorname{th} x}-\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$.

1335. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{Arsh}(\operatorname{sh} x)-\operatorname{Arsh}(\sin x)}{\operatorname{sh} x-\sin x}$,

burada $\operatorname{Arsh} x=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

1336. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^{\varepsilon}}$ $(\varepsilon>0)$.

1337. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^n}{e^{ax}}$ $(a>0,\ n>0)$.

1338. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$.

1339. $\lim\limits_{x\to +\infty}x^2e^{-0{,}01x}$.

1340. $\lim\limits_{x\to 1-0}\ln x\cdot\ln(1-x)$.

1341. $\lim\limits_{x\to +0}x^{\varepsilon}\ln x$ $(\varepsilon>0)$.

1342. $\lim\limits_{x\to +0}x^x$.

1343. $\lim\limits_{x\to 0}x^{x^x-1}$.

1344. $\lim\limits_{x\to 0}(x^{x^x}-1)$.

1345. $\lim\limits_{x\to +0}x^{\frac{k}{1+\ln x}}$.

1346. $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

1347. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

1348. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

1349. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$.

1350. $\lim\limits_{x\to +0}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x$.

1351. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

1352. $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}a}\right)^{\operatorname{ctg}(x-a)}$.

1353. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x-x\ln a}{b^x-x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

1354. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

1355. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$.

1356. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x-\frac{1}{x}\right)$.

1357. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right]$.

1358. $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}$ $(a>0)$.

1359. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$.

1360. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(a+x)^x-a^x}{x^2}$ $(a>0)$.

1361. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^x$.

1362. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\operatorname{th}x)^x$.

1363. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

1363. 1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

1363. 2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

1363. 3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

1363. 4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{Arsh}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$,

burada $\operatorname{Arsh}x=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

1364. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$.

1365. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$.

1366. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch}x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

1367. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\operatorname{ch}x}{\sqrt[m]{\operatorname{ch}x}-\sqrt[n]{\operatorname{ch}x}}$.

1368. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\operatorname{cth}x}$.

1368. 1. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$.

1369. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{\ln(e^x+x)}{x}\right]$.

1370. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[(x+a)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x+a}}\right]$.

1371. Əgər $y=f(x)$ əyrisi $x\to 0$ olduqda $(0,0)$ koordinat başlanğıcına α bucağı altında daxil olursa $(\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$ olarsa), onda

$$\lim_{x\to 0}\frac{y}{x}$$

limitini tapın.

1372. Əgər kəsilməz $y=f(x)$ əyrisi $x\to +0$ olduqda koordinat başlanğıcına daxil olursa ($\lim\limits_{x\to+0} f(x)=0$ olarsa) və $0<x<\varepsilon$ olduqda bütünlüklə $y=-kx$ və $y=kx$ ($k\neq\infty$) düz xətlərinin əmələ gətirdiyi iti bucaq daxilində qalırsa, onda isbat edin ki,

$$\lim_{x\to+0} x^{f(x)}=1.$$

1373. Əgər $f(x)$ funksiyasının ikinci tərtib $f''(x)$ törəməsi varsa, onda isbat edin ki,

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}.$$

1373.1.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}, & x\neq 0 \text{ olduqda;}\\[2mm] \dfrac{1}{2}, & x=0 \text{ olduqda}\end{cases}$$

funksiyasının $x=0$ nöqtəsində diferensiallanan olmasını araşdırın.

1373.2.

$$y=\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}\qquad (x>0)$$

əyrisinin asimptotunu tapın.

1374. Lopital qaydasının aşağıdakı misallara tətbiqi imkanlarını araşdırın:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$; *c)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-2x}(\cos x+2\sin x)+e^{-x^2}\sin^2 x}{e^{-x}(\cos x+\sin x)}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$; *d)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x+\sin x\cos x}{(x+\sin x\cos x)\,e^{\sin x}}$.

1375. Əgər dəyişməyən R radiuslu dairəvi seqmentin qövsü sıfra yaxınlaşırsa, vətəri b və hündürlüyü h olan seqmentin sahəsinin həmin seqmentin daxilinə çəkilmiş bərabəryanlı üsbucağın sahəsinə olan nisbətin limitini tapın. Alınmış nəticədən istifadə edərək seqmentin sahəsi üçün

$$S\approx\frac{2}{3}bh$$

təqribi düsturunu çıxarın.

§10. Teylor düsturu

1°. **Lokal Teylor düsturu.** Əgər: 1) $f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsinin müəyyən $|x-x_0|<\varepsilon$ ətrafında təyin olunubsa, 2) bu ətrafda $f(x)$ funksiyasının $f'(x),\dots,f^{(n-1)}(x)$ törəmələri varsa, 3) x_0 nöqtəsində n-ci tərtib $f^{(n)}(x_0)$ törəməsi varsa, onda

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k+o(x-x_0)^n, \tag{1}$$

burada

$$a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (k=0,1,\dots,n).$$

Xüsusi halda, $x_0=0$ olduqda

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n) \tag{2}$$

olduğunu alarıq. Göstərilən şərtlər daxilində (1) ifadəsi yeganədir.

Əgər x_0 nöqtəsində $f^{(n+1)}(x_0)$ törəməsi varsa, onda (1) düsturundakı qalıq hədd $O^*((x-x_0)^{n+1})$ şəklində götürülə bilər.

(2) lokal Teylor düsturundan aşağıdakı beş əsas ayrılışları alırıq:

I. $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n).$

II. $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n}).$

III. $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1}).$

IV. $(1+x)^m=1+mx+\dfrac{m(m-1)}{2!}x^2+\dots$

$$\dots+\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n).$$

V. $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+o(x^n).$

2°. **Teylor düsturu.** Əgər: 1) $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında təyin olunubsa, 2) $f(x)$-in bu parçada kəsilməz $f'(x),\dots,f^{(n-1)}(x)$ törəmələri varsa, 3) $a<x<b$ olduqda sonlu $f^{(n)}(x)$ törəməsi varsa, onda

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+R_n(x) \quad (a\le x\le b),$$

burada

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n \quad (0<\theta<1)$$

(*Laqranj qalıq həddi*) və ya

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(a+\theta_1(x-a))}{(n-1)!}(1-\theta_1)^{n-1}(x-a)^n \quad (0<\theta_1<1)$$

(*Koşi qalıq həddi*).

1376. $P(x)=1+3x+5x^2-2x^3$ çoxhədlisini $(x+1)$ ikihədlisinin natural dərəcələri üzrə düzün.

Aşağıdakı funksiyaların göstərilən tərtibli həddə qədər x dəyişəninin natural dərəcələri üzrə ayrılışını yazın:

1377. $f(x)=\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$, x^4 həddinə qədər. $f^{(4)}(0)$ nəyə bərabərdir?

1378. $\dfrac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$, x^2 həddinə qədər.

1379. $\sqrt[m]{a^m+x}$ $(a>0)$, x^2 həddinə qədər.

1380. $\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt[3]{1-3x+x^2}$, x^3 həddinə qədər.

1381. e^{2x-x^2}, x^5 həddinə qədər.

1382. $\dfrac{x}{e^x-1}$, x^4 həddinə qədər.

1383. $\sqrt[3]{\sin x^3}$, x^{13} həddinə qədər.

1384. $\ln\cos x$, x^6 həddinə qədər.

1385. $\sin(\sin x)$, x^3 həddinə qədər.

1386. $\mathrm{tg}\, x$, x^5 həddinə qədər.

1387. $\ln\dfrac{\sin x}{x}$, x^6 həddinə qədər.

1388. $f(x)=\sqrt{x}$ funksiyasının $(x-1)$ fərqinin natural dərəcələri üzrə ayrılışının üç həddini tapın.

1389. $f(x)=x^x-1$ funksiyasını $(x-1)$-in natural dərəcələri üzrə $(x-1)^3$ həddinə qədər ayırın.

1390. $y=a\,\mathrm{ch}\dfrac{x}{a}$ $(a>0)$ funksiyasını $x=0$ nöqtəsinin ətrafında 2-ci tərtib parabola ilə təqribi əvəz edin.

1391. $f(x)=\sqrt{1+x^2}-x$ $(x>0)$ funksiyasını $\dfrac{1}{x}$ kəsrinin natural dərəcələri üzrə $\dfrac{1}{x^3}$ həddinə qədər ayırın.

1392. $f(h)=\ln(x+h)$ $(x>0)$ funksiyasının h artımının natural dərəcələri üzrə h^n həddinə qədər (n - natural ədəddir) ayrılışını yazın.

1393. Tutaq ki,

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\ldots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h),$$

$(0<\theta<1)$, burada $f^{(n+1)}(x)\neq 0$.

İsbat edin ki,

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}.$$

1393.1. Tutaq ki, $x\to 0$ olduqda

$$f(x)=1+kx+o(x).$$

İsbat edin ki,

$$\lim_{x\to 0}[f(x)]^{\frac{1}{x}}=e^k.$$

1393.2. Tutaq ki, $f(x)\in C^{(2)}[0,1]$ və $f(0)=f(1)=0$, burada $x\in(0,1)$ olduqda $|f''(x)|\leq A$. İsbat edin ki, $0\leq x\leq 1$ olduqda $|f'(x)|\leq\frac{A}{2}$.

1393.3. Tutaq ki, $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ - iki dəfə diferensiallanan funksiyadır və

$$M_k=\sup_{-\infty<x<+\infty}|f^{(k)}(x)|<+\infty \quad (k=0,1,2).$$

Aşağıdakı bərabərsizliyi isbat edin:

$$M_1^2\leq 2M_0M_2.$$

1394. Təqribi düsturların mütləq xətasını qiymətləndirin:

a) $e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$, $0\leq x\leq 1$ olduqda;

b) $\sin x\approx x-\frac{x^3}{6}$, $|x|\leq\frac{1}{2}$ olduqda;

c) $\operatorname{tg}x\approx x+\frac{x^3}{3}$, $|x|\leq 0{,}1$ olduqda;

d) $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$, $0\leq x\leq 1$ olduqda.

1395. Hansı x-lər üçün

$$\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2}$$

təqribi düsturu 0,0001 dəqiqliklə doğrudur?

1395.1. Aşağıdakı düsturu isbat edin:

$$\sqrt[n]{a^n+x}=a+\frac{x}{na^{n-1}}-r$$

$(n\geq 2,\ a>0,\ x>0)$, burada $0<r<\frac{n-1}{2n^2}\cdot\frac{x^2}{a^{2n-1}}$.

1396. Teylor düsturunun köməyi ilə aşağıdakı ədədləri təqribi hesablayın və xətaları qiymətləndirin:

a) $\sqrt[3]{30}$; *d*) $\sqrt{e}$; *g*) $\operatorname{arctg} 0{,}8$;

b) $\sqrt[5]{250}$; *e*) $\sin 18^0$; *h*) $\arcsin 0{,}45$;

c) $\sqrt[12]{4000}$; *f*) $\ln 1{,}2$; *i*) $(1{,}1)^{1,2}$

1397. Hesablayın:

a) *e*-ni 10^{-9} dəqiqliyi ilə; *d*) $\sqrt{5}$-i 10^{-4} dəqiqliyi ilə;

b) $\sin 1^0$-ni 10^{-8} dəqiqliyi ilə; *e*) $\lg 11$-i 10^{-5} dəqiqliyi ilə.

c) $\cos 9^0$-ni 10^{-5} dəqiqliyi ilə;

I-V ayrılışlarından istifadə edərək aşağıdakı limitləri tapın:

1398. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$. **1399.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}$.

1400. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})$.

1401. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})$.

1402. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$.

1403. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}\ (a>0)$. **1405.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

1404. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$. **1406.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-\operatorname{ctg} x\right)$.

1406.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$.

1406.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$.

1406.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh}(\operatorname{tg} x)-x}{x^3}$.

$x\to 0$ olduqda aşağıdakı sonsuz kiçik y kəmiyyəti üçün Cx^n (C - sabitdir) şəklində olan baş həddi təyin edin:

1407. $y=\operatorname{tg}(\sin x)-\sin(\operatorname{tg} x)$.

1408. $y=(1+x)^x-1$. **1409.** $y=1-\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}$.

1410. a və b əmsallarının hansı qiymətində

$$x-(a+b\cos x)\sin x$$

kəmiyyəti x-ə nəzərən 5-ci tərtib sonsuz kiçik olacaq?

1410.1. A və B əmsallarını elə seçin ki, $x \to 0$ olduqda

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1+Ax^2}{x+Bx^3} + O(x^5)$$

asimptotik bərabərliyi ödənsin.

1410.2. Hansı A, B, C və D əmsalları üçün $x \to 0$ olduqda

$$e^x = \frac{1+Ax+Bx^2}{1+Cx+Dx^2} + O(x^5)$$

asimptotik düsturu doğrudur?

1411. $|x|$-i kiçik kəmiyyət hesab edərək aşağıdakı ifadələr üçün sadə təqribi düsturlar çıxarın:

a) $\dfrac{1}{R^2} - \dfrac{1}{(R+x)^2}$ $(R>0)$;

b) $\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}} - \sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}$;

c) $\dfrac{A}{x}\left[1-\left(1+\dfrac{x}{100}\right)^{-n}\right]$;

d) $\dfrac{\ln 2}{\ln\left(1+\dfrac{x}{100}\right)}$.

1412. x-i mütləq qiymətinə görə kiçik hesab edərək

$$x = \alpha \sin x + \beta \operatorname{tg} x$$

şəklində təqribi düsturu x^5 həddinə qədər dəqiqliklə çıxarın.

Bu düsturu kiçik bucaq qiymətli qövslərin təqribi uzunluğunun tapılmasına tətbiq edin.

1413. *Çebışev qaydasının* nisbi xətasını qiymətləndirin: əyri qövs təqribən bu qövsün vətəri üzərində qurulmuş və onun oxunun $\sqrt{4/3}$ -nə bərabər hündürlüklü bərabəryanlı üçbucağın yan tərəflərinin cəminə bərabərdir.

§11. Funksiyanın ekstremumu. Funksiyanın ən böyük və ən kiçik qiymətləri

1°. **Ekstremumun varlığı üçün zəruri şərt.** Əgər $f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsinin müəyyən ətrafında təyin olunubsa və bu ətrafın bütün $x \neq x_0$ nöqtələri üçün

$$f(x) < f(x_0) \quad \text{və ya} \quad f(x) > f(x_0)$$

bərabərsizliyi ödənilərsə, onda deyirlər ki, $f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində ekstremuma (*maksimuma* və ya *minimuma*) malikdir.

Ekstremum nöqtəsində törəmə varsa, onda $f'(x_0) = 0$.

2°. **Ekstremumun varlığı üçün kafi şərt.** *Birinci qayda.* Əgər: 1) $f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsinin müəyyən $|x - x_0| < \delta$ ətrafında kəsilməzdirsə, burada ya $f'(x_0) = 0$ və ya x_0-da bu funksiyanın törəməsi yoxdur (*böhran nöqtəsi*), 2) $f(x)$-in $0<|x-x_0|<\delta$ oblastında sonlu $f'(x)$ törəməsi varsa, 3) $f'(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsindən sağda və solda öz işarəsini saxlayırsa, onda $f(x)$ funksiyası özünü aşağıdakı cədvəldəki kimi aparır:

	Törəmənin işarəsi		Nəticə
	$x<x_0$	$x>x_0$	
I	+	+	ekstremum yoxdur
II	+	–	maksimum
III	–	+	minimum
IV	–	–	ekstremum yoxdur

İkinci qayda. Əgər $f(x)$ funksiyasının ikinci tərtib $f''(x)$ törəməsi varsa və müəyyən x_0 nöqtəsində

$$f'(x_0)=0 \quad \text{və} \quad f''(x_0)\neq 0$$

olarsa, onda $f(x)$ funksiyası bu nöqtədə e k s t r e m u m a malikdir, məhz: $f''(x_0)<0$ olduqda m a k s i m u m a və $f''(x_0)>0$ olduqda m i n i m u m a malikdir.

Üçüncü qayda. Tutaq ki, müəyyən $|x-x_0|<\delta$ intervalında $f(x)$ funksiyasının $f'(x),\ldots,f^{(n-1)}(x)$ törəmələri, x_0 nöqtəsində isə $f^{(n)}(x_0)$ törəməsi var və

$$f^{(k)}(x_0)=0 \quad (k=1,\ldots,n-1), \quad f^{(n)}(x_0)\neq 0.$$

Bu halda 1) əgər n - cüt ədəddirsə, onda x_0 nöqtəsində $f(x)$ funksiyasının e k s t r e m u m u var, məhz: $f^{(n)}(x_0)<0$ olduqda m a k s i m u m a və $f^{(n)}(x_0)>0$ olduqda m i n i m u m a malikdir; 2) əgər n - tək ədəddirsə, onda x_0 nöqtəsində $f(x)$ funksiyasının e k s t r e m u m u yoxdur.

3°. M ü t l ə q e k s t r e m u m. $[a,b]$ parçasında kəsilməz olan $f(x)$ funksiyası özünün ən böyük və ən kiçik qiymətini ya bu funksiyanın böhran nöqtələrində (yəni o nəqtələrdə ki, $f'(x)$ törəməsi ya sıfra bərabərdir ya da yoxdur) ya da həmin parçanın a və b uc nöqtələrində alır

Aşağıdakı funksiyaların ekstremumlarını tədqiq edin:

1414. $y=2+x-x^2$. **1415.** $y=(x-1)^3$.

1416. $y=(x-1)^4$.

1417. $y=x^m(1-x)^n$ (m və n - natural ədədlərdir).

1418. $y=\cos x+\operatorname{ch} x$. **1419.** $y=(x+1)^{10}e^{-x}$.

1420. $y=\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$ (n - natural ədəddir).

1421. $y=|x|$. **1422.** $y=x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$.

1423. $f(x)=(x-x_0)^n\varphi(x)$ (n - natural ədəddir) funksiyasının

$x = x_0$ nöqtəsində ekstremumunu tədqiq edin, burada $\varphi(x)$ funksiyası $x = x_0$ nöqtəsində kəsilməzdir və $\varphi(x_0) \neq 0$.

1424. Tutaq ki, $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $f'(x) = \dfrac{P_1(x)}{Q^2(x)}$ və x_0 - $f(x)$ funksiyasının stasionar nöqtəsidir, yəni $P_1(x_0) = 0$, $Q(x_0) \neq 0$.

İsbat edin ki,

$$\operatorname{sgn} f''(x_0) = \operatorname{sgn} P_1'(x_0).$$

1425. Əgər x_0 nöqtəsi $f(x)$ funksiyasının maksimumudursa, onda bu nöqtənin müəyyən kifayət qədər kiçik ətrafında x_0 nöqtəsindən solda $f(x)$ funksiyasının artan, ondan sağda isə azalan olduğunu hökm etmək olarmı?

Misala baxın:

$$x \neq 0 \quad \text{olduqda} \quad f(x) = 2 - x^2\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right) \quad \text{və} \quad f(0) = 2.$$

1426(y). İsbat edin ki,

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad x \neq 0 \ \text{olduqda} \quad \text{və} \quad f(0) = 0$$

funksiyası $x = 0$ nöqtəsində minimuma malikdir,

$$g(x) = xe^{-\frac{1}{x^2}}, \quad x \neq 0 \ \text{olduqda} \quad \text{və} \quad g(0) = 0$$

funksiyasının isə $x = 0$ nöqtəsində ekstremumu yoxdur, baxmayaraq ki,

$$f^{(n)}(0) = 0, \qquad g^{(n)}(0) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Bu funksiyaların qrafiklərini qurun.

1427. Aşağıdakı funksiyaların ekstremumlarını tədqiq edin:

a) $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}}\left(\sqrt{2} + \sin\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$ olduqda və $f(0) = 0$;

b) $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}}\left(\sqrt{2} + \cos\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$ olduqda və $f(0) = 0$.

Bu funksiyaların qrafiklərini qurun.

1428. $f(x) = \begin{cases} |x|\left(2 + \cos\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \ \text{olduqda}, \\ 0, & x = 0 \ \text{olduqda} \end{cases}$

funksiyasının $x = 0$ nöqtəsində ekstremumunu tədqiq edin.

Bu funksiyanın qrafikini qurun.

Aşağıdakı funksiyaların ekstremumlarını tapın:

1429. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$. **1430.** $y = 2x^2 - x^4$.

1431. $y = x(x-1)^2(x-2)^3$.

1432. $y = x + \frac{1}{x}$.

1433. $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

1434. $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$.

1435. $y = \sqrt{2x - x^2}$.

1436. $y = x\sqrt[3]{x-1}$.

1437. $y = xe^{-x}$.

1438. $y = \sqrt{x}\ln x$.

1439. $y = \frac{\ln^2 x}{x}$.

1440. $y = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x$.

1441. $y = \frac{10}{1+\sin^2 x}$.

1442. $y = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

1443. $y = e^x \sin x$.

1444. $y = |x| e^{-|x-1|}$.

Aşağıdakı funksiyaların ən kiçik və ən böyük qiymətlərini tapın:

1445. $f(x) = 2^x$, $[-1;\ 5]$ parçasında.

1446. $f(x) = x^2 - 4x + 6$, $[-3;\ 10]$ parçasında.

1447. $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$, $[-10;\ 10]$ parçasında.

1448. $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $[0{,}01;\ 100]$ parçasında.

1449. $f(x) = \sqrt{5-4x}$, $[-1;\ 1]$ parçasında.

Aşağıdakı funksiyaların aşağı sərhədini (inf) və yuxarı sərhədini (sup) tapın:

1450. $f(x) = xe^{-0{,}01x}$, $(0,\ +\infty)$ intervalında.

1451. $f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$, $(0,\ +\infty)$ intervalında.

1452. $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$, $(0,\ +\infty)$ intervalında.

1453. $f(x) = e^{-x^2}\cos x^2$, $(-\infty,\ +\infty)$ intervalında.

1454. $f(\xi) = \frac{1+\xi}{3+\xi^2}$ funksiyasının $x < \xi < +\infty$ intervalında aşağı və yuxarı sərhədini təyin edin.

$$M(x) = \sup_{x<\xi<+\infty} f(\xi) \quad \text{və} \quad m(x) = \inf_{x<\xi<+\infty} f(\xi)$$

funksiyalarının qrafiklərini qurun.

1454.1. Tutaq ki,

$$M_k = \sup_x \left\| f^{(k)}(x) \right\|, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$f(x) = e^{-x^2}$ üçün M_0, M_1 və M_2-ni tapın.

1455. Aşağıdakı ardıcıllıqların ən böyük həddini tapın:

a) $\dfrac{n^{10}}{2^n}$ $(n=1,2,...)$; *b)* $\dfrac{\sqrt{n}}{n+10000}$ $(n=1,2,...)$; *c)* $\sqrt[n]{n}$ $(n=1,2,...)$.

1456. Aşağıdakı bərabərsizlikləri isbat edin:

a) $|3x-x^3|\le 2$; $|x|\le 2$ olduqda;

b) $\dfrac{1}{2^{p-1}}\le x^p+(1-x)^p\le 1$; $0\le x\le 1$ və $p>1$ olduqda;

c) $x^m(a-x)^n\le \dfrac{m^n n^n}{(m+n)^{m+n}}a^{m+n}$; $m>0, n>0$ və $0\le x\le a$ olduqda;

d) $\dfrac{x+a}{2^{\frac{n-1}{n}}}\le\sqrt[n]{x^n+a^n}\le x+a$ $(x>0, a>0, n>1)$;

e) $|a\sin x+b\cos x|\le\sqrt{a^2+b^2}$.

1456.1. $-\infty<x<+\infty$ olduqda

$$\frac{2}{3}\le\frac{x^2+1}{x^2+x+1}\le 2$$

bərabərsizliyini isbat edin.

1457. $P(x)=x(x-1)^2(x+2)$ çoxhədlisinin $[-2, 1]$ parçasında "sıfırdan meylini" təyin edin, yəni

$$E_p=\sup_{-2\le x\le 1}|P(x)| \text{ -i}$$

tapın.

1458. q əmsalının hansı qiymətində

$$P(x)=x^2+q$$

çoxhədlisi $[-1, 1]$ parçasında sıfırdan ən az meylə malikdir, yəni

$$E_p=\sup_{-1\le x\le 1}|P(x)|=\min.$$

1459. $[a,b]$ parçasında iki $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarının *mütləq meyli*

$$\Delta=\sup_{a\le x\le b}|f(x)-g(x)|$$

ədədinə deyilir.

$$f(x)=x^2 \quad \text{və} \quad g(x)=x^3$$

funksiyalarının $[0,1]$ parçasında mütləq meylini təyin edin.

1460. $f(x)=x^2$ funksiyasını $[x_1, x_2]$ parçasında

$$g(x)=(x_1+x_2)x+b$$

xətti funksiyası ilə təqribi elə əvəz edin ki, $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarının mütləq meyli (əvvəlki məsələyə bax) ən kiçik olsun və həmin ən kiçik mütləq meyli təyin edin.

1461. $f(x)=\max\{2|x|, |1+x|\}$ funksiyasının minimumunu tapın.

Aşağıdakı tənliklərin həqiqi köklərinin sayını tapın və bu kökləri ayırın:

1462. $x^3-6x^2+9x-10=0$.

1463. $x^3-3x^2-9x+h=0$.

1464. $3x^4-4x^3-6x^2+12x-20=0$.

1465. $x^5-5x=a$.

1466. $\ln x=kx$.

1467. $e^x=ax^2$.

1468. $\sin^3 x\cdot\cos x=a$, $0\le x\le\pi$ olduqda.

1469. $\operatorname{ch} x=kx$.

1470. Hansı şərt daxilində

$$x^3+px+q=0$$

tənliyi: *a*) bir həqiqi kökə; *b*) üç həqiqi kökə malikdir. Uyğun oblastları $(p,\, q)$ müstəvisində təsvir edin.

§12. Xarakterik nöqtələrə görə funksiyanın qrafikinin qurulması

$y=f(x)$ funksiyasının qrafikini qurmaq üçün: 1) bu funksiyanın təyin oblastını tapmaq və bu oblastın sərhəd nöqtələrində funksiyanı tədqiq etmək, 2) qrafikin simmetrikliyini və periodikliyini təyin etmək, 3) funksiyanın kəsilmə nöqtələrini və kəsilməzlik aralıqlarını tapmaq, 4) funksiyanın sıfırlarını və işarəsini sabit saxladığı oblastları təyin etmək, 5) ekstremum nöqtələrini tapmaq, funksiyanın artma və azalma aralıqlarını təyin etmək, 6) əyilmə nöqtələrini və funksiyanın qrafikinin müəyyən işarəli çöküklük aralıqlarını təyin etmək, 7) asimptotları varsa, onları tapmaq, 8) qrafikin bu və ya digər məxsusiyyətini göstərmək lazımdır.

Ulduzla işarələnmiş misallarda əyilmə nöqtələri təqribi təyin olunur.

Aşağıdakı funksiyaların qrafikini qurun:

1471. $y=3x-x^3$.

1472. $y=1+x^2-\dfrac{x^4}{2}$.

1473. $y=(x+1)(x-2)^2$.

1474*. $y=\dfrac{2-x^2}{1+x^4}$.

1475*. $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-5x+6}$.

1476*. $y=\dfrac{x}{(1+x)(1-x)^2}$.

1477. $y=\dfrac{x^4}{(1+x)^3}$.

1478. $y=\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^4$.

1479. $y=\dfrac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$.

1480. $y=\dfrac{x}{(1-x^2)^2}$.

1481. $y=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$.

1482*. $y=\dfrac{x^4+8}{x^3+1}$.

1483. $y=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{10}{3x^2}+\dfrac{1}{1-x}$.

1484. $y=(x-3)\sqrt{x}$.

1485. $y=\pm\sqrt{8x^2-x^4}$.

1485.1. $y=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$.

1486. $y=\pm\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

1487*. $y=\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}$.

1488. $y=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2+1}$.

1489. $y=(x+2)^{\frac{2}{3}}-(x-2)^{\frac{2}{3}}$.

1490. $y=(x+1)^{\frac{2}{3}}+(x-1)^{\frac{2}{3}}$.

1491. $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

1492. $y=\dfrac{x^2\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1}$.

1493. $y=\dfrac{|1+x|^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$.

1494. $y=1-x+\sqrt{\dfrac{x^3}{3+x}}$.

1495. $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x+1}}$.

1496*. $y=\sqrt{\dfrac{x^4+3}{x^2+1}}$.

1497. $y=\sin x+\cos^2 x$.

1498. $y=(7+2\cos x)\sin x$.

1499. $y=\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$.

1500. $y=\cos x-\dfrac{1}{2}\cos 2x$.

1501. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

1502. $y=\sin x\cdot\sin 3x$.

1503. $y=\dfrac{\sin x}{\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}$.

1504. $y=\dfrac{\cos x}{\cos 2x}$.

1504.1. $y=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$.

1505. $y=2x-\operatorname{tg} x$.

1506. $y=e^{2x-x^2}$.

1507. $y=(1+x^2)\,e^{-x^2}$.

1508. $y=x+e^{-x}$.

1509. $y=x^{\frac{2}{3}}e^{-x}$.

1509.1. $y=e^{-2x}\sin^2 x$.

1510. $y=\dfrac{e^x}{1+x}$.

1511. $y=\sqrt{1-e^{-x^2}}$.

1512. $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

1513. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

1514. $y=\sqrt{x^2+1}\cdot\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

1515. $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1516. $y=x+\operatorname{arctg} x$.

1517. $y=\dfrac{x}{2}+\operatorname{arcctg} x$.

1518. $y=x\operatorname{arctg} x$.

1519. $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$.

1520. $y=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

1521. $y=(x+2)\,e^{\frac{1}{x}}$.

1522. $y=2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$.

1523*. $y=\ln\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+1}$.

1524. $y = a\arcsin\frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}$ $(a>0)$.

1525. $y = \arccos\frac{1-x}{1-2x}$.

1526. $y = x^x$.

1527*. $y = x^{\frac{1}{x}}$.

1528. $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

1529*. $y = x\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ $(x>0)$.

1530*. $y = \frac{e^{\frac{1}{1-x^2}}}{1+x^2}$ (əyilməni tədqiq etmədən).

Parametrik şəkildə verilmiş aşağıdakı əyrilərin qrafikini qurun:

1531. $x = \frac{(t+1)^2}{4}$, $y = \frac{(t-1)^2}{4}$.

1532. $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$.

1533*. $x = \frac{t^2}{t-1}$, $y = \frac{t}{t^2-1}$.

1534. $x = \frac{t^2}{1-t^2}$, $y = \frac{1}{1+t^2}$.

1535. $x = t + e^{-t}$, $y = 2t + e^{-2t}$.

1536. $x = a\cos 2t$, $y = a\cos 3t$ $(a>0)$.

1537. $x = \cos^4 t$, $y = \sin^4 t$.

1538. $x = t\ln t$, $y = \frac{\ln t}{t}$.

1539. $x = \frac{a}{\cos^3 t}$, $y = a\,\mathrm{tg}^3\, t$ $(a>0)$.

1540. $x = a(\mathrm{sh}\, t - t)$, $y = a(\mathrm{ch}\, t - 1)$ $(a>0)$.

Aşağıdakı əyrilərin tənliyini parametrik şəkildə göstərərək bu əyriləri qurun:

1541. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ $(a>0)$.

Göstəriş. $y = tx$ götürün.

1542. $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$.

1543. $x^2y^2 = x^3 - y^3$.

1544. $x^y = y^x$ $(x>0,\ y>0)$.

1545. Əyrinin qrafikini qurun:

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{ch}^2 y = 1.$$

(φ, r) $(r \geq 0)$ polyar koordinat sistemində verilmiş aşağıdakı funksiyaların qrafiklərini qurun:

1546. $r = a + b\cos\varphi$ $(0 < a \leq b)$.

1547. $r = a\sin 3\varphi \ (a>0)$. **1549*.** $r = a\dfrac{\operatorname{th}\varphi}{\varphi - 1}$, burada $\varphi > 1 \ (a>0)$.

1548. $r = \dfrac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}} \ (a>0)$. **1550*.** $\varphi = \arccos\dfrac{r-1}{r^2}$.

Aşağıdakı əyrilər ailəsinin qrafiklərini qurun (a - dəyişən parametrdir):

1551. $y = x^2 - 2x + a$.

1552. $y = x + \dfrac{a^2}{x}$. **1554.** $y = \dfrac{x}{2} + e^{-ax}$.

1553. $y = x \pm \sqrt{a(1 - x^2)}$. **1555.** $y = xe^{-\frac{x}{a}}$.

§13. Funksiyanın maksimum və minimumuna aid məsələlər

1556. İsbat edin ki, əgər $f(x)$ funksiyası mənfi deyilsə, onda

$$F(x) = Cf^2(x) \quad (C > 0)$$

funksiyası ilə $f(x)$ funksiyası eyni ekstremum nöqtələrinə malikdirlər.

1557. İsbat edin ki, əgər $\varphi(x)$ funksiyası $-\infty < x < +\infty$ olduqda ciddi monoton artandırsa, onda

$$f(x) \quad \text{və} \quad \varphi(f(x))$$

funksiyaları eyni ekstremum nöqtələrinə malikdirlər.

1558. Cəmi a ədədinə bərabər olan iki müsbət ədədin m və n $(m > 0,\ n > 0)$ üstlü qüvvətləri hasilinin ən böyük qiymətini tapın.

1559. Hasili sabit a ədədinə bərabər olan iki müsbət ədədin m və n $(m > 0,\ n > 0)$ üstlü qüvvətləri cəminin ən kiçik qiymətini tapın.

1560. Hansı loqarifmlər sistemində öz loqarifminə bərabər olan ədədlər mövcuddur?

1561. Verilmiş S sahəli bütün düzbucaqlılardan perimetri ən kiçik olanı tapın.

1562. Kateti və hipotenuzunun cəmi sabit olan düzbucaqlı üçbucaqlardan sahəsi ən böyük olanı tapın.

1563. Hansı xətti ölçülərdə verilmiş V tutumlu bağlı silindrik bankanın tam səthinin sahəsi ən kiçikdir?

1564. Yarımdairəni aşmayan verilmiş dairəvi seqmentin daxilinə ən böyük sahəli düzbucaqlı çəkin.

1565. Verilmiş

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ellipsinin daxilinə tərəfləri ellipsin oxlarına paralel olan ən böyük sahəli düzbucaqlı çəkin.

1566. b oturacaqlı və h hündürlüklü üçbucağın daxilinə ən böyük perimetrli düzbucaqlı çəkin.

Bu məsələnin həll olunma imkanlarını araşdırın.

1567. d diametrli dairəvi şalbandan en kəsiyi b oturacaqlı və h hündürlüklü düzbucaqlı olan tir yonulur. Əgər tirin möhkəmliyi bh^2-na mütənasibdirsə, onda hansı ölçülərdə tir ən böyük möhkəmliyə malik olar?

1568. R radiuslu yarımkürəyə kvadrat oturacaqlı ən böyük həcmə malik düzbucaqlı paralelepiped çəkin.

1569. R radiuslu kürəyə ən böyük həcmli silindr çəkin.

1570. R radiuslu kürəyə tam səthinin sahəsi ən böyük olan silindr çəkin.

1571. Verilmiş kürə xaricinə ən kiçik həcmli konus çəkin.

1572. Doğuranı l olan ən böyük həcmli konusu tapın.

1573. Ox kəsiyindəki bucağı 2α və oturacağının radiusu R olan düzgün dairəvi konusun daxilinə tam səthinin sahəsi ən böyük olan silindr çəkin.

1574. $y^2 = 2px$ parabolasından $M(p, p)$ nöqtəsinə qədər olan ən yaxın məsafəni tapın.

1575. $x^2 + y^2 = 1$ çevrəsindən $A(2, 0)$ nöqtəsinə qədər olan ən yaxın və ən böyük məsafəni tapın.

1576. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(0 < b < a)$ ellipsinin $B(0, -b)$ təpəsindən keçən ən böyük vətərini tapın.

1577. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsinin $M(x, y)$ nöqtəsindən koordinat oxları ilə ən kiçik sahəli üçbucaq əmələ gətirən toxunanını çəkin.

1578. Cisim yuxarıdan yarımkürə ilə tamamlanmış düzgün dairəvi silindr şəklindədir. Hansı xətti ölçülər daxilində V həcmli bu cismin tam səthinin sahəsi ən kiçik olar?

1579. Açıq kanalın en kəsiyi bərabəryanlı trapesiya şəklindədir. Kanalda suyun "canlı en kəsik" sahəsi S, suyun səviyyəsi isə h olarsa, yan tərəflərin hansı φ meylliyində kəsiyin "yaş perimetri" ən kiçik olar?

1580. S sahəsini hüdudlandıran qapalı konturun perimetrinin eyni S sahəli dairənin çevrəsinin uzunluğuna olan nisbətinə verilmiş konturun "*dolanbaclığı*" deyilir.

Oturacağı $AD = 2a$ və iti bucağı $BAD = \alpha$ olan ən kiçik "dolanbaclığa" malik bərabəryanlı $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ trapesiyası hansı formaya malikdir?

1581. R radiuslu dairədən elə sektor kəsin ki, qalan hissədən ən böyük tutumlu qıf düzəltmək mümkün olsun?

1582. A zavodu cənubdan şimala doğru B şəhərindən keçən dəmir yolunün ən qısa məsafəyə görə a *km*-liyində yerləşir. Əgər 1 *ton* yükün 1 *km* məsafəyə maşın yolu ilə daşınması p *man.*-a, dəmir yolu ilə isə q *man.*-a ($p>q$) başa gəlirsə və B şəhəri A zavodundan şimalda b *km* məsafədə yerləşirsə, onda maşın yolunu dəmir yoluna hansı φ bucağı altında çəkmək lazımdır ki, yüklərin A-dan B-yə daşınması sərfəli olsun?

1583. İki gəmi sabit u və v sürətləri ilə bir-biri arasında θ bucağı əmələ gətirən düz xətt boyunca üzürlər. Əgər müəyyən anda yolların kəsişmə nöqtəsindən gəmilərə qədər olan məsafə uyğun olaraq a və b olarsa, gəmilər arasındakı ən kiçik məsafəni təyin edin.

1584. A və B nöqtələrində uyğun olaraq S_1 və S_2 şam qüvvəsinə malik işıq mənbələri yerləşmişdir. $AB = a$ parçasında ən az işıqlandırılan M nöqtəsini tapın.

1585. İşıqlanan nöqtə R və r ($R>r$) radiuslu kəsişməyən iki kürənin mərkəz xəttində yerləşir və bu kürələrdən kənardadır. Bu nöqtənin hansı vəziyyətində kürələrin işıqlandırılan hissələrinin səthlərinin cəmi ən böyük olacaq?

1586. Elektrik lampasını a radiuslu dairəvi stolun mərkəzindən hansı hündürlükdə asmaq lazımdır ki, stolun kənarları ən çox işıqlandırılmış olsun?

G ö s t ə r i ş. İşıqlandırmanın parlaqlığı

$$I = k\frac{\sin\varphi}{r^2}$$

düsturu ilə ifadə olunur, burada φ - şüaların maillik bucağı, r - işıq mənbəyindən işıqlandırılan sahəyə qədər olan məsafə, k isə işıq mənbəyinin qüvvəsidir.

1587. Eni a *metr* olan çaya düz bucaq altında eni b *metr* olan kanal tikilmişdir. Hansı maksimal uzunluqlu gəmilər bu kanala daxil ola bilərlər?

1588. Gəminin üzməsinin sutkalıq xərci a *man.*-a bərabər olan sabitdən və sürətin kubuna mütənasib artan dəyişəndən ibarətdir. Gəminin hansı v sürəti ilə üzməsi daha sərfəlidir?

1589. Üfüqi kələ-kötür müstəvidə P çəkili yükü tətbiq edilən qüvvə ilə tərpətmək lazımdır. Əgər yükün sürtünmə əmsalı k olarsa, üfüqi müstəviyə hansı maillikdə bu qüvvənin qiyməti ən kiçik olacaq?

1590. a radiuslu yarımkürə formasında olan qaba $l>2a$ uzunluqlu çubuq salınmışdır. Çubuğun tarazlıq vəziyyətini tapın.

§14. Əyrilərin toxunması. Əyrilik dairəsi. Evolyuta

1°. *n*-tərtibli toxunma. Əgər

$$y=\varphi(x) \quad \text{və} \quad \tilde{y}=\psi(x)$$

əyriləri üçün x_0 nöqtəsində $\varphi^{(k)}(x_0)=\psi^{(k)}(x_0)$ $(k=0,1,\dots,n)$ və $\varphi^{(n+1)}(x_0)\neq\psi^{(n+1)}(x_0)$ olarsa, onda deyirlər ki, bu əyrilər x_0 nöqtəsində *n-tərtib toxunmaya* malikdirlər. Bu halda $x\to x_0$ olduqda $\varphi(x)-\psi(x)=O^*[x-x_0]^{n+1}$ alarıq.

2°. Əyrilik dairəsi. Əgər

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=R^2$$

çevrəsi verilmiş $y=f(x)$ əyrisi ilə 2-ci tərtibdən aşağı olmayan toxunmaya malikdirsə, onda bu çevrə uyğun nöqtədə *əyrilik dairəsi* adlanır. Bu dairənin

$$R=\frac{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$$

radiusu *əyrilik radiusu*, $k=\frac{1}{R}$ kəmiyyəti isə *əyrilik* adlanır.

3°. Evolyuta. Əyrilik dairələrinin

$$\xi=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \qquad \eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}$$

olmaqla (ξ,η) mərkəzlərinin (*əyrilik mərkəzlərinin*) həndəsi yeri verilmiş $y=f(x)$ əyrisinin *evolyutası* adlanır.

1591. k və b parametrlərini elə seçin ki,

$$y=kx+b$$

düz xətti

$$y=x^3-3x^2+2$$

əyrisi ilə birinci tərtibi aşan toxunmaya malik olsun.

1592. a, b və c əmsallarının hansı qiymətində

$$y=ax^2+bx+c$$

parabolası $x=x_0$ nöqtəsində $y=e^x$ əyrisi ilə 2-ci tərtib toxunmaya malikdir?

1593. *a*) $y=1-\cos x$; *b*) $y=\operatorname{tg}x-\sin x$; *c*) $y=e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)$

əyriləri x=0 nöqtəsində Ox oxu ilə hansı tərtib toxunmaya malikdirlər?

1594. İsbat edin ki,

$$y=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \ \text{olduqda}, \\ 0, & x=0 \ \text{olduqda} \end{cases}$$

əyrisi $x=0$ nöqtəsində Ox oxu ilə sonsuz tərtib toxunmaya malikdir.

1595. *a)* $M(1, 1)$; *b)* $N(100; 0{,}01)$ nöqtələrində

$$xy=1$$

hiperbolasının əyrilik radiusunu və əyrilik mərkəzini tapın.

Aşağıdakı funksiyaların əyrilik radiusunu təyin edin:

1596. $y^2 = 2px$ parabolasının.

1597. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a \geq b > 0)$ ellipsinin.

1598. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbolasının.

1599. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ astroidinin.

1600. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ ellipsinin.

1601. $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$ sikloidinin.

1602. $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$ dairəsinin evolventasının.

1603. İsbat edin ki,

$$y^2 = 2px - qx^2$$

ikitərtibli xəttinin əyrilik radiusu normal parçasının kubu ilə mütənasibdir.

1604. Polyar koordinatlarda verilmiş əyrinin əyrilik radiusu üçün düstur çıxarın.

Polyar koordinatlarda verilmiş aşağıdakı əyrilərin əyrilik radiuslarını təyin edin (parametrlər müsbətdir):

1605. $r = a\varphi$ Arximed spiralının.

1606. $r = ae^{m\varphi}$ loqarifmik spiralın.

1607. $r = a(1+\cos\varphi)$ kardioidinin.

1608. $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ lemniskatının.

1609. $y = \ln x$ əyrisi üzərində əyriliyin ən böyük qiymət aldığı nöqtəni tapın.

1610. $y=\frac{kx^3}{6}$ $(0 \leq x < +\infty,\ k>0)$ kub parabolasının maksimal əyriliyi $\frac{1}{1000}$-ə bərbərədir. Əyriliyin belə maksimal qiymət aldığı x nöqtəsini tapın.

Tənlikləri qurun:

1611. $y^2 = 2px$ parabolasının evolyutası üçün.

1612. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipsinin evolyutası üçün.

1613. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ astroidinin evolyutası üçün.

1614. $x=a\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}$ traktrisinin evolyutası üçün.

1615. $r=ae^{m\varphi}$ loqarifmik spiralının evolyutası üçün.

1616. İsbat edin ki,

$$x=a(t-\sin t),\; y=a(1-\cos t)$$

sikloidinin evolyutası verilmiş sikloiddən yalnız yerləşməsi ilə fərqlənən sikloiddir.

§15. Tənliklərin təqribi həlli

1°. **Mütənasib hissələr qaydası (vətərlər üsulu).** Əgər $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməzdirsə, $a<x<b$ olduqda $f'(x)\neq 0$ və

$$f(a)f(b)<0$$

olarsa, onda

$$f(x)=0 \qquad (1)$$

tənliyinin (a,b) intervalında bir və yalnız bir ξ həqiqi kökü var. Bu kökün birinci yaxınlaşması üçün

$$x_1=a+\delta_1$$

qiymətini qəbul etmək olar, burada

$$\delta_1=-\frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a).$$

Bu üsulu $f(x)$ funksiyasının uclarında müxtəlif qiymətlər aldığı (a,x_1) və ya (x_1,b) aralıqlarından birinə tətbiq etsək, ξ kökünün ikinci x_2 yaxınlaşmasını alarıq və i.a. n-ci x_n yaxınlaşmasının qiymətləndirilməsi üçün

$$|x_n-\xi|\leq\frac{|f(x_n)|}{m} \qquad (2)$$

düsturu doğrudur, burada $m=\inf\limits_{a<x<b}|f'(x)|$, bu zaman $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$.

2°. **Nyuton qaydası (toxunanlar üsulu).** Əgər $[a,b]$ parçasında $f''(x)\neq 0$ və $f(a)f''(a)>0$ olarsa, onda (1) tənliyinin ξ kökünün birinci yaxınlaşması üçün

$$\xi_1=a-\frac{f(a)}{f'(a)}$$

qiymətini qəbul etmək olar.

Bu üsulu tətbiq edərək ξ kökünə tez yığılan ξ_n $(n=1,2,\dots)$ ardıcıl yaxınlaşmalarını alırıq, bu zaman onların dəqiqliyi, məsələn, (2) düsturu ilə qiymətləndirilir.

Təxmini təsəvvür üçün $y = f(x)$ funksiyasının qrafikini sxematik qurmaq olar.

Mütənasib hissələr üsulundan istifadə edərək verilmiş aşağıdakı tənliklərin köklərini 0,001 dəqiqliklə tapın:

1617. $x^3 - 6x + 2 = 0.$

1618. $x^4 - x - 1 = 0.$

1619. $x - 0{,}1\sin x = 2.$

1620. $\cos x = x^2.$

Nyuton üsulundan istifadə edərək verilmiş aşağıdakı tənliklərin köklərini göstərilən dəqiqliklə təyin edin:

1621. $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 10x$ (10^{-3} dəqiqliklə).

1622. $x \lg x = 1$ (10^{-4} dəqiqliklə).

1623. $\cos x \cdot \operatorname{ch} x = 1$ (10^{-3} dəqiqliklə) (iki müsbət kökünü).

1624. $x + e^x = 0$ (10^{-5} dəqiqliklə).

1625. $x \operatorname{th} x = 1$ (10^{-6} dəqiqliklə).

1626. 0,001 dəqiqliklə

$$\operatorname{tg} x = x$$

tənliyinin birinci üç müsbət kökünü tapın.

1627. 10^{-3} dəqiqliklə

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{2}$$

tənliyinin iki müsbət kökünü tapın.

III BÖLMƏ

QEYRİ-MÜƏYYƏN İNTEQRAL

§ 1. Sadə qeyri-müəyyən inteqrallar

1⁰. Q e y r i - m ü ə y y ə n i n t e q r a l a n l a y ı ş ı. Əgər $f(x)$ funksiyası (a,b) intervalında kəsilməzdirsə və $F(x)$ - onun ibtidai funksiyasıdırsa, yəni $a<x<b$ olduqda $F'(x)=f(x)$ olarsa, onda

$$\int f(x)dx = F(x)+C, \qquad a<x<b,$$

burada C - ixtiyari sabitdir.

2⁰. Q e y r i - m ü ə y y ə n i n t e q r a l ı n ə s a s x a s s ə l ə r i:

a) $d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx;$

b) $\int d\Phi(x) = \Phi(x)+C;$

c) $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx \qquad (A=\text{const}; \quad A\neq 0);$

d) $\int\left[f(x)+g(x)\right]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

3⁰. S a d ə i n t e q r a l l a r c ə d v ə l i:

I. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C \qquad (n\neq -1).$

II. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x|+C \qquad (x\neq 0).$

III. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C. \end{cases}$

IV. $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|+C.$

V. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C. \end{cases}$

VI. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2\pm 1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm 1}\right|+C.$

VII. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a}+C \quad (a>0,\ a\neq 1); \qquad \int e^x dx = e^x + C.$

VIII. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

IX. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

X. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

XI. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

XII. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$

XIII. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$

XIV. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

XV. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

4^0. Əsas inteqrallama üsulları.

a) Yeni arqument daxil etmə üsulu.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

olarsa, onda

$$\int f(u)du = F(u) + C,$$

burada $u = \varphi(x)$ - kəsilməz diferensiallanan funksiyadır.

b) Ayrılış üsulu.

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

olarsa, onda

$$\int f(x)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$$

c) Əvəzetmə üsulu. Əgər $f(x)$ funksiyası kəsilməzdirsə, onda

$$x = \varphi(t)$$

qəbul edərək

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

olduğunu alarıq, burada $\varphi(t)$ funksiyası $\varphi'(t)$ törəməsi ilə birlikdə kəsilməzdir.

d) Hissə-hissə inteqrallama üsulu. Əgər u və v - x-dən asılı müəyyən diferensiallanan funksiyalardırsa, onda

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du.$$

Sadə inteqrallar cədvəlindən istifadə etməklə aşağıdakı inteqralları tapın:

1628. $\int (3 - x^2)^3 dx.$

1629. $\int x^2 (5 - x)^4 dx.$

1630. $\int (1 - x)(1 - 2x)(1 - 3x)dx.$

1631. $\int \left(\frac{1 - x}{x}\right)^2 dx.$

1632. $\int \left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3}\right)dx.$

1633. $\int \frac{x + 1}{\sqrt{x}}dx.$

1634. $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}}dx.$

1635. $\int \frac{(1 - x)^3}{x\sqrt[3]{x}}dx.$

1636. $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\, dx.$

1637. $\int \frac{\left(\sqrt{2x} - \sqrt[3]{3x}\right)^2}{x}dx$

1638. $\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3}dx.$

1639. $\int \frac{x^2 dx}{1 + x^2}.$

1640. $\int \frac{x^2 dx}{1 - x^2}.$

1641. $\int \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1}dx.$

1642. $\int \frac{\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^4}}dx.$

1643. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx.$

1644. $\int (2^x+3^x)^2 dx.$

1645. $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx.$

1646. $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx.$

1647. $\int (1+\sin x+\cos x)dx.$

1648. $\int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx \ (0 \le x \le \pi).$

1649. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx.$

1650. $\int \operatorname{tg}^2 x dx.$

1651. $\int (a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x)dx.$

1652. $\int \operatorname{th}^2 x dx.$

1653. $\int \operatorname{cth}^2 x dx.$

1654. İsbat edin ki, $\int f(x)dx = F(x)+C$ olarsa, onda

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C \qquad (a \neq 0)$$

olar.

İnteqralları tapın:

1655. $\int \frac{dx}{x+a}.$

1656. $\int (2x-3)^{10}dx.$

1657. $\int \sqrt[3]{1-3x}\,dx.$

1658. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}.$

1659. $\int \frac{dx}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}}.$

1660. $\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}dx.$

1661. $\int \frac{dx}{2+3x^2}.$

1662. $\int \frac{dx}{2-3x^2}.$

1663. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}.$

1664. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}.$

1665. $\int (e^{-x}+e^{-2x})dx.$

1666. $\int (\sin 5x-\sin 5\alpha)dx.$

1667. $\int \frac{dx}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}.$

1668. $\int \frac{dx}{1+\cos x}.$

1669. $\int \frac{dx}{1-\cos x}.$

1670. $\int \frac{dx}{1+\sin x}.$

1671. $\int [\operatorname{sh}(2x+1)+\operatorname{ch}(2x-1)]dx.$

1672. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}}.$

1673. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}}.$

İnteqralaltı ifadələri çevirməklə aşağıdakı inteqralları tapın:

1674. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

1675. $\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}dx$.

1676. $\int \frac{xdx}{3-2x^2}$.

1677. $\int \frac{xdx}{(1+x^2)^2}$.

1678. $\int \frac{xdx}{4+x^4}$.

1679. $\int \frac{x^3dx}{x^8-2}$.

1680. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

Göstəriş. $\frac{dx}{\sqrt{x}}=2d(\sqrt{x})$.

1681. $\int \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$.

1682. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

1683. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

1684. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$.

1685. $\int \frac{xdx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$.

1686. $\int \frac{x^2dx}{(8x^3+27)^{\frac{2}{3}}}$.

1687. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$.

1688. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

1689. $\int xe^{-x^2}dx$.

1690. $\int \frac{e^x dx}{2+e^x}$.

1691. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

1692. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

1693. $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$.

1694. $\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$.

1695. $\int \sin^5 x\cos x dx$.

1696. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}dx$.

1697. $\int \mathrm{tg}\, xdx$.

1698. $\int \mathrm{ctg}\, xdx$.

1699. $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx$.

1700. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}dx$.

1700.1. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}dx$.

1700.2. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}dx$.

1700.3. $\int \frac{\mathrm{sh}\, x}{\sqrt{\mathrm{ch}\, 2x}}dx$.

1701. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt[4]{\mathrm{ctg}\, x}}$.

1702. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x}$.

1703. $\int \frac{dx}{\sin x}$.

1704. $\int \frac{dx}{\cos x}$.

1705. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}\, x}$.

1706. $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}\, x}$.

1707. $\int \frac{\mathrm{sh}\, x\,\mathrm{ch}\, x}{\sqrt{\mathrm{sh}^4 x+\mathrm{ch}^4 x}}dx$.

1708. $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x \sqrt[3]{\mathrm{th}^2 x}}$.

1709. $\int \frac{\mathrm{arctg}\, x}{1+x^2} dx$.

1710. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}}$.

1711. $\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}} dx$.

1712. $\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$.

Göstəriş. $\left(1+\frac{1}{x^2}\right) dx = d\left(x-\frac{1}{x}\right)$.

1713. $\int \frac{x^2-1}{x^4+1} dx$.

1714. $\int \frac{x^4 dx}{(x^5+1)^4}$.

1715. $\int \frac{x^{\frac{n}{2}} dx}{\sqrt{1+x^{n+2}}}$.

1716. $\int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx$.

1717. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2+\cos 2x}}$.

1718. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$.

1719. $\int \frac{2^x \cdot 3^x}{9^x - 4^x} dx$.

1720. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$.

Ayrılış üsulunu tətbiq etməklə aşağıdakı inteqralları hesablayın:

1721. $\int x^2 (2-3x^2)^2 dx$.

1721.1. $\int x(1-x)^{10} dx$.

1722. $\int \frac{1+x}{1-x} dx$.

1723. $\int \frac{x^2}{1+x} dx$.

1724. $\int \frac{x^3}{3+x} dx$.

1725. $\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx$.

1726. $\int \frac{(2-x)^2}{2-x^2} dx$.

1727. $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}} dx$.

1728. $\int \frac{x^5}{x+1} dx$.

1729. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$.

1730. $\int x\sqrt{2-5x}\, dx$.

Göstəriş. $x \equiv -\frac{1}{5}(2-5x)+\frac{2}{5}$.

1731. $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{1-3x}}$.

1732. $\int x^3 \sqrt[3]{1+x^2}\, dx$.

1733. $\int \frac{dx}{(x-1)(x+3)}$.

Göstəriş. $1 \equiv \frac{1}{4}[(x+3)-(x-1)]$.

1734. $\int \frac{dx}{x^2+x-2}$.

1735. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}$.

1736. $\int \frac{dx}{(x^2-2)(x^2+3)}$.

1737. $\int \frac{x dx}{(x+2)(x+3)}$.

1738. $\int \frac{x dx}{x^4+3x^2+2}$.

1739. $\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2}$ $(a \neq b)$.

1740. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $(a^2 \neq b^2)$.

1741. $\int \sin^2 x\, dx$.

1742. $\int \cos^2 x\, dx.$

1743. $\int \sin x \sin(x+\alpha)\, dx.$

1744. $\int \sin 3x \cdot \sin 5x\, dx.$

1745. $\int \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{3}\, dx.$

1746. $\int \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) dx.$

1747. $\int \sin^3 x\, dx.$

1748. $\int \cos^3 x\, dx.$

1749. $\int \sin^4 x\, dx.$

1750. $\int \cos^4 x\, dx$

1751. $\int \mathrm{ctg}^2 x\, dx.$

1752. $\int \mathrm{tg}^3 x\, dx.$

1753. $\int \sin^2 3x \sin^3 2x\, dx.$

1754. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$

Göstəriş. $1 \equiv \sin^2 x + \cos^2 x.$

1755. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos x}.$

1756. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}.$

1757. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx.$

1758. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}.$

1759. $\int \frac{dx}{1+e^x}.$

1760. $\int \frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}} dx.$

1761. $\int \mathrm{sh}^2 x\, dx.$

1762. $\int \mathrm{ch}^2 x\, dx.$

1763. $\int \mathrm{sh}\, x\, \mathrm{sh}\, 2x\, dx.$

1764. $\int \mathrm{ch}\, x \cdot \mathrm{ch}\, 3x\, dx.$

1765. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x\, \mathrm{ch}^2 x}.$

Uyğun əvəzləmələr aparmaqla aşağıdakı inteqralları tapın:

1766. $\int x^2 \sqrt[3]{1-x}\, dx.$

1767. $\int x^3 (1-5x^2)^{10} dx.$

1768. $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx.$

1769. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

1770. $\int x^5 (2-5x^3)^{\frac{2}{3}} dx.$

1771. $\int \cos^5 x \cdot \sqrt{\sin x}\, dx.$

1772. $\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x} dx.$

1773. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx.$

1774. $\int \frac{\ln x\, dx}{x\sqrt{1+\ln x}}.$

1775. $\int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}} + e^x}.$

1776. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}.$

1777. $\int \frac{\mathrm{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+x}.$

$x = a\sin t$, $x = a\operatorname{tg} t$, $x = a\sin^2 t$ və buna oxşar triqonometrik çevirmələr tətbiq etməklə aşağıdakı inteqralları tapın (parametrlər müsbətdir):

1778. $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

1779. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-2}}$.

1780. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

1781. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$.

1782. $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx$.

1783. $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\,dx$.

1784. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$.

Göstəriş. $x-a=(b-a)\sin^2 t$ çevirməsini tətbiq edin.

1785. $\int \sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx$.

$x = a\operatorname{sh} t$, $x = a\operatorname{ch} t$ və buna oxşar hiperbolik çevirmələr tətbiq etməklə aşağıdakı inteqralları tapın (parametrlər müsbətdir):

1786. $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx$.

1787. $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx$.

1788. $\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\,dx$.

1789. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$.

1790. $\int \sqrt{(x+a)(x+b)}\,dx$.

Göstəriş. $x+a=(b-a)\operatorname{sh}^2 t$ qəbul etməli

Hissə-hissə inteqrallama üsulunu tətbiq etməklə aşağıdakı inteqralları tapın:

1791. $\int \ln x\,dx$.

1792. $\int x^n \ln x\,dx \quad (n \neq -1)$.

1793. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$.

1794. $\int \sqrt{x}\ln^2 x\,dx$.

1795. $\int xe^{-x}\,dx$.

1796. $\int x^2 e^{-2x}\,dx$.

1797. $\int x^3 e^{-x^2}\,dx$.

1798. $\int x\cos x\,dx$.

1799. $\int x^2 \sin 2x\,dx$.

1800. $\int x\operatorname{sh} x\,dx$.

1801. $\int x^3 \operatorname{ch} 3x\,dx$.

1802. $\int \operatorname{arctg} x\,dx$.

1803. $\int \arcsin x\,dx$.

1804. $\int x\operatorname{arctg} x\,dx$.

1805. $\int x^2 \arccos x\,dx$.

1806. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx$.

1807. $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx.$

1808. $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx.$

1809. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx.$

1810. $\int \sin x\cdot\ln(\operatorname{tg}x)dx.$

İnteqralları tapın:

1811. $\int x^5e^{x^3}dx.$

1812. $\int (\arcsin x)^2dx.$

1813. $\int x(\operatorname{arctg}x)^2dx.$

1814. $\int x^2\ln\frac{1-x}{1+x}dx.$

1815. $\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx.$

1816. $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx.$

1817. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}.$

1818. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$

1819. $\int \sqrt{x^2+a}\,dx.$

1820. $\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,dx.$

1821. $\int x\sin^2 x\,dx.$

1822. $\int e^{\sqrt{x}}dx.$

1823. $\int x\sin\sqrt{x}\,dx.$

1824. $\int \frac{xe^{\operatorname{arctg}x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx.$

1825. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg}x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx.$

1826. $\int \sin(\ln x)dx.$

1827. $\int \cos(\ln x)dx.$

1828. $\int e^{ax}\cos bx\,dx.$

1829. $\int e^{ax}\sin bx\,dx.$

1830. $\int e^{2x}\sin^2 x\,dx.$

1831. $\int (e^x-\cos x)^2dx.$

1832. $\int \frac{\operatorname{arcctg}e^x}{e^x}dx.$

1833. $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}dx.$

1834. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}.$

1835. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx.$

Növbəti inteqralların hesablanması kvadrat üçhədlinin kanonik şəklə gətirilməsinə və aşağıdakı düsturlara əsaslanır:

I. $\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C \quad (a\neq 0).$

II. $\int \frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C \quad (a\neq 0).$

III. $\int \frac{xdx}{a^2\pm x^2}=\pm\frac{1}{2}\ln\left|a^2\pm x^2\right|+C.$

IV. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \qquad (a>0).$

V. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C \qquad (a>0).$

VI. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2\pm x^2} + C \qquad (a>0).$

VII. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C \qquad (a>0).$

VIII. $\int \sqrt{x^2\pm a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C \qquad (a>0).$

İnteqralları tapın:

1836. $\int \frac{dx}{a+bx^2} \quad (ab\neq 0).$

1837. $\int \frac{dx}{x^2-x+2}.$

1838. $\int \frac{dx}{3x^2-2x-1}.$

1839. $\int \frac{xdx}{x^4-2x^2-1}.$

1840. $\int \frac{(x+1)}{x^2+x+1}dx.$

1841. $\int \frac{xdx}{x^2-2x\cos\alpha+1}.$

1842. $\int \frac{x^3dx}{x^4-x^2+2}.$

1843. $\int \frac{x^5dx}{x^6-x^3-2}.$

1844. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x-8\sin x\cos x+5\cos^2 x}.$

1845. $\int \frac{dx}{\sin x+2\cos x+3}.$

1846. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} \quad (b\neq 0).$

1847. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}.$

1848. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}.$

1849. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+2}}.$

1850. İsbat edin ki, əgər

$$y = ax^2+bx+c \qquad (a\neq 0)$$

olarsa, onda $a>0$ olduqda

$$\int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(\frac{y'}{2}+\sqrt{ay}\right)+C$$

və $a<0$ olduqda

$$\int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{-y'}{\sqrt{b^2-4ac}}+C$$

olar.

1851. $\int \frac{xdx}{\sqrt{5+x-x^2}}$.

1852. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$.

1853. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}}$.

1853.1. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+\sin x+\cos^2 x}}$.

1854. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^4-2x^2-1}}$.

1855. $\int \frac{x+x^3}{\sqrt{1+x^2-x^4}}dx$.

1856. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$.

1857. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+x-1}}$.

1858. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$.

1859. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$.

1860. $\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}}$.

1861. $\int \sqrt{2+x-x^2}dx$.

1862. $\int \sqrt{2+x+x^2}dx$.

1863. $\int \sqrt{x^4+2x^2-1}\, x\, dx$.

1864. $\int \frac{1-x+x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}}dx$.

1865. $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}dx$.

§2. Rasional funksiyaların inteqrallanması

Qeyri-müəyyən əmsallar üsulunu tətbiq etməklə aşağıdakı inteqralları tapın:

1866. $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx$.

1867. $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

1868. $\int \frac{x^{10}dx}{x^2+x-2}$.

1869. $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx$.

1870. $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}dx$.

1871. $\int \frac{xdx}{x^3-3x+2}$.

1872. $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$.

1873. $\int \left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 dx$.

1874. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$.

1875. $\int \frac{dx}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}$.

1876. $\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}dx$.

1877. $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$.

1878. $\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$.

1879. $\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$.

1880. $\int \frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)}$.

1881. $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

1882. $\int \frac{xdx}{x^3-1}$.

1883. $\int \frac{dx}{x^4-1}$.

1884. $\int \frac{dx}{x^4+1}$.

1885. $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$.

1886. $\int \frac{dx}{x^6+1}$.

1887. $\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}$.

1888. $\int \frac{dx}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}$.

1889. $\int \frac{x^2dx}{x^4+3x^3+\frac{9}{2}x^2+3x+1}$.

1890. Hansı şərt daxilində

$$\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}dx$$

inteqralı rasional funksiya olar?

Ostroqradski üsulunu tətbiq etməklə aşağıdakı inteqralları tapın:

1891. $\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3}$.

1892. $\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}$.

1893. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

1894. $\int \frac{x^2dx}{(x^2+2x+2)^2}$.

1895. $\int \frac{dx}{(x^4+1)^2}$.

1896. $\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}dx$.

1897. $\int \frac{dx}{(x^4-1)^3}$.

Aşağıdakı inteqralların cəbri hissəsini ayırın:

1898. $\int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}dx$.

1899. $\int \frac{dx}{(x^3+x+1)^3}$.

1900. $\int \frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2}dx$.

1901. İnteqralı tapın:

$$\int \frac{dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}.$$

1902. Hansı şərt daxilində

$$\int \frac{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{(ax^2+2bx+c)^2}dx$$

inteqralı rasional funksiya olar?

Müxtəlif üsullar tətbiq etməklə aşağıdakı inteqralları tapın:

1903. $\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}dx.$

1904. $\int \frac{xdx}{x^8-1}.$

1905. $\int \frac{x^3dx}{x^8+3}.$

1906. $\int \frac{x^2+x}{x^6+1}dx.$

1907. $\int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}dx.$

1908. $\int \frac{x^4dx}{(x^{10}-10)^2}.$

1909. $\int \frac{x^{11}dx}{x^8+3x^4+2}.$

1910. $\int \frac{x^9dx}{(x^{10}+2x^5+2)^2}.$

1911. $\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}dx.$

1912. $\int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}dx.$

1913. $\int \frac{dx}{x(x^{10}+2)}.$

1914. $\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2}.$

1915. $\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)}dx.$

1916. $\int \frac{x^4-1}{x(x^4-5)(x^5-5x+1)}dx.$

1917. $\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx.$

1918. $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1}dx.$

1919. $\int \frac{x^5-x}{x^8+1}dx.$

1920. $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}dx.$

1921. $$I_n = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} \qquad (a \neq 0)$$

inteqralını hesablamaq üçün rekurrent düstur çıxarın. Bu düsturdan istifadə edərək

$$I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^3}$$

inteqralını hesablayın.

Göstəriş. $4a(ax^2+bx+c)=(2ax+b)^2+(4ac-b^2)$ eyniliyindən istifadə edin.

1922. $t=\frac{x+a}{x+b}$ əvəzləməsini aparmaqla $I=\int \frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n}$ inteqralını hesablayın (m və n - natural ədədlərdir).

Bu əvəzləmədən istifadə edərək $\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3}$ inteqralını tapın.

1923. $\int \frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}}dx$ inteqralını hesablayın, burada $P_n(x)$ x-ə görə n dərəcəli çoxhədlidir.

Göstəriş. Teylor düsturunu tətbiq edin.

1924. Tutaq ki, $R(x)=R^{*}(x^2)$, burada R^{*} - rasional funksiyadır. $R(x)$ funksiyasının rasional kəsrlərə ayrılışı hansı xüsusiyyətlərə malikdir?

1925. $\int \frac{dx}{1+x^{2n}}$ inteqralını hesablayın, burada n - natural ədəddir.

§3. İrrasional funksiyaların inteqrallanması

İnteqralaltı funksiyaları rasional funksiyaya gətirərək aşağıdakı inteqralları tapın:

1926. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

1927. $\int \frac{dx}{x\left(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}$.

1928. $\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx$.

1929. $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$.

1930. $\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^3\sqrt{x}}$.

1931. $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$.

1932. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

1933. $\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}$ $(a>0)$.

1934. $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}$ (n - natural ədəddir).

1935. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$.

G ö s t ə r i ş. $x=\left(\frac{u^2-1}{2u}\right)^2$ qəbul etməli.

1936. $p+q=kn$ (k - tam ədəddir) olarsa,

$$\int R\left[x,(x-a)^{\frac{p}{n}}\ (x-b)^{\frac{q}{n}}\right]dx$$

inteqralının elementar funksiya olduğunu isbat edin, burada R - rasional funksiyadır və p, q, n - tam ədədlərdir.

İrrasional ifadələrin inteqralını tapın:

1937. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}dx$.

1938. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

1939. $\int \frac{dx}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}$.

1940. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}dx$.

1941. $\int \frac{xdx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}$.

1942. $\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$.

$y=\sqrt{ax^2+bx+c}$, $P_n(x)$ - n dərəcəli çoxhədli, $Q_{n-1}(x)$ - $(n-1)$ dərəcəli çoxhədli və λ - ədəd olduqda

$$\int \frac{P_n(x)}{y}dx = Q_{n-1}(x)y+\lambda\int\frac{dx}{y}$$

düsturunu tətbiq etməklə aşağıdakı inteqralları tapın:

1943. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx$.

1944. $\int \frac{x^{10}dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

1945. $\int x^4\sqrt{a^2-x^2}dx$.

1946. $\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx$.

1947. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$.

1948. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$.

1949. $\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}$.

1950. $\int \frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}$.

1951. Hansı şərt daxilində

$$\int \frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

inteqralı cəbri funksiya olar?

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ rasional funksiyasını sadə kəsrlərə ayırmaqla $\int \frac{P(x)}{Q(x)\,y}dx$ inteqralını tapın, burada $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$:

1952. $\int \frac{xdx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}$.

1953. $\int \frac{xdx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}}$.

1954. $\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}dx$.

1955. $\int \frac{x^3}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}dx$.

1956. $\int \frac{xdx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}$.

1957. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

1958. $\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}$.

1959. $\int \frac{dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^2}}$.

1960. $\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}dx$.

Kvadrat üçhədlini kanonik şəklə gətirməklə aşağıdakı inteqralları hesablayın:

1961. $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$.

1962. $\int \frac{x^2dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$.

1963. $\int \frac{(x+1)dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

1964. $x=\frac{\alpha+\beta t}{1+t}$ kəsr-xətti əvəzləməsinin köməyi ilə

$$\int \frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

inteqralını hesablayın.

1965. Tapın:

$$\int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}.$$

1) $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+z$, $a>0$ olduqda;

2) $\sqrt{ax^2+bx+c}=xz\pm\sqrt{c}$, $c>0$ olduqda;

3) $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=z(x-x_1)$

Eyler əvəzləmələrini tətbiq etməklə aşağıdakı inteqralları tapın:

1966. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

1967. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

1968. $\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$.

1969. $\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx$.

1970. $\int \frac{dx}{\left[1+\sqrt{x(1+x)}\right]^2}$.

Müxtəlif üsullar tətbiq etməklə aşağıdakı inteqralları tapın:

1971. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$.

1972. $\int \frac{xdx}{(1-x^3)\sqrt{1-x^2}}$.

1973. $\int \frac{dx}{\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}$.

1974. $\int \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}dx$.

1975. $\int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}dx$.

1976. $\int \frac{(x^2-1)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}$.

1977. $\int \frac{(x^2+1)dx}{(x^2-1)\sqrt{x^4+1}}$.

1978. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}}$.

1979. $\int \frac{(x^2+1)dx}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}$.

1980. İsbat edin ki, R - rasional funksiya olduqda

$$\int R\left(x,\ \sqrt{ax+b},\ \sqrt{cx+d}\right)dx$$

inteqralının tapılması rasional funksiyanın inteqrallanmasına gətirilir.

Diferensial binomdan asılı

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$$

inteqralı yalnız aşağıdakı üç halda rasional funksiyanın inteqrallanmasına gətirilə bilər, burada m, n və p - rasional ədədlərdir (*Çebışev teoremi*):

1-ci hal. Tutaq ki, p - tamdır, onda $x=z^N$ qəbul edilir, burada N ədədi m və n kəsrlərinin ortaq məxrəcidir.

2-ci hal. Tutaq ki, $\frac{m+1}{n}$ - tamdır, onda $a+bx^n=z^N$ qəbul edilir, burada N ədədi p kəsrinin məxrəcidir.

3-cü hal. Tutaq ki, $\frac{m+1}{n}+p$ - tamdır, onda $ax^{-n}+b=z^N$ əvəzləməsi tətbiq edilir, burada N ədədi p kəsrinin məxrəcidir.

Əgər $n=1$ olarsa, onda bu hallar aşağıdakılara ekvivalentdir:
1) p - tamdır; 2) m - tamdır; 3) $m+p$ - tamdır.

Aşağıdakı inteqralları hesablayın:

1981. $\int\sqrt{x^3+x^4}\,dx.$

1982. $\int\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}dx.$

1983. $\int\frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}.$

1984. $\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

1985. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$

1986. $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$

1987. $\int\frac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^6}}.$

1988. $\int\frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}.$

1989. $\int\sqrt[3]{3x-x^3}\,dx.$

1990. Hansı halda

$$\int\sqrt{1+x^m}\,dx$$

(m - rasional ədəddir) inteqralı elementar funksiya olar?

§ 4. Triqonometrik funksiyaların inteqrallanması

$$\int\sin^m x\cos^n x\,dx$$

şəklində olan inteqrallar eynilik çevirmələrinin köməyi və ya dərəcəni azaltma düsturlarının tətbiqi ilə hesablanır, burada m və n - tam ədədlərdir.

İnteqralları tapın:

1991. $\int \cos^5 x\,dx.$

1992. $\int \sin^6 x\,dx.$

1993. $\int \cos^6 x\,dx.$

1994. $\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx.$

1995. $\int \sin^4 x\cos^5 x\,dx.$

1996. $\int \sin^5 x\cos^5 x\,dx.$

1997. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx.$

1998. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}dx.$

1999. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}.$

2000. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}.$

2001. $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}.$

2002. $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x}.$

2003. $\int \frac{dx}{\sin x\cos^4 x}.$

2004. $\int \mathrm{tg}^5 x\,dx.$

2005. $\int \mathrm{ctg}^6 x\,dx.$

2006. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}dx.$

2007. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}}.$

2008. $\int \frac{dx}{\cos x\sqrt[3]{\sin^2 x}}.$

2009. $\int \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{tg}\,x}}.$

2010. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\mathrm{tg}\,x}}.$

2011. *a*) $I_n = \int \sin^n x\,dx$; *b*) $K_n = \int \cos^n x\,dx \quad (n > 2)$

inteqralları üçün dərəcəni azaltma düsturunu çıxarın və onun köməyi ilə aşağıdakı inteqralları hesablayın:

$$\int \sin^6 x\,dx \quad \text{və} \quad \int \cos^8 x\,dx.$$

2012. *a*) $I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}$; *b*) $K_n = \int \frac{dx}{\cos^n x} \quad (n>2)$

inteqralları üçün dərəcəni azaltma düsturunu çıxarın və onun köməyi ilə aşağıdakı inteqralları hesablayın:

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x} \quad \text{və} \quad \int \frac{dx}{\cos^7 x}.$$

Növbəti inteqrallar

I. $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right],$

II. $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right],$

III. $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right]$

düsturlarının köməyi ilə hesablanır.

İnteqralları tapın:

2013. $\int \sin 5x \cos x\,dx$.

2014. $\int \cos x \cos 2x \cos 3x\,dx$.

2015. $\int \sin x \sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}\,dx$.

2016. $\int \sin x \sin(x+a)\sin(x+b)\,dx$.

2017. $\int \cos^2 ax \cos^2 bx\,dx$.

2018. $\int \sin^3 2x \cdot \cos^2 3x\,dx$.

Növbəti inteqrallar

$$\sin(\alpha-\beta) \equiv \sin[(x+\alpha)-(x+\beta)],$$
$$\cos(\alpha-\beta) \equiv \cos[(x+\alpha)-(x+\beta)]$$

eyniliklərini tətbiq etməklə hesablanır.

İnteqralları tapın:

2019. $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$.

2020. $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$.

2021. $\int \frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$.

2022. $\int \frac{dx}{\sin x - \sin a}$.

2023. $\int \frac{dx}{\cos x + \cos a}$.

2024. $\int \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+a)\,dx$.

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$$

şəklində olan inteqrallar ümumi halda $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ əvəzləməsinin köməyi ilə rasional funksiyaların inteqrallanmasına gətirilir, burada R - rasional funksiyadır.

a) Əgər

$$R(-\sin x, \cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$$

və ya

$$R(\sin x, -\cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$$

olarsa, onda $\cos x = t$ və ya uyğun olaraq $\sin x = t$ əvəzləməsini tətbiq etmək əlverişlidir.

b) Əgər

$$R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x)$$

olarsa, onda $\operatorname{tg} x = t$ əvəzləməsini tətbiq etmək əlverişlidir.

İnteqralları tapın:

2025. $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$.

2026. $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$.

2027. $\int \frac{\sin^2 x}{\sin x + 2\cos x}\,dx$.

2028. $\int \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$;

a) $0<\varepsilon<1$; *b)* $\varepsilon>1$.

2029. $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,dx$.

2030. $\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$.

2031. $\int \frac{\cos^2 x\,dx}{(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)^2}$.

2032. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$.

2033. $\int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^2}$.

2034. $\int \frac{\sin x\,dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$.

2035. $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

2036. $\int \frac{\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^8 x + \cos^8 x}dx$.

2037. $\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx$.

2038. $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx$.

2039. $\int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}$.

2040. $\int \frac{dx}{(\sin^2 x + 2\cos^2 x)^2}$.

2041. Məxrəci loqarifmik şəklə gətirməklə

$$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x}$$

inteqralını tapın.

2042. İsbat edin ki,

$$\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{a\sin x + b\cos x}dx = Ax + B\ln\left|a\sin x + b\cos x\right| + C,$$

burada A, B, C - sabitlərdir.

G ö s t ə r i ş. $a_1\sin x + b_1\cos x = A(a\sin x + b\cos x) + B(a\cos x - b\sin x)$ götürün, burada A və B - sabitlərdir.

İnteqralları tapın:

2043. $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x}dx$.

2043.1. $\int \frac{\sin x}{\sin x - 3\cos x}dx$.

2044. $\int \frac{dx}{3+5\operatorname{tg} x}$.

2045. $\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^2}dx$.

2046. İsbat edin ki,

$$\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x + c_1}{a\sin x + b\cos x + c}dx = Ax + B\ln\left|a\sin x + b\cos x + c\right| + C\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c},$$

burada A, B, C - müəyyən sabit əmsallardır.

İnteqralları tapın:

2047. $\int \frac{\sin x + 2\cos x - 3}{\sin x - 2\cos x + 3}dx$.

2048. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2} + \sin x + \cos x}dx$.

2049. $\int \frac{2\sin x + \cos x}{3\sin x + 4\cos x - 2}dx$.

2050. İsbat edin ki,

$$\int \frac{a_1\sin^2 x + 2b_1\sin x\cos x + c_1\cos^2 x}{a\sin x + b\cos x}dx = A\sin x + B\cos x + C\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x},$$

burada A, B, C - sabit əmsallardır.

İnteqralları tapın:

2051. $\int \frac{\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x}{\sin x + \cos x}dx.$

2052. $\int \frac{\sin^2 x - \sin x\cos x + 2\cos^2 x}{\sin x + 2\cos x}dx.$

2053. İsbat edin ki, $(a-c)^2 + b^2 \neq 0$ olduqda

$$\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{a\sin^2 x + 2b\sin x\cos x + c\cos^2 x}dx = A\int \frac{du_1}{k_1u_1^2 + \lambda_1} + B\int \frac{du_2}{k_2u_2^2 + \lambda_2},$$

burada A, B - qeyri-müəyyən əmsallardır, λ_1, λ_2 -

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2)$$

tənliyinin kökləridir, $u_i = (a-\lambda_i)\sin x + b\cos x$ və $k_i = \frac{1}{a-\lambda_i}$ $(i = 1,\, 2)$.

İnteqralları tapın:

2054. $\int \frac{2\sin x - \cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}dx.$

2055. $\int \frac{(\sin x + \cos x)dx}{2\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x}.$

2056. $\int \frac{\sin x - 2\cos x}{1 + 4\sin x\cos x}dx.$

2057. İsbat edin ki,

$$\int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^n} = \frac{A\sin x + B\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^{n-1}} + C\int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^{n-2}},$$

burada A, B, C - qeyri-müəyyən əmsallardır.

2058. İnteqralı hesablayın:

$$\int \frac{dx}{(\sin x + 2\cos x)^3}.$$

2059. İsbat edin ki,

$$\int \frac{dx}{(a + b\cos x)^n} = \frac{A\sin x}{(a + b\cos x)^{n-1}} + B\int \frac{dx}{(a + b\cos x)^{n-1}} +$$

$$+ C\int \frac{dx}{(a + b\cos x)^{n-2}} \qquad (|a| \neq |b|)$$

və n vahiddən böyük natural ədəd olduqda A, B və C əmsallarını təyin edin.

İnteqralları tapın:

2060. $\int \frac{\sin x dx}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}$.

2061. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x}} dx$.

2062. $\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{2+\sin 2x}}$.

2063. $\int \frac{dx}{(1+\varepsilon\cos x)^2}$ $(0<\varepsilon<1)$.

2064. $\int \frac{\cos^{n-1}\frac{x+a}{2}}{\sin^{n+1}\frac{x-a}{2}} dx$.

G ö s t ə r i ş. $t=\frac{\cos\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}$ qəbul edin.

2065.
$$I_n=\int\left(\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}\right)^n dx$$

inteqralı üçün dərəcəni azaltma düsturunu çıxarın (n - natural ədəddir).

§5. Müxtəlif transendent funksiyaların inteqrallanması

2066. İsbat edin ki, əgər $P(x)$ - n dərəcəli çoxhədlidirsə, onda

$$\int P(x)e^{ax}\,dx=e^{ax}\left[\frac{P(x)}{a}-\frac{P'(x)}{a^2}+\ldots+(-1)^n\frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right]+C.$$

2067. İsbat edin ki, əgər $P(x)$ - n dərəcəli çoxhədlidirsə, onda

$$\int P(x)\cos ax\,dx=$$
$$=\frac{\sin ax}{a}\left[P(x)-\frac{P''(x)}{a^2}+\frac{P^{\mathrm{IV}}(x)}{a^4}-\ldots\right]+$$
$$+\frac{\cos ax}{a^2}\left[P'(x)-\frac{P'''(x)}{a^2}+\frac{P^{\mathrm{V}}(x)}{a^4}-\ldots\right]+C$$

və

$$\int P(x)\sin ax\,dx=$$
$$=-\frac{\cos ax}{a}\left[P(x)-\frac{P''(x)}{a^2}+\frac{P^{\mathrm{IV}}(x)}{a^4}-\ldots\right]+$$
$$+\frac{\sin ax}{a^2}\left[P'(x)-\frac{P'''(x)}{a^2}+\frac{P^{\mathrm{V}}(x)}{a^4}-\ldots\right]+C.$$

İnteqralları tapın:

2068. $\int x^3e^{3x}\,dx.$

2069. $\int (x^2-2x+2)e^{-x}\,dx.$

2070. $\int x^5\sin 5x\,dx.$

2071. $\int (1+x^2)^2\cos x\,dx.$

2072. $\int x^7e^{-x^2}\,dx.$

2073. $\int x^2e^{\sqrt{x}}\,dx.$

2074. $\int e^{ax}\cos^2 bx\,dx.$

2075. $\int e^{ax}\sin^3 bx\,dx.$

2076. $\int xe^x\sin x\,dx.$

2077. $\int x^2e^x\cos x\,dx.$

2078. $\int xe^x\sin^2 x\,dx.$

2079. $\int (x-\sin x)^3\,dx.$

2080. $\int \cos^2\sqrt{x}\,dx.$

2081. İsbat edin ki, əgər R - rasional funksiya və $a_1, a_2, ..., a_n$ ortaq ölçülü ədədlər olarsa, onda

$$\int R\left(e^{a_1x}, e^{a_2x}, ..., e^{a_nx}\right)dx$$

inteqralı elementar funksiyadır.

Aşağıdakı inteqralları tapın:

2082. $\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}.$

2083. $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx.$

2084. $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x-2}.$

2085. $\int \frac{dx}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}.$

2086. $\int \frac{1+e^{\frac{x}{2}}}{\left(1+e^{\frac{x}{4}}\right)^2}\,dx.$

2087. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}.$

2088. $\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}\,dx.$

2089. $\int \sqrt{e^{2x}+4e^x-1}\,dx.$

2090. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}.$

2091. İsbat edin ki,

$$\int R(x)e^{ax}\,dx$$

(burada R - məxrəci yalnız həqiqi köklərə malik olan rasional funksiyadır) inteqralı elementar funksiyalar və transendent

$$\int \frac{e^{ax}}{x}dx = \mathrm{li}\left(e^{ax}\right)+C$$

funksiyası vasitəsi ilə ifadə olunur, burada

$$\mathrm{li}\,x = \int \frac{dx}{\ln x}.$$

2092. Hansı halda

$$\int P\left(\frac{1}{x}\right)e^x\,dx$$

inteqralı elementar funksiya olar, burada $P\left(\frac{1}{x}\right)=a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}$ və a_0, a_1, ..., a_n - sabitlərdir?

İnteqralları tapın:

2093. $\int\left(1-\frac{2}{x}\right)^2 e^x\,dx.$

2094. $\int\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{-x}\,dx.$

2095. $\int\frac{e^{2x}}{x^2-3x+2}dx.$

2096. $\int\frac{xe^x}{(x+1)^2}dx.$

2097. $\int\frac{x^4e^{2x}}{(x-2)^2}dx.$

ln $f(x)$, arctg $f(x)$, arcsin $f(x)$, arccos $f(x)$ funksiyaları daxil olan aşağıdakı inteqralları tapın, burada $f(x)$ - cəbri funksiyadır:

2098. $\int\ln^n x\,dx$ (n - natural ədəddir).

2099. $\int x^3\ln^3 x\,dx.$

2100. $\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)^3 dx.$

2101. $\int\ln\left[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}\right]\cdot\frac{dx}{(x+a)(x+b)}.$

2102. $\int\ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx.$

2103. $\int\ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)dx.$

2104. $\int\frac{\ln x}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx.$

2105. $\int x\,\mathrm{arctg}(x+1)\,dx.$

2106. $\int\sqrt{x}\,\mathrm{arctg}\sqrt{x}\,dx.$

2107. $\int x\arcsin(1-x)\,dx.$

2108. $\int\arcsin\sqrt{x}\,dx.$

2109. $\int x\arccos\frac{1}{x}dx.$

2110. $\int\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}dx.$

2111. $\int\frac{\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx.$

2112. $\int\frac{x\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx.$

2113. $\int x\,\mathrm{arctg}\,x\ln(1+x^2)\,dx.$

2114. $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx.$

2115. $\int\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$

Hiperbolik funksiyalar daxil olan inteqralları tapın:

2116. $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x\,dx$.

2117. $\int \operatorname{ch}^4 x\,dx$.

2118. $\int \operatorname{sh}^3 x\,dx$.

2119. $\int \operatorname{sh} x \operatorname{sh} 2x \operatorname{sh} 3x\,dx$.

2120. $\int \operatorname{th} x\,dx$.

2121. $\int \operatorname{cth}^2 x\,dx$.

2122. $\int \sqrt{\operatorname{th} x}\,dx$.

2123. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x + 2\operatorname{ch} x}$.

2123.1. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x - 4\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x + 9\operatorname{ch}^2 x}$.

2123.2. $\int \frac{dx}{0{,}1 + \operatorname{ch} x}$.

2123.3. $\int \frac{\operatorname{ch} x\,dx}{3\operatorname{sh} x - 4\operatorname{ch} x}$.

2124. $\int \operatorname{sh} ax \sin bx\,dx$.

2125. $\int \operatorname{sh} ax \cos bx\,dx$.

§6. Funksiyaların inteqrallanmasına aid müxtəlif misallar

İnteqralları tapın:

2126. $\int \frac{dx}{x^6(1+x^2)}$.

2127. $\int \frac{x^2 dx}{(1-x^2)^3}$.

2128. $\int \frac{dx}{1+x^4+x^8}$.

2129. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

2130. $\int x^2\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$.

2131. $\int \frac{x+2}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

2132. $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\,dx$.

2133. $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

2134. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$.

2135. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3+x^6}}$.

2136. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-2x^2-1}}$.

2137. $\int \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

2138. $\int \frac{(1+x)\,dx}{x+\sqrt{x+x^2}}$.

2139. $\int \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2}\,dx$.

2140. $\int (2x+3)\arccos(2x-3)\,dx$.

2141. $\int x\ln(4+x^4)\,dx$.

2142. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

2143. $\int \frac{x\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

2144. $\int x\sqrt{x^2+1}\ln\sqrt{x^2-1}\,dx$.

2145. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx$.

2146. $\int \frac{dx}{(2+\sin x)^2}$.

2147. $\int \frac{\sin 4x}{\sin^8 x+\cos^8 x}\,dx$.

2148. $\int \frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}$.

2149. $\int \frac{ax^2+b}{x^2+1}\operatorname{arctg} x\,dx$.

2150. $\int \frac{ax^2+b}{x^2-1}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|dx$.

2151. $\int \frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}dx$.

2152. $\int \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

2153. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}dx$.

2154. $\int \frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

2155. $\int \frac{x^4\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$.

2156. $\int \frac{x\operatorname{arcctg} x}{(1+x^2)^2}dx$.

2157. $\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2}dx$.

2158. $\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x\,dx$.

2159. $\int x(1+x^2)\operatorname{arcctg} x\,dx$.

2160. $\int x^x(1+\ln x)\,dx$.

2161. $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx$.

2162. $\int \frac{\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}\left(1+e^x\right)}dx$.

2163. $\int \frac{dx}{(e^{x+1}+1)^2-(e^{x-1}+1)^2}$.

2164. $\int \sqrt{\operatorname{th}^2 x+1}\,dx$.

2165. $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\cdot e^x\,dx$.

2166. $\int |x|dx$.

2167. $\int x|x|dx$.

2168. $\int \left(x+|x|\right)^2 dx$.

2169. $\int \left\{|1+x|-|1-x|\right\}dx$.

2170. $\int e^{-|x|}dx$.

2171. $\int \max\left(1,\ x^2\right)dx$.

2172. $\int \varphi(x)\,dx$, burada $\varphi(x)$ - x ədədindən bu ədədə yaxın tam ədədə qədər olan məsafədir.

2173. $\int [x]\left|\sin \pi x\right|dx \qquad (x \ge 0)$.

2174. $\int f(x)dx$, burada $f(x)=\begin{cases} 1-x^2, & |x|\le 1 \text{ olduqda;} \\ 1-|x|, & |x|>1 \text{ olduqda.}\end{cases}$

2175. $\int f(x)dx$, burada $f(x)=\begin{cases} 1, & -\infty<x<0 \text{ olduqda;} \\ x+1, & 0\le x\le 1 \text{ olduqda;} \\ 2x, & 1<x<+\infty \text{ olduqda.}\end{cases}$

2176. Tapın: $\int x\,f''(x)\,dx$.

2177. Tapın: $\int f'(2x)\,dx$.

2178. $f'(x^2)=\frac{1}{x}$ $(x>0)$ olarsa, $f(x)$-i tapın.

2179. $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x$ olarsa, $f(x)$-i tapın.

2180. Əgər

$$f'(\ln x)=\begin{cases} 1, & 0<x\leq 1 \quad \text{olduqda;} \\ x, & 1<x<+\infty \quad \text{olduqda} \end{cases}$$

və $f(0)=0$ olarsa, $f(x)$-i tapın.

2180.1. Tutaq ki, $f(x)$ - monoton kəsilməz funksiyadır və $f^{-1}(x)$ - onun tərs funksiyasıdır. İsbat edin ki, əgər

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C$$

olarsa, onda

$$\int f^{-1}(x)\,dx=xf^{-1}(x)-F\left(f^{-1}(x)\right)+C.$$

Misallara baxın: *a)* $f(x)=x^n$ $(n>0)$; *b)* $f(x)=e^x$;
c) $f(x)=\arcsin x$; *d)* $f(x)=\operatorname{Arth} x$.

IV BÖLMƏ

MÜƏYYƏN İNTEQRAL

§ 1. Müəyyən inteqral cəmin limiti kimi

1^0. **Riman mənada inteqral.** Əgər $f(x)$ funksiyası $[a,b]$-də təyin olunubsa və $a=x_0<x_1<x_2...<x_n=b$ olarsa, onda

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (1)$$

ədədinə $f(x)$ funksiyasının $[a,b]$ parçasında *inteqralı* deyilir, burada $x_i\le\xi_i\le x_{i+1}$ və $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$.

(1) inteqralının varlığı üçün

$$\underline{S}=\sum_{i=0}^{n-1} m_i\,\Delta x_i$$

aşağı inteqral cəminin və

$$\overline{S}=\sum_{i=0}^{n-1} M_i\,\Delta x_i$$

yuxarı inteqral cəminin $\max|\Delta x_i|\to 0$ olduqda eyni limitinin olması zəruri və kafi şərtdir, burada

$$m_i=\inf_{x_i\le x\le x_{i+1}} f(x) \text{ və } M_i=\sup_{x_i\le x\le x_{i+1}} f(x).$$

$f(x)$ funksiyası üçün (1) bərabərliyinin sağ tərəfindəki limit varsa, onda $f(x)$-ə $[a,b]$ parçasında (məxsusi) *inteqrallanan* funksiya deyilir. Xüsusi halda, *a*) kəsilməz funksiya; *b*) sonlu sayda kəsilmə nöqtəsi olan məhdud funksiya; *c*) məhdud monoton funksiya - istənilən sonlu parçada inteqrallanandır. Əgər $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında məhdud deyilsə, onda o, $[a,b]$ parçasında məxsusi inteqrallanan deyil.

2^0. **İnteqrallanma şərti.** $f(x)$ funksiyasının verilən $[a,b]$ parçasında inteqrallanan olması üçün

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\,\Delta x_i=0$$

bərabərliyinin ödənilməsi zəruri və kafi şərtdir, burada $\omega_i=(M_i-m_i)$ ədədi $[x_i,\ x_{i+1}]$ parçasında $f(x)$ funksiyasının rəqsidir.

2181. $[-1,4]$ parçasını n bərabər parçaya bölməklə və ξ_i $(i=0,1,...,n-1)$ arqumentinin qiymətləri olaraq bu parçaların ortalarını götürməklə

$$f(x)=1+x$$

funksiyası üçün S_n inteqral cəmini tapın.

2182. Aşağıdakı $f(x)$ funksiyası üçün $\underline{S}_n$ aşağı və $\overline{S}_n$ yuxarı inteqral cəmlərini uyğun parçaları n bərabər hissələrə bölməklə tapın:

$a)\quad f(x)=x^3,\qquad [-2\le x\le 3];$

$b)\quad f(x)=\sqrt{x},\qquad [0\le x\le 1];$

$c)\quad f(x)=2^x,\qquad [0\le x\le 10].$

2183. $f(x)=x^4$ funksiyası üçün aşağı inteqral cəmini $[1,2]$ parçasını uzunluqları həndəsi silsilə əmələ gətirən n hissəyə bölməklə tapın. $n\to\infty$ olduqda bu cəmin limiti nəyə bərabərdir?

2184. İnteqralın tərifindən istifadə edərək

$$\int_0^T (v_0+gt)\,dt$$

inteqralını tapın, burada v_0 və g - sabitlərdir.

Aşağıdakı müəyyən inteqralları inteqrallama parçasını məlum qaydada bölməklə düzələn uyğun inteqral cəminin limiti kimi hesablayın:

2185. $\int_{-1}^{2} x^2\,dx.$

2186. $\int_0^1 a^x\,dx \quad (a>0).$

2187. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx.$

2188. $\int_0^x \cos t\,dt.$

2189. $\int_a^b \frac{dx}{x^2} \quad (0<a<b).$

Göstəriş. $\xi_i=\sqrt{x_i x_{i+1}}\ (i=0,1,\dots,n)$ götürün.

2190. $\int_a^b x^m\,dx \quad (0<a<b;\ m\ne -1).$

Göstəriş. Bölgü nöqtələrini elə seçin ki, onların x_i absisləri həndəsi silsilə əmələ gətirsin.

2191. $\int_a^b \frac{dx}{x} \quad (0<a<b).$

2192. $\int_0^{\pi} \ln\left(1-2\alpha\cos x+\alpha^2\right)dx$ Puasson inteqralını $a)\ |\alpha|<1;\ b)\ |\alpha|>1$ olduqda hesablayın.

Göstəriş. $\alpha^{2n}-1$ çoxhədlisinin kvadratik vuruqlara ayrılışından istifadə edin.

2193. Tutaq ki, $f(x)$ və $\varphi(x)$ funksiyaları $[a,b]$-də kəsilməzdir. İsbat edin ki,

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\varphi(\theta_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx,$$

burada $x_i\le\xi_i\le x_{i+1}$, $x_i\le\theta_i\le x_{i+1}$, $(i=0,1,\ldots,n-1)$ və $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$ $(x_0=a,\ x_n=b)$.

2193.1. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[0,\ 1]$-də monoton və məhduddur. İsbat edin ki,

$$\int_0^1 f(x)\,dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

2193.2. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a,b]$-də məhdud və yuxarıya doğru qabarıqdır (bax: 1312).

İsbat edin ki,

$$(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}\le\int_a^b f(x)\,dx\le(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

2193.3. Tutaq ki, $f(x)\in C^{(2)}[1,\ +\infty)$ və $x\in[1,\ +\infty)$ olduqda $f(x)\ge 0$, $f'(x)\ge 0$, $f''(x)\le 0$. İsbat edin ki, $n\to\infty$ olduqda

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)=\frac{1}{2}f(n)+\int_1^n f(x)\,dx+O(1).$$

2193.4. Tutaq ki, $f(x)\in C^{(1)}$ $[a,b]$ və

$$\Delta_n=\int_a^b f(x)\,dx-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\cdot\frac{b-a}{n}\right).$$

$\lim\limits_{n\to\infty} n\Delta_n$-i tapın.

2194. Göstərin ki, kəsilən

$$f(x)=\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$$

funksiyası $[0,\ 1]$ parçasında inteqrallanandır.

2195. Göstərin ki,

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, & x \text{ irrasional olduqda;}\\ \dfrac{1}{n}, & x=\dfrac{m}{n} \text{ olduqda}\end{cases}$$

Riman funksiyası istənilən sonlu parçada inteqrallanandır, burada m və n $(n\ge 1)$ - qarşılıqlı sadə tam ədədlərdir.

2196. Göstərin ki,

$$f(x)=\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right],\ x\neq 0 \text{ olduqda və } f(0)=0$$

funksiyası [0, 1] parçasında inteqrallanandır.

2197. İsbat edin ki,

$$\chi(x)=\begin{cases} 0, & x \text{ irrasional olduqda;} \\ 1, & x \text{ rasional olduqda} \end{cases}$$

Dirixle funksiyası istənilən parçada inteqrallanan deyil.

2198. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a,b]$-də inteqrallanandır və

$$x_i \le x < x_{i+1} \text{ olduqda } f_n(x)=\sup f(x),$$

burada $x_i = a+\frac{i}{n}(b-a)$ $\quad (i=0, 1, \ldots, n;\ n=1, 2, \ldots)$.

İsbat edin ki,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx.$$

2199. İsbat edin ki, əgər $f(x)$ funksiyası $[a,b]$-də inteqrallanandırsa, onda elə kəsilməz $\varphi_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ funksiyalar ardıcıllığı var ki, $a\le c\le b$ olduqda

$$\int_a^c f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^c \varphi_n(x)\,dx.$$

2200. İsbat edin ki, əgər məhdud $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında inteqrallanandırsa, onda onun $|f(x)|$ mütləq qiymətı də $[a,b]$-də inteqrallanandır və

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\le\int_a^b |f(x)|\,dx.$$

2201. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında mütləq inteqrallanandır, yəni $\int_a^b |f(x)|\,dx$ inteqralı var. Bu funksiya $[a,b]$-də inteqrallanandırmı?

Misala baxın:

$$f(x)=\begin{cases} 1, & x \text{ rasional olduqda;} \\ -1, & x \text{ irrasional olduqda.} \end{cases}$$

2202. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a,b]$-də inteqrallanandır, $a\le x\le b$ olduqda $A\le f(x)\le B$ və $\varphi(x)$ funksiyası isə $[A,B]$ parçasında kəsilməzdir. İsbat edin ki, $\varphi(f(x))$ funksiyası $[a,b]$-də inteqrallanandır.

2203. Əgər $f(x)$ və $\varphi(x)$ funksiyaları inteqrallanandırlarsa, onda $f(\varphi(x))$ funksiyası da inteqrallanandırmı?

Misala baxın:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x=0 \text{ olduqda}; \\ 1, & x\neq 0 \text{ olduqda} \end{cases}$$

və $\varphi(x)$ - Riman funksiyasıdır (bax məsələ 2195-ə).

2204. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[A,B]$ parçasında inteqrallanandır. İsbat edin ki, $f(x)$ funksiyası *inteqral kəsilməzliyi* xassəsinə malikdir, yəni

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b \left| f(x+h)-f(x)\right| dx = 0,$$

burada $[a,b]\subset[A,B]$.

2205. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında inteqrallanandır. İsbat edin ki,

$$\int_a^b f^2(x)\,dx = 0$$

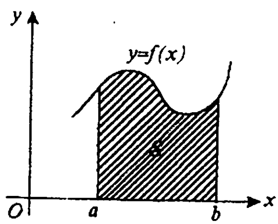
bərabərliyi yalnız və yalnız o vaxt doğrudur ki, $f(x)$ funksiyasının $[a,b]$ parçasında kəsilməz olduğu bütün nöqtələrdə $f(x)=0$ olsun.

§2. Qeyri-müəyyən inteqralın köməyi ilə müəyyən inteqralın hesablanması

1^0. N y u t o n - L e y b n i s d ü s t u r u. Əgər $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməzdirsə və $F(x)$ - onun *ibtidai funksiyasıdırsa*, yəni $F'(x)=f(x)$ olarsa, onda

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b .$$

$f(x)\geq 0$ olduqda $\int_a^b f(x)\,dx$ müəyyən inteqralı həndəsi olaraq $y=f(x)$ əyrisi, Ox oxu və Ox oxuna perpendikulyar $x=a$, $x=b$ xətləri ilə hüdudlanan əyrixətli trapesiyanın S sahəsini verir (şək. 9).



Şək. 9.

2°. Hissə-hissə inteqrallama düsturu. Əgər $f(x)$, $g(x) \in C^{(1)}[a,b]$ olarsa, onda

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx.$$

3°. Dəyişəni əvəz etmə. Əgər: 1) $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməzdirsə, 2) $\varphi(t)$ funksiyası və onun $\varphi'(t)$ törəməsi $[\alpha,\beta]$ parçasında kəsilməzdirsə, burada $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$, 3) $f(\varphi(t))$ mürəkkəb funksiyası $[\alpha,\beta]$-də kəsilməzdirsə, onda

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Nyuton-Leybnis düsturunu tətbiq edərək aşağıdakı inteqralları hesablayın və uyğun əyrixətli sahələri çəkin:

2206. $\int_{-1}^{8} \sqrt[3]{x}\,dx.$

2207. $\int_0^{\pi} \sin x\,dx.$

2208. $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}.$

2209. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

2210. $\int_{\text{sh}1}^{\text{sh}2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$

2211. $\int_0^2 |1-x|\,dx.$

2212. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-2x\cos\alpha+1} \quad (0<\alpha<\pi).$

2213. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x} \quad (0\le\varepsilon<1).$

2214. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}} \quad (|a|<1,\ |b|<1,\ ab>0).$

2215. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x} \quad (ab\neq 0).$

2216. *a)* $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$; *b)* $\int_0^{2\pi} \frac{\sec^2 x\,dx}{2+\text{tg}^2 x}$; *c)* $\int_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left(\text{arctg}\frac{1}{x}\right)dx$

inteqralları üçün Nyuton-Leybnis düsturunun formal tətbiqinin səhv nəticələrə gətirməsini izah edin.

2217. Tapın: $\int\limits_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx$.

2218. Tapın: $\int\limits_{0}^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx$.

Müəyyən inteqralların köməyi ilə aşağıdakı cəmlərin limitini tapın:

2219. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)$.

2220. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)$.

2221. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$.

2222. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$.

2223. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}$ $(p>0)$.

2224. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$.

2225. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$. **2226.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right]$.

Yüksək tərtibli müntəzəm sonsuz kiçikləri atmaqla aşağıdakı limitləri tapın:

2227. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n^2}+\left(1+\frac{2}{n}\right)\sin\frac{2\pi}{n^2}+\ldots+\right.$
$\left.\ldots+\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\sin\frac{(n-1)\pi}{n^2}\right]$.

2228. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$.

2229. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}}{n^2}$ $(x>0)$.

2230. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\ldots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

2231. Tapın:

$$\frac{d}{dx}\int_a^b \sin x^2\,dx, \qquad \frac{d}{da}\int_a^b \sin x^2\,dx, \qquad \frac{d}{db}\int_a^b \sin x^2\,dx.$$

2232. Tapın:

$$a)\ \frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt; \qquad b)\ \frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}; \qquad c)\ \frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos\left(\pi t^2\right)dt.$$

2233. Tapın:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos x^2\,dx}{x}; \qquad b)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x (\operatorname{arctg} x)^2\,dx}{\sqrt{x^2+1}}; \qquad c)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{x^2}dx\right)^2}{\int_0^x e^{2x^2}dx}.$$

2233. 1. Tutaq ki, $f(x)\in C[0,\ +\infty]$ və $x\to+\infty$ olduqda $f(x)\to A$. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)\,dx$ -i tapın.

2234. İsbat edin ki, $x\to+\infty$ olduqda

$$\int_0^x e^{x^2}dx \sim \frac{1}{2x}e^{x^2}.$$

2235. Tapın:

$$\lim_{x\to+0}\frac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx}{\int_0^{\operatorname{tg} x}\sqrt{\sin x}\,dx}.$$

2236. Tutaq ki, $f(x)$ - müsbət kəsilməz funksiyadır. İsbat edin ki,

$$\varphi(x)=\frac{\int_0^x tf(t)\,dt}{\int_0^x f(t)\,dt}$$

funksiyası $x\ge 0$ olduqda artır.

2237. Tapın:

$$a)\ \int_0^2 f(x)dx, \text{ burada } f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x\le 1 \text{ olduqda}, \\ 2-x, & 1<x\le 2 \text{ olduqda}; \end{cases}$$

b) $\int_0^1 f(x)dx$, burada $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le t \text{ olduqda}, \\ t\cdot\dfrac{1-x}{1-t}, & t\le x\le 1 \text{ olduqda}. \end{cases}$

2238. Əgər:

a) $I=\int_0^1 x|x-\alpha|dx$; b) $I=\int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{1+2\alpha\cos x+\alpha^2}dx$;

c) $I=\int_0^\pi \frac{\sin x dx}{\sqrt{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}}$

olarsa, onlara α-dan asılı funksiya kimi baxaraq $I=I(\alpha)$ inteqrallarını hesablayın və qrafiklərini qurun.

Hissə-hissə inteqrallama düsturunu tətbiq edərək aşağıdakı müəyyən inteqralları tapın:

2239. $\int_0^{\ln 2} xe^{-x}\,dx$.

2240. $\int_0^\pi x\sin x\,dx$.

2241. $\int_0^{2\pi} x^2\cos x\,dx$.

2242. $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\,dx$.

2243. $\int_0^1 \arccos x\,dx$.

2244. $\int_0^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$.

Dəyişəni əvəz etməklə aşağıdakı müəyyən inteqralları tapın:

2245. $\int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$.

2246. $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

2247. $\int_0^{0,75} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$.

2248. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$.

2249. $\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$.

2250. $\int_{-1}^1 \frac{1+x^2}{1+x^4}dx$ inteqralını $x-\frac{1}{x}=t$ götürməklə hesablayın.

2251. Aşağıdakı inteqrallar üçün formal $x=\varphi(t)$ əvəzləməsinin nəyə görə düzgün olmayan nəticəyə gətirdiyini izah edin:

a) $\int_{-1}^1 dx$, burada $t=x^{\frac{2}{3}}$; b) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$, burada $x=\frac{1}{t}$;

c) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$, burada $\operatorname{tg} x = t$.

2252. $\int_0^3 x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$ inteqralında $x=\sin t$ götürmək olarmı?

2253. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ inteqralında dəyişəni $x=\sin t$ kimi əvəz etdikdə yeni sərhədlər π və $\frac{\pi}{2}$ ədədləri ola bilərmi?

2254. İsbat edin ki, $f(x)$ funksiyası $[a,b]$-də kəsilməzdirsə, onda

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\int_0^1 f\big(a+(b-a)x\big)\,dx.$$

2255. Bərabərliyi isbat edin:

$$\int_0^a x^3 f(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)\,dx \qquad (a>0).$$

2256. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[A,B]\supset[a,b]$ parçasında kəsilməzdir. $[a-x,\, b-x]\subset[A,\, B]$ olduqda $\frac{d}{dx}\int_a^b f(x+y)\,dy$-i tapın.

2257. İsbat edin ki, $f(x)$ funksiyası $[0,\ 1]$-də kəsilməzdirsə, onda

$$a)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx;$$

$$b)\ \int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx.$$

2258. İsbat edin ki, $[-l,l]$-də kəsilməz olan $f(x)$ funksiyası üçün aşağıdakı faktlar doğrudur:

1) $f(x)$ funksiyası cütdürsə, onda

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 2\int_0^{l} f(x)\,dx,$$

və

2) $f(x)$ funksiyası təkdirsə,onda

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 0.$$

Bu faktların həndəsi izahını verin.

2259. İsbat edin ki, cüt funksiyanın ibtidai funksiyalarından biri təkdir, tək funksiyanın istənilən ibtidai funksiyası isə cüt funksiyadır.

2260. Yeni $t = x + \frac{1}{x}$ dəyişəni daxil etməklə

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx$$

inteqralını hesablayın.

2261. $\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\, dx$ inteqralında $\sin x = t$ əvəzləməsi aparın.

2262. $\int_{e^{-2\pi n}}^{1} \left| \left[\cos\left(\ln \frac{1}{x}\right)\right]' \right| dx$ inteqralını hesablayın, burada n - natural ədəddir.

2263. Tapın:

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx.$$

2264. $f(x) = \frac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}$ funksiyası üçün

$$\int_{-1}^{3} \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx$$

inteqralını tapın.

2265. İsbat edin ki, $-\infty < x < +\infty$ olduqda kəsilməz olan T periodlu periodik $f(x)$ funksiyası üçün

$$\int_a^{a+T} f(x)\, dx = \int_0^{T} f(x)\, dx,$$

burada a - istənilən ədəddir.

2266. İsbat edin ki, n - tək ədəd olduqda

$$F(x) = \int_0^x \sin^n x\, dx \quad \text{və} \quad G(x) = \int_0^x \cos^n x\, dx$$

periodları 2π olan periodik funksiyalardır; n - cüt olduqda isə bu funksiyaların hər biri xətti və periodik funksiyaların cəmidir.

2267. İsbat edin ki,

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x) dx$$

funksiyası ümumi halda xətti funksiya ilə periodu T olan periodik funksiyanın cəmidir, burada $f(x)$ periodu T olan periodik funksiyadır.

İnteqralları hesablayın:

2268. $\int_0^1 x(2-x^2)^{12}\,dx.$

2269. $\int_{-1}^1 \frac{x\,dx}{x^2+x+1}.$

2270. $\int_1^e (x\ln x)^2\,dx.$

2271. $\int_1^9 x\sqrt[3]{1-x}\,dx.$

2272. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

2273. $\int_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}\,dx.$

2274. $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx.$

2275. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}.$

2276. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}.$

2277. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\sin 2x\sin 3x\,dx.$

2278. $\int_0^{\pi} (x\sin x)^2\,dx.$

2279. $\int_0^{\pi} e^x\cos^2 x\,dx.$

2280. $\int_0^{\ln 2} \operatorname{sh}^4 x\,dx.$

Dərəcəni azaltma düsturlarından istifadə edərək natural n parametrindən asılı olan aşağıdakı inteqralları hesablayın:

2281. $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx.$

2282. $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx.$

2283. $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n} x\,dx.$

2284. $I_n=\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx.$

2285. $I_n=\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

2286. $I_n=\int_0^1 x^m(\ln x)^n\,dx.$

2287. $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)^{2n+1} dx.$

Əgər $f(x)=f_1(x)+if_2(x)$ – x həqiqi dəyişənindən asılı kompleks funksiya olarsa, onda tərifə görə

$$\int f(x)dx = \int f_1(x)dx + i\int f_2(x)dx$$

götürülür, burada $f_1(x) = \operatorname{Re} f(x)$, $f_2(x) = \operatorname{Im} f(x)$ və $i = \sqrt{-1}$. Aydındır ki,

$$\operatorname{Re}\int f(x)dx = \int \operatorname{Re} f(x)dx$$

və

$$\operatorname{Im}\int f(x)dx = \int \operatorname{Im} f(x)dx.$$

2288. $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ Eyler düsturundan istifadə edərək göstərin ki,

$$\int_0^{2\pi} e^{inx}e^{-imx}\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \text{ olduqda,} \\ 2\pi, & m = n \text{ olduqda} \end{cases}$$

(n və m - tam ədədlərdir).

2289. Göstərin ki,

$$\int_a^b e^{(\alpha+i\beta)x}\,dx = \frac{e^{b(\alpha+i\beta)} - e^{a(\alpha+i\beta)}}{\alpha+i\beta} \quad (\alpha \text{ və } \beta \text{ - sabitlərdir}).$$

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right), \qquad \sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

Eyler düsturlarından istifadə edərək aşağıdakı inteqralları hesablayın (n və m - natural ədədlərdir):

2290. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x\cos^{2n} x\,dx.$

2291. $\int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}dx.$

2292. $\int_0^{\pi} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}dx.$

2293. $\int_0^{\pi} \cos^n x\cos nx\,dx.$

2294. $\int_0^{\pi} \sin^n x\sin nx\,dx.$

İnteqralları tapın (n - natural ədəddir):

2295. $\int_0^{\pi} \sin^{n-1} x\cos(n+1)x\,dx.$

2296. $\int_0^{\pi} \cos^{n-1} x\sin(n+1)x\,dx.$

2297. $\int_0^{2\pi} e^{-ax}\cos^{2n} x\,dx.$

2298. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\cdot\cos 2nx\,dx.$

2299. Hissə-hissə inteqrallama düsturunu bir neçə dəfə tətbiq edərək $B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$ *Eyler inteqralını* hesablayın, burada m və n - natural ədədlərdir.

2300. $P_n(x)$ *Lejandr çoxhədlisi* aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right] \qquad (n=0,1,2,\ldots).$$

İsbat edin ki,

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx=\begin{cases} 0, & m\neq n \text{ olduqda},\\ \dfrac{2}{2n+1}, & m=n \text{ olduqda}.\end{cases}$$

2301. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a,b]$-də inteqrallanandır və $F(x)$ funksiyası $[a,b]$-də a, b nöqtələrini və $F(x)$-in I növ kəsilmə nöqtələrinə malik olduğu sonlu sayda daxili c_i $(i=1,\ldots,p)$ nöqtələri istisna olmaqla hər yerdə $F'(x)=f(x)$ şərtini ödəyir ("ümumiləşmiş ibtidai funksiyadır"). İsbat edin ki,

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b-0)-F(a+0)-\sum_{i=1}^{p}[F(c_i+0)-F(c_i-0)].$$

2302. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında inteqrallanandır və

$$F(x)=C+\int_a^x f(\xi)\,d\xi$$

funksiyası onun qeyri-müəyyən inteqralıdır. İsbat edin ki, $F(x)$ funksiyası kəsilməzdir və $f(x)$ funksiyasının kəsilməz olduğu bütün nöqtələrdə

$$F'(x)=f(x)$$

bərabərliyi doğrudur. $f(x)$ funksiyasının kəsilmə nöqtələrində $F(x)$ funksiyasının törəməsi haqda nə demək olar?

Misallara baxın:

a) $f\left(\frac{1}{n}\right)=1$ $(n=\pm1,\pm2,\ldots)$ və $x\neq\frac{1}{n}$ olduqda $f(x)=0$;

b) $f(x)=\operatorname{sgn}x$.

Kəsilən məhdud funksiyaların aşağıdakı qeyri-müəyyən inteqrallarını tapın:

2303. $\int \operatorname{sgn}x\,dx$.

2304. $\int \operatorname{sgn}(\sin x)\,dx$.

2305. $\int [x]dx$ $(x\geq 0)$.

2306. $\int x[x]dx$ $(x\geq 0)$.

2307. $\int (-1)^{[x]}\,dx$.

2308. $\int_0^x f(x)dx$, burada $f(x)=\begin{cases} 1, & |x|<l \text{ olduqda},\\ 0, & |x|>l \text{ olduqda}.\end{cases}$

Kəsilən məhdud funksiyaların aşağıdakı müəyyən inteqrallarını hesablayın:

2309. $\int_0^3 \operatorname{sgn}(x-x^3)\,dx.$ **2310.** $\int_0^2 [e^x]\,dx.$

2311. $\int_0^6 [x]\sin\frac{\pi x}{6}\,dx.$ **2312.** $\int_0^\pi x\operatorname{sgn}(\cos x)\,dx.$

2313. $\int_1^{n+1} \ln[x]\,dx$, burada n - natural ədəddir.

2314. $\int_0^1 \operatorname{sgn}[\sin(\ln x)]\,dx.$

2315. $\int_E |\cos x|\sqrt{\sin x}\,dx$ inteqralını hesablayın, burada E - $[0, 4\pi]$ parçasının inteqralaltı ifadənin mənası olduğu nöqtələr çoxluğudur.

§3. Orta qiymət haqqında teoremlər

1°. Funksiyanın orta qiyməti.

$$M[f] = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

ədədinə $f(x)$ funksiyasının $[a,b]$ parçasında *orta qiyməti* deyilir.

Əgər $f(x)$ funksiyası $[a,b]$-də kəsilməzdirsə, onda elə $c\in(a,b)$ nöqtəsi var ki,

$$M[f] = f(c)$$

olar.

2°. Orta qiymət haqqında birinci teorem. Əgər: 1) $f(x)$ və $\varphi(x)$ funksiyaları $[a,b]$ parçasında məhdud və inteqrallanandırsa, 2) $a<x<b$ olduqda $\varphi(x)$ funksiyası işarəsini dəyişmirsə, onda elə $\mu\in[m, M]$ (burada $m = \inf\limits_{a\le x\le b} f(x)$, $M = \sup\limits_{a\le x\le b} f(x)$) ədədi var ki,

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \mu\int_a^b \varphi(x)dx$$

olar; 3) əgər, bunlardan əlavə, $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməzdirsə, onda elə $c\in[a,b]$ nöqtəsi var ki, $\mu=f(c)$ olar.

3°. Orta qiymət haqqında ikinci teorem. Əgər: 1) $f(x)$ və $\varphi(x)$ funksiyaları $[a,b]$ parçasında məhdud və inteqrallanandırsa, 2) $\varphi(x)$ funksiyası $a<x<b$ olduqda monotondursa, onda elə $\xi\in[a,b]$ ədədi var ki,

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(a+0)\int_a^\xi f(x)\,dx + \varphi(b-0)\int_\xi^b f(x)\,dx$$

olar; 3) əgər, bunlardan əlavə, $\varphi(x)$ - mənfi olmayan və monoton azalan funksiyadırsa, onda

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(a+0)\int_a^{\xi} f(x)\,dx \qquad (a \le \xi \le b);$$

3') əgər $\varphi(x)$ mənfi olmayan və monoton artan funksiyadırsa, onda

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \varphi(b-0)\int_{\xi}^{b} f(x)\,dx \qquad (a \le \xi \le b).$$

2316. Aşağıdakı müəyyən inteqralların işarəsini təyin edin:

a) $\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx;$ *c)* $\int_{-2}^{2} x^3 2^x\,dx;$

b) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx;$ *d)* $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 \ln x\,dx.$

2317. Hansı inteqral böyükdür:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x\,dx$ yoxsa $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$?

b) $\int_0^1 e^{-x}dx$ yoxsa $\int_0^1 e^{-x^2}dx$?

c) $\int_0^{\pi} e^{-x^2}\cos^2 x\,dx$ yoxsa $\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2}\cos^2 x\,dx$?

2318. Aşağıdakı funksiyaların göstərilən aralıqlarda orta qiymətini tapın:

a) $f(x) = x^2$, $[0,1]$-də;

b) $f(x) = \sqrt{x}$, $[0,100]$-də;

c) $f(x) = 10 + 2\sin x + 3\cos x$, $[0,2\pi]$-də;

d) $f(x) = \sin x \sin(x+\varphi)$, $[0,2\pi]$-də.

2319. Ellipsin

$$r = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi} \qquad (0<\varepsilon<1)$$

fokal radius-vektorunun orta qiymətini tapın.

2320. Başlanğıc sürəti v_0 olan sərbəst düşən cismin sürətinin orta qiymətini tapın.

2321. Dəyişən cərəyan şiddəti

$$i = i_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right)$$

qanunu ilə dəyişir, burada i_0 - amplitud, t - zaman, T - period və φ - başlanğıc fazadır. Cərəyan şiddətinin kvadratının orta qiymətini tapın.

2321.1. Tutaq ki, $f(x) \in C[0, +\infty)$ və $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(x)\,dx$$

limitini tapın. $f(x) = \operatorname{arctg} x$ misalına baxın.

2322. Tutaq ki,

$$\int_0^x f(t)\,dt = x\,f(\theta x).$$

Aşağıdakı funksiyalar üçün θ -nı tapın:

$a)$ $f(t) = t^n \qquad (n > -1)$;

$b)$ $f(t) = \ln t$;

$c)$ $f(t) = e^t$.

$\lim\limits_{x\to+0} \theta$ və $\lim\limits_{x\to+\infty} \theta$ limitləri nəyə bərabərdir?

Orta qiymət haqqında birinci teoremdən istifadə edərək aşağıdakı inteqralları qiymətləndirin:

2323. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+0{,}5\cos x}$.

2324. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\,dx$.

2325. $\displaystyle\int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100}\,dx$.

2326. Aşağıdakı bərabərlikləri isbat edin:

$a)$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx = 0$; $\qquad$ $b)$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = 0$.

2326.1. Aşağıdakı limitləri hesablayın:

$a)$ $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to0}\int_0^1 \frac{dx}{\varepsilon x^3+1}$; $\qquad$ $b)$ $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f(x)\frac{dx}{x}$,

burada $a>0, b>0$ və $f(x) \in C[0,1]$.

2327. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a,b]$-də kəsilməzdir və $\varphi(x)$ funksiyası isə $[a,b]$-də kəsilməzdir, (a,b)-də diferensiallanandır və $a<x<b$ olduqda $\varphi'(x) \geq 0$. Hissə-hissə inteqrallama düsturunu və orta qiymət haqqında birinci teoremi tətbiq edərək orta qiymət haqqında ikinci teoremi isbat edin.

Orta qiymət haqqında ikinci teoremdən istifadə edərək aşağıdakı inteqralları qiymətləndirin:

2328. $\displaystyle\int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx.$

2329. $\displaystyle\int_{a}^{b} \frac{e^{-\alpha x}}{x}\sin x\,dx \qquad (\alpha \geq 0;\ 0 < a < b).$

2330. $\displaystyle\int_{a}^{b} \sin x^2\,dx \qquad (0 < a < b).$

2331. Tutaq ki, $\varphi(x)$ və $\psi(x)$ funksiyaları $[a,b]$ parçasında kvadratları ilə birlikdə inteqrallanandırlar.

$$\left\{\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx\right\}^2 \leq \int_a^b \varphi^2(x)\,dx \int_a^b \psi^2(x)\,dx$$

Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyini isbat edin.

2332. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməz törəməyə malikdir və $f(a)=0$.

Aşağıdakı bərabərsizliyi isbat edin:

$$M^2 \leq (b-a)\int_a^b f'^2(x)\,dx,$$

burada

$$M = \sup_{a\leq x\leq b}\left|f(x)\right|.$$

2333. Aşağıdakı bərabərliyi isbat edin:

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\,dx = 0 \qquad (p > 0).$$

§4. Qeyri-məxsusi inteqrallar

1°. Funksiyanın qeyri-məxsusi inteqrallanması. Əgər $f(x)$ funksiyası hər bir sonlu $[a,b]$ parçasında məxsusi inteqrallanandırsa, onda tərifə görə

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

qəbul edilir.

Əgər $f(x)$ funksiyası b nöqtəsinin ətrafında qeyri-məhduddursa və hər bir $[a, b-\varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$ parçasında məxsusi inteqrallanandırsa, onda

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \tag{2}$$

qəbul edilir.

Əgər (1) və ya (2) inteqralları varsa, onda uyğun inteqrallar *yığılan*, əks halda isə *dağılan* adlanırlar.

2⁰. Koşi meyarı. (1) inteqralının yığılan olması üçün zəruri və kafi şərt istənilən $\varepsilon>0$ ədədinə görə elə $b=b(\varepsilon)$ ədədinin varlığıdır ki, istənilən $b'>b$ və $b''>b$ üçün

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)\,dx\right|<\varepsilon$$

bərabərsizliyi ödənilsin.

Analoji olaraq Koşi meyarı (2) tipli inteqral üçün də ifadə olunur.

3⁰. Mütləq yığılma əlamətləri. Əgər $|f(x)|$ funksiyası qeyri-məxsusi inteqrallanandırsa, onda (1) və ya (2) inteqralı *mütləq yığılan* adlanır (təbii ki, bu inteqrallar yığılandır).

I *Müqayisə əlaməti*. Tutaq ki, $x\geq a$ olduqda $|f(x)|\leq F(x)$. Əgər $\int_a^{+\infty} F(x)dx$ yığılandırsa, onda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ inteqralı mütləq yığılandır.

II *Müqayisə əlaməti*. Əgər $\psi(x)>0$ və $x\to+\infty$ olduqda $\varphi(x)=O^*(\psi(x))$ olarsa, onda $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ və $\int_a^{+\infty}\psi(x)dx$ inteqralları eyni zamanda yığılan və ya dağılandır.

III *Müqayisə əlaməti*. *a*) Tutaq ki, $x\to+\infty$ olduqda

$$f(x)=O^*\left(\frac{1}{x^p}\right).$$

Bu halda, (1) inteqralı $p>1$ olduqda yığılır və $p\leq 1$ olduqda isə dağılır.

b) Tutaq ki, $x\to b-0$ olduqda

$$f(x)=O^*\left(\frac{1}{(b-x)^p}\right).$$

Bu halda, (2) inteqralı $p<1$ olduqda yığılır və $p\geq 1$ olduqda isə dağılır.

4⁰. Yığılmanın xüsusi əlaməti. Əgər: 1) $x\to+\infty$ olduqda $\varphi(x)$ funksiyası monoton olaraq sıfra yaxınlaşırsa və 2) $f(x)$ funksiyası məhdud

$$F(x)=\int_a^x f(\xi)\,d\xi$$

ibtidai funksiyasına malikdirsə, onda

$$\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx$$

inteqralı yığılandır, ümumiyyətlə desək, mütləq yığılan deyil.

Əgər $p>0$ olarsa, xüsusi halda

$$\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx \quad \text{və} \quad \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (a>0)$$

inteqralları yığılandırlar.

5°. **K o ş i m ə n a d a b a ş q i y m ə t.** Əgər istənilən $\varepsilon>0$ üçün $f(x)$ funksiyasının

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx \quad \text{və} \quad \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx \quad (a<c<b)$$

məxsusi inteqralları varsa, onda *Koşi mənada baş qiymət* (v.p.) dedikdə

$$\text{v.p.} \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx \right]$$

ədədi başa düşülür.

Analoji olaraq

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{a} f(x)dx.$$

İnteqralları hesablayın:

2334. $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \quad (a>0).$

2335. $\int_0^1 \ln x\, dx.$

2336. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$

2337. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

2338. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}.$

2339. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}.$

2340. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$

2341. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx.$

2342. $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}.$

2343. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}.$

2344. $\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx.$

2345. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$

2346. $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx\, dx \quad (a>0).$

2347. $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx\, dx \quad (a>0).$

Dərəcəni azaltma düsturunun köməyi ilə aşağıdakı qeyri-məxsusi inteqralları hesablayın (n - natural ədəddir):

2348. $I_n = \int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx.$ **2349.** $I_n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^n}$ $(ac-b^2>0).$

2350. $I_n = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)\dots(x+n)}.$

2351. $I_n = \int\limits_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}.$ **2352.** $I_n = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch}^{n+1} x}.$

2353. *a)* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx;$ *b)* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\,dx.$

2354. $\int\limits_E e^{-\frac{x}{2}} \frac{|\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}}\,dx$ inteqralını tapın, burada E – $(0,+\infty)$ intervalında inteqralaltı ifadənin mənası olduğu x-lərin qiymətləri çoxluğudur.

2355. Bərabərliyi isbat edin:

$$\int\limits_0^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx = \frac{1}{a}\int\limits_0^{+\infty} f(\sqrt{x^2+4ab})\,dx,$$

burada $a>0$, $b>0$ və bərabərliyin sağ tərəfindəki inteqralın mənası var.

2356. $(0, +\infty)$ intervalında $f(x)$ *funksiyasının orta qiyməti*

$$M|f| = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(\xi)\,d\xi$$

ədədinə deyilir. Aşağıdakı funksiyaların orta qiymətini tapın:

a) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2(x\sqrt{2});$

b) $f(x) = \operatorname{arctg} x;$

c) $f(x) = \sqrt{x}\sin x.$

2357. Tapın:

a) $\lim\limits_{x\to 0} x\int\limits_x^1 \frac{\cos t}{t^2}\,dt;$ *b)* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\int\limits_0^x \sqrt{1+t^4}\,dt}{x^3};$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int\limits_x^{+\infty} t^{-1}e^{-t}\,dt}{\ln\frac{1}{x}};$ *d)* $\lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha}\int\limits_x^1 \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt,$

burada $\alpha>0$ və $f(t)$ funksiyası $[0, 1]$ parçasında kəsilməzdir.

İnteqralların yığılmasını araşdırın:

2358. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1}$.

2359. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$.

2360. $\int_0^2 \frac{dx}{\ln x}$.

2361. $\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\, dx$.

2362. $\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x}\, dx$.

2363. $\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx \quad (n \geq 0)$.

2364. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n} dx \quad (a \neq 0)$.

2365. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx$.

2366. $\int_0^{+\infty} \frac{x^m \operatorname{arctg} x}{2+x^n} dx \quad (n \geq 0)$.

2367. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^n} dx \quad (n \geq 0)$.

2368. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$.

2369. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$.

2370. $\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

2370.1. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$.

2371. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$.

2372. $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$.

2373. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} dx$.

2374. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$.

2375. $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^p (\ln x)^q (\ln\ln x)^r}$.

2376. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x-a_1|^{p_1} |x-a_2|^{p_2} \ldots |x-a_n|^{p_n}} \quad (a_1 < a_2 < \ldots < a_n)$.

2376.1. $\int_0^{+\infty} x^\alpha |x-1|^\beta dx$.

2377. $\int_0^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} dx$, burada $P_m(x)$ və $P_n(x)$ - m və n dərəcəli qarşılıqlı sadə çoxhədlilərdir.

Aşağıdakı inteqralların mütləq və şərti yığılmasını araşdırın:

2378. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$. G ö s t ə r i ş. $|\sin x| \geq \sin^2 x$.

2379. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}dx.$

2380. $\int\limits_0^{+\infty} x^p \sin(x^q)dx \quad (q \neq 0).$

2380.1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sec x)dx.$

2380.2. $\int\limits_0^{+\infty} x^2 \cos(e^x)dx.$

2381. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q}dx \qquad (q \geq 0).$

2382. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}dx.$

2383. $\int\limits_a^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x dx,$ burada $P_m(x)$ və $P_n(x)$ - tam çoxhədlilərdir və $x \geq 0$ olduqda $P_n(x) > 0$.

2384. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ inteqralının yığılmasından $x \to +\infty$ olduqda $f(x) \to 0$ olması alınırmı?

Misallara baxın:

$$a) \int\limits_0^{+\infty} \sin(x^2)dx; \qquad b) \int\limits_0^{+\infty} (-1)^{[x^2]}dx.$$

2384.1. Tutaq ki, $f(x) \in C^{(1)}[x_0, +\infty)$, $x_0 \leq x < +\infty$ olduqda $|f'(x)| < C$ və $\int\limits_{x_0}^{+\infty} |f(x)|dx$ yığılandır. İsbat edin ki, $x \to +\infty$ olduqda $f(x) \to 0$.

Göstəriş. $\int\limits_{x_0}^{+\infty} f(x)f'(x)dx$ inteqralına baxın.

2385. $[a, b]$-də təyin olunmuş qeyri-məhdud $f(x)$ funksiyasının yığılan qeyri-məxsusi

$$\int\limits_a^b f(x)dx$$

inteqralına

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \quad (x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1} \text{ və } \Delta x_i = x_{i+1} - x_i)$$

uyğun inteqral cəminin limiti kimi baxmaq olarmı?

2386. Tutaq ki,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \qquad (1)$$

yığılandır və $\varphi(x)$ funksiyası məhduddur.

$$\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx \qquad (2)$$

inteqralı yığılandırmı? Uyğun misal göstərin.

Əgər (1) inteqralı mütləq yığılandırsa, (2) inteqralının yığılması haqqında nə demək olar?

2387. İsbat edin ki, əgər $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ yığılandırsa və $f(x)$ monoton funksiyadırsa, onda $f(x)=O\left(\frac{1}{x}\right)$.

2388. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $0<x\le 1$ aralığında monotondur və $x=0$ nöqtəsinin ətrafında qeyri-məhduddur.

İsbat edin ki, əgər

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

inteqralı varsa, onda

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx.$$

2389. İsbat edin ki, əgər $f(x)$ funksiyası $0<x<a$ intervalında monotondursa və

$$\int_0^a x^p f(x)\,dx$$

inteqralı varsa, onda

$$\lim_{x\to+0} x^{p+1} f(x)=0.$$

2390. Göstərin ki:

a) v.p. $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=0$; *b*) v.p. $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1-x^2}=0$; *c*) v.p. $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\,dx=0$.

2391. İsbat edin ki, $x\ge 0$ olduqda

$$\mathrm{li}\,x=\text{v.p.}\int_0^x\frac{d\xi}{\ln\xi}$$

inteqralı var.

Aşağıdakı inteqralları tapın:

2392. v.p. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2-3x+2}$.

2393. v.p. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{dx}{x\ln x}$.

2394. v.p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^2}dx$.

2395. v.p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{arctg} x\,dx$.

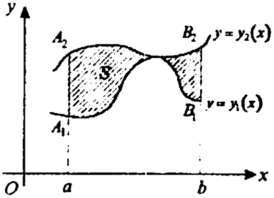
§ 5. Sahələrin hesablanması

1°. **Düzbucaqlı koordinat sistemində sahə.** İki kəsilməz $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$ $\left(y_2(x)\geq y_1(x)\right)$ əyriləri və iki $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ düz xətləri ilə hüdudlanan $A_1A_2B_2B_1$ (şək. 10) müstəvi fiqurunun S sahəsi

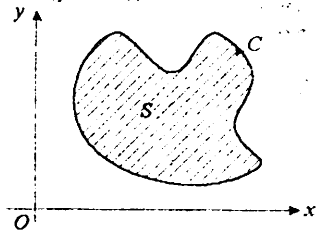
$$S=\int\limits_a^b\left(y_2(x)-y_1(x)\right)dx$$

ədədinə bərabərdir.

2°. **Parametrik şəkildə verilmiş əyri ilə hüdudlanan fiqurun sahəsi.** Əgər $x=x(t)$, $y=y(t)$ $[0\leq t\leq T]$ - saat əqrəbi hərəkətinin əksinə yönəlmiş və özündən solda sahəsi S olan fiquru hüdudlayan, hissə-hissə kəsilməz sadə qapalı C əyrisinin parametrik tənlikləridirsə (şək. 11), onda



Şək. 10.



Şək. 11.

$$S=-\int\limits_0^T y(t)x'(t)dt=\int\limits_0^T x(t)\,y'(t)dt$$

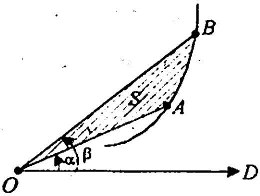
və ya

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_0^T\left[x(t)\,y'(t)-x'(t)\,y(t)\right]dt.$$

3°. **Polyar koordinat sistemində sahə.** $r=r(\varphi)$ kəsilməz əyrisi və iki $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ $(\alpha<\beta)$ yarımxətləri ilə hüdudlanmış OAB (şək. 12) sektorunun S sahəsi

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi$$

ədədinə bərabərdir.

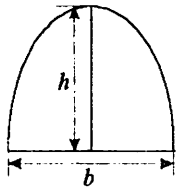


Şək. 12.

2396. İsbat edin ki, düzgün parabolik seqmentin sahəsi

$$S=\frac{2}{3}bh$$

ədədinə bərabərdir, burada b - seqmentin oturacağı və h hündürlüyüdür (şək. 13).



Şək. 13.

Düzbucaqlı koordinat sistemində verilmiş aşağıdakı əyrilərlə hüdudlanan sahəni tapın*):

2397. $ax=y^2,\ ay=x^2$.

2398. $y=x^2,\ x+y=2$.

2399. $y=2x-x^2,\ x+y=0$.

2400. $y=|\lg x|,\ y=0,\ x=0{,}1,\ x=10$.

2400.1. $y=2^x,\ y=2,\ x=0$.

2400.2. $y=(x+1)^2,\ x=\sin\pi y,\ y=0 \quad (0\le y\le 1)$.

2401. $y=x;\ y=x+\sin^2 x \quad (0\le x\le \pi)$.

2402. $y=\dfrac{a^3}{a^2+x^2},\ y=0$.

2403. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

2404. $y^2=x^2(a^2-x^2)$.

2405. $y^2=2px,\ 27py^2=8(x-p)^3$.

2406. $Ax^2+2Bxy+Cy^2=1 \quad (A>0,\ AC-B^2>0)$.

2407. $y^2=\dfrac{x^3}{2a-x}$ (sissoid), $x=2a$.

2408. $x=a\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2},\ y=0$ (traktris).

2409. $y^2=\dfrac{x^n}{(1+x^{n+2})^2} \quad (x>0;\ n>-2)$.

2410. $y=e^{-x}|\sin x|,\ y=0\ (x\ge 0)$.

2411. $y^2=2x$ parabolası $x^2+y^2\le 8$ dairəsinin sahəsini hansı nisbətdə bölür?

2412 (y). $x^2-y^2=1$ hiperbolasının $M(x,y)$ nöqtəsinin koordinatlarını hiperbolanın $M'M$ qövsü və iki OM və OM' şüaları ilə hüdudlanan $S=OM'M$ hiperbolik sektorunun sahəsinin funksiyası kimi ifadə edin, burada $M'(x,-y)$ - Ox oxuna nəzərən M-ə simmetrik olan nöqtədir.

Parametrik şəkildə verilmiş aşağıdakı əyrilərlə hüdudlanan sahəni tapın:

2413. $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t) \quad (0\le t\le 2\pi)$ (sikloid) və $y=0$.

---

*) IV bölmənin bu və növbəti paraqraflarındakı bütün parametrlər musbət hesab olunur.

2414. $x=2t-t^2$, $y=2t^2-t^3$.

2415. $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$ (dairənin açılışı) və $x=a$, $y\le 0$.

2416. $x=a(2\cos t-\cos 2t)$, $y=a(2\sin t-\sin 2t)$.

2417. $x=\frac{c^2}{a}\cos^3 t$, $y=\frac{c^2}{b}\sin^3 t$ $(c^2=a^2-b^2)$ (ellipsin evolyutası).

2417.1. $x=a\cos t$, $y=\frac{a\sin^2 t}{2+\sin t}$.

Polyar koordinat sistemində verilmiş aşağıdakı əyrilərlə hüdudlanan S fiqurunun sahəsini tapın:

2418. $r^2=a^2\cos 2\varphi$ (lemniskat).

2419. $r=a(1+\cos\varphi)$ (kardioid).

2420. $r=a\sin 3\varphi$ (üç yarpaq).

2421. $r=\frac{p}{1-\cos\varphi}$ (parabola), $\varphi=\frac{\pi}{4}$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

2422. $r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$ $(0<\varepsilon<1)$ (ellips).

2422.1. $r=3+2\cos\varphi$.

2422.2. $r=\frac{1}{\varphi}$, $r=\frac{1}{\sin\varphi}$ $\left(0<\varphi\le\frac{\pi}{2}\right)$.

2423. $r=a\cos\varphi$, $r=a(\cos\varphi+\sin\varphi)$ $\left(M\left(\frac{a}{2},0\right)\in S\right)$.

2424. İki $\varphi=0$ və $\varphi=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ şüaları və

$$\varphi=r\operatorname{arctg} r$$

əyrisi ilə hüdudlanmış sektorun sahəsini tapın.

2424.1. $r^2+\varphi^2=1$ əyrisi ilə hüdudlanan sahəni tapın.

2424.2. $\varphi=\sin(\pi r)$ $(0\le r\le 1)$ əyrisinin ləçəyi ilə hüdudlanmış fiqurun sahəsini tapın.

2424.3. $\varphi=4r-r^3$, $\varphi=0$ xətləri ilə hüdudlanan sahəni tapın.

2424.4. $\varphi=r-\sin r$, $\varphi=\pi$ xətləri ilə hüdudlanan sahəni tapın.

2425. $r=\frac{2at}{1+t^2}$, $\varphi=\frac{\pi t}{1+t}$ qapalı əyrisi ilə hüdudlanan sahəni tapın.

Polyar koordinatlara keçərək aşağıdakı əyrilərlə hüdudlanan sahəni tapın:

2426. $x^3+y^3=3axy$ (Dekart yarpağı).

2427. $x^4+y^4=a^2(x^2+y^2)$.

2428. $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ (lemniskat).

Verilən əyrilərin tənliyini parametrik şəklə gətirərək bu əyrilərlə hüdudlanan sahələri tapın:

2429. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ (astroid).

2430. $x^4+y^4=ax^2y$.

G ö s t ə r i ş. $y=tx$ götürün.

§ 6. Qövsün uzunluğunun hesablanması

1⁰. D ü z b u c a q l ı k o o r d i n a t s i s t e m i n d ə q ö v s ü n u z u n l u ğ u. Hamar (kəsilməz diferensiallanan)

$$y=y(x) \qquad (a\le x\le b)$$

əyri qövsünün uzunluğu

$$s=\int_a^b \sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$$

ədədinə bərabərdir.

2⁰. P a r a m e t r i k ş ə k i l d ə v e r i l m i ş ə y r i n i n q ö v s ü n ü n u z u n l u ğ u. Əgər C əyrisi

$$x=x(t),\ y=y(t) \qquad (t_0\le t\le T)$$

tənlikləri ilə verilmişdirsə, onda C əyrisinin qövsünün uzunluğu

$$s=\int_{t_0}^{T} \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$$

ədədinə bərabərdir, burada $x(t),\ y(t)\in C^{(1)}[t_0,T]$.

3⁰. P o l y a r k o o r d i n a t s i s t e m i n d ə q ö v s ü n u z u n l u ğ u. Əgər

$$r=r(\varphi) \qquad (\alpha\le\varphi\le\beta)$$

olarsa, onda uyğun qövsün uzunluğu

$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}\,d\varphi$$

ədədinə bərabərdir, burada $r(\varphi)\in C^{(1)}[\alpha,\beta]$.

Fəza əyrilərinin qövsünün uzunluğu haqqında VIII bölmədə baxın.

Aşağıdakı əyrilərin qövsünün uzunluğunu tapın:

2431. $y=x^{\frac{3}{2}}$ $(0\le x\le 4)$.

2432. $y^2=2px$ $(0\le x\le x_0)$.

2433. $y=a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$, $A(0,a)$ nöqtəsindən $B(b,h)$ nöqtəsinə qədər.

2434. $y = e^x \quad (0 \le x \le x_0).$

2435. $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y \quad (1 \le y \le e).$

2436. $y = a\ln\frac{a^2}{a^2 - x^2} \quad (0 \le x \le b < a).$

2437. $y = \ln\cos x \quad \left(0 \le x \le a < \frac{\pi}{2}\right).$

2438. $x = a\ln\frac{a+\sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2} \quad (0 < b \le y \le a).$

2439. $y^2 = \frac{x^3}{2a - x} \quad \left(0 \le x \le \frac{5}{3}a\right).$

2440. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (astroid).

2441. $x = \frac{c^2}{a}\cos^3 t,\ y = \frac{c^2}{b}\sin^3 t,\ c^2 = a^2 - b^2$ (ellipsin evolyutası).

2442. $x = \cos^4 t, \quad y = \sin^4 t.$

2443. $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \le t \le 2\pi).$

2444. $x = a(\cos t + t\sin t), \quad y = a(\sin t - t\cos t), \quad 0 \le t \le 2\pi$ olduqda (çevrənin açılışı).

2445. $x = a(\operatorname{sh} t - t), \quad y = a(\operatorname{ch} t - 1) \quad (0 \le t \le T).$

2445.1. $x = \operatorname{ch}^3 t, \quad y = \operatorname{sh}^3 t \quad (0 \le t \le T).$

2446. $r = a\varphi$ (Arximed spiralı), $0 \le \varphi \le 2\pi$ olduqda.

2447. $r = ae^{m\varphi} \quad (m > 0), \quad 0 < r < a$ olduqda.

2448. $r = a(1 + \cos\varphi).$

2449. $r = \frac{p}{1 + \cos\varphi} \quad \left(|\varphi| \le \frac{\pi}{2}\right).$

2450. $r = a\sin^3\frac{\varphi}{3}.$

2451. $r = a\operatorname{th}\frac{\varphi}{2} \quad (0 \le \varphi \le 2\pi).$

2452. $\varphi = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) \quad (1 \le r \le 3).$

2452.1. $\varphi = \sqrt{r} \quad (0 \le r \le 5).$

2452.2. $\varphi = \int_0^r \frac{\operatorname{sh}\rho}{\rho}d\rho \quad (0 \le r \le R).$

2452.3. $r = 1 + \cos t, \quad \varphi = t - \operatorname{tg}\frac{t}{2} \quad (0 \le t \le T < \pi).$

2453. İsbat edin ki,

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t$$

ellipsinin qövsünün uzunluğu $y = c\sin\frac{x}{b}$ sinusoidinin bir dalğasının uzunluğuna bərabərdir, burada $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

2454. $4ay = x^2$ parabolası Ox oxu boyunca diyirlənir. İsbat edin ki, parabolanın fokusu zəncirvari əyri cızır.

2455. $y = \pm\left(\frac{1}{3} - x\right)\sqrt{x}$ əyrisinin ilgəyi ilə hüdudlanmış sahənin çevrəsinin uzunluğu bu ilgəyin uzunluğuna bərabər olan dairənin sahəsinə nisbətini tapın.

§ 7. Həcmlərin hesablanması

1°. Məlum en kəsiklərinə görə cismin həcmi. Əgər cismin V həcmi varsa və $S = S(x)$ $[a \le x \le b]$ - cismin x nöqtəsində Ox oxuna perpendikulyar olan müstəvi ilə kəsiyinin sahəsidirsə, onda

$$V = \int_a^b S(x)dx .$$

2°. Fırlanma cisminin həcmi. Ox oxu ətrafında

$$a \le x \le b, \quad 0 \le y \le y(x)$$

sahəsinin fırlanmasından alınan cismin həcmi

$$V_x = \pi\int_a^b y^2(x)dx$$

ədədinə bərabərdir, burada $y(x)$ - kəsilməz birqiymətli funksiyadır. Daha ümumi halda, $a \le x \le b$, $y_1(x) \le y \le y_2(x)$ sahəsinin Ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan halqanın həcmi

$$V = \pi\int_a^b [y_2^2(x) - y_1^2(x)]dx$$

ədədinə bərabərdir, burada $y_1(x)$ və $y_2(x)$ - mənfi olmayan kəsilməz funksiyalardır.

2456. Oturacağı a və b tərəfli düzbucaqlı olan, yuxarı tili c-yə və hündürlüyü h-a bərabər olan çardağın həcmini tapın.

2457. Paralel oturacaqları A, B və a, b tərəfli düzbucaqlılar olan, hündürlüyü isə h-a bərabər olan abidə daşının həcmini tapın.

2458. Oturacaq ellipslərinin yarımoxları A, B və a, b, hündürlüyü isə h olan kəsik konusun həcmini tapın.

2459. Oturacağı S, hündürlüyü isə H olan fırlanma paraboloidinin həcmini tapın.

2460. Tutaq ki, ölçülən cismin Ox oxuna perpendikulyar olan en kəsiyinin $S = S(x)$ sahəsi

$$S(x) = Ax^2 + Bx + C \qquad [a \le x \le b]$$

qanunu ilə dəyişir, burada A, B, C - sabitlərdir. İsbat edin ki, bu cismin həcmi

$$V = \frac{H}{6}\left[S(a) + 4S\left(\frac{a+b}{2}\right) + S(b)\right]$$

ədədinə bərabərdir, burada $H = b - a$ (*Simpson düsturu*).

2461. Cisim $M(x, y, z)$ nöqtələri çoxluğundan ibarətdir, burada $0 \le z \le 1$, əgər z rasionaldırsa, onda $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ və əgər z irrasionaldırsa, onda $-1 \le x \le 0$, $-1 \le y \le 0$. İsbat edin ki,

$$\int_0^1 S(z)\,dz = 1$$

olmasına baxmayaraq bu cismin həcmi yoxdur.

Aşağıdakı səthlərlə hüdudlanan cisimlərin həcmini tapın:

2462. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = \frac{c}{a}x, \quad z = 0.$

2463. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (ellipsoid).

2464. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad z = \pm c.$

2465. $x^2 + z^2 = a^2, \quad y^2 + z^2 = a^2.$

2466. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 = ax.$

2467. $z^2 = b(a - x), \quad x^2 + y^2 = ax.$

2468. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{z^2} = 1 \quad (0 < z < a).$

2469. $x + y + z^2 = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$

2470. $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = a^2.$

2471. İsbat edin ki,

$$a \le x \le b, \qquad 0 \le y \le y(x)$$

sahəsinin Oy oxu ətrafında fırlanmasından alınan cismin həcmi

$$V_y = 2\pi\int_a^b xy(x)\,dx$$

ədədinə bərabərdir, burada $y(x)$ - birqiymətli kəsilməz funksiyadır.

Aşağıdakı xətlərin fırlanmasından alınan səthlərlə hüdudlanan cisimlərin həcmini tapın:

2472. $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} \quad (0 \le x \le a)$ Ox oxu ətrafında (neyloid).

2473. $y=2x-x^2$, $y=0$: *a)* Ox oxu ətrafında; *b)* Oy oxu ətrafında.

2474. $y=\sin x$, $y=0$ $(0\le x\le\pi)$: *a)* Ox oxu ətrafında; *b)* Oy oxu ətrafında.

2475. $y=b\left(\frac{x}{a}\right)^2$, $y=b\left|\frac{x}{a}\right|$: *a)* Ox oxu ətrafında; *b)* Oy oxu ətrafında.

2476. $y=e^{-x}$, $y=0$ $(0\le x<+\infty)$: *a)* Ox oxu ətrafında; *b)* Oy oxu ətrafında.

2477. $x^2+(y-b)^2=a^2$ $(0<a\le b)$ Ox oxu ətrafında.

2478. $x^2-xy+y^2=a^2$ Ox oxu ətrafında.

2479. $y=e^{-x}\sqrt{\sin x}$ $(0\le x<+\infty)$ Ox oxu ətrafında.

2480. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$, $y=0$: *a)* Ox oxu ətrafında; *b)* Oy oxu ətrafında; *c)* $y=2a$ düz xətti ətrafında.

2481. $x=a\sin^3 t$, $y=b\cos^3 t$ $(0\le t\le 2\pi)$: *a)* Ox oxu ətrafında; *b)* Oy oxu ətrafında.

2481.1. $x=2t-t^2$, $y=4t-t^3$ əyrisinin ilgəyinin sahəsinin: *a)* Ox oxu; *b)* Oy oxu ətrafında fırlanmasından alınan cismin həcmini tapın.

2482. İsbat edin ki,

$$0\le\alpha\le\varphi\le\beta\le\pi,\qquad 0\le r\le r(\varphi)$$

(φ və r - polyar koordinatlardır) sahəsinin polyar ox ətrafında fırlanmasından alınan cismin həcmi

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi$$

ədədinə bərabərdir.

Polyar koordinat sistemində verilmiş sahələrin fırlanmasından alınan cisimlərin həcmini tapın:

2483. $r=a(1+\cos\varphi)$ $(0\le\varphi\le 2\pi)$: *a)* polyar ox ətrafında; *b)* $r\cos\varphi=-\frac{a}{4}$ düz xətti ətrafında.

2484. $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$: *a)* Ox oxu ətrafında; *b)* Oy oxu ətrafında; *c)* $y=x$ düz xətti ətrafında.

G ö s t ə r i ş. Polyar koordinatlara keçin.

2484.1. Arximed spiralının

$$r=a\varphi\qquad(a>0;\ 0\le\varphi\le\pi)$$

yarımburumu ilə hüdudlanmış sahənin polyar ox ətrafında fırlanmasından alınan cismin həcmini tapın.

2484.2. $\varphi=\pi r^3$, $\varphi=\pi$ xətləri ilə hüdudlanan sahənin polyar ox ətrafında fırlanmasından alınan cismin həcmini tapın.

2485. $a \le r \le a\sqrt{2\sin 2\varphi}$ sahəsinin polyar ox ətrafında fırlanmasından alınan cismin həcmini tapın.

§ 8. Fırlanma səthlərinin sahəsinin hesablanması

Hamar AB əyrisinin Ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan *səthin sahəsi*

$$P = 2\pi\int_A^B |y|\,ds$$

ədədinə bərabərdir, burada ds - qövsün diferensialıdır.

Aşağıdakı əyrilərin fırlanmasından alınan səthlərin sahəsini hesablayın:

2486. $y = x\sqrt{\dfrac{x}{a}}$ $(0 \le x \le a)$; Ox oxu ətrafında.

2487. $y = a\cos\dfrac{\pi x}{2b}$ $(|x| \le b)$; Ox oxu ətrafında.

2488. $y = \operatorname{tg} x$ $\left(0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}\right)$; Ox oxu ətrafında.

2489. $y^2 = 2px$ $(0 \le x \le x_0)$: *a)* Ox oxu ətrafında; *b)* Oy oxu ətrafında.

2490. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(0 < b \le a)$: *a)* Ox oxu ətrafında; *b)* Oy oxu ətrafında.

2491. $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ $(b \ge a)$; Ox oxu ətrafında.

2492. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$; Ox oxu ətrafında.

2493. $y = a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$ $(|x| \le b)$: *a)* Ox oxu ətrafında; *b)* Oy oxu ətrafında.

2494. $\pm x = a\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} - \sqrt{a^2-y^2}$; Ox oxu ətrafında.

2495. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$: *a)* Ox oxu ətrafında; *b)* Oy oxu ətrafında; *c)* $y = 2a$ düz xətti ətrafında.

2496. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$; $y = x$ düz xətti ətrafında.

2497. $r = a(1 + \cos\varphi)$; polyar ox ətrafında.

2498. $r^2 = a^2\cos 2\varphi$: *a)* polyar ox ətrafında; *b)* $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ oxu ətrafında; *c)* $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ oxu ətrafında.

2499. Cisim $ay = a^2 - x^2$ parabolası və Ox oxu ilə hüdudlanmış fiqurun Ox oxu ətrafında fırlanmasından alınmışdır. Fırlanma cisminin səthinin sahəsinin onunla eyni böyüklükdə olan kürənin səthinin sahəsinə nisbətini tapın.

2500. $y^2=2px$ parabolası və $x=\frac{p}{2}$ düz xətti ilə hüdudlanmış fiqur $y=p$ düz xətti ətrafında fırlanır. Fırlanma cisminin həcmini və səthinin sahəsini tapın.

§ 9. Momentlərin hesablanması. Ağırlıq mərkəzinin koordinatları

1°. M o m e n t l ə r. Əgər Oxy müstəvisində $\rho=\rho(y)$ sıxlıqlı M kütləsi müəyyən məhdud Ω kontinuumunu (xəttini, müstəvi oblastını) doldurursa və $\omega=\omega(y)$ - Ω kontinuumunun ordinatı y-i aşmayan həmin hissəsinə uyğun ölçüsüdürsə (qövsün uzunluğudursa, sahədirsə), onda M kütləsinin Ox oxuna nəzərən *k-cı momenti*

$$M_k=\lim_{\max\Delta y_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(y_i)\,y_i^k\,\Delta\omega(y_i)=\int_{\Omega}\rho\, y^k d\omega(y) \qquad (k=0,1,2,\ldots)$$

ədədinə deyilir, burada $\Delta y_i=y_i-y_{i-1}$ və $\Delta\omega(y_i)=\omega(y_i)-\omega(y_{i-1})$.

Xüsusi hallarda $k=0$ olduqda *M kütləsini*, $k=1$ olduqda *statistik momenti*. $k=2$ olduqda isə *ətalət momentini* alırıq.

Analoji qayda ilə kütlənin koordinat müstəvisinə nəzərən momenti təyin edilir.

Əgər $\rho=1$ olarsa, onda uyğun momentə *həndəsi moment* (xəttin momenti, müstəvi fiqurunun momenti, cismin momenti və s.) deyilir.

2°. A ğ ı r l ı q m ə r k ə z i. Sahəsi S olan bircins müstəvi fiqurunun ağırlıq mərkəzinin (x_0, y_0) koordinatları

$$x_0=\frac{M_1^{(y)}}{S}, \qquad y_0=\frac{M_1^{(x)}}{S}$$

düsturu ilə təyin edilir, burada $M_1^{(y)}$, $M_1^{(x)}$ - fiqurun Oy və Ox oxlarına nəzərən həndəsi statistik momentləridir.

2501. Radiusu a olan yarımçevrənin qövsünün uclarından keçən diametrə nəzərən statistik və ətalət momentini tapın.

2501.1. $y^2=2px$ $\left(0\le x\le\frac{p}{2}\right)$ parabola qövsünün $x=\frac{p}{2}$ düz xəttinə nəzərən statistik momentini tapın.

2502. Oturacağı b və hündürlüyü h olan bircins üçbucağ lövhənin oturacağa nəzərən statistik və ətalət momentini tapın ($\rho=1$).

2502.1. $ay=2ax-x^2$ $(a>0)$ və $y=0$ əyriləri ilə hüdudlanan parabola seqmentinin Ox və Oy oxlarına nəzərən $I_x=M_2^{(x)}$ və $I_y=M_2^{(y)}$ ətalət momentlərini tapın. r_x və r_y *ətalət radiusları*, yəni

$$I_x = Sr_x^2, \quad I_y = Sr_y^2 \quad (S \text{ - seqmentin sahəsidir})$$

münasibətləri ilə təyin olunan kəmiyyətlər nəyə bərabərdir?

2503. Yarımoxları a və b olan bircins elliptik lövhənin baş oxlarına nəzərən ətalət momentini tapın ($\rho = 1$).

2504. Oturacağının radiusu r və hündürlüyü h olan bircins dairəvi konusun oturacaq müstəvisinə nəzərən statistik və ətalət momentini tapın ($\rho = 1$).

2504.1. Radiusu R və kütləsi M olan bircins kürənin diametrinə nəzərən ətalət momentini tapın.

2505. Huldenin birinci teoremini isbat edin: C müstəvi qövsünün bu müstəvidə yerləşən və onu kəsməyən ox ətrafında fırlanmasından alınan səthin sahəsi bu qövsün uzunluğu ilə C-nin ağırlıq mərkəzinin cızdığı çevrənin uzunluğu hasilinə bərabərdir.

2506. Huldenin ikinci teoremini isbat edin: S müstəvi fiqurunun bu müstəvidə yerləşən və onu kəsməyən ox ətrafında fırlanmasından alınan cismin həcmi S-in sahəsi ilə bu fiqurun ağırlıq mərkəzinin cızdığı çevrənin uzunluğu hasilinə bərabərdir.

2507. $x = a\cos\varphi,\ y = a\sin\varphi$ ($|\varphi| \le \alpha \le \pi$) dairəvi qövsün ağırlıq mərkəzinin koordinatlarını tapın.

2508. $ax = y^2,\ ay = x^2$ ($a > 0$) parabolaları ilə hüdudlanan oblastın ağırlıq mərkəzinin koordinatlarını tapın.

2509. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1$ ($0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b$) oblastının ağırlıq mərkəzinin koordinatlarını tapın.

2510. Radiusu a olan bircins yarımkürənin ağırlıq mərkəzini tapın.

2511. $r = ae^{m\varphi}$ ($m > 0$) loqarifmik spiralının $O(-\infty, 0)$ nöqtəsindən $P(\varphi, r)$ nöqtəsinə qədər olan OP qövsünün $C(\varphi_0, r_0)$ ağırlıq mərkəzinin koordinatlarını təyin edin. P nöqtəsi hərəkət etdikdə C nöqtəsi hansı əyrini cızır?

2512. $r = a(1 + \cos\varphi)$ əyrisi ilə hüdudlanan oblastın ağırlıq mərkəzinin koordinatlarını tapın.

2513. $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$ ($0 \le t \le 2\pi$) sikloidinin birinci tağı və Ox oxu ilə hüdudlanan oblastın ağırlıq mərkəzinin koordinatlarını tapın.

2514. $0 \le x \le a;\ y^2 \le 2px$ sahəsinin Ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan cismin ağırlıq mərkəzinin koordinatlarını tapın.

2515. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($z \ge 0$) yarımsferasının ağırlıq mərkəzinin koordinatlarını tapın.

§ 10. Mexanika və fizika məsələləri

Uyğun inteqral cəmləri düzəltməklə və onların limitini tapmaqla aşağıdakı məsələləri həll edin:

2516. Əgər çubuğun xətti sıxlığı $\delta=6+0{,}3x$ *kq/m* qanunu ilə dəyişirsə, uzunluğu $l=10$ *m* olan çubuğun kütləsini tapın, burada x - çubuğun üclarının birindən olan məsafədir.

2517. Radiusu R olan Yer səthindən kütləsi m olan cismi h hündürlüyünə qaldırmaq üçün hansı işi sərf etmək lazımdır? Əgər cisim sonsuzluğa qalxırsa, bu iş nəyə bərabərdir?

2518. Əgər 1 *kQ* qüvvə elastik yayı 1 *sm* dartırsa, bu yayı 10 *sm* dartmaq üçün hansı işi sərf etmək lazımdır?

G ö s t ə r i ş. **Huk qanunundan istifadə etməli.**

2519. Diametri 20 *sm* və uzunluğu 80 *sm* olan silindr 10 kQ/sm^2 təzyiq altında buxarla doldurulub. Buxarın temperaturunun sabit qaldığını qəbul edərək buxarın həcmini iki dəfə azaltmaq üçün hansı işi sərf etmək lazımdır?

2520. Diametri su səthində yerləşən a radiuslu yarımdairə şəklində şaquli divara suyun təzyiq qüvvəsini tapın.

2521. Əgər aşağı oturacağının suya batma səviyyəsi $c=20$ *m* olarsa, aşağı oturacağı $a=10$ *m*, yuxarı oturacağı $b=6$ *m* və hündürlüyü $h=5$ *m* olan trapesiya şəkilli şaquli divara suyun təzyiq qüvvəsini tapın.

Diferensial tənlik qurmaqla aşağıdakı məsələləri həll edin:

2522. Nöqtənin sürəti $v=v_0+at$ qanunu ilə dəyişir. Bu nöqtə $[0,\ T]$ vaxt aralığında hansı yolu gedəcək?

2523. Radiusu R və sıxlığı δ olan bircins kürə öz diametri ətrafında ω bucaq sürəti ilə fırlanır. Kürənin kinetik enerjisini tapın.

2524. Xətti sıxlığı μ_0 olan maddi sonsuz xətt bundan a məsafədə yerləşən m kütləli maddi nöqtəni hansı qüvvə ilə cəzb edir?

2525. Radiusu a və sabit δ səth sıxlığı olan dairəvi lövhə onun Q mərkəzindən keçən, bu lövhə müstəvisinə perpendikulyar üzərində yerləşən və b-yə bərabər ən qısa PQ məsafəsində olan m kütləli maddi nöqtəni hansı qüvvə ilə cəzb edir?

2526. Toriçelli qanununa görə qabdan mayenin axma sürəti

$$v=c\sqrt{2gh}$$

olur, burada g - ağırlıq qüvvəsinin təcili, h - maye səthindən deşiyə qədər olan hündürlük və $c=0{,}6$ - sınaq əmsalıdır.

Diametri $D=1$ *m* və hündürlüyü $H=2$ *m* olan tam doldurulmuş şaquli silindrik çəllək dibində diametri $d=1$ *sm* olan dairəvi deşikdən nə qədər vaxta boşalar?

2527. Fırlanma cismindən alınan qab hansı şəkildə olmalıdır ki, maye axdıqda səviyyəsi müntəzəm olaraq aşağı düşsün?

2528. Zamanın istənilən anında radiumun ayrılma sürəti onun başlanğıc miqdarına mütənasibdir. Əgər $t=0$ başlanğıc anında Q_0 qram radium olarsa və $T=1600$ ildən sonra isə onun kütləsi iki dəfə azalarsa, onda radiumun ayrılma qanununu tapın.

2529. İkinci tərtib proses halı üçün A maddəsini B maddəsinə çevirən kimyəvi reaksiyanın sürəti bu maddələrin konsentrasiyaları hasili ilə düz mütənasibdir. Əgər $t=0$ *dəq*. olduqda B maddəsi 20%, $t=15$ *dəq*. olduqda isə bu maddə 80% təşkil edibsə, $t=1$ *saat*-dan sonra qabda B maddəsi neçə faiz təşkil edər?

2530. Huk qanununa görə çubuğun ε uzanması uyğun en kəsiyindəki σ gərginlik qüvvəsinə mütənasibdir, yəni

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E},$$

burada E - Yunq moduludur.

Oturacağı bərkidilmiş və təpəsi aşağı yönəlmiş konus formalı ağır çubuğun oturacağının radiusu R, hündürlüyü H və xüsusi çəkisi γ olarsa, onun uzanmasını təyin edin.

§ 11. Müəyyən inteqralların təqribi hesablanması

1°. Düzbucaqlılar düsturu. Əgər $y=y(x)$ funksiyası sonlu $[a, b]$ parçasında kəsilməz və kifayət qədər diferensiallanandırsa və $h=\frac{b-a}{n}$, $x_i=a+ih$ $(i=0,1,\dots,n)$, $y_i=y(x_i)$ olarsa, onda

$$\int_a^b y(x)dx = h(y_0+y_1+\dots+y_{n-1})+R_n,$$

burada

$$R_n=\frac{(b-a)h}{2}y'(\xi) \quad (a\le\xi\le b).$$

2°. Trapeslər düsturu. Göstərilən işarələmələr daxilində

$$\int_a^b y(x)dx = h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\dots+y_{n-1}\right)+R_n,$$

burada

$$R_n=-\frac{(b-a)h^2}{12}f''(\xi') \quad (a\le\xi'\le b).$$

3°. Parabolik düstur (Simpson düsturu). $n=2k$ götürərək

$$\int_a^b y(x)\,dx=\frac{h}{3}[(y_0+y_{2k})+4(y_1+y_3+\dots+y_{2k-1})+$$
$$+2(y_2+y_4+\dots+y_{2k-2})]+R_n$$

alarıq, burada

$$R_n=-\frac{(b-a)h^4}{180}f^{IV}(\xi'') \quad (a\le\xi''\le b).$$

2531. Düzbucaqlılar düsturundan $(n=12)$ istifadə edərək

$$\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx$$

inteqralını təqribi hesablayın və nəticəni dəqiq cavabla müqayisə edin.

Aşağıdakı inteqralları trapeslər düsturunun köməyi ilə hesablayın və onların xətasını qiymətləndirin:

2532. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ $(n=8)$.

2533. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$ $(n=12)$.

2534. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}\,dx$ $(n=6)$.

Simpson düsturunun köməyi ilə aşağıdakı inteqralları hesablayın:

2535. $\int_1^9 \sqrt{x}\,dx$ $(n=4)$.

2536. $\int_0^{\pi} \sqrt{3+\cos x}\,dx$ $(n=6)$.

2537. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx$ $(n=10)$.

2538. $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\ln(1+x)}$ $(n=6)$.

2539. $n=10$ qəbul edərək

$$G=\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx$$

Katalan sabitini hesablayın.

2540. $\frac{\pi}{4}=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ düsturundan istifadə edərək π-ni 10^{-5} dəqiqliklə hesablayın.

2541. $\int_0^1 e^{x^2}dx$ inteqralını 0,001 dəqiqliklə hesablayın.

2542. $\int_0^1 (e^x-1)\ln\frac{1}{x}dx$ inteqralını 10^{-4} dəqiqliklə hesablayın.

2543. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ ehtimal inteqralını 0,001 dəqiqliklə hesablayın.

2544. Yarımoxları $a=10$ və $b=6$ olan ellipsin uzunluğunu təqribi hesablayın.

2545. $\Delta x=\frac{\pi}{3}$ qəbul edərək

$$y=\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt \qquad (0\le x\le 2\pi)$$

funksiyasının qrafikini nöqtələrlə qurun.

V BÖLMƏ

SIRALAR

§1. Ədədi sıralar. Sabitişarəli sıraların yığılma əlamətləri

1°. Ü m u m i   a n l a y ı ş l a r. Əgər

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n \qquad (1)$$

ədədi sırası üçün sonlu

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S \qquad (\textit{sıranın cəmi})$$

limiti varsa, onda sıra *yığılan* adlanır, burada $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$. Əks halda (1) sırası *dağılan* adlanır.

2°. K o ş i   m e y a r ı. (1) sırasının yığılan olması üçün zəruri və kafi şərt istənilən $\varepsilon>0$ ədədinə görə elə $N=N(\varepsilon)$ ədədinin varlığıdır ki, ixtiyari $n>N$ və $p>0$ (n və p -natural ədədlərdir) üçün

$$\left|S_{n+p}-S_n\right|=\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}a_i\right|<\varepsilon$$

bərabərsizliyi ödənilsin.
Xüsusi halda, əgər sıra yığılırsa, onda

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

3°. I M ü q a y i s ə   ə l a m ə t i. Tutaq ki, (1) sırasından başqa

$$b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots \qquad (2)$$

sırası da verilmişdir.

Əgər $n\geq n_0$ üçün

$$0\leq a_n\leq b_n$$

bərabərsizliyi ödənirsə, onda 1) (2) sırasının yığılmasından (1) sırasının yığılması alınır; 2) (1) sırasının dağılmasından (2) sırasının dağılması alınır.

Xüsusi halda, əgər $n\to\infty$ olduqda $a_n\sim b_n$ olarsa, onda müsbətişarəli hədləri olan (1) və (2) sıraları eyni vaxtda ya yığılır, ya da dağılır.

4°. II M ü q a y i s ə   ə l a m ə t i. Əgər

$$a_n=O^*\left(\frac{1}{n^p}\right)\ ^{*)}$$

olarsa, onda (1) sırası *a*) $p>1$ olduqda yığılır və *b*) $p\leq1$ olduqda dağılır.

5°. D a l a m b e r   ə l a m ə t i. Əgər $a_n>0$ $(n=1,2,\ldots)$ və

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$$

olarsa, onda (1) sırası *a*) $q<1$ olduqda yığılır və *b*) $q>1$ olduqda dağılır.

---

*) O^* simvolunun mənasına bax: I bölmə, §6, 1°.

6⁰. **Koşi əlaməti.** Əgər $a_n \geq 0$ $(n=1, 2, \ldots)$ və

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$$

olarsa, onda (1) sırası *a*) $q<1$ olduqda yığılır və *b*) $q>1$ olduqda dağılır.

7⁰. **Raabe əlaməti.** Əgər $a_n > 0$ $(n=1, 2, \ldots)$ və

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = p$$

olarsa, onda (1) sırası *a*) $p>1$ olduqda yığılır və *b*) $p<1$ olduqda dağılır.

8⁰. **Qauss əlaməti.** Əgər $a_n > 0$ $(n=1, 2, \ldots)$ və

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$$

olarsa, onda *a*) $\lambda>1$ olduqda (1) sırası yığılır və *b*) $\lambda<1$ olduqda dağılır; *c*) $\lambda=1$ olduqda əgər $\mu>1$ olarsa, (1) sırası yığılır və əgər $\mu \leq 1$ olarsa, dağılır, burada $|\theta_n| < C$ və $\varepsilon > 0$.

9⁰. **Koşi inteqral əlaməti.** Əgər $f(x)$ $(x>0)$ - mənfi olmayan və artmayan funksiyadırsa, onda

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

sırası

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$$

inteqralı ilə eyni vaxtda yığılır və ya dağılır.

Aşağıdakı sıraların yığılan olduğunu isbat edin və onların cəmini tapın:

2546. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}+\ldots$

2547. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\ldots$

2548. $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}+\ldots$

2549. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$

2550. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots$

2551. *a*) $q\sin\alpha + q^2\sin 2\alpha + \ldots + q^n \sin n\alpha + \ldots;$

b) $q\cos\alpha + q^2\cos 2\alpha + \ldots + q^n\cos n\alpha + \ldots$ $(|q|<1)$.

2552. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

2553. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ sırasının yığılmasını araşdırın.

G ö s t ə r i ş. Göstərin ki, $x \neq k\pi$ (k - tamdır) üçün $n \to \infty$ olduqda $\sin nx \to 0$ olmur.

2554. İsbat edin ki, əgər $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sırası yığılırsa, onda verilmiş sıranın hədlərinin yerlərini dəyişməməklə qruplaşdırdıqda alınan $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ sırası da yığılır və bu sıranın cəmi verilən sıranın cəminə bərabərdir, burada $A_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i$ $(p_1 = 1,\ p_1 < p_2 < \ldots)$. Bunun tərsi doğru deyil; misal göstərin.

2555. İsbat edin ki, əgər $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sırasının hədləri müsbətdirsə və bu sıranın hədlərini qruplaşdırdıqda alınan $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ sırası yığılırsa, onda verilən sıra da yığılır.

Sıraların yığılmasını araşdırın:

2556. $1-1+1-1+1-1+\ldots$

2557. $0{,}001+\sqrt{0{,}001}+\sqrt[3]{0{,}001}+\ldots$

2558. $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$

2559. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\ldots$

2560. $\frac{1}{1001}+\frac{1}{2001}+\frac{1}{3001}+\ldots+\frac{1}{1000n+1}+\ldots$

2561. $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\ldots+\frac{n}{2n-1}+\ldots$

2562. $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots$

2563. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n+1}}+\ldots$

2564. $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}+\ldots$

2565. İsbat edin ki, ədədi silsilənin hədlərinin tərsindən düzəlmiş ədədi sıra dağılır.

2566. İsbat edin ki, əgər $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (A), $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (B) sıraları yığılırsa və

$a_n \le c_n \le b_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$ olarsa, onda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ (C) sırası da yığılır. Əgər (A) və (B) sıraları dağılırsa, onda (C) sırasının yığılması haqqında nə demək olar?

2567. Tutaq ki, hədləri mənfi olmayan dağılan

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{və} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

sıraları verilmişdir.

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n) \qquad \text{və} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$$

sıralarının yığılması haqqında nə demək olar?

2568. İsbat edin ki, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \ge 0)$ sırası yığılırsa, onda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ sırası da yığılır. Əks təklif doğru deyil; misal göstərin.

2569. İsbat edin ki, əgər $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ və $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ sıraları yığılırsa, onda

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$$

sıraları da yığılır.

2570. İsbat edin ki,

$$\lim_{n\to\infty} n a_n = a \ne 0$$

olarsa, onda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sırası dağılır.

2571. İsbat edin ki, əgər hədləri müsbət və monoton azalan olan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sırası yığılırsa, onda

$$\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$$

olar.

2572. $p = 1, 2, 3, \ldots$ olduqda

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}) = 0$$

olarsa, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sırası yığılandırmı?

Koşi meyarından istifadə edərək aşağıdakı sıraların yığılan olduğunu isbat edin:

2573. $a_0 + \dfrac{a_1}{10} + \ldots + \dfrac{a_n}{10^n} + \ldots \quad (|a_n| < 10)$.

2574. $\dfrac{\sin x}{2} + \dfrac{\sin 2x}{2^2} + \ldots + \dfrac{\sin nx}{2^n} + \ldots$

2575. $\frac{\cos x - \cos 2x}{1} + \frac{\cos 2x - \cos 3x}{2} + \ldots$

$$\ldots + \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n} + \ldots$$

2575.1. $\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos x^2}{2^2} + \ldots + \frac{\cos x^n}{n^2} + \ldots$

Göstəriş. $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ bərabərsizliyindən istifadə edin.

Koşi meyarından istifadə edərək aşağıdakı sıraların dağılan olduğunu isbat edin:

2576. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$

2577. $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$

2577.1. $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \ldots$

Müqayisə, Dalamber və ya Koşi əlamətlərindən istifadə edərək aşağıdakı sıraların yığılmasını araşdırın:

2578. $\frac{1000}{1!} + \frac{1000^2}{2!} + \frac{1000^3}{3!} + \ldots + \frac{1000^n}{n!} + \ldots$

2579. $\frac{(1!)^2}{2!} + \frac{(2!)^2}{4!} + \ldots + \frac{(n!)^2}{(2n)!} + \ldots$

2580. $\frac{1!}{1} + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \ldots + \frac{n!}{n^n} + \ldots$

2581. *a)* $\frac{2\cdot 1!}{1} + \frac{2^2\cdot 2!}{2^2} + \frac{2^3\cdot 3!}{3^3} + \ldots + \frac{2^n n!}{n^n} + \ldots;$

b) $\frac{3\cdot 1!}{1} + \frac{3^2\cdot 2!}{2^2} + \frac{3^3\cdot 3!}{3^3} + \ldots + \frac{3^n n!}{n^n} + \ldots$

2582. $\frac{(1!)^2}{2} + \frac{(2!)^2}{2^4} + \frac{(3!)^2}{2^9} + \ldots + \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} + \ldots$

2583. $\frac{1000}{1} + \frac{1000\cdot 1001}{1\cdot 3} + \frac{1000\cdot 1001\cdot 1002}{1\cdot 3\cdot 5} + \ldots$

2584. $\frac{4}{2} + \frac{4\cdot 7}{2\cdot 6} + \frac{4\cdot 7\cdot 10}{2\cdot 6\cdot 10} + \ldots$

2585. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2} - \sqrt[3]{2})(\sqrt{2} - \sqrt[5]{2})\ldots(\sqrt{2} - \sqrt[2n+1]{2}).$

2585.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, burada

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & n = m^2 \text{ olduqda}, \\ \dfrac{1}{n^2}, & n \neq m^2 \text{ olduqda} \end{cases}$$

(m - natural ədəddir).

2585.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx \prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sin^2 k\alpha}{1+x^2+\cos^2 k\alpha}$.

2586. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^n}$.

2587. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^n}$.

2588. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$.

2589. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$.

2589.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^5}{2^n+3^n}$.

2589.2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$.

2590. $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\ldots$

G ö s t ə r i ş. $\sqrt{2} = 2\cos\dfrac{\pi}{4}$.

2591. İsbat edin ki, əgər

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad (a_n > 0)$$

olarsa, onda $a_n = o(q_1^n)$ olar, burada $q_1 > q$.

2591.1. Tutaq ki, müsbəthədli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n > 0)$ sırasının hədləri üçün $n \geq n_0$ olduqda

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \rho < 1$$

bərabərsizliyi doğrudur. İsbat edin ki, sıranın

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$$

qalığı üçün $n \geq n_0$ olduqda

$$R_n \leq a_{n_0} \cdot \frac{\rho^{n-n_0+1}}{1-\rho}$$

qiymətləndirməsi doğrudur.

2591.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(2n)!!]^2}{(4n)!!}$ sırasının neçə həddini götürmək lazımdır ki, uyğun S_n xüsusi cəmi sıranın S cəmindən $\varepsilon=10^{-6}$-dan az fərqlənsin, burada $(2n)!!=2\cdot 4\ \dots\ 2n$?

2592. İsbat edin ki, əgər

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q<1 \qquad (a_n>0)$$

olarsa, onda $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ sırası yığılır.

Əks təklif doğru deyil.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\dots$$

misalına baxın.

2593. İsbat edin ki, əgər $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ $(a_n>0)$ sırası üçün

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q \qquad (A)$$

limiti varsa, onda həmçinin

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q \qquad (B)$$

limiti də var.

Əks təklif doğru deyil: əgər (B) limiti varsa, (A) limiti olmaya da bilər.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$$

misalına baxın.

2594. İsbat edin ki, əgər

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=q \quad (a_n\ge 0)$$

olarsa, onda *a*) $q<1$ olduqda $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ sırası yığılır; *b*) $q>1$ olduqda bu sıra dağılır (*ümumiləşmiş Koşi əlaməti*).

Sıraların yığılmasını araşdırın:

2595. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$.

2596. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$.

2597. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n}$.

2597.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}$.

Raabe və Qauss əlamətlərindən istifadə edərək aşağıdakı sıraların yığılmasını araşdırın:

2598. $\left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^p + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^p + \dots$

2599. $\frac{a}{b} + \frac{a(a+d)}{b(b+d)} + \frac{a(a+d)(a+2d)}{b(b+d)(b+2d)} + \dots$

$(a>0,\ b>0,\ d>0).$

2600. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+p}}$. **2601.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\dots(2+\sqrt{n})}$.

2602. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!n^{-p}}{q(q+1)\dots(q+n)}$ $(q>0)$.

2603. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^q}$.

2604. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\dots(2n)}\right]^p \cdot \frac{1}{n^q}$.

2605(y). $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{q(q+1)\dots(q+n-1)}\right]^{\alpha}$ $(p>0,\ q>0)$.

2606(y). İsbat edin ki, əgər müsbəthədli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n > 0)$ sırası üçün

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty$$

olarsa, onda

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^{p-\varepsilon}}\right), \quad n \to \infty$$

olar, burada $\varepsilon > 0$ kifayət qədər kiçik ədəddir və əgər $p > 0$ olarsa, onda $n \to \infty$ olduqda $a_n \downarrow 0$, yəni $n \ge n_0$ olduqda a_n monoton azalaraq $n \to \infty$ olduqda sıfra yaxınlaşır.

a_n ümumi həddinin azalma tərtibini müəyyən edərək $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sırasının yığılmasını araşdırın:

2607. $a_n = \frac{n^p + a_1 n^{p-1} + \dots + a_p}{n^q + b_1 n^{q-1} + \dots + b_q}$, burada $n^q + b_1 n^{q-1} + \dots + b_q > 0$.

2608. $a_n = \frac{1}{n^p}\sin\frac{\pi}{n}$.

2609. $a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^p \ln\dfrac{n-1}{n+1}$ $(n>1)$.

2610. $a_n = \ln^p\left(\sec\dfrac{\pi}{n}\right)$.

2611. $a_n = \log_{b^n}\left(1+\dfrac{\sqrt[n]{a}}{n}\right)$ $(a>0, b>0)$.

2612. $a_n = \left[e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]^p$.

2613. $a_n = \dfrac{1}{n^{1+\frac{k}{\ln n}}}$. **2614.** $a_n = \dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.

2614.1. *Jame əlamətini* isbat edin: əgər $n > n_0$ olduqda $(1-\sqrt[n]{a_n})\dfrac{n}{\ln n} \geq$ $\geq p > 1$ olarsa, onda müsbəthədli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \geq 0)$ sırası yığılır və əgər $n > n_0$ olduqda $(1-\sqrt[n]{a_n})\dfrac{n}{\ln n} \leq 1$ olarsa, onda bu sıra dağılır.

2615. İsbat edin ki, əgər elə $\alpha>0$ ədədi varsa ki, $n \geq n_0$ olduqda $\dfrac{\ln(1/a_n)}{\ln n} \geq 1+\alpha$ olsun, onda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n > 0)$ sırası yığılır və $n \geq n_0$ olduqda $\dfrac{\ln(1/a_n)}{\ln n} \leq 1$ olarsa, onda bu sıra dağılır (*loqarifmik əlamət*).

Ümumi həddi verilmiş sıraların yığılmasını araşdırın:

2616. $a_n = n^{\ln x}$ $(x>0)$.

2617. $a_n = \dfrac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$ $(n>1)$.

2618. $a_n = \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$ $(n>1)$

Koşi inteqral əlamətindən istifadə edərək ümumi həddi verilmiş sıraların yığılmasını araşdırın:

2619. $a_n = \dfrac{1}{n\ln^p n}$ $(n>1)$.

2620. $a_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$ $(n>2)$.

2620.1. Sıranın yığılmasını araşdırın:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln 2\cdot\ln 3\ldots\ln(n+1)}{\ln(2+p)\cdot\ln(3+p)\ldots\ln(n+1+p)}\quad (p>0).$$

2620.2. Sıranın yığılmasını araşdırın:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\nu(n)}{n^2},$$

burada $\nu(n)$ - n ədədinin rəqəmlərinin sayıdır.

2620.3. Tutaq ki, λ_n $(n=1,\ 2,\ \ldots)$

$$\operatorname{tg}x = x$$

tənliyinin müsbət ardıcıl kökləridir.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-2}$$

sırasının yığılmasını araşdırın.

2621. Sıranın yığılmasını araşdırın:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)}.$$

2622. İsbat edin ki, monoton azalan müsbəthədli $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ sırası $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n a_{2^n}$ sırası ilə eyni vaxtda yığılır və ya dağılır.

2623. Tutaq ki, $f(x)$ - monoton artmayan müsbət funksiyadır.

İsbat edin ki, əgər $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ sırası yığılırsa, onda onun

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}f(k)$$

qalığı üçün

$$\int_{n+1}^{+\infty}f(x)\,dx < R_n < f(n+1)+\int_{n+1}^{+\infty}f(x)\,dx$$

qiymətləndirməsi doğrudur.

Bundan istifadə edərək

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$$

sırasının cəmini 0,01 dəqiqliklə tapın.

2624. *Yermakov əlamətini* isbat edin: tutaq ki, $f(x)$ - monoton azalan müsbət funksiyadır və

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x f(e^x)}{f(x)}=\lambda .$$

İsbat edin ki, $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ sırası $\lambda<1$ olduqda yığılır və $\lambda>1$ olduqda dağılır.

2625. *Lobaçevski əlamətini* isbat edin: hədləri müsbət və monoton sıfra yaxınlaşan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sırası

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m 2^{-m}$$

sırası ilə eyni vaxtda yığılır və ya dağılır, burada p_m -

$$a_n \ge 2^{-m} \quad (n=1,\,2,\,\dots,\,p_m)$$

bərabərsizliyini ödəyən a_n hədlərinin ən böyük indeksidir.

Aşağıdakı sıraların yığılmasını araşdırın:

2626. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^{\alpha}}$.

2627. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+a}-\sqrt[4]{n^2+n+b})$.

2628. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{ctg}\frac{n\pi}{4n-2}-\sin\frac{\pi n}{2n+1}\right)$.

2629. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}\right)$.

2630. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n!)}{n^{\alpha}}$.

2631. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[3]{n}}$.

2632. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}$.

2633. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1\right)$.

2634. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{a\ln n+b}{c\ln n+d}}$.

2635. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^2\left(\sin\frac{1}{n}\right)}$.

2636. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^3}$.

2637. $\sum_{n=3}^{\infty}\ln\left(\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)$.

2638. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$.

2639. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.

2640. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a^{\frac{1}{n}}-\frac{b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{2}\right)$.
$(a>0,\,b>0,\,c>0)$.

2641. $\sum_{n=1}^{\infty}(n^{n^{\alpha}}-1)$.

2642. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln\frac{1}{n^{\alpha}}-\ln\left(\sin\frac{1}{n^{\alpha}}\right)\right]$.

2643. $\sum_{n=1}^{\infty} a^{-(b\ln n + c\ln^2 n)} \quad (a>0).$

2644. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}$
$(a>0, b>0).$

2645. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n+1)!]^n}{2!\cdot 4!\ldots(2n)!}.$

Ümumi hədləri verilmiş $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ sıralarının yığılmasını araşdırın:

2646. $u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x^2}.$

2647. $u_n = \frac{1}{\int_0^n \sqrt[4]{1+x^4}\,dx}.$

2648. $u_n = \int_{\pi n}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx.$

2649. $u_n = \int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}}\,dx.$

2650. $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^3 x}{1+x}\,dx.$

2651. $u_n = \frac{1!+2!+\ldots+n!}{(2n)!}.$

2652. $u_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} \ln^2 k}{n^{\alpha}}.$

$x_n \quad (n=1,2,\ldots)$ ardıcıllığını uyğun sıra ilə əvəz edərək yığılmasını araşdırın:

2653. $x_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}.$

2654. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{(\ln n)^2}{2}.$

2655. Aşağıdakı sıranın təxminən neçə həddini götürmək lazımdır ki, onun cəmini 10^{-5} dəqiqliklə tapmaq mümkün olsun:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2};$ *b)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!};$ *c)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!}.$

§ 2. Dəyişənişarəli sıraların yığılma əlamətləri

1°. Sıranın mütləq yığılması. Əgər

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \qquad (1)$$

sırası yığılırsa, onda

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (2)$$

sırası *mütləq yığılan* adlanır. Bu halda (2) sırası da yığılır. Mütləq yığılan sıranın cəmi toplananların düzülüşündən asılı deyil.

(2) sırasının mütləq yığılmasını təyin etmək üçün (1) sırasına sabitişarəli sıralar üçün məlum olan yığılma əlamətlərini tətbiq etmək kifayətdir.

Əgər (2) sırası yığılan, lakin (1) sırası isə dağılan olarsa, onda (2) sırası *şərti yığılan* adlanır. Şərti yığılan sıranın toplananlarının yerini dəyişməklə onun cəmini istənilən ədədə bərabər etmək olar (*Riman teoremi*).

2°. Leybnis əlaməti. Əgər *a*) $b_n \geq b_{n+1}$ $(n=1, 2, \ldots)$ və *b*) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ olarsa, onda işarəsini növbə ilə dəyişən

$$b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \ldots + (-1)^{n-1} b_n + \ldots$$

$(b_n \geq 0)$ sırası yığılır (ümumiyyətlə, mütləq yığılmır). Bu halda sıranın

$$R_n = (-1)^n b_{n+1} + (-1)^{n+1} b_{n+2} + \ldots$$

qalığı üçün

$$R_n = (-1)^n \theta_n b_{n+1} \qquad (0 \leq \theta_n \leq 1)$$

qiymətləndirməsi doğrudur.

3°. Abel əlaməti.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \qquad (3)$$

sırası 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sırası yığıldıqda və 2) b_n $(n=1, 2, \ldots)$ ədədləri monoton və məhdud ardıcıllıq əmələ gətirdikdə yığılır.

4°. Dirixle əlaməti. Əgər (3) sırası üçün 1) $A_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ xüsusi cəmlər ardıcıllığı məhduddursa və 2) $n \to \infty$ olduqda b_n monoton olaraq sıfra yaxınlaşırsa, onda verilmiş sıra yığılır.

2656. İsbat edin ki, şərti yığılan sıranın hədlərini onların yerini dəyişmədən elə qruplaşdırmaq olar ki, alınan sıra mütləq yığılan olsun.

2657. İsbat edin ki, əgər aşağıdakı şərtlər ödənirsə, onda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sırası yığılandır: *a*) $n \to \infty$ olduqda sıranın a_n ümumi həddi sıfra yaxınlaşır, *b*) verilmiş sıranın hədlərinin yerini dəyişmədən onları qruplaşdırdıqda alınan $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ sırası yığılır, *c*) $A_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i$ $(1 = p_1 < p_2 < \ldots)$ həddinə daxil olan a_i toplananlarının sayı məhduddur.

2658. İsbat edin ki, əgər yığılan sıranın hədlərinin yerini elə dəyişsək ki, onlardan heç biri əvvəlki yerindən m yerdən çox olmayaraq uzaqlaşmasınlar, onda sıranın cəmi dəyişməz, burada m - əvvəlcədən verilmiş ədəddir.

Aşağıdakı sıraların yığılan olduğunu isbat edin və onların cəmini tapın:

2659. $1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \ldots$

2660. $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \ldots$ **2661.** $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$

G ö s t ə r i ş. $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n$ düsturunu tətbiq edin, burada C - Eyler sabitidir və $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

2662. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ olduğunu bilərək bu sıranın hədlərinin yerini dəyişməklə alınan

a) $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots$ və *b*) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots$

sıralarının cəmini tapın.

2663. Yığılan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

sırasının hədlərinin yerini elə dəyişdirin ki, alınan sıra dağılan olsun.

Dəyişənişarəli sıraların yığılmasını araşdırın:

2664. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$. **2665.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$.

2666. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \ldots$

2666.1. Tutaq ki,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n \tag{1}$$

sırası verilmişdir, burada $b_n > 0$ və $n \to \infty$ olduqda $b_n \to 0$. Buradan alınırmı ki, (1) sırası yığılandır?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2 + (-1)^n}{n}$$

misalına baxın.

2667. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^{100} n}{n}\sin\frac{n\pi}{4}$.

2668. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$.

2669. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}$.

2670. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

2671. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+k^2})$.

2672. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$.

2673. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$.

2673.1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}\cos\frac{\pi n^2}{n+1}$.

2674. İsbat edin ki, işarəsini növbə ilə dəyişən

$$b_1-b_2+b_3-b_4+\ldots+(-1)^{n-1}b_n+\ldots \qquad (b_n>0)$$

sırası

$$\frac{b_n}{b_{n+1}}=1+\frac{p}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

olduqda yığılır, burada $p>0$ (bax: 2606(y)).

Aşağıdakı sıraların mütləq və şərti yığılmasını araşdırın:

2675. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$.

2676. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$.

2677. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right]$.

2678. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n\sin^{2n}x}{n}$.

2679. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$.

2680. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left[n+(-1)^n\right]^p}$.

2681. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\left[\sqrt{n}+(-1)^{n-1}\right]^p}$.

2682. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\frac{n\pi}{4}}$.

2683. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$.

2684. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n^{100}}{2^n}$.

2685. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n^2]{n}}$.

2686. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{12}}{\ln n}$.

2687. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$.

2688. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$.

2689. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}\right]^p$.

2690. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n\cdot\sin n^2}{n}$. **2691.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin n^2$.

Göstəriş. İsbat edin ki, $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n^2\neq 0$.

2692. Tutaq ki,

$$R(x)=\frac{a_0x^p+a_1x^{p-1}+\ldots+a_p}{b_0x^q+b_1x^{q-1}+\ldots+b_q}$$

- rasional funksiyadır, burada $a_0\neq 0$, $b_0\neq 0$ və $x\geq n_0$ olduqda $|b_0x^q+b_1x^{q-1}+\ldots+b_q|>0$.

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}(-1)^nR(n)$$

sırasının mütləq və şərti yığılmasını araşdırın.

Sıraların yığılmasını araşdırın:

2693. $\dfrac{1}{1^p}-\dfrac{1}{2^q}+\dfrac{1}{3^p}-\dfrac{1}{4^q}+\dfrac{1}{5^p}-\dfrac{1}{6^q}+\ldots$

2694. $1+\dfrac{1}{3^p}-\dfrac{1}{2^p}+\dfrac{1}{5^p}+\dfrac{1}{7^p}-\dfrac{1}{4^p}+\ldots$

2695. $1+\dfrac{1}{3^p}-\dfrac{1}{1^p}+\dfrac{1}{5^p}+\dfrac{1}{7^p}-\dfrac{1}{3^p}+\dfrac{1}{9^p}+\dfrac{1}{11^p}-\dfrac{1}{5^p}+\ldots$

2696. $1-\dfrac{2}{2^q}+\dfrac{1}{3^p}+\dfrac{1}{4^p}-\dfrac{2}{5^q}+\dfrac{1}{6^p}+\dfrac{1}{7^p}-\dfrac{2}{8^q}+\dfrac{1}{9^p}+\ldots$

2697. İsbat edin ki,

$$a)\ \sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\ldots;$$

$$b)\ \cos x+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 3x}{3}+\ldots$$

sıraları $(0,\ \pi)$ intervalında şərti yığılır.

2698. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^p}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^p}$ $(0<x<\pi)$

sıraları üçün $(p,\ x)$ parametrləri vasitəsi ilə: *a*) mütləq yığılma oblastını; *b*) şərti yığılma oblastını tapın.

2698.1. Sıraların yığılmasını araşdırın:

a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\sqrt[n]{n}}{\ln n}$; *b*) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin\left(n+\dfrac{1}{n}\right)}{\ln(\ln n)}$; *c*) $\sum\limits_{n=10}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n+10\sin n}$.

2699. Verilmiş

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(1+p)(2+p)\ldots(n+p)}{n!\,n^q}$$

sırası üçün: *a*) mütləq yığılma oblastını; *b*) şərti yığılma oblastını təyin edin.

2700. Sıranın yığılmasını araşdırın:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\binom{m}{n},$$

burada $\binom{m}{n}=\dfrac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}$.

2701. Əgər $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ sırası yığılırsa və

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$$

olarsa, onda $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ sırası da yığılırmı?

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ və $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n}\right]$ misalına baxın.

2702. Tutaq ki, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ şərti yığılan sıradır və

$$P_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{|a_i|+a_i}{2},\qquad N_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{|a_i|-a_i}{2}.$$

İsbat edin ki,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n}{P_n}=1.$$

2703. İsbat edin ki, hər bir $p>0$ üçün

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$$

sırasının cəmi $\dfrac{1}{2}$ və 1 arasında yerləşir.

2703.1. Sıranın neçə həddini götürmək lazımdır ki, onun cəmini $\varepsilon=10^{-6}$ dəqiqliklə hesablamaq mümkün olsun:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+1}};\qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^0}{\sqrt{n}}.$$

2704. İsbat edin ki, əgər

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots$$

sırasının hədlərinin yerini elə dəyişsək ki, p sayda ardıcıl müsbət hədlər qrupunu q sayda ardıcıl mənfi hədlər qrupu əvəz etsin, onda yeni alınan sıranın cəmi

$$\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$$

olacaq.

2705. İsbat edin ki, əgər

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$$

harmonik sırasının hədlərinin yerini dəyişmədən onların işarəsini elə dəyişsək ki, p sayda müsbət hədlərdən sonra q sayda mənfi hədlər $(p\neq q)$ yerləşsin, onda alınan sıra yenə də dağılan olacaqdır. Yığılma yalnız $p=q$ olduqda mümkündür.

§ 3. Sıralar üzərində əməllər

Sıraların cəmi və hasili. Tərifə görə:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n);\qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}c_n$$

qəbul edirlər, burada

$$c_n=a_1b_n+a_2b_{n-1}+\ldots+a_nb_1 .$$

Göstərilən a) bərabərliyi hər iki $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ və $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ sıraları yığılırsa, b) bərabərliyi isə, əlavə olaraq, heç olmasa bu sıralardan biri mütləq yığılandırsa, formal məna daşımır.

2706. Əgər: a) sıralardan biri yığılan, digəri dağılandırsa; b) hər iki sıra dağılandırsa, onda onların cəmi haqqında nə demək olar?

2707. İki sıranın cəmini tapın:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{3^n}+\frac{(-1)^n}{n^3}\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\right].$$

Aşağıdakı sıraların cəmini tapın:

2708. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n}+\frac{(-1)^n}{3^n}\right].$ **2709.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}.$

2710. $\sum_{n=0}^{\infty}x^{\left[\frac{n}{2}\right]}y^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\quad (|xy|<1).$

2711. Göstərin ki, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=1$.

2712. Göstərin ki, $\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n \qquad (|q|<1)$.

2713. Göstərin ki, yığılan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

sırasının kvadratı dağılan sıradır.

2714. İsbat edin ki, iki yığılan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}} \quad (\alpha>0) \qquad \text{və} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}} \quad (\beta>0)$$

sıralarının hasili $\alpha+\beta>1$ olduqda yığılan və $\alpha+\beta<1$ olduqda dağılandır.

2715. Göstərin ki, dağılan

$$1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n \qquad \text{və} \qquad 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

sıralarının hasili yığılan sıradır.

§ 4. Funksional sıralar

1°. Y ı ğ ı l m a o b l a s t ı.

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots, \tag{1}$$

funksional sırasının yığılan olduğu bütün x qiymətlərinin X_0 çoxluğu verilmiş sıranın *yığılma oblastı*,

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}u_i(x) \qquad (x\in X_0)$$

funksiyası isə bu sıranın *cəmi* adlanır.

2°. M ü n t ə z ə m y ı ğ ı l m a . Əgər

$$f_1(x),\ f_2(x),\ldots,\ f_n(x),\ldots$$

funksiyalar ardıcıllığı üçün X çoxluğunda:

1) $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x) \quad (x\in X)$ limit funksiyası varsa,

2) istənilən $\varepsilon>0$ üçün elə $N=N(\varepsilon)$ ədədi varsa ki, $n>N$ və $x\in X$ olduqda

$$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

şərti ödənilsin, onda bu ardıcıllıq X çoxluğunda *müntəzəm yığılan* adlanır. Bu halda $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$ kimi yazırlar.

Əgər X çoxuluğunda (1) funksional sırasının

$$S_n(x)=\sum_{i=1}^{n}u_i(x) \qquad (n=1,2,\ldots)$$

xüsusi cəmlər ardıcıllığı müntəzəm yığılırsa, onda bu funksional sıra X çoxluğunda *müntəzəm yığılan* adlanır.

3°. Koşi meyarı. (1) sırasının X çoxluğunda müntəzəm yığılan olması üçün zəruri və kafi şərt ixtiyari $\varepsilon>0$ ədədinə görə elə $N=N(\varepsilon)$ ədədinin varlığıdır ki, istənilən $n>N$, $p>0$ natural ədədləri və hər bir $x\in X$ üçün

$$\left|S_{n+p}(x)-S_n(x)\right|=\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}u_i(x)\right|<\varepsilon$$

bərabərsizliyi ödənilsin.

4°. Veyerştrass əlaməti. Tutaq ki, yığılan müsbəthədli elə

$$c_1+c_2+\ldots+c_n+\ldots$$

ədədi sırası var ki, (1) funksional sırası üçün

$$\left|u_n(x)\right|\le c_n, \quad x\in X \quad (n=1,2,\ldots)$$

şərti ödənilir, onda (1) funksional sırası X çoxluğunda mütləq və müntəzəm yığılır.

5°. Abel əlaməti. Tutaq ki,

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x) \tag{3}$$

funksional sırası verilmişdir. Əgər: 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ sırası X çoxluğunda müntəzəm yığılırsa, 2) $b_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ funksiyalar ardıcıllığı müntəzəm məhduddursa və hər bir x üçün monotondursa, onda (3) sırası X çoxluğunda müntəzəm yığılır.

6°. Dirixle əlaməti. Əgər: 1) $\sum\limits_{n=1}^{N}a_n(x)$ xüsusi cəmlər ardıcıllığı müntəzəm məhduddursa, 2) $b_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ ardıcıllığı hər bir x üçün monotondursa və $n\to\infty$ olduqda X çoxluğunda müntəzəm olaraq sıfra yaxınlaşırsa, onda (3) sırası X çoxluğunda müntəzəm yığılır.

7°. Funksional sıraların xassələri. *a*) Müntəzəm yığılan kəsilməz funksiyalar sırasının cəmi də kəsilməz funksiyadır.

b) Əgər (1) funksional sırası hər bir $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$-də müntəzəm yığılırsa və sonlu

$$\lim_{x\to a}u_n(x)=A_n \qquad (n=1,2,\ldots)$$

limitləri varsa, onda 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ sırası yığılır və 2) aşağıdakı

$$\lim_{x\to a}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\lim_{x\to a}u_n(x)\right\}$$

bərabərliyi doğrudur.

c) Əgər yığılan (1) sırasının hədləri $a<x<b$ olduqda kəsilməz diferensiallanandırsa və törəmələrindən düzəlmiş $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ sırası (a,b) intervalında müntəzəm yığılırsa, onda

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x), \quad x\in(a,b).$$

d) Əgər (1) sırasının hədləri kəsilməzdirsə və bu sıra $[a,b]$ parçasında müntəzəm yığılırsa, onda

$$\int_a^b\left\{\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right\}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,dx. \qquad (4)$$

Əgər $n\to\infty$ olduqda $\int_a^b R_n(x)\,dx\to 0$ olarsa, onda, ümumiyyətlə, (4) düsturu doğrudur, burada $R_n(x)=\sum_{i=n+1}^{\infty}u_i(x)$. Sonuncu şərt inteqrallama sərhədləri sonsuz olduqda da doğrudur.

Aşağıdakı funksional sıralar üçün yığılma (mütləq və şərti) oblastını təyin edin:

2716. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$.

2717. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

2718. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$.

2719. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots(2n)}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n$.

2720. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^{2n}}{2^n}x^n(1-x)^n$.

2721. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\sin^n x}{n^2}$.

2722. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(x+n)^p}$.

2723. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p\sin nx}{1+n^q}$ $(q>0;\quad 0<x<\pi)$.

2724. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}$ (Lambert sırası).

2725. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x(x+n)}{n}\right]^n$.

2726. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

2727. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^n)}$.

2728. $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$.

2729. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\cdot\frac{1}{1+a^{2n}x^2}$.

2730. $\sum_{n=1}^{\infty}(2-x)(2-x^{\frac{1}{2}})(2-x^{\frac{1}{3}})\ldots(2-x^{\frac{1}{n}})$ $(x>0)$.

2731. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$.

2732. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^ny^n}{x^n+y^n}$ $(x>0;\ y>0)$.

2733. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+y^n}\quad (y\ge 0)$.

2735. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+x^n)}{n^y}\quad (x\ge 0)$.

2734. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{|x|^{n^2}+|y|^{n^2}}$.

2736. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}^n\left(x+\frac{y}{n}\right)$.

2737. İsbat edin ki, əgər $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}a_nx^n$ *Loran sırası* $x=x_1$ və $x=x_2$ $(|x_1|<|x_2|)$ olduqda yığılırsa, onda bu sıra $|x_1|<|x|<|x_2|$ olduqda da yığılır.

2738. Verilmiş

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{n}{2^{|n|}}x^n$$

Loran sırasının yığılma oblastını təyin edin və onun cəmini tapın.

2739. Verilmiş

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{[n]}}{n!};\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\frac{x^{[n]}}{n!};\quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(ex)^n y^{[n]}}{n^n}$$

Nyuton sıralarının yığılma (mütləq və şərti) oblastını tapın, burada

$$x^{[n]}=x(x-1)\ldots[x-(n-1)].$$

2740. İsbat edin ki, əgər $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ *Dirixle sırası* $x=x_0$ olduqda yığılırsa, onda bu sıra $x>x_0$ olduqda da yığılır.

2741. İsbat edin ki, $f_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ ardıcıllığının X çoxluğunda $f(x)$ limit funksiyasına müntəzəm yığılması üçün zəruri və kafi şərt

$$\lim_{n\to\infty}\{\sup_{x\in X} r_n(x)\}=0$$

olmasıdır, burada $r_n(x)=|f(x)-f_n(x)|$.

2742. $f_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ ardıcıllığı üçün göstərilən halların nə demək olduğunu izah edin: *a*) ardıcıllıq $(x_0, +\infty)$ intervalında yığılır; *b*) ardıcıllıq hər bir sonlu $(a, b)\subset(x_0, +\infty)$ intervalında müntəzəm yığılır; *c*) ardıcıllıq $(x_0, +\infty)$ intervalında müntəzəm yığılır.

2743. Verilmiş

$$f_n(x)=x^n\quad (n=1, 2, \ldots)\quad (0<x<1)$$

ardıcıllığı üçün elə ən kiçik $N=N(\varepsilon, x)$ natural ədədi tapın ki, bu ədəddən başlayaraq ardıcıllığın hədlərinin verilmiş x nöqtəsində limit funksiyasından meyli 0,001-dən çox olmasın; $x=\frac{1}{10}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt[m]{10}}, \ldots$ götürün. Bu ardıcıllıq $(0,1)$ intervalında müntəzəm yığılırmı?

2744. Verilmiş $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$ sırasının neçə həddini götürmək lazımdır ki, $-\infty < x < +\infty$ olduqda $S_n(x)$ xüsusi cəmi sıranın cəmindən ε-dan az olaraq fərqlənsin? *a)* $\varepsilon = 0{,}1$; *b)* $\varepsilon = 0{,}01$; *c)* $\varepsilon = 0{,}001$ olduqda ədədi hesablama aparın.

2745. Hansı n-lər üçün

$$\left| e^x - \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \right| < 0{,}001 \qquad (0 \le x \le 10)$$

bərabərsizliyinin ödənilməsi mümkündür?

Verilmiş ardıcıllıqların göstərilən aralıqlarda müntəzəm yığılmasını araşdırın:

2746. $f_n(x) = x^n$; *a)* $0 \le x \le \frac{1}{2}$; *b)* $0 \le x \le 1$.

2747. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$; $0 \le x \le 1$.

2748. $f_n(x) = x^n - x^{2n}$; $0 \le x \le 1$.

2749. $f_n(x) = \frac{1}{x+n}$; $0 < x < +\infty$.

2750. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}$; $0 \le x \le 1$.

2751. $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$; *a)* $0 \le x \le 1-\varepsilon$; *b)* $1-\varepsilon \le x \le 1+\varepsilon$;
c) $1+\varepsilon \le x < +\infty$, burada $\varepsilon > 0$.

2752. $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$; *a)* $0 \le x \le 1$; *b)* $1 < x < +\infty$.

2753. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$; $-\infty < x < +\infty$.

2754. $f_n(x) = n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$; $0 < x < +\infty$.

2755. *a)* $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$; $-\infty < x < +\infty$;

b) $f_n(x) = \sin\frac{x}{n}$; $-\infty < x < +\infty$.

2756. *a)* $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$; $0 < x < +\infty$;

b) $f_n(x) = x \operatorname{arctg} nx$; $0 < x < +\infty$.

2757. $f_n(x) = e^{n(x-1)}$; $0 < x < 1$.

2758. $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$; *a)* $-l < x < l$, burada l - ixtiyari müsbət ədəddir; *b)* $-\infty < x < +\infty$.

2759. $f_n(x)=\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}$; $0<x<1$.

2760. $f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$; *a*) sonlu (a, b) intervalında; *b*) $(-\infty;+\infty)$ intervalında.

2761. $f_n(x)=n(x^{\frac{1}{n}}-1)$; $1\le x\le a$.

2762. $f_n(x)=\sqrt[n]{1+x^n}$; $0\le x\le 2$.

2763. $f_n(x)=\begin{cases} n^2x, & 0\le x\le\frac{1}{n} \text{ olduqda};\\ n^2\left(\frac{2}{n}-x\right), & \frac{1}{n}<x<\frac{2}{n} \text{ olduqda};\\ 0, & x\ge\frac{2}{n} \text{ olduqda,}\end{cases}$

$0\le x\le 1$ parçasında.

2764. Tutaq ki, $f(x)$ - $[a, b]$ parçasında təyin olunmuş ixtiyari funksiyadır və

$$f_n(x)=\frac{[nf(x)]}{n} \quad (n=1, 2, \ldots).$$

İsbat edin ki, $n\to\infty$ olduqda

$$f_n(x)\rightrightarrows f(x) \quad (a\le x\le b).$$

2765. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyasının (a, b) intervalında kəsilməz $f'(x)$ törəməsi var və

$$f_n(x)=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right].$$

İsbat edin ki, $\alpha\le x\le\beta$ parçasında $f_n(x)\rightrightarrows f'(x)$, burada $a<\alpha<\beta<b$.

2766. Tutaq ki, $f_n(x)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(x+\frac{i}{n}\right)$, burada $f(x)$ - kəsilməz funksiyadır. İsbat edin ki, $f_n(x)$ ardıcıllığı istənilən sonlu $[a, b]$ parçasında müntəzəm yığılır.

Aşağıdakı sıraların yığılma xüsusiyyətini araşdırın:

2767. $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ *a*) $|x|<q$ intervalında, burada $q<1$;

b) $|x|<1$ intervalında.

2768. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$; $-1\le x\le 1$ parçasında.

2768.1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$; $(0, +\infty)$ intervalında.

2769. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$; $0 \le x \le 1$ parçasında.

2770. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$; $-1 \le x \le 1$.

2771. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}$; $0 < x < +\infty$.

2772. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$; $0 < x < +\infty$.

2773. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\dots(1+nx)}$;

a) $0 \le x \le \varepsilon$, burada $\varepsilon > 0$; *b)* $\varepsilon \le x < +\infty$.

2774. Veyerştrass əlamətindən istifadə edərək aşağıdakı funksional sıraların göstərilən aralıqda müntəzəm yığılan olduğunu isbat edin:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$, $-\infty < x < +\infty$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+2^n}$, $-2 < x < +\infty$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$, $0 \le x < +\infty$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}$, $|x| < +\infty$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})$, $\frac{1}{2} \le |x| \le 2$;

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}$, $|x| < a$, burada a - istənilən müsbət ədəddir;

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$, $|x| < +\infty$;

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$, $|x| < +\infty$;

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$, $|x| < +\infty$;

j) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)$, $|x|<a$;

k) $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$, $0 \le x < +\infty$;

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2+n^3}$, $|x|<+\infty$.

Aşağıdakı funksional sıraların göstərilən aralıqda müntəzəm yığılmasını araşdırın:

2775. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ *a*) $\varepsilon \le x \le 2\pi-\varepsilon$ parçasında, burada $\varepsilon>0$;

b) $0 \le x \le 2\pi$ parçasında.

2776. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{1}{3^n x}$; $0<x<+\infty$.

2777. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$; $0<x<+\infty$.

G ö s t ə r i ş. Sıranın qalığını qiymətləndirin.

2778. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sin x}$; $0 \le x \le 2\pi$.

2779. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}$; $|x| \le 10$.

2780. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}$; $-\infty<x<+\infty$.

2781. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}$; $0 \le x < +\infty$.

2782. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}}$; $0 \le x < +\infty$.

2783. Kəsilən funksiyalar ardıcıllığı kəsilməz funksiyaya müntəzəm yığıla bilərmi?

$$f_n(x)=\frac{1}{n}\psi(x) \qquad (n=1,2,\ldots)$$

misalına baxın, burada

$$\psi(x)=\begin{cases}0, & x \text{ irrasional olduqda;}\\ 1, & x \text{ rasional olduqda}.\end{cases}$$

2784. İsbat edin ki, $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$ sırası $[a, b]$-də müntəzəm yığılırsa, onda $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ sırası da $[a, b]$-də müntəzəm yığılır.

2785. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ sırası $[a, b]$-də mütləq və müntəzəm yığılırsa, $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$ sırası da $[a, b]$-də müntəzəm yığılacaqmı?

Misala baxın: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$, burada $0 \le x \le 1$.

2786. İsbat edin ki, mütləq və müntəzəm yığılan

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (0 \le x \le 1)$$

sırasını hədləri mənfi olmayan yığılan ədədi sıra ilə majorantlamaq olmaz, burada

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 2^{-(n+1)} \text{ olduqda}; \\ \frac{1}{n}\sin^2(2^{n+1}\pi x), & 2^{-(n+1)} < x < 2^{-n} \text{ olduqda}; \\ 0, & 2^{-n} \le x \le 1 \text{ olduqda}. \end{cases}$$

2787. İsbat edin ki, hədləri $[a,b]$ parçasında monoton funksiyalar olan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$$

sırası bu parçanın uc nöqtələrində mütləq yığılırsa, onda verilmiş sıra $[a,b]$ parçasında mütləq və müntəzəm yığılır.

2788. İsbat edin ki,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

qüvvət sırası bütünlüklə bu sıranın yığılma intervalında yerləşən istənilən parçada müntəzəm yığılır.

2789. Tutaq ki, $a_n \to \infty$ və $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_n}\right|$ sırası yığılır. İsbat edin ki,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x - a_n}$$

sırası a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ nöqtələrini özündə saxlamayan istənilən qapalı məhdud çoxluqda mütləq və müntəzəm yığılır.

2790. İsbat edin ki, əgər $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sırası yığılırsa, onda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

Dirixle sırası $x \geq 0$ olduqda müntəzəm yığılır.

2791. Tutaq ki, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sırası yığılır. İsbat edin ki,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$$

sırası $x \geq 0$ oblastında müntəzəm yığılır.

2792. Göstərin ki,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$$

funksiyası $-\infty < x < +\infty$ oblastında kəsilməzdir və kəsilməz törəməyə malikdir.

2793. Göstərin ki,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$$

funksiyası *a*) $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ nöqtələri istisna olmaqla qalan bütün nöqtələrdə təyin olunub və kəsilməzdir; *b*) periodu 1-ə bərabər olan periodik funksiyadır.

2794. Göstərin ki,

$$\sum_{n=1}^{\infty} [nxe^{-nx} - (n-1)xe^{-(n-1)x}]$$

sırası $0 \leq x \leq 1$ parçasında müntəzəm yığılmır, lakin onun cəmi bu parçada kəsilməz funksiyadır.

2795. Əgər

$$a)\ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^n; \qquad c)\ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$$

$$b)\ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x + n(-1)^n}{x^2 + n^2};$$

olarsa, $f(x)$ funksiyasının təyin oblastını tapın və onların kəsilməzliyini araşdırın.

2796. Tutaq ki, r_k $(k = 1, 2, \ldots)$ - $[0, 1]$ parçasının rasional nöqtələridir. Göstərin ki,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x - r_k|}{3^k} \qquad (0 \leq x \leq 1)$$

funksiyası aşağıdakı xassələrə malikdir: *a*) kəsilməzdir; *b*) irrasional nöqtələrdə diferensiallanan və rasional nöqtələrdə diferensiallanmayandır.

2797. İsbat edin ki,

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$$

Riman dzeta-funksiyası $x>1$oblastında kəsilməzdir və bu oblastda istənilən tərtibdən kəsilməz törəməsi var.

2798. İsbat edin ki,

$$\theta(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-\pi n^2 x}$$

teta-funksiyası $x>0$ olduqda təyin olunub və diferensiallanandır.

2799. Əgər

$$a)\ f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{n+x};\qquad b)\ f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|}{n^2+x^2}$$

olarsa, $f(x)$ funksiyasının təyin oblastını tapın və onun diferensiallanmasını araşdırın.

2800. Göstərin ki,

$$f_n(x)=\frac{1}{n}\operatorname{arctg}x^n\qquad (n=1,2,\ldots)$$

ardıcıllığı $(-\infty,+\infty)$ intervalında müntəzəm yığılır, lakin

$$[\lim_{n\to\infty}f_n(x)]'_{x=1}\neq\lim_{n\to\infty}f_n'(1).$$

2801. Göstərin ki,

$$f_n(x)=x^2+\frac{1}{n}\sin n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

ardıcıllığı $(-\infty,+\infty)$ intervalında müntəzəm yığılır, lakin

$$[\lim_{n\to\infty}f_n(x)]'\neq\lim_{n\to\infty}f_n'(x).$$

2802. α parametrinin hansı qiymətlərində: *a*) verilmiş

$$f_n(x)=n^{\alpha}xe^{-nx}\tag{1}$$

$(n=1,2,\ldots)$ ardıcıllığı $[0,\ 1]$ parçasında yığılır; *b*) (1) ardıcıllığı $[0,\ 1]$ parçasında müntəzəm yığılır;

$$c)\ \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx$$

ifadəsində limiti inteqral işarəsi altına keçirmək mümkündür?

2803. Göstərin ki,

$$f_n(x)=nxe^{-nx^2}\quad(n=1,2,\ldots)$$

ardıcıllığı $[0,\ 1]$ parçasında yığılır, lakin

$$\int_0^1 [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]\,dx \neq \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

2804. Göstərin ki,

$$f_n(x) = nx(1-x)^n \qquad (n=1,2,\ldots)$$

ardıcıllığı $[0, 1]$ parçasında müntəzəm yığılmır, lakin

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

2805. Verilmiş

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4}\,dx$$

ifadəsində inteqral işarəsi altında limitə keçmək olarmı?

Tapın:

2806. $\lim\limits_{x\to 1-0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\dfrac{x^n}{x^n+1}$.

2807. $\lim\limits_{x\to 1-0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{n+1})$.

2808. $\lim\limits_{x\to +0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n n^x}$.

2808.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{1+n^2x^2}$.

2809. Verilmiş

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}$$

sırasını hədbəhəd diferensiallamaq olarmı?

2810. Verilmiş

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}\right)$$

sırasını hədbəhəd inteqrallamaq olarmı?

2811. Tutaq ki, $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ - sonsuz diferensiallanan funksiyadır və onun $f^{(n)}(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ törəmələri ardıcıllığı hər bir sonlu (a,b) intervalında $\varphi(x)$ funksiyasına müntəzəm yığılır. İsbat edin ki, $\varphi(x)=Ce^x$, burada C - sabit kəmiyyətdir.

2811.1. Tutaq ki, $f_n(x)$, $n=1,2,\ldots$ funksiyaları $(-\infty,+\infty)$-də təyin olunub, məhduddurlar və hər bir $[a, b]$ parçasında $f_n(x)\rightrightarrows\varphi(x)$. Buradan alınırmı ki,

$$\lim_{n\to\infty}\sup_x f_n(x) = \sup_x \varphi(x)\,?$$

Misala baxın: $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$, $n=1,2,\ldots$

§ 5. Qüvvət sıraları

1°. Y ı ğ ı l m a i n t e r v a l ı. Hər bir

$$a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots$$

qüvvət sırası üçün qapalı yığılma intervalı mövcuddur: $|x-a| \le R$, bu zaman verilən sıra bu intervalın daxilində yığılır, xaricində isə dağılır. R yığılma radiusu

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Koşi-Adamar düsturu ilə təyin olunur.

R yığılma radiusu həmçinin

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

düsturu ilə də hesablana bilər, burada bu limitin varlığı qəbul edilir.

2°. A b e l t e o r e m i. Əgər $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(|x| < R)$ qüvvət sırası yığılma intervalının $x = R$ son nöqtəsində yığılırsa, onda

$$S(R) = \lim_{x\to R-0} S(x).$$

3°. T e y l o r s ı r a s ı. a nöqtəsində analitik olan $f(x)$ funksiyası

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

qüvvət sırasına ayrılır.

Bu sıranın

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

qalıq həddi

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad (0<\theta<1)$$

(*Laqranj düsturu*) şəkilində və ya

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta_1(x-a))}{n!}(1-\theta_1)^n (x-a)^{n+1} \qquad (0<\theta_1<1)$$

(*Koşi düsturu*) şəkilində göstərilə bilər.

Aşağıdakı beş əsas ayrılışı yadda saxlamaq zəruridir:

I. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad (-\infty < x < +\infty).$

II. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \quad (-\infty < x < +\infty).$

III. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \qquad (-\infty < x < +\infty).$

IV. $(1+x)^m = 1 + mx + \dfrac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots$

$\ldots + \dfrac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots \qquad (-1 < x < 1).$

V. $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + \ldots \qquad (-1 < x \leq 1).$

4⁰. **Qüvvət sıraları üzərində əməllər.** Ümumi $|x-a| < R$ yığılma intervalı daxilində:

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x-a)^n;$$

$$b)\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

olur, burada $\quad c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0;$

$$c)\ \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n\right]' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x-a)^n;$$

$$d)\ \int \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n\right] dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}.$$

5⁰. **Kompleks oblastda qüvvət sıraları.**

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

sırasına baxaq, burada

$$c_n = a_n + ib_n, \qquad a = \alpha + i\beta, \qquad z = x + iy, \qquad i^2 = -1.$$

İstənilən bu cür sıra üçün qapalı $|z-a| \leq R$ *yığılma dairəsi* var; bu dairənin daxilində verilən sıra yığılır (və həmçinin mütləq yığılır), xaricində isə dağılır. R *yığılma radiusu* həqiqi oblastda

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$$

qüvvət sırasının yığılma radiusuna bərabərdir.

Aşağıdakı qüvvət sıralarının yığılma radiusunu və intervalını təyin edin və yığılma intervalının sərhəd nöqtələrində yığılmasını araşdırın:

2812. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}.$

2813. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n}(x+1)^n.$

2814. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n.$

2815. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n^2} \cdot x^n \quad (0 < \alpha < 1).$

2816. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

2817. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{a^{n^2}}x^n \quad (a>1)$.

2818. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}\right]^p\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$.

2819. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right]^p x^n$.

2820. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n$.

2821. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n \quad (a>0,\ b>0)$.

2822. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n} \quad (a>0,\ b>0)$.

2823. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}} \quad (a>0)$.

2824. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{-\sqrt{n}}x^n}{\sqrt{n^2+1}}$.

2825. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^n$.

2826. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n x^n$.

2827. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)x^n$.

2828. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}x^n$.

2829. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\left(1+2\cos\frac{\pi n}{4}\right)^n}{\ln n}x^n$.

2830. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{2^n}$.

2831. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}x^n$ (*Prinsqeym sırası*).

2831.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^{\nu(n)}}{n}(1-x)^n$, burada $\nu(n)$ ədədi n ədədinin rəqəmlərinin sayıdır.

2831.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{\sin n}\right)^n$.

2832. *Hiperhəndəsi sıranın* yığılma oblastını təyin edin:

$$1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1\cdot 2\ldots n\cdot\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}x^n+\ldots$$

Ümumiləşmiş qüvvət sıralarının yığılma oblastını tapın:

2833. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

2834. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}\sin\frac{\pi}{2^n}$.

2835. $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n^2}}$.

2836. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}e^{-nx}$.

2837. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}\operatorname{tg}^n x$.

2838. $f(x)=x^3$ funksiyasını $(x+1)$-in müsbət tam qüvvətləri üzrə sıraya ayırın.

2839. $f(x)=\frac{1}{a-x}$ $(a\neq 0)$ funksiyasını qüvvət sırasına ayırın:

a) x-in qüvvətlərinə görə; *b)* $(x-b)$-nin qüvvətlərinə görə, burada $b\neq a$; *c)* $\frac{1}{x}$ -in qüvvətlərinə görə. Uyğun yığılma oblastlarını göstərin.

2840. $f(x)=\ln x$ funksiyasını $(x-1)$ fərqinin müsbət tam qüvvətləri üzrə sıraya ayırın və ayrılışın yığılma intervalını tapın.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

sırasının cəmini tapın.

Aşağıdakı funksiyaların x dəyişəninin müsbət tam qüvvətləri üzrə ayrılışını yazın və uyğun yığılma intervallarını tapın:

2841. $f(x)=\operatorname{sh}x$.

2842. $f(x)=\operatorname{ch}x$.

2843. $f(x)=\sin^2 x$.

2844. $f(x)=a^x$ $(a>0)$.

2845. $f(x)=\sin(\mu\arcsin x)$.

2846. $f(x)=\cos(\mu\arcsin x)$.

2847. $f(x)=x^x$ funksiyasının $(x-1)$ fərqinin müsbət tam qüvvətləri üzrə ayrılışının üç həddini yazın.

2848. $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ $(x\neq 0)$ və $f(0)=e$ funksiyasının x dəyişəninin müsbət tam qüvvətlərinə görə ayrılışının üç həddini yazın.

2849. $\sin(x+h)$ və $\cos(x+h)$ funksiyalarını h dəyişəninin müsbət tam qüvvətləri üzrə sıraya ayırın.

2850. Ayrılış aparmadan $f(x)=\frac{x}{x^2-5x+6}$ funksiyasının *a)* x-in qüvvətlərinə görə; *b)* $(x-5)$-in qüvvətlərinə görə qüvvət sırasına ayrılışının yığılma intervalını təyin edin.

2850.1. $N\to\infty$ olduqda $(-\infty,+\infty)$-da

$$\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\rightrightarrows\sin x$$

olmasını hökm etmək olarmı?

I-V əsas ayrılışlarından istifadə edərək aşağıdakı funksiyaların x-ə görə qüvvət sırasına ayrılışını yazın:

2851. e^{-x^2}.

2852. $\cos^2 x$.

2853. $\sin^3 x$.

2854. $\frac{x^{10}}{1-x}$.

2855. $\frac{1}{(1-x)^2}$.

2856. $\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$.

2857. $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

2858. $\frac{x}{1+x-2x^2}$.

G ö s t ə r i ş. Verilən kəsri sadə kəsrlərə ayırın.

2859. $\frac{12-5x}{6-5x-x^2}$.

2860. $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$.

2861. $\frac{1}{1-x-x^2}$.

2862. $\frac{1}{1+x+x^2}$.

2862.1. $f(x)=\frac{1}{1+x+x^2+x^3}$.

$f^{(1000)}(0)$ nəyə bərabərdir?

2863. $\frac{x\cos\alpha-x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}$.

2864. $\frac{x\sin a}{1-2x\cos a+x^2}$.

2865. $\frac{x\,\mathrm{sh}\,a}{1-2x\,\mathrm{ch}\,a+x^2}$.

2866. $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

2867. $\ln(1+x+x^2+x^3)$.

2868. $e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$

G ö s t ə r i ş. Eyler düsturunu tətbiq edin.

Aşağıdakı funksiyaların törəmələrini qüvvət sırasına ayırıb, hədbəhəd inteqrallamaqla onların qüvvət sırasına ayrılışını yazın:

2869. $f(x)=\operatorname{arctg} x$. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ sırasının cəmini tapın.

2870. $f(x)=\arcsin x$.

2871. $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

2872. $f(x)=\ln(1-2x\cos\alpha+x^2)$.

2873. Müxtəlif üsullar tətbiq edərək aşağıdakı funksiyaların qüvvət sırasına ayrılışını yazın:

a) $f(x)=(1+x)\ln(1+x)$;

b) $f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$;

c) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}$;

d) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{2x}{2-x^2}$;

e) $f(x)=x\operatorname{arctg}x-\ln\sqrt{1+x^2}$;
i) $f(x)=\arccos(1-2x^2)$;
j) $f(x)=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$;
k) $f(x)=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$.

2874. $f(x+h)-f(x)=hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\ldots$

ayrılışının yeganəliyindən istifadə edərək aşağıdakı funksiyaların n-tərtibdən törəməsini tapın:

a) $f(x)=e^{x^2}$; b) $f(x)=e^{\frac{a}{x}}$; c) $f(x)=\operatorname{arctg}x$.

2875. $f(x)=\ln\frac{1}{2+2x+x^2}$ funksiyasını $(x+1)$-in müsbət tam qüvvətləri üzrə sıraya ayırın.

2876. $f(x)=\frac{1}{1-x}$ funksiyasını x dəyişəninin mənfi qüvvətlərinə görə qüvvət sırasına ayırın.

2877. $f(x)=\ln x$ funksiyasını $\frac{x-1}{x+1}$ kəsrinin müsbət tam qüvvətlərinə görə qüvvət sırasına ayırın.

2878. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x}}$ funksiyasını $\frac{x}{1+x}$ kəsrinin müsbət tam qüvvətlərinə görə qüvvət sırasına ayırın.

2879. Tutaq ki,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

İsbat edin ki,

$$f(x)\,f(y)=f(x+y).$$

2880. Tutaq ki, tərifə görə

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

və

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

İsbat edin ki,

a) $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$; b) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

2881. $f(x)=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n+1}\right)\right]^{-1}$ funksiyasının qüvvət sırasına ayrılışının bir neçə həddini yazın.

Qüvvət sıraları üzərində uyğun əməlləri tətbiq edərək aşağıdakı funksiyaların qüvvət sırasına ayrılışını yazın:

2882. $f(x)=(1+x)e^{-x}$.

2883. $f(x)=(1-x)^2 \operatorname{ch}\sqrt{x}$.

2884. $f(x)=\ln^2(1-x)$.

2885. $f(x)=(1+x^2)\operatorname{arctg} x$.

2886. $f(x)=e^x \cos x$.

2887. $f(x)=e^x \sin x$.

2888. $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$.

2889. $f(x)=(\operatorname{arctg} x)^2$.

2890. $f(x)=\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^2$.

Aşağıdakı funksiyaların x dəyişəninin müsbət qüvvətlərinə görə qüvvət sırasına ayrılışının (sıfırdan fərqli) üç həddini yazın:

2891. $f(x)=\operatorname{tg} x$.

2892. $f(x)=\operatorname{th} x$.

2893. $f(x)=\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{x}$.

2894. Tutaq ki, $\sec x$-in ayrılışı

$$\sec x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n}{(2n)!}x^{2n}$$

şəklində yazılmışdır.

E_n əmsalları (*Eyler ədədi*) üçün rekurent münasibət çıxarın.

2895. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}}$ $(|x|<1)$ funksiyasını qüvvət sırasına ayırın.

2896. Tutaq ki, $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$. $F(x)=\dfrac{f(x)}{1-x}$ funksiyasının ayrılışını yazın.

2897. Əgər $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ sırasının yığılma radiusu R_1, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n x^n$ sırasının yığılma radiusu isə R_2 olarsa, onda

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n; \qquad b)\ \sum_{n=0}^{\infty}a_n b_n x^n$$

sıraları hansı R yığılma radiusuna malikdir?

2898. Tutaq ki,

$$l=\varliminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{və} \quad L=\varlimsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

İsbat edin ki, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ qüvvət sırasının R yığılma radiusu

$$l\le R\le L$$

bərabərsizliyini ödəyir.

2899. İsbat edin ki, əgər $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ və

$$|n!\, a_n| < M \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

(M - sabitdir) olarsa, onda: 1) ixtiyari a nöqtəsində $f(x)$ sonsuz diferensiallanındır; 2)

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (|x|<+\infty)$$

ayrılışı doğrudur.

2899.1. Tutaq ki, $f(x) \in C^{(\infty)}(a, b)$ və $x \in (a, b)$ olduqda $|f^{(n)}(x)| \le c^n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$. İsbat edin ki, $f(x)$ funksiyasını (a, b) intervalında yığılan

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \qquad (x_0 \in (a, b))$$

qüvvət sırasına ayırmaq mümkündür.

2899.2. Tutaq ki, $f(x) \in C^{(\infty)}[-1, 1]$ və $x \in [-1, 1]$ olduqda $f^{(n)}(x) \ge 0$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$. İsbat edin ki, $(-1,\ 1)$ intervalında $f(x)$ funksiyasını

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

qüvvət sırasına ayırmaq mümkündür.

G ö s t ə r i ş. $f^{(n)}(x)$ törəmələrinin monotonluğundan istifadə etməklə $f(x)$ funksiyasının Teylor sırasına ayrılışının $R_n(x)$ qalıq həddi üçün

$$|R_n(x)| \le |x|^{n+1} f(1)$$

qiymətləndirilməsini göstərin.

2900. İsbat edin ki, əgər 1) $a_n \ge 0$ və 2)

$$\lim_{x \to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S$$

olarsa, onda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = S$.

Funksiyaları qüvvət sırasına ayırın:

2901. $\int_0^x e^{-t^2} dt$.

2902. $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$.

2903. $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$.

2904. $\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$.

2905. $\int\limits_0^x \frac{t\,dt}{\ln(1+t)}$ (dörd həddini yazın).

Hədbəhəd diferensiallamanı tətbiq edərək aşağıdakı sıraların cəmini hesablayın:

2906. $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots$

2907. $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots$

2908. $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots$

2909. $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\ldots$

2910. $1+\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\ldots$

G ö s t ə r i ş. Sıranın törəməsini $(1-x)$-ə vurun.

Hədbəhəd inteqrallamanı tətbiq edərək sıraların cəmini hesablayın:

2911. $x+2x^2+3x^3+\ldots$

2912. $x-4x^2+9x^3-16x^4+\ldots$

2913. $1\cdot 2x+2\cdot 3x^2+3\cdot 4x^3+\ldots$

2914. Göstərin ki,

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$$

sırası

$$y^{\mathrm{IV}}=y$$

tənliyini ödəyir.

2915. Göstərin ki,

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$$

sırası

$$xy''+y'-y=0$$

tənliyini ödəyir.

Kompleks oblastda $(z=x+iy)$ aşağıdakı qüvvət sıralarının yığılma radiusunu və dairəsini təyin edin:

2916. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1-i)^n}{n\cdot 2^n}$.

2917. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n z^n}{(n+1)(n+2)}$.

2918. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,z^n}{(1+i)(1+2i)\ldots(1+ni)}$.

2919. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^{\alpha+i\beta}}$.

2920. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z-e^{i\alpha})^n}{n(1-e^{i\alpha})^n}$.

2921. Nyuton binomu düsturundan istifadə edərək $\sqrt[3]{9}$-u təqribi hesablayın və ayrılışın üç həddini götürdükdə alınan xətanı qiymətləndirin.

2922. Təqribi hesablayın:

a) $\operatorname{arctg} 1{,}2$; *b)* $\sqrt[10]{1000}$; *c)* $\frac{1}{\sqrt{e}}$; *d)* $\ln 1{,}25$

və uyğun xətaları qiymətləndirin.

Funksiyaların aşağıdakı qiymətlərini uyğun ayrılışlardan istifadə edərək göstərilən qüvvət dəqiqliyi ilə hesablayın:

2923. $\sin 18^0$, 10^{-5} dəqiqliklə.
2924. $\cos 1^0$, 10^{-6} dəqiqliklə.
2925. $\operatorname{tg} 9^0$, 10^{-3} dəqiqliklə.
2926. e, 10^{-6} dəqiqliklə.
2927. $\ln 1{,}2$, 10^{-4} dəqiqliklə.

2928. $\frac{\pi}{6} = \arcsin\frac{1}{2}$ bərabərliyindən istifadə etməklə π ədədini 10^{-4} dəqiqliklə tapın.

2929. $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$ eyniliyindən istifadə edərək π ədədini 0,001 dəqiqliklə hesablayın.

2930. $\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239}$ eyniliyindən istifadə edərək π ədədini 10^{-9} dəqiqliklə təyin edin.

2931. $\ln(n+1) = \ln n + 2\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \dots\right]$ düsturundan istifadə edərək $\ln 2$ və $\ln 3$ ədədlərini 10^{-5} dəqiqliklə tapın.

2932. İnteqralaltı funksiyaları sıraya ayırmaqla aşağıdakı inteqralları 0,001 dəqiqliklə hesablayın:

a) $\int_0^1 e^{-x^2} dx$; *h)* $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$;

b) $\int_2^4 e^{\frac{1}{x}} dx$; *i)* $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$;

c) $\int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx$; *j)* $\int_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$;

d) $\int_0^1 \cos x^2 dx$; *k)* $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$;

e) $\int_0^1 \frac{\operatorname{sh} x}{x} dx$; *l)* $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{x} dx$;

g) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$; *m)* $\int_0^1 x^x dx$.

2933. $y=\sin x$ $(0\le x\le \pi)$ sinusoidinin bir yarımdalğa qövsünün uzunluğunu 0,01 dəqiqliklə tapın.

2934. Yarımoxları $a=1$ və $b=\frac{1}{2}$ olan ellipsin qövsünün uzunluğunu 0,01 dəqiqliklə tapın.

2935. Aralarındakı məsafə $2l=20$ *m* olan iki dirəkdən asılmış məftil parabola şəklindədir. Əyrilik oxu (hündürlüyü) h=40 *sm* olarsa, məftilin uzunluğunu 1*sm* dəqiqliklə tapın.

§ 6. Furye sıraları

1°. Ayrılış teoremi. Əgər $(-l, l)$ intervalında təyin olunmuş $f(x)$ funksiyası hissə-hissə kəsilməzdirsə, $f(x)$-in hissə-hissə kəsilməz $f'(x)$ törəməsi varsa və bütün ξ kəsilmə nöqtələri requlyardırsa (yəni $f(\xi)=\frac{1}{2}[f(\xi-0)+f(\xi+0)]$), onda bu intervalda $f(x)$ funksiyası Furye sırası şəkilində göstərilə bilər:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{1}$$

burada

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=0,1,2,...) \tag{2}$$

və

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1,2,...)\,. \tag{2'}$$

Xüsusi halda:

a) əgər $f(x)$ funksiyası cütdürsə, onda

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l} \tag{3}$$

olar, burada

$$a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=0,1,2,...)\,;$$

b) əgər $f(x)$ funksiyası təkdirsə, onda

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{4}$$

olar, burada

$$b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1,2,...)\,.$$

$(0, l)$ intervalında təyin olunan və yuxarıda göstərilən kəsilməzlik xassələrini ödəyən $f(x)$ funksiyasını bu intervalda həm (3) düsturu, həm də (4) düsturu şəkilində göstərmək olar.

2^0. Tamlıq şərti. $(-l, l)$ intervalında kvadratı ilə birlikdə inteqrallanan ixtiyari $f(x)$ funksiyası üçün (2) və (2') əmsalları vasitəsilə formal qurulan (1) *sırası Lyapunov* bərabərliyini ödəyir:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)\,dx\,.$$

3^0. Furye sıralarının inteqrallanması. $(-l, l)$ intervalında Riman mənada inteqrallanan $f(x)$ funksiyasının (hətta dağılan) (1) Furye sırasını bu intervalda hədbəhəd inteqrallamaq olar.

2936. $f(x)=\sin^4 x$ funksiyasını Furye sırasına ayırın.

2937. Triqonometrik

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}(\alpha_i\cos ix+\beta_i\sin ix)$$

çoxhədlisi üçün Furye sırası necə olar?

2938. $f(x)=\operatorname{sgn}x$ $(-\pi<x<\pi)$ funksiyasını Furye sırasına ayırın.

Funksiyanın qrafikini və bu funksiyanın Furye sırasının bir neçə xüsusi cəminin qrafiklərini çəkin.

Ayrılışdan istifadə edərək

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

Leybnis sırasının cəmini tapın.

Aşağıdakı funksiyaları göstərilən intervallarda Furye sırasına ayırın:

2939. $f(x)=\begin{cases}A, & 0<x<l \text{ olduqda;}\\ 0, & l<x<2l \text{ olduqda,}\end{cases}$

(0, 2l) intervalında, burada A - sabitdir.

2940. $f(x)=x$, $(-\pi, \pi)$ intervalında.

2941. $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$, $(0, 2\pi)$ intervalında.

2942. $f(x)=|x|$, $(-\pi, \pi)$ intervalında.

2943. $f(x)=\begin{cases}ax, & -\pi<x<0 \text{ olduqda;}\\ bx, & 0<x<\pi \text{ olduqda,}\end{cases}$

$(-\pi, \pi)$ intervalında, burada a və b - sabitlərdir.

2944. $f(x)=\pi^2-x^2$, $(-\pi, \pi)$ intervalında.

2945. $f(x)=\cos ax$, $(-\pi, \pi)$ intervalında (a - tam ədəd deyil).

2946. $f(x)=\sin ax$, $(-\pi, \pi)$ intervalında (a - tam ədəd deyil).

2947. $f(x)=\operatorname{sh}ax$, $(-\pi, \pi)$ intervalında.

2948. $f(x)=e^{ax}$, $(-h, h)$ intervalında.

2949. $f(x)=x$, $(a, a+2l)$ intervalında.

2950. $f(x) = x\sin x,\quad (-\pi, \pi)$ intervalında.

2951. $f(x) = x\cos x,\quad \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervalında.

Aşağıdakı periodik funksiyaları Furye sırasına ayırın:

2952. $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$.

2953. $f(x) = \arcsin(\sin x)$.

2954. $f(x) = \arcsin(\cos x)$.

2955. $f(x) = x - [x]$.

2956. $f(x) = (x)$ - x-dən ən yaxın tam ədədə qədər olan məsafədir.

2957. $f(x) = |\sin x|$.

2958. $f(x) = |\cos x|$.

2959. $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x} \quad (|\alpha| < 1)$.

2960. $f(x) = \sec x \quad \left(-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}\right)$ funksiyanı Furye sırasına ayırın.

Göstəriş. a_n və a_{n-2} əmsalları arasındakı münasibəti tapın.

2961. $f(x) = x^2$ funksiyasını *a*) $(-\pi, \pi)$ intervalında təkrarlanan qövslərin kosinuslarına görə; *b*) $(0, \pi)$ intervalında təkrarlanan qövslərin sinuslarına görə; *c*) $(0, 2\pi)$ intervalında Furye sırasına ayırın.

Funksiyanın qrafikini və *a*), *b*) və *c*) halları üçün Furye sırasının cəminin qrafikini çəkin.

Bu ayrılışlardan istifadə edərək

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \quad \text{və} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

sıralarının cəmini tapın.

2962. $x = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} \quad (-\pi < x < \pi)$ ayrılışından istifadə edərək hədbəhəd inteqrallama vasitəsilə x^2, x^3 və x^4 funksiyalarının $(-\pi, \pi)$ intervalında Furye sırasına ayrılışını yazın.

2963. $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \alpha \text{ olduqda}; \\ 0, & \alpha < |x| < \pi \text{ olduqda} \end{cases}$

funksiyası üçün Lyapunov bərabərliyini yazın.

Lyapunov bərabərliyindən istifadə edərək

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} \quad \text{və} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}$$

sıralarının cəmini tapın.

2964. $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1 \text{ olduqda;} \\ 1, & 1<x<2 \text{ olduqda;} \\ 3-x, & 2\le x\le 3 \text{ olduqda} \end{cases}$

funksisıyanı Furye sırasına ayırın.

$$\cos x=\frac{1}{2}(t+\bar{t}),\quad \sin x=\frac{1}{2i}(t-\bar{t})$$

düsturundan istifadə edərək aşağıdakı funksiyaların Furye sırasına ayrılışını yazın, burada $t=e^{ix}$ və $\bar{t}=e^{-ix}$:

2965. $\cos^{2m} x$ (m - natural ədəddir).

2966. $\dfrac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}$ $\quad(|q|<1)$.

2967. $\dfrac{1-q^2}{1-2q\cos x+q^2}$ $\quad(|q|<1)$.

2968. $\dfrac{1-q\cos x}{1-2q\cos x+q^2}$ $\quad(|q|<1)$.

2969. $\ln(1-2q\cos x+q^2)$ $\quad(|q|<1)$.

Qeyri-məhdud periodik funksiyaları Furye sırasına ayırın:

2970. $f(x)=\ln\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|$.

2971. $f(x)=\ln\left|\cos\dfrac{x}{2}\right|$.

2972. $f(x)=\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|$.

2973. $f(x)=\displaystyle\int_0^x \ln\sqrt{\left|\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right|}\,dt$ $\quad(-\pi\le x\le\pi)$ funksiyasını Furye sırasına ayırın.

2974. $0<x<a,\ 0<y<a$ kvadratının tərəflərinin parametrik təsvirini verən

$$x=x(s),\quad y=y(s)\quad (0\le s\le 4a)$$

funksiyasını Furye sırasına ayırın, burada s – $O(0,0)$ nöqtəsindən hesablanan və saat əqrəbi istiqamətinin əksinə yönəlmiş qövsün uzunluğudur.

2975. $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ intervalında verilmiş inteqrallanan $f(x)$ funksiyasını $(-\pi,\pi)$ intervalına necə davam etdirmək lazımdır ki, onun Furye sırasına ayrılışı

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(2n-1)x\qquad(-\pi<x<\pi)$$

şəklində olsun?

2976. $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ intervalında verilmiş inteqrallanan $f(x)$ funksiyasını $(-\pi,\pi)$ intervalına necə davam etdirmək lazımdır ki, onun Furye sırasına ayrılışı

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2n-1)x \qquad (-\pi < x < \pi)$$

şəklində olsun?

2977. $f(x)=x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ funksiyasını $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ intervalında *a*) tək qövslərin kosinusları üzrə; *b*) tək qövslərin sinusları üzrə ayırın.

a) və *b*) halları üçün Furye sırasının cəminin qrafikini qurun.

2978. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası π periodlu *antiperiodikdir*, yəni

$$f(x+\pi)=-f(x).$$

$(-\pi,\pi)$ intervalında bu funksiyanın Furye sırası hansı məxsusiyyətə malikdir?

2979. $f(x+\pi)=f(x)$ olarsa, $(-\pi,\pi)$ intervalında $f(x)$ funksiyasının Furye sırası hansı məxsusiyyətə malikdir?

2980. Əgər 2π periodlu $y=f(x)$ funksiyasının qrafiki:

a) $(0, 0)$, $\left(\pm\frac{\pi}{2}, 0\right)$ nöqtələrində simmetriya mərkəzlərinə malikdirsə;

b) koordinat başlanğıcında simmetriya mərkəzinə və $x=\pm\frac{\pi}{2}$ simmetriya oxlarına malikdirsə, a_n, b_n $(n=1, 2, \dots)$ Furye əmsalları hansı məxsusiyyətlərə malikdirlər?

2981. Əgər

$$\varphi(-x)=\psi(x)$$

olarsa, $\varphi(x)$ və $\psi(x)$ funksiyalarının a_n, b_n və α_n, β_n $(n=0, 1, 2, \dots)$ Furye əmsalları bir-biri ilə necə əlaqəlidirlər?

2982. Əgər

$$\varphi(-x)=-\psi(x)$$

olarsa, $\varphi(x)$ və $\psi(x)$ funksiyalarının a_n, b_n və α_n, β_n $(n=0, 1, 2, \dots)$ Furye əmsalları bir-biri ilə necə əlaqəlidirlər?

2983. 2π periodlu inteqrallanan $f(x)$ funksiyasının a_n, b_n $(n=0, 1, 2, \dots)$ Furye əmsallarını bilərək "sürüşdürülmüş" $f(x+h)$ $(h=const)$ funksiyasının $\bar{a}_n$, $\bar{b}_n$ $(n=0, 1, 2, \dots)$ Furye əmsallarını hesablayın.

2984. 2π periodlu inteqrallanan $f(x)$ funksiyasının a_n, b_n $(n=0, 1, 2, \dots)$ Furye əmsallarını bilərək

$$f_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(\xi)\,d\xi$$

Steklov funksiyasının A_n, B_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ Furye əmsallarını hesablayın.

2985. Tutaq ki, $f(x)$ - 2π periodlu kəsilməz funksiyadır və a_n, b_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ - onun Furye əmsallarıdır.

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t)\,dt$$

bükülmə funksiyasının A_n, B_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ Furye əmsallarını təyin edin.

Alınan nəticədən istifadə edərək Lyapunov bərabərliyini çıxarın.

§ 7. Sıraların cəmlənməsi

1°. **Birbaşa cəmləmə.** Əgər

$$u_n = v_{n+1} - v_n \quad (n = 1, 2, \ldots) \quad \text{və} \quad \lim_{n\to\infty} v_n = v_\infty$$

olarsa, onda

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = v_\infty - v_1 .$$

Xüsusi halda, əgər

$$u_n = \frac{1}{a_n a_{n+1} \ldots a_{n+m}}$$

olarsa və a_i $(i = 1, 2, \ldots)$ ədədləri hədlər fərqi d olan ədədi silsilə əmələ gətirirsə, onda

$$v_n = -\frac{1}{md}\cdot\frac{1}{a_n a_{n+1} \ldots a_{n+m-1}} .$$

Bəzi hallarda axtarılan sıranı məlum sıraların xətti kombinasiyası şəklində göstərmək mümkün olur:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \quad \text{və b. o.}$$

2°. **Abel üsulu.** Əgər $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sırası yığılandırsa, onda

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x\to 1-0}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

Sadə misallarda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ qüvvət sırasının cəmi hədbəhəd diferensiallamanın və ya inteqrallamanın köməyi ilə tapılır.

3⁰. **Triqonometrik sıraların cəmlənməsi.**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx \text{ və } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin nx$$

sıralarının cəmini tapmaq üçün onlara adətən kompleks oblastda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ qüvvət sırasının cəminin uyğun olaraq həqiqi hissəsinin və xəyali hissəsinin əmsalı kimi baxırlar, burada $z = e^{ix}$.

Bir çox hallarda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \ln \frac{1}{1-z}$$

sırasından istifadə etmək əlverişlidir.

Sıraların cəmini tapın:

2986. $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots$

2987. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots$

2988. $\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots$

2989. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

2990. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)}$ (m - natural ədəddir).

2991. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6\cdot 7} + \ldots$

2992. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$.

2993. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2(n+1)^2}$.

2994. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$.

2995. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$.

2996. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!}$.

2997. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$.

2998. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}$.

2999. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$.

3000. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n-2}$.

3001. Tutaq ki, $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{n!} x^n$$

sırasının cəmini tapın.

Aşağıdakı sıraların cəmini tapın:

3002. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n$. **3003.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}x^n$.

3004. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n^2+1)}{(2n)!}x^{2n}$. **3005.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2x^n}{(2n+1)!}$.

Hədbəhəd diferensiallamanın köməyi ilə sıraların cəmini tapın:

3006. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$. **3008.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$.

3007. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}$.

3009. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+d)\ldots[a+(n-1)d]}{d\cdot 2d\ldots nd}x^n \quad (d>0)$.

Göstəriş. Sıranın törəməsini $(1-x)$-ə vurun.

3010. $\frac{1}{3}\frac{x}{2}+\frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\ldots$

Hədbəhəd inteqrallamanın köməyi ilə sıraların cəmini tapın:

3011. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$. **3013.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$.

3012. $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+2)x^n$.

Abel üsulundan istifadə edərək aşağıdakı sıraların cəmini tapın:

3014. $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\ldots$ **3016.** $1-\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\ldots$

3015. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$ **3017.** $1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}+\ldots$

Aşağıdakı triqonometrik sıraların cəmini tapın:

3018. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$. **3020.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha \sin nx}{n}$.

3019. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$.

3021. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha \sin nx}{n}\ \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$. **3024.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

3022. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$. **3025.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n(n+1)}$.

3023. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2-1}$. **3026.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}$.

3027. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \cdot \sin ny}{n^2} = 0$ əyrisini qurun.

Aşağıdakı sıraların cəmini tapın:

3028. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}(2x)^{2n}$.

3029. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$.

3030. $\frac{1!}{x+1} + \frac{2!}{(x+1)(x+2)} + \frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \ldots$

3031. $\frac{a_1}{a_2+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} + \ldots$; burada $x>0,\ a_n>0\ (n=1, 2, \ldots)$ və $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ sırası dağılandır.

3032. $\frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \ldots$: *a)* $|x|<1$; *b)* $|x|>1$ olduqda.

3033. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$: *a)* $|x|<1$; *b)* $|x|>1$ olduqda.

§ 8. Sıraların köməyi ilə müəyyən inteqralların tapılması

İnteqralaltı funksiyaları sıraya ayırmaqla aşağıdakı inteqralları hesablayın:

3034. $\int_0^1 \ln\frac{1}{1-x}\,dx$.

3035. $\int_0^1 \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}\,dx$.

3036. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$.

3037. $\int_0^1 x^{p-1}\ln(1-x^q)\,dx \quad (p>0, q>0)$.

3038. $\int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x)\,dx$.

3039. $\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{e^{2\pi x}-1}$.

3040. $\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{e^x+1}$.

3041. *I-ci növ tam elliptik*

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

inteqralını k-nın $(0 \le k < 1)$ modulunun müsbət tam qüvvətləri üzrə sıraya ayırın.

3042. *2-ci növ tam elliptik*

$$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

inteqralını k-nın $(0\le k<1)$ modulunun müsbət tam qüvvətləri üzrə sıraya ayırın.

3043. $x=a\cos t,\quad x=b\sin t\quad(0\le t\le 2\pi)$ ellipsinin qövsünün uzunluğunu ekssentrisitetin müsbət tam qüvvətləri üzrə ayrılmış sıranın köməyi ilə ifadə edin.

Bərabərliyi isbat edin:

3044. $\int_0^1 \frac{dx}{x^x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$.

3045. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\sin ax\,dx=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!}a^{2n+1}$.

3046. $\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos(\sin x)\cos nx\,dx=\frac{\pi}{n!}\quad(n=0,1,2,...)$.

Tapın:

3047. $\int_0^{2\pi} e^{a\cos x}\cos(a\sin x-nx)\,dx$ (n - natural ədəddir).

3048. $\int_0^{\pi}\frac{x\sin\alpha}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}dx.$

G ö s t ə r i ş. Misal 2864-ə bax.

3049. $\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx.$

3050. Düsturu isbat edin:

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{a+x}dx=\frac{1}{a}-\frac{1!}{a^2}+\frac{2!}{a^3}-...$$

$$...+(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{a^n}+(-1)^n\frac{\theta_n n!}{a^{n+1}},\qquad(1)$$

burada $a>0$ və $0<\theta_n<1$. Əgər (1) düsturunda iki hədd götürsək

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{100+x}dx$$

inteqralı hansı dəqiqliklə ifadə olunar?

§ 9. Sonsuz hasil

1°. Hasilin yığılması. Sonlu və sıfırdan fərqli

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n} p_i = \lim_{n\to\infty} P_n = P$$

limiti varsa, onda

$$p_1 \cdot p_2 \dots p_n \cdot \dots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n \qquad (1)$$

sonsuz hasili *yığılan* adlanır.

Əgər $P=0$ olarsa və p_n vuruqlarından heç biri sıfra bərabər deyilsə, onda (1) hasili *sıfra dağılan* adlanır; əks halda hasil *sıfra yığılan* adlanır.

(1) hasilinin yığılması

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \ln p_n \qquad (2)$$

sırasının yığılması ilə eyni güclüdür. Yığılma üçün

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 1$$

olması zəruri şərtdir.

Əgər $p_n = 1+\alpha_n$ $(n = 1, 2, \dots)$ olarsa və α_n işarəsini dəyişmirsə, onda (1) hasilinin yığılan olması üçün

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - 1) \qquad (3)$$

sırasının yığılan olması zəruri və kafi şərtdir.

Ümumi halda, α_n işarəsini sabit saxlamadıqda və (3) sırası yığıldıqda, (1) hasili

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - 1)^2$$

sırası ilə birlikdə sıfra yığılan və ya sıfra dağılan olur.

2°. Mütləq yığılma. (2) sırasının mütləq və ya şərti yığılmasından asılı olaraq, (1) hasili *mütləq* və ya *şərti yığılan* adlanır. (1) hasilinin mütləq yığılan olması üçün (3) sırasının mütləq yığılan olması zəruri və kafi şərtdir.

3°. Funksiyanın sonsuz hasilə ayrılışı. $-\infty < x < +\infty$ olduqda

$$\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right), \qquad \cos x = \prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right]$$

ayrılışları doğrudur.

Xüsusi halda, $x = \frac{\pi}{2}$ olduqda birincidən *Vallis düsturunu* alırıq:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}.$$

Aşağıdakı bərabərlikləri isbat edin:

3051. $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}.$

3052. $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2}{3}.$

3053. $\prod_{n=2}^{\infty}\left[1-\frac{2}{n(n+1)}\right]=\frac{1}{3}.$

3054. $\prod_{n=0}^{\infty}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right]=2.$

3055. $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}=\frac{2}{\pi}.$

3056. $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{x}.$

3057. $\prod_{n=1}^{\infty}\operatorname{ch}\frac{x}{2^n}=\frac{\operatorname{sh} x}{x}.$

3058. $\prod_{n=0}^{\infty}(1+x^{2^n})=\frac{1}{1-x} \quad (|x|<1).$

3059. $\frac{\pi}{2}=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdots$

3060. $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{3n-1}\cdot\frac{3n}{3n+1}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$

Aşağıdakı sonsuz hasillərin yığılan olduğunu isbat edin və qiymətlərini tapın:

3061. $\prod_{n=3}^{\infty}\frac{n^2-4}{n^2-1}.$

3062. $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{1}{n(n+2)}\right].$

3063. $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)}.$

3064. $\prod_{n=1}^{\infty}a^{\frac{(-1)^n}{n}} \quad (a>0).$

3065. $\prod_{n=1}^{\infty}p_n$ və $\prod_{n=1}^{\infty}q_n$ hasillərinin yığılmasından

a) $\prod_{n=1}^{\infty}(p_n+q_n)$; *b)* $\prod_{n=1}^{\infty}p_n^2$; *c)* $\prod_{n=1}^{\infty}p_nq_n$; *d)* $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{q_n}$ hasillərinin yığılması alınırmı?

Aşağıdakı sonsuz hasillərin yığılmasını araşdırın:

3066. $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$

3067. $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}.$

3068. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^p}\right).$

3069. $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right).$

3070. $\prod_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p.$

3071. $\prod_{n=n_0}^{\infty}\frac{n^2+a_1n+b_1}{n^2+an+b}$, burada $n\geq n_0$ olduqda $n^2+an+b>0$.

3072. $\prod_{n=n_0}^{\infty}\frac{(n-a_1)(n-a_2)\dots(n-a_p)}{(n-b_1)(n-b_2)\dots(n-b_p)}$, burada $n_0>b_i$ $(i=1,2,\dots,p)$.

3073. $\prod_{n=0}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$.

3074. $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

3075. $\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$.

3076. $\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n^2]{n}$.

3077. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}$.

3078. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{c+n}\right)e^{\frac{x}{n}}$, burada $c>0$.

3079. $\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)$.

3080. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)$.

3081. $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}\right]$.

3082. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)e^{\frac{x}{\sqrt{n}}+\frac{x^2}{2n}}$.

3083. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^n}{n^p}\right)\cos\frac{x^n}{n^q}$.

3084. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^p$.

3085. $\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{\ln(n+x)-\ln n}$.

3086. İsbat edin ki, əgər $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2$ sırası yığılırsa, onda $\prod_{n=1}^{\infty}\cos x_n$ hasili yığılandır.

3087. İsbat edin ki, əgər $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ sırası mütləq yığılırsa, onda $\prod_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha_n\right)$ $\left(|\alpha_n|<\frac{\pi}{4}\right)$ hasili yığılandır.

Aşağıdakı sonsuz hasillərin mütləq və şərti yığılmasını araşdırın:

3088. $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right]$.

3089. $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right]$.

3090. $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right]$.

3091. $\prod_{n=2}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{\ln n}\right]$.

3092. $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

3093. $\prod_{n=1}^{\infty}n^{(-1)^n}$.

3094. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{n^{(-1)^n}}$. **3095.** $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[1+\dfrac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n}\right]$.

3096. $\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{1}}\right)\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)\times$

$$\times\left(1-\frac{1}{\sqrt{9}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdots$$

3097. $\left(1+\dfrac{1}{1^{\alpha}}\right)\left(1-\dfrac{1}{2^{\alpha}}\right)^2\left(1+\dfrac{1}{3^{\alpha}}\right)\left(1+\dfrac{1}{4^{\alpha}}\right)\left(1-\dfrac{1}{5^{\alpha}}\right)^2\left(1+\dfrac{1}{6^{\alpha}}\right)\cdots$

3098. İsbat edin ki,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\ldots$$

sırasının dağılan olmasına baxmayaraq

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdots$$

hasili yığılandır.

3099. Göstərin ki, hər iki $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ və $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$ sıralarının dağılan olmasına baxmayaraq $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)$ hasili yığılandır, burada

$$\alpha_n=\begin{cases}-\dfrac{1}{\sqrt{k}}, & n=2k-1 \text{ olduqda},\\ \dfrac{1}{\sqrt{k}}+\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k\sqrt{k}}, & n=2k \text{ olduqda}.\end{cases}$$

3100. Tutaq ki,

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$$

(*Riman dzeta-funksiyası*) və p_n $(n=1,2,\ldots)$ - ardıcıl sadə ədədlərdir.
İsbat edin ki,

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n^x}\right)^{-1}=\zeta(x).$$

3101. İsbat edin ki,

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)^{-1}$$

hasili və

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$$

sırası dağılandırlar, burada p_n $(n=1,2,...)$ - ardıcıl sadə ədədlərdir (Eyler).

3102. Tutaq ki, $a_n > 0$ $(n=1, 2, ...)$ və

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1+\frac{p}{n}+O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right) \quad (\varepsilon>0).$$

İsbat edin ki,

$$a_n = O^*\left(\frac{1}{n^p}\right).$$

Göstəriş. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n n^p = a_1\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p$ bərabərliyinə baxın.

3103. Vallis düsturunun köməyi ilə isbat edin ki,

$$\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots(2n)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

3104. İsbat edin ki,

$$a_n = \frac{n!\,e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$$

ardıcıllığının $n\to\infty$ olduqda sıfırdan fərqli A limiti var.

Buradan Stirlinq düsturunu çıxarın:

$$n! = A n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}(1+\varepsilon_n),$$

burada $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$ və $A=\sqrt{2\pi}$.

Göstəriş. Axtarılan limiti $A=\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a_1\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ sonsuz hasili şəklində göstərin. A sabitinin təyini üçün Vallis düsturundan istifadə edin.

3105. Eylerə görə $\Gamma(x)$ *qamma-funksiyası* aşağıdakı düsturla təyin olunur:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)}.$$

Bu düsturdan istifadə edərək: *a*) $\Gamma(x)$ funksiyasını sonsuz hasil şəklində göstərin; *b*) göstərin ki, mənfi tam ədədə bərabər olmayan bütün həqiqi x-lər üçün $\Gamma(x)$-in mənası var; *c*)

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$$

xassəsini göstərin; *d*) müsbət və tam n üçün $\Gamma(n)$-nin qiymətini tapın.

3106. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında mütləq inteqrallanandır və

$$\delta_n=\frac{b-a}{n},\qquad f_{in}=f(a+i\delta_n)\qquad (i=1,2,\dots,n).$$

İsbat edin ki,

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}(1+\delta_n f_{in})=e^{\int_a^b f(x)\,dx}.$$

3107. İsbat edin ki,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1}(a+ib)}}{\sum_{i=0}^{n-1}(a+ib)}=\frac{2}{e},$$

burada $a>0$ və $b>0$.

3108. Tutaq ki, $f_n(x)$ $(n=1,2,\dots)$ – (a,b) intervalında kəsilməz funksiyalardır və $|f_n(x)|\le c_n$ $(n=1,2,\dots)$, burada $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ sırası yığılandır.

İsbat edin ki,

$$F(x)=\prod_{n=1}^{\infty}[1+f_n(x)]$$

funksiyası (a,b) intervalında kəsilməzdir.

3109. $F(x)=\prod_{n=1}^{\infty}[1+f_n(x)]$ funksiyasının törəməsi üçün ifadə tapın. $F'(x)$-in varlığı üçün kafi şərtlər hansılardır?

3110. İsbat edin ki, əgər $0<x<y$ olarsa, onda

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x(x+1)\dots(x+n)}{y(y+1)\dots(y+n)}=0.$$

§ 10. Stirlinq düsturu

n-nin böyük qiymətlərində $n!$-ı hesablamaq üçün

$$n!=\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n+\frac{\theta_n}{12n}}\qquad (0<\theta_n<1)$$

Stirlinq düsturu əlverişlidir.

Stirlinq düsturundan istifadə edərək aşağıdakı ifadələri təqribi hesablayın:

3111. $\lg 100!$

3112. $1\cdot3\cdot5\dots1999.$

3113. $\dfrac{1\cdot3\cdot5\dots99}{2\cdot4\cdot6\dots100}.$

3114. C_{100}^{40}.

3115. $\dfrac{100!}{20!30!50!}$.

3116. $\int_0^1 (1-x^2)^{50}dx$.

3117. $\int_0^{2\pi} \sin^{200} x\,dx$.

3118. $(2n-1)!! = 1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)$ hasili üçün asimptotik düstur çıxarın.

3119. Əgər n kifayət qədər böyük olarsa, C_{2n}^{n}-ni təqribi hesablayın.

3120. Stirlinq düsturundan istifadə edərək aşağıdakı limitləri tapın:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n!}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n!}{\ln n^n}$.

§ 11. Kəsilməz funksiyalara çoxhədlilərlə yaxınlaşma

1°. Laqranjın interpolyasiya düsturu.

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} y_i$$

Laqranj çoxhədlisi $P_n(x_i) = y_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ xassələrini ödəyir.

2°. Bernşteyn çoxhədliləri. Əgər $f(x)$ funksiyası $[0, 1]$ parçasında kəsilməzdirsə, onda

$$B_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) C_n^i x^i (1-x)^{n-i}$$

Bernşteyn çoxhədlisi $n\to\infty$ olduqda $[0,1]$ parçasında $f(x)$-ə müntəzəm yığılır.

3121. Verilmiş qiymətləri alan ən kiçik n dərəcəli $P_n(x)$ çoxhədlisini qurun:

x	-2	0	4	5
y	5	1	-3	1

$P_n(-1)$, $P_n(1)$, $P_n(6)$ təqribən nəyə bərabərdir?

3122. $A(x_0-h,\ y_{-1})$, $B(x_0, y_0)$, $C(x_0+h,\ y_1)$ nöqtələrindən keçən $y = ax^2+bx+c$ parabolasının tənliyini yazın.

3123. $x_0 = 1$, $y_0 = 1$; $x_1 = 25$, $y_1 = 5$; $x_2 = 100$, $y_2 = 10$ qiymətlərindən istifadə etməklə, $y = \sqrt{x}$ $(1 \le x \le 100)$ kökünün təqribi qiyməti üçün düstur çıxarın.

3124. $\sin 0^0 = 0$, $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$, $\sin 90^0 = 1$ qiymətlərindən istifadə edərək

$$\sin x^0 \approx ax + bx^3 \quad (0 \le x \le 90;\ x = arc\,x^0)$$

şəkilli təqribi düstur çıxarın.

Bu düsturdan istifadə edərək

$$\sin 20^0, \quad \sin 40^0, \quad \sin 80^0$$

ədədlərini təqribi tapın.

3125. Düyün nöqtələrini $x=0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$ qəbul edərək $[-1,1]$ parçasında $f(x)=|x|$ funksiyası üçün Laqranjın interpolyasiya çoxhədlisini qurun.

3126. $y(x)$ funksiyasını Laqranj çoxhədlisiylə əvəz edərək

$$\int_0^2 y(x)\,dx$$

inteqralını təqribi hesablayın, burada

x	0	0,5	1	1,5	2
$y(x)$	5	4,5	3	2,5	5

3127. $[a,b]$ parçasında x, x^2, x^3 funksiyaları üçün $B_n(x)$ Bernşteyn çoxhədlisini qurun.

3128. $[a,b]$ parçasında verilmiş $f(x)$ funksiyası üçün $B_n(x)$ Bernşteyn çoxhədlisinin düsturunu yazın.

3129. $[-1,1]$ parçasında $f(x)=\frac{|x|+x}{2}$ funksiyasını $B_4(x)$ Bernşteyn çoxhədlisi ilə yaxınlaşdırın. $y=\frac{|x|+x}{2}$ və $y=B_4(x)$ funksiyalarının qrafikini qurun.

3130. $-1\le x\le 1$ olduqda $f(x)=|x|$ funksiyasını cüt tərtibli Bernşteyn çoxhədlisi ilə yaxınlaşdırın.

3131. $f(x)=e^{kx}$ $(a\le x\le b)$ funksiyası üçün $B_n(x)$ Bernşteyn çoxhədlisini yazın.

3132. $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ parçasında $f(x)=\cos x$ funksiyası üçün $B_n(x)$ çoxhədlisini hesablayın.

3133. İsbat edin ki, $[-1,1]$ parçasında $|x|=\lim\limits_{n\to\infty} P_n(x)$, burada

$$P_n(x)=1-\frac{1-x^2}{2}-\sum_{i=2}^{n}\frac{1\cdot 3\ldots(2i-3)}{2\cdot 4\ldots(2i)}(1-x^2)^i.$$

3133.1. Tutaq ki, $f(x)\in C[a,b]$ və

$$M_k=\int_a^b x^k f(x)\,dx=0 \quad (k=0,1,2,\ldots).$$

İsbat edin ki, $x \in [a, b]$ olduqda $f(x) \equiv 0$.

G ö s t ə r i ş. Kəsilməz funksiyanın çoxhədlilərlə approksimasiyası haqqındakı Veyerştrass teoremindən istifadə edin.

3134. Tutaq ki, $f(x)$ – $-\pi \le x \le \pi$ olduqda kəsilməz funksiyadır və a_n, b_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ - onun Furye əmsallarıdır. İsbat edin ki,

$$\sigma_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right)(a_i \cos ix + b_i \sin ix)$$

triqonometrik Feyer çoxhədliləri $(-\pi, \pi)$ intervalında $f(x)$ funksiyasına müntəzəm yığılır.

3135. $-\pi \le x \le \pi$ olduqda $f(x) = |x|$ funksiyası üçün $\sigma_{2n-1}(x)$ Feyer çoxhədlisini qurun.

İKİNCİ HİSSƏ

ÇOXDƏYİŞƏNLİ FUNKSİYALAR

VI BÖLMƏ
ÇOXDƏYİŞƏNLİ FUNKSİYALARIN DİFERENSİAL HESABI

§1. Funksiyanın limiti. Kəsilməzlik

1°. F u n k s i y a n ı n l i m i t i. Tutaq ki, $f(P)=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ funksiyası P_0 limit nöqtəsi olan E çoxluğunda təyin olunmuşdur və A ədədi verilmişdir. Fərz edək ki, istənilən $\varepsilon>0$ ədədi üçün elə $\delta=\delta(\varepsilon,P_0)>0$ ədədi var ki, $P\in E$ və $0<\rho(P,P_0)<\delta$ olduqda

$$|f(P)-A|<\varepsilon$$

şərti ödənilir, burada $\rho(P,P_0)$ – P və P_0 nöqtələri arasındakı məsafədir. Onda A ədədinə $f(P)$ funksiyasının $P\to P_0$ olduqda limiti deyilir və

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A$$

kimi işarə olunur.

2°. K ə s i l m ə z l i k.

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$$

olarsa, $f(P)$ funksiyası P_0 *nöqtəsində kəsilməz* adlanır. $f(P)$ funksiyası verilmiş oblastın istənilən nöqtəsində kəsilməzdirsə, onda bu funksiya *həmin oblastda kəsilməz* adlanır.

3°. M ü n t ə z ə m k ə s i l m ə z l i k. Tutaq ki, istənilən $\varepsilon>0$ ədədi üçün yalnız ε-dan asılı elə $\delta>0$ ədədi var ki, $\rho(P',P'')<\delta$ şərtini ödəyən və G oblastından olan istənilən P', P'' nöqtələri üçün

$$|f(P')-f(P'')|<\varepsilon$$

şərti ödənilir, onda $f(P)$ funksiyası G oblastında *müntəzəm kəsilməz* adlanır.

Məhdud və qapalı oblastda kəsilməz olan funksiya bu oblastda müntəzəm kəsilməzdir.

Aşağıdakı funksiyaların təyin oblastını tapın və təsvir edin:

3136. $u=x+\sqrt{y}$.

3137. $u=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$.

3138. $u=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

3139. $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$.

3140. $u=\sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$.

3141. $u=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$.

3142. $u=\sqrt{1-(x^2+y)^2}$.

3143. $u=\ln(-x-y)$.

3144. $u=\arcsin\dfrac{y}{x}$.

3145. $u=\arccos\dfrac{x}{x+y}$.

3146. $u = \arcsin\frac{x}{y^2} + \arcsin(1-y)$.

3147. $u = \sqrt{\sin(x^2+y^2)}$.

3148. $u = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3149. $u = \ln(xyz)$.

3150. $u = \ln(-1-x^2-y^2+z^2)$.

Aşağıdakı funksiyaların səviyyə xətlərini qurun:

3151. $z=x+y$.

3152. $z=x^2+y^2$.

3153. $z=x^2-y^2$.

3154. $z=(x+y)^2$.

3155. $z=\frac{y}{x}$.

3156. $z=\frac{1}{x^2+2y^2}$.

3157. $z=\sqrt{xy}$.

3158. $z=|x|+y$.

3159. $z=|x|+|y|-|x+y|$.

3159.1. $z=\min(x,y)$.

3159.2. $z=\max(|x|,\ |y|)$.

3159.3 $z=\min(x^2,\ y)$.

3160. $z=e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}$.

3161. $z=x^y \quad (x>0)$.

3162. $z=x^y e^{-x} \quad (x>0)$.

3163. $z=\ln\sqrt{\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}} \quad (a>0)$.

3164. $z=\mathrm{arctg}\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2} \quad (a>0)$.

3165. $z=\mathrm{sgn}(\sin x\ \sin y)$.

Aşağıdakı funksiyaların səviyyə səthlərini tapın:

3166. $u=x+y+z$.

3167. $u=x^2+y^2+z^2$.

3168. $u=x^2+y^2-z^2$.

3169. $u=(x+y)^2+z^2$.

3170. $u=\mathrm{sgn}\ \sin(x^2+y^2+z^2)$.

Aşağıdakı tənliklərlə verilmiş səthlərin xüsusiyyətini araşdırın:

3171. $z=f(y-ax)$.

3172. $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$.

3173. $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$.

3174. $z=f\left(\frac{y}{x}\right)$.

3175. Tutaq ki,

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & y\ge x \text{ olduqda},\\ 0, & y<x \text{ olduqda}.\end{cases}$$

$F(t)=f(\cos t,\ \sin t)$ funksiyasının qrafikini qurun.

3176. $f(x, y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ olarsa, $f\left(1, \dfrac{y}{x}\right)$-i tapın.

3177. $f\left(\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ $(x>0)$ olarsa, $f(x)$-i tapın.

3178. Tutaq ki,

$$z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1).$$

$y=1$ olduqda $z=x$ olarsa, f və z funksiyalarını təyin edin.

3179. Tutaq ki,

$$z=x+y+f(x-y).$$

$y=0$ olduqda $z=x^2$ olarsa, f və z funksiyalarını tapın.

3180. $f\left(x+y, \dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$ olarsa, $f(x, y)$-i tapın.

3181. Göstərin ki,

$$f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$$

funksiyası üçün

$$\lim_{x\to0}\{\lim_{y\to0} f(x,y)\}=1; \qquad \lim_{y\to0}\{\lim_{x\to0} f(x,y)\}=-1,$$

lakin $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}} f(x,y)$ limiti yoxdur.

3182. Göstərin ki,

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

funksiyası üçün

$$\lim_{x\to0}\{\lim_{y\to0} f(x,y)\}=\lim_{y\to0}\{\lim_{x\to0} f(x,y)\}=0,$$

lakin $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}} f(x,y)$ limiti yoxdur.

3183. Göstərin ki,

$$f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

funksiyası üçün $\lim\limits_{x\to0}\{\lim\limits_{y\to0} f(x,y)\}$ və $\lim\limits_{y\to0}\{\lim\limits_{x\to0} f(x,y)\}$ təkrari limitləri yoxdur, lakin $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}} f(x,y)$ limiti var.

3183.1. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ limiti varmı?

3183.2. $t\to+\infty$ olduqda ixtiyari

$$x = t\cos\alpha, \quad y = t\sin\alpha \qquad (0 \le t < +\infty)$$

şüası üzrə

$$f(x,y) = x^2 e^{-(x^2-y)}$$

funksiyasının limiti nəyə bərabərdir? $x \to \infty$ və $y \to \infty$ olduqda bu funksiyanı sonsuz kiçik adlandırmaq olarmı?

3184. $\lim\limits_{x\to a}\{\lim\limits_{y\to b} f(x,y)\}$ və $\lim\limits_{y\to b}\{\lim\limits_{x\to a} f(x,y)\}$ limitlərini tapın:

a) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4}, \quad a = \infty, \quad b = \infty;$

b) $f(x,y) = \dfrac{x^y}{1+x^y}, \quad a = \infty, \quad b = +0;$

c) $f(x,y) = \sin\dfrac{\pi x}{2x+y}, \quad a = \infty, \quad b = \infty;$

d) $f(x,y) = \dfrac{1}{xy}\operatorname{tg}\dfrac{xy}{1+xy}, \quad a = 0, \quad b = \infty;$

e) $f(x,y) = \log_x(x+y), \quad a = 1, \quad b = 0.$

Aşağıdakı ikiqat limitləri tapın:

3185. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}.$

3186. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}.$

3187. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}} \dfrac{\sin xy}{x}.$

3188. $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} (x^2+y^2)\, e^{-(x+y)}.$

3189. $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}.$

3190. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)^{x^2y^2}.$

3191. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to a}} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}.$

3192. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

3193. $x = \rho\cos\varphi$ və $y = \rho\sin\varphi$ olarsa, hansı φ istiqaməti üzrə sonlu

a) $\lim\limits_{\rho\to +0} e^{\frac{x}{x^2+y^2}}$; *b)* $\lim\limits_{\rho\to +\infty} e^{x^2-y^2} \cdot \sin 2xy$

limiti var?

Aşağıdakı funksiyaların kəsilmə nöqtələrini tapın:

3194. $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

3195. $u = \dfrac{xy}{x+y}.$

3196. $u = \dfrac{x+y}{x^3+y^3}.$

3197. $u = \sin\dfrac{1}{xy}.$

3198. $u=\dfrac{1}{\sin x\sin y}$. **3200.** $u=\dfrac{1}{xyz}$.

3199. $u=\ln\left(1-x^2-y^2\right)$.

3201. $u=\ln\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$.

3202. Göstərin ki,

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \text{ olduqda,}\\ 0, & x^2+y^2=0 \text{ olduqda}\end{cases}$$

funksiyası ayrılıqda hər bir x və y dəyişənlərinə görə (dəyişənlərdən biri qeyd olunduqda) kəsilməzdir, lakin bu funksiya kəsilməz deyil.

3203. Göstərin ki,

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \text{ olduqda;}\\ 0, & x^2+y^2=0 \text{ olduqda}\end{cases}$$

funksiyası $O(0,0)$ nöqtəsindən keçən istənilən

$$x=t\cos\alpha,\quad y=t\sin\alpha \qquad (0\le t<+\infty)$$

şüası üzrə bu nöqtədə kəsilməzdir, yəni

$$\lim_{t\to 0} f(t\cos\alpha,\, t\sin\alpha)=f(0,0)$$

limiti var; lakin bu funksiya $O(0,0)$ nöqtəsində kəsilməz deyil.

3203.1. $E^2=\{|x|<+\infty, |y|<+\infty\}$ müstəvisində

$$u=2x-3y+5$$

xətti funksiyasının müntəzəm kəsilməzliyini araşdırın.

3203.2. $E^2=\{|x|<+\infty, |y|<+\infty\}$ müstəvisində $u=\sqrt{x^2+y^2}$ funksiyasının müntəzəm kəsilməzliyini araşdırın.

3203.3. $f(x,y)=\sin\dfrac{\pi}{1-x^2-y^2}$ funksiyası $x^2+y^2<1$ oblastında müntəzəm kəsilməzdirmi?

3203.4. $u=\arcsin\dfrac{x}{y}$ funksiyası özünün E təyin oblastında kəsilməzdirmi? u funksiyası E oblastında müntəzəm kəsilməzdirmi?

3204. Göstərin ki,

$$f(x,y)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{y}, & y\neq 0 \text{ olduqda,}\\ 0, & y=0 \text{ olduqda}\end{cases}$$

funksiyasının kəsilmə nöqtələri çoxluğu qapalı deyil.

3205. İsbat edin ki, əgər $f(x,y)$ funksiyası müəyyən G oblastında x dəyişəninə görə kəsilməz və (x-ə nəzərən) y dəyişəninə görə müntəzəm kəsilməz olarsa, onda bu funksiya baxılan oblastda kəsilməzdir.

3206. İsbat edin ki, əgər müəyyən G oblastında $f(x,y)$ funksiyası x dəyişəninə görə kəsilməz və y dəyişəninə görə Lıpşis şərtini ödəyirsə, yəni

$$|f(x,y')-f(x,y'')|\le L|y'-y''|$$

olarsa, onda bu funksiya verilən oblastda kəsilməzdir, burada $(x,y')\in G$, $(x,y'')\in G$ və L - sabitdir.

3207. İsbat edin ki, əgər $f(x,y)$ funksiyası ayrılıqda hər bir x və y dəyişənlərinə görə kəsilməzdirsə və bunlardan birinə görə monotondursa, onda bu funksiya kəsilməzdir (*Yunq teoremi*).

3208. Tutaq ki, $f(x,y)$ funksiyası $a\le x\le A$, $b\le y\le B$ oblastında kəsilməzdir, $\varphi_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ funksiyalar ardıcıllığı $[a,\ A]$-da müntəzəm yığılır və $b\le\varphi_n(x)\le B$ şərtini ödəyir. İsbat edin ki,

$$F_n(x)=f(x,\varphi_n(x))\quad(n=1,2,\ldots)$$

funksiyalar ardıcıllığı da $[a,\ A]$-da müntəzəm yığılır.

3209. Tutaq ki: 1) $f(x,y)$ funksiyası $R(a<x<A;\ b<y<B)$ oblastında kəsilməzdir, 2) $\varphi(x)$ funksiyası (a,A) intervalında kəsilməzdir və aldığı qiymətlər $(b,\ B)$ intervalına daxildir. İsbat edin ki,

$$F(x)=f(x,\varphi(x))$$

funksiyası (a,A) intervalında kəsilməzdir.

3210. Tutaq ki: 1) $f(x,y)$ funksiyası $R(a<x<A;\ b<y<B)$ oblastında kəsilməzdir, 2) $x=\varphi(u,v), y=\psi(u,v)$ funksiyaları $R'(a'<u<A';\ b'<v<B')$ oblastında kəsilməzdirlər və aldıqları qiymətlər uyğun olaraq (a,A) və (b,B) intervallarına daxildir. İsbat edin ki,

$$F(u,v)=f(\varphi(u,v),\ \psi(u,v))$$

funksiyası R' oblastında kəsilməzdir.

§2. Xüsusi törəmələr. Funksiyanın diferensialı

1°. Xüsusi törəmələr. Çoxdəyişənli funksiyanın hesablamaya daxil olan bütün xüsusi törəmələri kəsilməzdirsə, onda xüsusi diferensiallamanın nəticəsi diferensiallama növbəsindən asılı deyil.

2°. Funksiyanın diferensialı. Əgər x, y, z sərbəst dəyişənlərindən asılı $f(x,y,z)$ funksiyasının tam artımı

$$\Delta f(x,y,z)=A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z+o(\rho)$$

şəklində göstərilə bilərsə, onda $f(x,y,z)$ funksiyası (x,y,z) nöqtəsində *diferensiallanan* adlanır, burada A, B, C ədədləri $\Delta x,\Delta y,\Delta z$-dən asılı deyil və

$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$. Artımın

$$df(x,y,z)=f_x'(x,y,z)dx+f_y'(x,y,z)dy+f_z'(x,y,z)dz \tag{1}$$

ifadəsinə bərabər olan $A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z$ baş xətti hissəsi isə bu funksiyanın *diferensialı* adlanır, burada $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$, $dz=\Delta z$.

(1) düsturu x, y, z dəyişənləri hər hansı sərbəst dəyişənlərin diferensiallanan funksiyaları olduqda da doğrudur.

Əgər x, y, z sərbəst dəyişənlər olarsa, onda *yüksək tərtibli diferensiallar* üçün

$$d^n f(x,y,z)=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f(x,y,z)$$

simvolik düsturu doğrudur.

3°. Mürəkkəb funksiyanın törəməsi. Tutaq ki, $w=f(x,y,z)$ funksiyası diferensiallanandır. Əgər $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$, $z=\chi(u,v)$ və φ, ψ, χ funksiyaları diferensiallanan olarsa, onda

$$\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

w funksiyasının ikinci tərtib törəmələrini hesablamaq üçün

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\left(P_1\frac{\partial}{\partial x}+Q_1\frac{\partial}{\partial y}+R_1\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 w+\frac{\partial P_1}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial Q_1}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial R_1}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial z}$$

və

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=\left(P_1\frac{\partial}{\partial x}+Q_1\frac{\partial}{\partial y}+R_1\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(P_2\frac{\partial}{\partial x}+Q_2\frac{\partial}{\partial y}+R_2\frac{\partial}{\partial z}\right)w+$$

$$+\frac{\partial P_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial Q_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial R_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial z}$$

simvolik düsturlarından istifadə etmək əlverişlidir, burada

$$P_1=\frac{\partial x}{\partial u},\quad Q_1=\frac{\partial y}{\partial u},\quad R_1=\frac{\partial z}{\partial u}$$

və

$$P_2=\frac{\partial x}{\partial v},\quad Q_2=\frac{\partial y}{\partial v},\quad R_2=\frac{\partial z}{\partial v}.$$

4°. Verilmiş istiqamətdə törəmə. Əgər l istiqaməti $Oxyz$ fəzasında $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ istiqamətləndirici kosinusları ilə xarakterizə olunursa və $u=f(x,y,z)$ funksiyası diferensiallanandırsa, onda *l istiqamətinə görə törəmə*

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

düsturu ilə hesablanır. Verilmiş nöqtədə qiymətinə və istiqamətinə görə funksiyanın ən böyük artma sürəti *funksiyanın qradiyent* vektoru ilə təyin olunur:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

3211. Göstərin ki,

$$f_x'(x,b) = \frac{d}{dx}[f(x,b)].$$

3212. $$f(x,y) = x + (y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$$

funksiyası üçün $f_x'(x,1)$ -i tapın.

3212.1. $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$ funksiyası üçün $f_x'(0,0)$ və $f_y'(0,0)$-ı tapın. Bu funksiya O (0,0) nöqtəsində diferensiallanandırmı?

3212.2. $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$ funksiyası $O(0,0)$ nöqtəsində diferensiallanandırmı?

3212.3. $O(0,0)$ nöqtəsində

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & x^2+y^2>0 \text{ olduqda}, \\ 0, & x=y=0 \text{ olduqda} \end{cases}$$

funksiyasının diferensiallanmasını araşdırın.

Aşağıdakı funksiyaların birinci və ikinci tərtib xüsusi törəmələrini tapın:

3213. $u = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$.

3214. $u = xy + \dfrac{x}{y}$.

3215. $u = \dfrac{x}{y^2}$.

3216. $u = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3217. $u = x\sin(x+y)$.

3218. $u = \dfrac{\cos x^2}{y}$.

3219. $u = \operatorname{tg}\dfrac{x^2}{y}$.

3220. $u = x^y$.

3221. $u = \ln(x+y^2)$.

3222. $u = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

3223. $u = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$.

3224. $u = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3225. $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

3226. $u = \left(\dfrac{x}{y}\right)^z$.

3227. $u = x^{\frac{y}{z}}$. **3228.** $u = x^{y^z}$.

3229. *a)* $u = x^2 - 2xy - 3y^2$; *b)* $u = x^{y^2}$; *c)* $u = \arccos\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ olarsa,

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ bərabərliyini yoxlayın.

3230. Tutaq ki,

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \quad \text{olduqda;} \\ 0, & x = y = 0 \quad \text{olduqda.} \end{cases}$$

Göstərin ki,

$$f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0).$$

3230.1. $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0 \quad \text{olduqda;} \\ 0, & x = y = 0 \quad \text{olduqda} \end{cases}$$

funksiyası üçün $f''_{xy}(0,0)$ varmı?

3231. Tutaq ki, $u = f(x,y,z)$ funksiyası n dərəcəli bircins funksiyadır. Bircins funksiyalar haqqında Eyler teoremini aşağıdakı misallar üçün yoxlayın:

a) $u = (x - 2y + 3z)^2$; *b)* $u = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; *c)* $u = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}$.

3232. İsbat edin ki, əgər diferensiallanan $u = f(x,y,z)$ funksiyası

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = nu$$

tənliyini ödəyirsə, onda bu funksiya n dərəcəli bircins funksiyadır.

Göstəriş. $F(t) = \dfrac{f(tx,ty,tz)}{t^n}$ köməkçi funksiyasına baxın.

3233. İsbat edin ki, əgər diferensiallanan $f(x,y,z)$ funksiyası n dərəcəli bircins funksiya olarsa, onda onun $f'_x(x,y,z)$, $f'_y(x,y,z)$, $f'_z(x,y,z)$ xüsusi törəmələri $n-1$ dərəcəli bircins funksiyalardır.

3234. Tutaq ki, iki dəfə diferensiallanan $u = f(x,y,z)$ funksiyası n dərəcəli bircins funksiyadır. İsbat edin ki,

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u = n(n-1)u.$$

Aşağıdakı funksiyaların birinci və ikinci tərtib diferensiallarını tapın (x,y,z - sərbəst dəyişənlərdir):

3235. $u=x^m y^n$.

3236. $u=\frac{x}{y}$.

3237. $u=\sqrt{x^2+y^2}$.

3238. $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

3239. $u=e^{xy}$.

3240. $u=xy+yz+zx$.

3241. $u=\frac{z}{x^2+y^2}$.

3242. $f(x,y,z)=\sqrt[z]{\frac{x}{y}}$ funksiyası üçün $df(1,1,1)$ və $d^2f(1,1,1)$ -i tapın.

3243. Göstərin ki,

$$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

funksiyası üçün $d^2u\geq 0$.

3244. x və y-i mütləq qiymətcə kiçik hesab edərək aşağıdakı ifadələr üçün təqribi düstur çıxarın:

a) $(1+x)^m(1+y)^n$;

b) $\ln(1+x)\cdot\ln(1+y)$;

c) $\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1+xy}$.

3245. Funksiya artımını diferensialla əvəz edərək aşağıdakı ifadələri təqribi hesablayın:

a) $1{,}002\cdot 2{,}003^2\cdot 3{,}004^3$;

b) $\frac{1{,}03^2}{\sqrt[3]{0{,}98\sqrt[4]{1{,}05^3}}}$;

c) $\sqrt{1{,}02^3+1{,}97^3}$;

d) $\sin 29^0\cdot\operatorname{tg}46^0$;

e) $0{,}97^{1{,}05}$.

3246. Əgər tərəfləri $x=6\ m$ və $y=8\ m$ olan düzbucaqlının birinci tərəfi 2 *mm* artarsa, ikinci tərəfi isə 5 *mm* azalarsa, düzbucaqlının diaqonalı və sahəsi nə qədər dəyişər?

3247. Radiusu R=20 *sm*, mərkəzi bucağı isə $\alpha=60^0$ olan sektorun mərkəzi bucağını $\Delta\alpha=1^0$ artırsaq, sektorun radiusunu nə qədər azaltmaq lazımdır ki, onun sahəsi dəyişməz qalsın?

3248. İsbat edin ki, hasilin nisbi xətası təqribən vuruqların nisbi xətaları cəminə bərabərdir.

3249. Silindrin H hündürlüyünü və oturacağının R radiusunu ölçdükdə aşağıdakı nəticələr alınmışdır:

$$R=2{,}5\,м\pm 0{,}1\,м;\qquad H=4{,}0\,м\pm 0{,}2\,м.$$

Silindrin həcmi hansı Δ mütləq xəta və δ nisbi xəta ilə hesablana bilər?

3250. Üçbucağın tərəfləri $a=200м\pm2м$, $b=300м\pm5м$ və onlar arasındakı bucaq $C=60^0\pm1^0$-dir. Üçbucağın üçüncü c tərəfi hansı mütləq xəta ilə hesablana bilər?

3251. Göstərin ki,

$$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$$

funksiyası (0,0) nöqtəsində kəsilməzdir və bu nöqtədə $f_x'(0,0)$, $f_y'(0,0)$ xüsusi törəmələri var, lakin (0,0) nöqtəsində diferensiallanan deyil. (0,0) nöqtəsinin ətrafında $f_x'(x,y)$ və $f_y'(x,y)$ törəmələrini tədqiq edin.

3252. Göstərin ki,

$$f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad x^2+y^2\neq0 \text{ olduqda}$$

və

$$f(0,0)=0,$$

funksiyası (0,0) nöqtəsinin ətrafında kəsilməzdir və məhdud $f_x'(x,y)$, $f_y'(x,y)$ xüsusi törəmələri var, lakin (0,0) nöqtəsində diferensiallanan deyil.

3253. Göstərin ki, (0,0) nöqtəsinin ətrafında

$$f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, \qquad x^2+y^2\neq0 \text{ olduqda}$$

və

$$f(0,0)=0,$$

funksiyasının (0,0) nöqtəsində kəsilən və bu nöqtənin ixtiyari ətrafında qeyri-məhdud olan $f_x'(x,y)$ və $f_y'(x,y)$ xüsusi törəmələri var; lakin bu funksiya (0,0) nöqtəsində diferensiallanandır.

3254. İsbat edin ki, müəyyən qabarıq E oblastında məhdud $f_x'(x,y)$ və $f_y'(x,y)$ xüsusi törəmələri olan $f(x,y)$ funksiyası bu oblastda müntəzəm kəsilməzdir.

3255. Əgər $f(x,y)$ funksiyası y-in qeyd olunmuş hər bir qiymətində x dəyişəninə görə kəsilməzdirsə və y dəyişəninə görə məhdud $f_y'(x,y)$ törəməsi varsa, onda isbat edin ki, bu funksiya kəsilməzdir.

Aşağıdakı məsələlərdə göstərilən tərtibli xüsusi törəmələri tapın:

3256. $u=x-y+x^2+2xy+y^2+x^3-3x^2y-y^3+x^4-4x^2y^2+y^4$ üçün $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}$.

3257. $u = x\ln(xy)$ üçün $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$.

3258. $u = x^3 \sin y + y^3 \sin x$ üçün $\dfrac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3}$.

3259. $u = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}$ üçün $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$.

3260. $u = e^{xyz}$ üçün $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$.

3261. $u = \ln\dfrac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}$ üçün $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x\, \partial y \partial \xi\, \partial \eta}$.

3262. $u = (x-x_0)^p (y-y_0)^q$ üçün $\dfrac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q}$.

3263. $u = \dfrac{x+y}{x-y}$ üçün $\dfrac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$.

3264. $u = (x^2+y^2)\, e^{x+y}$ üçün $\dfrac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$.

3265. $u = xyz\, e^{x+y+z}$ üçün $\dfrac{\partial^{p+q+r} u}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}$.

3266. $f(x,y) = e^x \sin y$ üçün $f^{(m+n)}_{x^m y^n}(0,0)$ -ı tapın.

3267. Göstərin ki,

$$u = f(xyz)$$

olarsa, onda

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = F(t),$$

burada $t = xyz$. F funksiyasını tapın.

3268. $u = x^4 - 2x^3y - 2xy^3 + y^4 + x^3 - 3x^2y - 3xy^2 + y^3 + 2x^2 - xy + 2y^2 + x + y + 1$ üçün $d^4 u$ -nu tapın. $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y}$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3}$ və $\dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}$ törəmələri nəyə bərabərdir?

Aşağıdakı misallarda göstərilən tərtibli tam diferensialı tapın:

3269. $u = x^3 + y^3 - 3xy(x-y)$ üçün $d^3 u$.

3270. $u = \sin(x^2+y^2)$ üçün $d^3 u$.

3271. $u = \ln(x+y)$ üçün $d^{10} u$.

3272. $u = \cos x \operatorname{ch} y$ üçün $d^6 u$.

3273. $u = xyz$. $d^3 u$ üçün $d^3 u$.

3274. $u=\ln(x^x y^y z^z)$ üçün d^4u.

3275. $u=e^{ax+by}$ üçün $d^n u$.

3276. $u=X(x)Y(y)$ üçün $d^n u$.

3277. $u=f(x+y+z)$ üçün $d^n u$.

3278. $u=e^{ax+by+cz}$ üçün $d^n u$.

3279. Tutaq ki, $P_n(x,y,z)$ bircins n dərəcəli çoxhədlidir. İsbat edin ki,

$$d^n P_n(x,y,z)=n!\ P_n(dx,dy,dz).$$

3280. Tutaq ki,

$$Au=x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Aşağıdakı funksiyalar üçün Au və $A^2u=A(Au)$-nu tapın:

$$a)\ u=\frac{x}{x^2+y^2};\qquad b)\ u=\ln\sqrt{x^2+y^2}.$$

3281. Tutaq ki,

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Aşağıdakı funksiyalar üçün Δu-nu tapın:

$$a)\ u=\sin x\,\mathrm{ch}\,y;\qquad b)\ u=\ln\sqrt{x^2+y^2}.$$

3282. Tutaq ki,

$$\Delta_1 u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

və

$$\Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Aşağıdakı funksiyalar üçün $\Delta_1 u$ və $\Delta_2 u$-nu tapın:

$$a)\ u=x^3+y^3+z^3-3xyz;\qquad b)\ u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Aşağıdakı mürəkkəb funksiyaların birinci və ikinci tərtib törəmələrini tapın:

3283. $u=f(x^2+y^2+z^2)$. **3284.** $u=f\left(x,\frac{x}{y}\right)$.

3285. $u=f(x,xy,xyz)$.

3286. $u=f(x+y,xy)$ olarsa, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$-i tapın.

3287. $u=f(x+y+z,\ x^2+y^2+z^2)$ olarsa,

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

ifadəsini tapın.

Aşağıdakı mürəkkəb funksiyaların birinci və ikinci tərtib tam diferensiallarını tapın (x, y və z - sərbəst dəyişənlərdir):

3288. $u=f(t)$, burada $t=x+y$.

3289. $u=f(t)$, burada $t=\dfrac{y}{x}$.

3290. $u=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

3291. $u=f(t)$, burada $t=xyz$. **3292.** $u=f(x^2+y^2+z^2)$.

3293. $u=f(\xi,\eta)$, burada $\xi=ax,\ \eta=by$.

3294. $u=f(\xi,\eta)$, burada $\xi=x+y,\ \eta=x-y$.

3295. $u=f(\xi,\eta)$, burada $\xi=xy,\ \eta=\dfrac{x}{y}$. **3296.** $u=f(x+y,\ z)$.

3297. $u=f(x+y+z,\ x^2+y^2+z^2)$. **3298.** $u=f\left(\dfrac{x}{y},\ \dfrac{y}{z}\right)$.

3299. $u=f(x,y,z)$, burada $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$.

3300. $u=f(\xi,\eta,\zeta)$, burada $\xi=ax,\ \eta=by,\ \zeta=cz$.

3301. $u=f(\xi,\eta,\zeta)$, burada $\xi=x^2+y^2,\ \eta=x^2-y^2,\ \zeta=2xy$.

$d^n u$-nu tapın:

3302. $u=f(ax+by+cz)$. **3303.** $u=f(ax,by,cz)$.

3304. $u=f(\xi,\eta,\zeta)$, burada $\xi=a_1x+b_1y+c_1z$, $\eta=a_2x+b_2y+c_2z$, $\zeta=a_3x+b_3y+c_3z$.

3305. Tutaq ki, $u=f(r)$, burada $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ və f - iki dəfə diferensiallanan funksiyadır. Onda

$$\Delta u=F(r)$$

olduğunu göstərin və F funksiyasını tapın, burada $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ - Laplas operatorudur.

3306. Tutaq ki, u və v - iki dəfə diferensiallanan funksiyalardır və Δ - Laplas operatorudur (məsələ 3305-ə bax). İsbat edin ki,

$$\Delta(uv)=u\Delta v+v\Delta u+2\Delta(u,v),$$

burada

$$\Delta(u,v)=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}.$$

3307. Göstərin ki,

$$u=\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

(a və b - sabitlərdir) funksiyası

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

Laplas tənliyini ödəyir.

3308. İsbat edin ki, əgər $u=u(x,y)$ funksiyası Laplas tənliyini (məsələ 3307-yə bax) ödəyirsə, onda

$$v=u\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

funksiyası da bu tənliyi ödəyir.

3309. Göstərin ki,

$$u=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}$$

(a və b - sabitlərdir) funksiyası

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

istilikkeçirmə tənliyini ödəyir.

3310. İsbat edin ki, əgər $u=u(x,t)$ funksiyası istilikkeçirmə tənliyini (məsələ 3309-a bax) ödəyirsə, onda

$$v=\frac{1}{a\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}u\left(\frac{x}{a^2t},-\frac{1}{a^4t}\right)\qquad(t>0)$$

funksiyası da bu tənliyi ödəyir.

3311. İsbat edin ki,

$$u=\frac{1}{r}$$

funksiyası $r\neq 0$ olduqda

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

Laplas tənliyini ödəyir, burada $r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$.

3312. İsbat edin ki, əgər $u=u(x,y,z)$ funksiyası Laplas tənliyini (məsələ 3311-ə bax) ödəyirsə, onda

$$v=\frac{1}{r}u\left(\frac{k^2x}{r^2},\frac{k^2y}{r^2},\frac{k^2z}{r^2}\right)$$

funksiyası da bu tənliyi ödəyir, burada k - sabitdir və $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

3313. İsbat edin ki,

$$u=\frac{C_1 e^{-ar}+C_2 e^{ar}}{r}$$

funksiyası

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=a^2 u$$

Helmholts tənliyini ödəyir, burada $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ və C_1, C_2 - sabitlərdir.

3314. Tutaq ki, $u_1=u_1(x,y,z)$ və $u_2=u_2(x,y,z)$ funksiyaları $\Delta u=0$ Laplas tənliyini ödəyirlər. İsbat edin ki,

$$v=u_1(x,y,z)+(x^2+y^2+z^2)\ u_2(x,y,z)$$

funksiyası

$$\Delta(\Delta v)=0$$

biharmonik tənliyini ödəyir.

3315. Tutaq ki, m dəfə diferensiallanan $f(x,y,z)$ funksiyası n dərəcəli bircins funksiyadır. İsbat edin ki,

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f(x,y,z)=n(n-1)\ldots(n-m+1)f(x,y,z).$$

3316. $z=\sin y+f(\sin x-\sin y)$ olarsa,

$$\sec x\frac{\partial z}{\partial x}+\sec y\frac{\partial z}{\partial y}$$

ifadəsini sadələşdirin, burada f - diferensiallanan funksiyadır.

3317. Göstərin ki,

$$z=x^n f\left(\frac{y}{x^2}\right)$$

funksiyası

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=nz$$

tənliyini ödəyir, burada f - istənilən diferensiallanan funksiyadır.

3318. Göstərin ki,

$$z=yf(x^2-y^2)$$

funksiyası

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=xz$$

tənliyini ödəyir, burada f - istənilən diferensiallanan funksiyadır.

3319. $$u=\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{6}x^3(y+z)+\frac{1}{2}x^2yz+f(y-x,\ z-x)$$
olarsa,
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}$$

ifadəsini sadələşdirin, burada f - diferensiallanan funksiyadır.

3320. Tutaq ki,
$$x^2=vw,\quad y^2=uw,\quad z^2=uv$$
və
$$f(x,y,z)=F\,(u,v,w)\,.$$
İsbat edin ki,
$$x f'_x+y f'_y+z f'_z=uF'_u+vF'_v+wF'_w\ .$$

İxtiyari φ, ψ və başqa funksiyaların kifayət qədər diferensiallanan olduğunu qəbul edərək aşağıdakı bərabərlikləri yoxlayın:

3321. $z=\varphi(x^2+y^2)$ olduqda $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

3322. $z=\dfrac{y^2}{3x}+\varphi(xy)$ olduqda $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}-xy\dfrac{\partial z}{\partial y}+y^2=0$.

3323. $z=e^y\varphi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$ olduqda $(x^2-y^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}+xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=xyz$.

3324. $u=x^n\varphi\left(\dfrac{y}{x^\alpha},\ \dfrac{z}{x^\beta}\right)$ olduqda $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+\alpha y\dfrac{\partial u}{\partial y}+\beta z\dfrac{\partial u}{\partial z}=nu$.

3325. $u=\dfrac{xy}{z}\ln x+x\varphi\left(\dfrac{y}{x},\ \dfrac{z}{x}\right)$ olduqda $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=u+\dfrac{xy}{z}$.

3326. $u=\varphi(x-at)+\psi(x+at)$ olduqda $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

3327. $u=x\varphi(x+y)+y\psi(x+y)$ olduqda $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

3328. $u=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)+x\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ olduqda $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

3329. $u=x^n\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)+x^{1-n}\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ olduqda
$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=n\,(n-1)\,u\,.$$

3330. $u = \varphi[x + \psi(y)]$ olduqda $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Ardıcıl diferensiallama yolu ilə ixtiyari φ və ψ funksiyalarını yox edin:

3331. $z = x + \varphi(xy)$.

3332. $z = x\varphi\left(\frac{x}{y^2}\right)$.

3333. $z = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$.

3334. $u = \varphi(x - y,\ y - z)$.

3335. $u = \varphi\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$.

3336. $z = \varphi(x) + \psi(y)$.

3337. $z = \varphi(x)\psi(y)$.

3338. $z = \varphi(x + y) + \psi(x - y)$.

3339. $z = x\varphi\left(\frac{x}{y}\right) + y\psi\left(\frac{x}{y}\right)$.

3340. $z = \varphi(xy) + \psi\left(\frac{x}{y}\right)$.

3341. M (1,1) nöqtəsində $z = x^2 - y^2$ funksiyasının Ox oxunun müsbət istiqaməti ilə $\alpha = 60^0$-li bucaq əmələ gətirən l istiqaməti üzrə törəməsini tapın.

3342. M (1,1) nöqtəsində

$$z = x^2 - xy + y^2$$

funksiyasının Ox oxunun müsbət istiqaməti ilə α bucağı əmələ gətirən l istiqaməti üzrə törəməsini tapın. Bu törəmə hansı istiqamət üzrə: *a*) ən böyük qiymət alır; *b*) ən kiçik qiymət alır; *c*) 0-a bərabərdir.

3343. M (x_0, y_0) nöqtəsində

$$z = \ln(x^2 + y^2)$$

funksiyasının bu nöqtədən keçən səviyyə xəttinə perpendikulyar olan istiqamət üzrə törəməsini tapın.

3344. $z = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$ funksiyasının $M\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ nöqtəsində

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

əyrisinə bu nöqtədə çəkilmiş daxili normal istiqaməti üzrə törəməsini tapın.

3345. M (1,1,1) nöqtəsində

$$u = xyz$$

funksiyasının $l\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ istiqaməti üzrə törəməsini tapın. Bu nöqtədə funksiyanın qradiyentinin uzunluğu nəyə bərabərdir?

3346. M_0 (x_0, y_0, z_0) nöqtəsində

$$u=\frac{1}{r}$$

funksiyasının qradiyentinin uzunluğunu və istiqamətini tapın, burada $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

3347. $u=x^2+y^2-z^2$ funksiyasının $A(\varepsilon,0,0)$ və $B(0,\varepsilon,0)$ nöqtələrindəki qradiyentləri arasındakı bucağı tapın.

3348. M (1,2,2) nöqtəsində

$$u=x+y+z$$

funksiyasının qradiyentinin uzunluğu

$$v=x+y+z+0,001\sin(10^6\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

funksiyasının qradiyentinin uzunluğundan nə qədər fərqlənir?

3349. Göstərin ki, əgər M_0 (x_0, y_0, z_0) nöqtəsi sonsuzluğa yaxınlaşırsa, onda bu nöqtədə

$$u=ax^2+by^2+cz^2$$

və

$$v=ax^2+by^2+cz^2+2mx+2ny+2pz$$

(a, b, c, m, n, p - sabitlərdir və $a^2+b^2+c^2\neq 0$) funksiyalarının qradiyentləri arasındakı bucaq sıfra yaxınlaşır.

3350. Tutaq ki, $u=f(x,y,z)$ - iki dəfə diferensiallanan funksiyadır. Əgər $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ - l istiqamətinin istiqamətləndirici kosinuslarıdırsa, onda $\frac{\partial^2 u}{\partial l^2}=\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)$ törəməsini tapın.

3351. Tutaq ki, $u=f(x,y,z)$ - iki dəfə diferensiallanan funksiyadır və

$$l_1\{\cos\alpha_1,\ \cos\beta_1,\cos\gamma_1\},\ l_2\{\cos\alpha_2,\ \cos\beta_2,\cos\gamma_2\},$$
$$l_3\{\cos\alpha_3,\ \cos\beta_3,\cos\gamma_3\}$$

- üç qarşılıqlı perpendikulyar istiqamətlərdir. İsbat edin ki:

a) $\left(\frac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_3}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2;$

b) $\frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial l_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial l_3^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$

3352. Tutaq ki, $u=u(x,y)$ - diferensiallanan funksiyadır və $y=x^2$ olduqda

$$u(x,y)=1 \quad \text{və} \quad \frac{\partial u}{\partial x}=x$$

olur. $y=x^2$ olduqda $\frac{\partial u}{\partial y}$ -i tapın.

3353. Tutaq ki, $u=u(x,y)$ funksiyası

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

tənliyini və

$$u(x,2x)=x\,,\quad u'_x(x,2x)=x^2$$

şərtlərini ödəyir. $u''_{xx}(x,2x)$, $u''_{xy}(x,2x)$, $u''_{yy}(x,2x)$ törəmələrini tapın.

$z=z(x,y)$ qəbul edərək aşağıdakı tənlikləri həll edin:

3354. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$. **3355.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$. **3356.** $\dfrac{\partial^n z}{\partial y^n}=0$.

3357. $u=u(x,y,z)$ qəbul edərək

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=0$$

tənliyini həll edin.

3358. $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2+2y$ tənliyinin $z\,(x,x^2)=1$ şərtini ödəyən $z=z\,(x,y)$ həllini tapın.

3359. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$ tənliyinin $z\,(x,0)=1$, $z'_y(x,0)=x$ şərtlərini ödəyən $z=z\,(x,y)$ həllini tapın.

3360. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=x+y$ tənliyinin $z\,(x,0)=x$, $z\,(0,y)=y^2$ şərtlərini ödəyən $z=z\,(x,y)$ həllini tapın.

§3. Qeyri-aşkar funksiyaların diferensiallanması

1°. Varlıq teoremi. Əgər: 1) $F(x,y,z)$ funksiyası müəyyən $\hat{A}_0(x_0,y_0,z_0)$ nöqtəsində sıfra bərabərdirsə, 2) $F(x,y,z)$ və $F'_z(x,y,z)$ funksiyaları $\hat{A}_0$ nöqtəsinin ətrafında kəsilməzdirsə, 3) $F'_z\,(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ olarsa, onda $A_0(x_0,y_0)$ nöqtəsinin müəyyən kifayət qədər kiçik ətrafında

$$F(x,y,z)=0$$

tənliyini ödəyən yeganə kəsilməz birqiymətli

$$z=f(x,y) \tag{1}$$

funksiyası var və bu zaman $z_0=f(x_0,y_0)$.

2°. Qeyri-aşkar funksiyanın diferensiallanması.

Əgər yuxarıdakı şərtlərdən əlavə, 4) $F(x, y, z)$ funksiyası $\hat{A}_0(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsinin ətrafında diferensiallanan olarsa, onda (1) funksiyası $A_0(x_0, y_0)$ nöqtəsinin ətrafında diferensiallanandır və onun $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ törəmələri

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0 \tag{2}$$

tənliklərindən tapıla bilər. Əgər $F(x, y, z)$ funksiyası kifayət qədər diferensiallanandırsa, onda (2) bərabərliklərini ardıcıl diferensiallamaqla z funksiyasının yüksək tərtib törəmələrini də hesablamaq olar.

3°.Tənliklər sistemi ilə təyin olunan qeyri-aşkar funksiyalar. Tutaq ki, $F_i(x_1, \dots x_m; y_1, \dots, y_n)$ $(i=1, 2, \dots, n)$ funksiyaları aşağıdakı şərtləri ödəyirlər:

1) $\tilde{A}_0(x_{10}, \dots, x_{m0}; y_{10}, \dots, y_{n0})$ nöqtəsində sıfra çevrilir;

2) $\tilde{A}_0$ nöqtəsinin ətrafında diferensiallanandır;

3) $\tilde{A}_0$ nöqtəsində funksional determinant $\frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \neq 0$.

Bu halda $A_0(x_{10}, \dots, x_{m0})$ nöqtəsinin müəyyən ətrafında

$$F_i(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n)=0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \tag{3}$$

tənliklər sistemi (3) tənliklərini ödəyən

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_m) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

diferensiallanan funksiyalar sistemini birqiymətli təyin edir, bu zaman həmin funksiyalar sistemi

$$f_i(x_{10}, \dots, x_{m0}) = y_{i0} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

başlanğıc şərtlərini ödəyir.

Bu qeyri-aşkar funksiyaların diferensialları

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial F_i}{\partial x_j}dx_j + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial y_k}dy_k = 0$$

$(i=1, 2, \dots, n)$ sistemindən tapıla bilər*).

3361. Göstərin ki, istənilən nöqtədə kəsilən olan

$$y=\begin{cases}1, & x \text{ rasional olduqda,}\\ 0, & x \text{ irrasional olduqda}\end{cases}$$

Dirixle funksiyası

$$y^2 - y = 0$$

tənliyini ödəyir.

3362. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası (a,b) intervalında təyin olunmuşdur.

---

*) Bu bölmənin bir çox məsələlərində fərz edilir ki, qeyri-aşkar funksiyaların və onların uyğun törəmələrinin varlığı şərtləri ödənilir.

Hansı halda

$$f(x)y=0$$

tənliyinin $a<x<b$ olduqda yeganə kəsilməz $y=0$ həlli var?

3363. Tutaq ki, $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları (a,b) intervalında kəsilməzdir. Hansı halda

$$f(x)y=g(x)$$

tənliyinin (a,b) intervalında yeganə kəsilməz həlli var?

3364. Tutaq ki,

$$x^2+y^2=1 \qquad (1)$$

tənliyi verilmişdir və

$$y=y(x) \quad (-1\le x\le 1) \qquad (2)$$

- (1) tənliyini ödəyən birqiymətli funksiyadır.

1) (1) tənliyini neçə birqiymətli (2) funksiyası ödəyir?

2) (1) tənliyini neçə birqiymətli kəsilməz (2) funksiyası ödəyir?

3) Əgər: *a*) $y(0)=1$; *b*) $y(1)=0$ olarsa, onda (1) tənliyini neçə birqiymətli kəsilməz (2) funksiyası ödəyir?

3365. Tutaq ki,

$$x^2=y^2 \qquad (1)$$

tənliyi verilmişdir və

$$y=y(x) \qquad (-\infty<x<+\infty) \qquad (2)$$

(1) tənliyini ödəyən birqiymətli funksiyadır.

1) (1) tənliyini neçə birqiymətli (2) funksiyası ödəyir?

2) (1) tənliyini neçə birqiymətli kəsilməz (2) funksiyası ödəyir?

3) (1) tənliyini neçə birqiymətli diferensiallanan (2) funksiyası ödəyir?

4) Əgər: *a*) $y(1)=1$; *b*) $y(0)=0$ olarsa, onda (1) tənliyini neçə birqiymətli kəsilməz (2) funksiyası ödəyir?

5) Əgər $y(1)=1$ və δ kifayət qədər kiçik olarsa, onda (1) tənliyini neçə birqiymətli kəsilməz $y=y(x)$ $(1-\delta<x<1+\delta)$ funksiyası ödəyir?

3366. $x^2+y^2=x^4+y^4$ tənliyindən y x-in çoxqiymətli funksiyası kimi təyin edilir. Hansı oblastda bu funksiya 1) birqiymətlidir; 2) ikiqiymətlidir; 3) üçqiymətlidir; 4) dördqiymətlidir? Bu funksiyanın budaqlanma nöqtələrini və birqiymətli kəsilməz budaqlarını təyin edin.

3367. $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ tənliyi ilə təyin olunan çoxqiymətli y funksiyasının budaqlanma nöqtələrini və birqiymətli kəsilməz $y=y(x)$ $(-1\le x\le 1)$ budaqlarını təyin edin.

3368. Tutaq ki, $a<x<b$ olduqda $f(x)$ funksiyası kəsilməzdir və $c<y<d$ olduqda $\varphi(y)$ funksiyası monoton artan və kəsilməzdir. Hansı halda

$$\varphi(y)=f(x)$$

tənliyi birqiymətli

$$y = \varphi^{-1}(f(x))$$

funksiyasını təyin edir? Misallara baxın:

$a)$ $\sin y + \operatorname{sh} y = x$; $b)$ $e^{-y} = -\sin^2 x$.

3369. Tutaq ki,

$$x = y + \varphi(y), \tag{1}$$

burada $\varphi(0) = 0$ və $-a < y < a$ olduqda $|\varphi'(y)| \le k < 1$. İsbat edin ki, $-\varepsilon < x < \varepsilon$ olduqda (1) tənliyini ödəyən yeganə diferensiallanan $y = y(x)$ funksiyası var və $y(0) = 0$.

3370. Tutaq ki, $y = y(x)$ –

$$x = ky + \varphi(y)$$

tənliyi ilə təyin olunan qeyri-aşkar funksiya, $\varphi(y)$ - ω periodlu diferensiallanan periodik funksiyadır və $|\varphi'(y)| < |k|$, burada $k \ne 0$ sabitdir. İsbat edin ki,

$$y = \frac{x}{k} + \psi(x),$$

burada $\psi(x)$ periodu $|k|\omega$ olan periodik funksiyadır.

Aşağıdakı tənliklər ilə təyin olunan y funksiyasının y' və y'' törəmələrini tapın:

3371. $x^2 + 2xy - y^2 = a^2$. **3372.** $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

3373. $y - \varepsilon \sin y = x$ $(0 < \varepsilon < 1)$.

3374. $x^y = y^x$ $(x \ne y)$. **3375.** $y = 2x \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

3376. İsbat edin ki,

$$1 + xy = k(x - y)$$

olduqda

$$\frac{dx}{1 + x^2} = \frac{dy}{1 + y^2}$$

bərabərliyi doğrudur, burada k - sabit kəmiyyətdir.

3377. İsbat edin ki, əgər

$$x^2y^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0$$

olarsa, onda $xy > 0$ olduqda

$$\frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1 - y^4}} = 0$$

bərabərliyi doğrudur.

3378. İsbat edin ki,

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2) \qquad (a \neq 0)$$

tənliyi $x=0,\ y=0$ nöqtəsinin ətrafında iki diferensiallanan funksiya təyin edir: $y=y_1(x)$ və $y=y_2(x)$. $y'_1(0)$ və $y'_2(0)$-ı tapın.

3379. $(x^2+y^2)^2 = 3x^2y-y^3$ olarsa, $x=0$ və $y=0$ olduqda y'-i tapın.

3380. $x^2+xy+y^2=3$ olarsa, y', y'' və y'''-i tapın.

3381. $x^2-xy+2y^2+x-y-1=0$ olarsa, $x=0$ və $y=1$ olduqda y', y'', y'''-i tapın.

3382. İsbat edin ki,

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$$

ikitərtibli əyrisi üçün

$$\frac{d^3}{dx^3}[(y'')^{-\frac{2}{3}}]=0$$

bərabərliyi doğrudur.

$z=z(x,y)$ funksiyasının birinci və ikinci tərtib xüsusi törəmələrini tapın:

3383. $x^2+y^2+z^2=a^2$.

3384. $z^3-3xyz=a^3$.

3385. $x+y+z=e^z$.

3386. $z=\sqrt{x^2-y^2}\cdot \mathrm{tg}\dfrac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

3387. $x+y+z=e^{-(x+y+z)}$.

3388. Tutaq ki,

$$x^2+y^2+z^2-3xyz=0 \qquad (1)$$

və

$$f(x,y,z)=xy^2z^3.$$

a) Əgər $z=z(x,y)$ (1) tənliyi ilə təyin olunan qeyri-aşkar funksiyadırsa, $f'_x(1,1,1)$-i tapın; b) əgər $y=y(x,z)$ (1) tənliyi ilə təyin olunan qeyri-aşkar funksiyadırsa, $f'_x(1,1,1)$-i tapın. Bu törəmələrin nə üçün müxtəlif olduğunu izah edin.

3389. $x^2+2y^2+3z^2+xy-z-9=0$ olarsa, $x=1,\ y=-2,\ z=1$ olduqda $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$-nı tapın.

dz və d^2z-i tapın:

3390. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

3391. $xyz=x+y+z$.

3392. $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}+1$. **3393.** $z=x+\operatorname{arctg}\frac{y}{z-x}$.

3394. $u^3-3(x+y)u^2+z^3=0$ olarsa, du-nu tapın.

3395. $F(x+y+z,\, x^2+y^2+z^2)=0$ olarsa, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$-i tapın.

3396. $F(x-y,y-z,z-x)=0$ olarsa, $\frac{\partial z}{\partial x}$ və $\frac{\partial z}{\partial y}$-i tapın.

3397. $F(x,x+y,x+y+z)=0$ olarsa, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ və $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$-nı tapın.

3398. $F(xz,\, yz)=0$ olarsa, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$-nı tapın.

3399. d^2z -i tapın:

a) $F(x+z,\ y+z)=0$; *b)* $F\left(\frac{x}{z},\ \frac{y}{z}\right)=0$.

3399.1. Tutaq ki, $z=z\,(x,y)$

$$z^3-xz+y=0$$

tənliyi ilə təyin olunan diferensiallanan funksiyadır və $x=3,\, y=-2$ olduqda $z=2$ qiymətini alır. dz (3, –2) və d^2z (3, –2)-ni tapın.

3400. Tutaq ki, $x=x\,(y,z)$, $y=y\,(x,z)$, $z=z\,(x,y)$ –

$$F(x,y,z)=0$$

tənliyi ilə təyin olunan funksiyalardır. İsbat edin ki,

$$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1.$$

3401. $x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=1$ olarsa, $\frac{dx}{dz}$ və $\frac{dy}{dz}$-i tapın.

3402. $x^2+y^2=\frac{1}{2}z^2$, $x+y+z=2$ olarsa, $x=1$, $y=-1$, $z=2$ olduqda $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, $\frac{d^2x}{dz^2}$ və $\frac{d^2y}{dz^2}$ -nı tapın.

3403. $xu-yv=0$, $yu+xv=1$ olarsa, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ və $\frac{\partial v}{\partial y}$ -i tapın.

3403.1.
$$\left.\begin{aligned} xe^{u+v}+2uv&=1,\\ ye^{u-v}-\frac{u}{1+v}&=2x \end{aligned}\right\}$$

tənliklər sistemi $u(1,2)=0$ və $v(1,2)=0$ şərtlərini ödəyən $u=u\,(x,y)$ və $v=v\,(x,y)$ diferensiallanan funksiyalarını təyin edir. $du(1,2)$ və

$dv(1,2)$ -ni tapın.

3404. $u+v=x+y$, $\frac{\sin u}{\sin v}=\frac{x}{y}$ olarsa, du, dv, d^2u və d^2v-ni tapın.

3405.
$$e^{\frac{u}{x}}\cos\frac{v}{y}=\frac{x}{\sqrt{2}},\qquad e^{\frac{u}{x}}\sin\frac{v}{y}=\frac{y}{\sqrt{2}}$$

olarsa, $x=1$, $y=1$, $u=0$, $v=\frac{\pi}{4}$ olduqda du, dv, d^2u və d^2v-ni tapın.

3406. Tutaq ki,
$$x=t+t^{-1},\quad y=t^2+t^{-2},\quad z=t^3+t^{-3}.$$
$\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ və $\frac{d^2z}{dx^2}$-nı tapın.

3407. Oxy müstəvisinin hansı oblastında
$$x=u+v,\quad y=u^2+v^2,\quad z=u^3+v^3$$
tənliklər sistemi z-i x və y dəyişənlərinin funksiyası kimi təyin edir, burada u və v parametrləri bütün mümkün həqiqi qiymətləri alırlar? $\frac{\partial z}{\partial x}$ və $\frac{\partial z}{\partial y}$ törəmələrini tapın.

3407.1.
$$\left.\begin{array}{l} x=u+\ln v \\ y=v-\ln u \\ z=2u+v \end{array}\right\}$$
olarsa, $u=1$, $v=1$ nöqtəsində $\frac{\partial z}{\partial x}$ və $\frac{\partial z}{\partial y}$-i tapın.

3407.2.
$$\left.\begin{array}{l} x=u+v^2 \\ y=u^2-v^3 \\ z=2uv \end{array}\right\}$$
olarsa, $u=2$, $v=1$ nöqtəsində $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$-i tapın.

3408. $x=\cos\varphi\cos\psi$, $y=\cos\varphi\sin\psi$, $z=\sin\varphi$ olarsa, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$-nı tapın.

3409. $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=v$ olarsa, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ və $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$-nı tapın.

3410. Tutaq ki, $z=z(x,y)$ funksiyası
$$x=e^{u+v},\quad y=e^{u-v},\quad z=uv$$
(u və v - parametrlərdir) tənliklər sistemindən təyin olunur. $u=0$, $v=0$ olduqda dz və d^2z-i tapın.

3411. $z=x^2+y^2$ olarsa, $\frac{dz}{dx}$ və $\frac{d^2z}{dx^2}$ -nı tapın, burada $y=y(x)$

$$x^2-xy+y^2=1$$

tənliyindən təyin olunur.

3412. $u=\frac{x+z}{y+z}$ olarsa, $\frac{\partial u}{\partial x}$ və $\frac{\partial u}{\partial y}$ -i tapın, burada z

$$ze^z=xe^x+ye^y$$

tənliyindən təyin olunur.

3413. Tutaq ki,

$$x=\varphi(u,v),\quad y=\psi(u,v),\quad z=\chi(u,v)$$

tənlikləri z-i x və y-in funksiyası kimi təyin edir. $\frac{\partial z}{\partial x}$ və $\frac{\partial z}{\partial y}$ -i tapın.

3414. Tutaq ki,

$$x=\varphi(u,v),\quad y=\psi(u,v).$$

$u=u(x,y)$ və $v=v(x,y)$ tərs funksiyalarının birinci və ikinci tərtib xüsusi törəmələrini tapın.

3415. $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ -i tapın:

a) $x=u\cos\frac{v}{u},\quad y=u\sin\frac{v}{u}$; *b*) $x=e^u+u\sin v,\quad y=e^u-u\cos v$.

3416. $u=u(x)$ funksiyası

$$u=f(x,y,z),\quad g(x,y,z)=0,\quad h(x,y,z)=0$$

tənliklər sistemindən təyin olunur. $\frac{du}{dx}$ вə $\frac{d^2u}{dx^2}$ -nı tapın.

3417. $u=u(x,y)$ funksiyası

$$u=f(x,y,z,t),\quad g(y,z,t)=0,\quad h(z,t)=0$$

tənliklər sistemindən təyin olunur. $\frac{\partial u}{\partial x}$ və $\frac{\partial u}{\partial y}$ -i tapın.

3418. Tutaq ki,

$$x=f(u,v,w),\quad y=g(u,v,w),\quad z=h(u,v,w).$$

$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ və $\frac{\partial u}{\partial z}$ -i tapın.

3419. Tutaq ki, $z=z(x,y)$ funksiyası

$$f(x,y,z,t)=0,\quad g(x,y,z,t)=0$$

tənliklər sistemini ödəyir, burada t - dəyişən parametrdir. dz-i tapın.

3420. Tutaq ki, $u=f(z)$, burada z - x və y dəyişənlərinin $z=x+y\varphi(z)$ tənliyi ilə təyin olunan qeyri-aşkar funksiyasıdır.

Laqranj düsturunu isbat edin:

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left\{[\varphi(z)]^n\frac{\partial u}{\partial x}\right\}.$$

Göstəriş. Düsturu $n=1$ üçün isbat edin və riyazi induksiya üsulunu tətbiq edin.

3421. Göstərin ki,

$$\Phi(x-az,\ y-bz)=0 \qquad (1)$$

(a və b - sabitlərdir) tənliyindən təyin olunan $z=z(x,y)$ funksiyası

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$$

tənliyinin həllidir, burada $\Phi(u,v)$ - u və v dəyişənlərindən asılı olan istənilən diferensiallanan funksiyadır. (1) səthinin həndəsi xassələrini aydınlaşdırın.

3422. Göstərin ki,

$$\Phi\left(\frac{x-x_0}{z-z_0},\ \frac{y-y_0}{z-z_0}\right)=0 \qquad (2)$$

tənliyindən təyin olunan $z=z(x,y)$ funksiyası

$$(x-x_0)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial z}{\partial y}=z-z_0$$

tənliyini ödəyir, burada $\Phi(u,v)$ - u və v dəyişənlərindən asılı olan istənilən diferensiallanan funksiyadır. (2) səthinin həndəsi xassələrini aydınlaşdırın.

3423. Göstərin ki,

$$ax+by+cz=\Phi(x^2+y^2+z^2) \qquad (3)$$

tənliyindən təyin olunan $z=z(x,y)$ funksiyası

$$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay$$

tənliyini ödəyir, burada $\Phi(u)$ - u dəyişənindən asılı olan istənilən diferensiallanan funksiyadır və a, b, c - sabitlərdir. (3) səthinin həndəsi xassələrini aydınlaşdırın.

3424. $z=z(x,y)$ funksiyası

$$x^2+y^2+z^2=yf\left(\frac{z}{y}\right)$$

tənliyindən təyin olunur. Göstərin ki,

$$(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz.$$

3425. $z=z(x,y)$ funksiyası

$$F(x+zy^{-1},\ y+zx^{-1})=0$$

tənliyindən təyin olunur. Göstərin ki,

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy\,.$$

3426. Göstərin ki,

$$\left.\begin{array}{r} x\cos\alpha+y\sin\alpha+\ln z=f(\alpha) \\ -x\sin\alpha+y\cos\alpha=f'(\alpha) \end{array}\right\}$$

tənliklər sistemindən təyin olunan $z=z\,(x,y)$ funksiyası

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=z^2$$

tənliyini ödəyir, burada $\alpha=\alpha\,(x,y)$ - dəyişən parametrdir və $f(\alpha)$ - istənilən diferensiallanan funksiyadır.

3427. Göstərin ki,

$$\left.\begin{array}{l} z=\alpha x+\dfrac{y}{\alpha}+f(\alpha), \\ 0=x-\dfrac{y}{\alpha^2}+f'(\alpha) \end{array}\right\}$$

tənliklər sistemi ilə verilən

$$z=z\,(x,y)$$

funksiyası

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=1$$

tənliyini ödəyir.

3428. Göstərin ki,

$$\left.\begin{array}{l} [z-f(\alpha)]^2=x^2(y^2-\alpha^2), \\ [z-f(\alpha)]f'(\alpha)=\alpha x^2 \end{array}\right\}$$

tənliklərindən təyin olunan $z=z\,(x,y)$ funksiyası

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=xy$$

tənliyini ödəyir.

3429. Göstərin ki,

$$\left.\begin{array}{l} z=\alpha x+y\varphi\,(\alpha)+\psi\,(\alpha), \\ 0=x+y\varphi'(\alpha)+\psi'(\alpha) \end{array}\right\}$$

tənliklərindən təyin olunan $z=z\,(x,y)$ funksiyası

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2=0$$

tənliyini ödəyir.

3430. Göstərin ki,

$$y = x\varphi(z) + \psi(z)$$

tənliyindən təyin olunan $z = z(x, y)$ qeyri-aşkar funksiyası

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

tənliyini ödəyir.

§4. Dəyişənləri əvəzetmə

1°. Adi törəmələr daxil olan ifadələrdə dəyişənləri əvəzetmə. Tutaq ki,

$$A = \Phi(x, y, y'_x, y''_{xx}, \ldots)$$

diferensial ifadəsində yeni dəyişənlərə: t - asılı olmayan dəyişəninə və u funksiyasına keçmək tələb olunur, burada yeni dəyişənlər əvvəlki x və y dəyişənləri ilə

$$x = f(t, u), \quad y = g(t, u) \qquad (1)$$

tənlikləri vasitəsilə bağlıdır. (1) tənliklərini diferensiallayaraq

$$y'_x = \frac{\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial u}u'_t}{\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u}u'_t}$$

olduğunu alarıq.

Yüksək tərtibli $y''_{xx}, \ldots$ törəmələri analoji qaydada ifadə olunurlar. Nəticədə biz

$$A = \Phi_1(t, u, u'_t, u''_{tt}, \ldots)$$

olduğunu alarıq.

2°. Xüsusi törəmələr daxil olan ifadələrdə sərbəst dəyişənləri əvəzetmə. Əgər

$$B = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \ldots\right)$$

diferensial ifadəsində

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v) \qquad (2)$$

götürsək, onda $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \ldots$ xüsusi törəmələri aşağıdakı tənliklərdən təyin olunur:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v}$$

və s., burada u və v - yeni sərbəst dəyişənlərdir.

3°. **Xüsusi törəmələr daxil olan ifadələrdə sərbəst dəyişənləri və funksiyanı əvəzetmə.** Daha ümumi halda, əgər

$$x=f(u,v,w),\quad y=g(u,v,w),\quad z=h(u,v,w) \tag{3}$$

tənliyi verilirsə (burada u, v - yeni sərbəst dəyişənlər və $w=w(u,v)$ - yeni funksiyadır), onda $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots$ xüsusi törəmələri üçün

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right)=\frac{\partial h}{\partial u}+\frac{\partial h}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial v}+\frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right)=\frac{\partial h}{\partial v}+\frac{\partial h}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}$$

və s. tənliklər alarıq.

Bəzi hallarda dəyişənləri əvəzetmə zamanı tam diferensiallardan istifadə etmək əlverişlidir.

3431. y-i yeni asılı olmayan dəyişən qəbul edərək

$$y'y'''-3y''^2=x$$

tənliyini çevirin.

3432. Eyni qayda ilə

$$y'^2y^{IV}-10y'y''y'''+15y''^3=0$$

tənliyini çevirin.

3433. x-i funksiya və $t=xy$-i asılı olmayan dəyişən qəbul edərək

$$y''+\frac{2}{x}y'+y=0$$

tənliyini çevirin.

Yeni dəyişənlər daxil etməklə aşağıdakı adi diferensial tənlikləri çevirin:

3434. $x^2y''+xy'+y=0$; $x=e^t$ olduqda.

3435. $y'''=\frac{6y}{x^3}$; $t=\ln|x|$ olduqda.

3436. $(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$; $x=\cos t$ olduqda.

3437. $y''+y'\operatorname{th}x+\frac{m^2}{\operatorname{ch}^2x}y=0$; $x=\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}$ olduqda.

3438. $y''+p(x)y'+q(x)y=0$; $y=ue^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}p(\xi)\,d\xi}$ olduqda.

3439. $x^4y''+xyy'-2y^2=0$; $x=e^t$ və $y=ue^{2t}$ olduqda, burada $u=u(t)$.

3440. $(1+x^2)^2y''=y$; $x=\operatorname{tg}t$ və $y=\frac{u}{\cos t}$ olduqda, burada $u=u(t)$.

3441. $(1-x^2)^2 y''=-y; x=\operatorname{th}t$ və $y=\dfrac{u}{\operatorname{ch}t}$ olduqda, burada $u=u(t)$.

3442. $y''+(x+y)(1+y')^3=0$; $x=u+t$ və $y=u-t$ olduqda, burada $u=u(t)$.

3443. $y'''-x^3y''+xy'-y=0; x=\dfrac{1}{t}$ və $y=\dfrac{u}{t}$ olduqda, burada $u=u(t)$.

3444. $u=\dfrac{y}{x-b}$, $t=\ln\left|\dfrac{x-a}{x-b}\right|$ götürməklə və u-nu t dəyişəninin funksiyası qəbul etməklə

$$y''=\frac{Ay}{(x-a)^2(x-b)^2}$$

Stoks tənliyini çevirin.

3445. Göstərin ki, əgər

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0$$

tənliyi $x=\varphi(\xi)$ əvəzləməsi ilə

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}+P(\xi)\frac{dy}{d\xi}+Q(\xi)y=0$$

tənliyinə çevrilərsə, onda

$$[2P(\xi)\,Q(\xi)+Q'(\xi)]\,[Q(\xi)]^{-3/2}=[2p(x)\,q(x)+q'(x)]\,[q(x)]^{-3/2}.$$

3446. $\Phi(y, y', y'')=0$ tənliyində

$$y=e^{\int\limits_{x_0}^{x}u\,dx}$$

əvəzləməsini aparın, burada Φ - y, y', y'' dəyişənlərinin bircins funksiyasıdır.

3447. $F(x^2y'', xy', y)=0$ tənliyində

$$u=x\frac{y'}{y}$$

götürün, burada F - öz arqumentlərinin bircins funksiyasıdır.

3448. İsbat edin ki,

$$x=\frac{a_1\xi+b_1\eta+c_1}{a\xi+b\eta+c}, \qquad y=\frac{a_2\xi+b_2\eta+c_2}{a\xi+b\eta+c}$$

homoqrafik çevirməsi zamanı

$$y'''(1+y'^2)-3y'y''^2=0$$

tənliyi şəklini dəyişmir.

Göstəriş: Verilən çevirməni

$$x=\alpha X+\beta Y+\gamma, \quad y=Y;$$
$$X=\frac{1}{X_1}, \qquad Y=\frac{Y_1}{X_1}$$

və

$$X_1=a\xi+b\eta+c, \quad Y_1=a_2\xi+b_2\eta+c_2$$

sadə çevirmələrinin kompozisiyası şəklində göstərin.

3449. İsbat edin ki,

$$S[x(t)]=\frac{x'''(t)}{x'(t)}-\frac{3}{2}\left[\frac{x''(t)}{x'(t)}\right]^2$$

şvarsianı

$$y=\frac{ax(t)+b}{cx(t)+d} \qquad (ad-bc\neq 0)$$

kəsr-xətti çevirməsi zamanı qiymətini dəyişmir.

$x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ götürməklə aşağıdakı tənlikləri r və φ polyar koordinatları ilə ifadə edin:

3450. $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$.

3451. $(xy'-y)^2=2xy(1+y'^2)$.

3452. $(x^2+y^2)^2y''=(x+yy')^3$.

3453. $\frac{x+yy'}{xy'-y}$ ifadəsini polyar koordinatlar ilə ifadə edin.

3454. Müstəvi əyrisinin

$$K=\frac{|y''_{xx}|}{(1+y_x'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

əyriliyini r və φ polyar koordinatları ilə ifadə edin.

3455. $\frac{dx}{dt}=y+kx(x^2+y^2)$, $\frac{dy}{dt}=-x+ky(x^2+y^2)$ tənliklər sistemində polyar koordinatlara keçin.

3456. Yeni $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi=\mathrm{acrtg}\frac{y}{x}$ funksiyaları daxil etməklə

$$W=x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}$$

ifadəsini çevirin.

3457. *Lejandr çevirməsində* $y=y(x)$ əyrisinin hər bir (x,y) nöqtəsinə (X,Y) nöqtəsi qarşı qoyulur, burada

$$X=y', \quad Y=xy'-y.$$

Y', Y'' və Y'''-i tapın.

Yeni ξ və η sərbəst dəyişənlərini daxil etməklə aşağıdakı tənlikləri həll edin:

3458. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}$; $\xi=x+y$ və $\eta=x-y$ olduqda.

3459. $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$; $\xi=x$ və $\eta=x^2+y^2$ olduqda.

3460. $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$ $(a\neq 0)$; $\xi=x$ və $\eta=y-bz$ olduqda.

3461. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$; $\xi=x$ və $\eta=\frac{y}{x}$ olduqda.

u və v-ni yeni sərbəst dəyişənlər qəbul etməklə aşağıdakı tənlikləri çevirin:

3462. $x\frac{\partial z}{\partial x}+\sqrt{1+y^2}\frac{\partial z}{\partial y}=xy$; $u=\ln x$ və $v=\ln(y+\sqrt{1+y^2})$ olduqda.

3463. $(x+y)\frac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\frac{\partial z}{\partial y}=0$; $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ və $v=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ olduqda.

3464. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

$$u=\frac{y}{x} \text{ və } v=z+\sqrt{x^2+y^2+z^2} \text{ olduqda.}$$

3465. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{z}$; $u=2x-z^2$ və $v=\frac{y}{z}$ olduqda.

3466. $(x+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(y+z)\frac{\partial z}{\partial y}=x+y+z$; $u=x+z$ və $v=y+z$ olduqda.

3467. $\xi=y+ze^{-x}$, $\eta=x+ze^{-y}$-i yeni sərbəst dəyişənlər qəbul edərək

$$(z+e^x)\frac{\partial z}{\partial x}+(z+e^y)\frac{\partial z}{\partial y}-(z^2-e^{x+y})$$

ifadəsini çevirin.

3468. $x=uv$, $y=\frac{1}{2}(u^2-v^2)$ götürməklə

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

ifadəsini çevirin.

3469. $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$ tənliyində $\xi=x$, $\eta=y-x$, $\zeta=z-x$ götürün.

3470. x-i funksiya, y və z-i isə sərbəst dəyişənlər qəbul edərək

$$(x-z)\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

tənliyini çevirin.

3471. x-i funksiya, $u=y-z$ və $v=y+z$-i isə sərbəst dəyişənlər qəbul edərək

$$(y-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(y+z)\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

tənliyini çevirin.

3472. x-i funksiya, $u=xz$ və $v=yz$-i isə sərbəst dəyişənlər qəbul edərək

$$A=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

ifadəsini çevirin.

3473. $$(y+z+u)\frac{\partial u}{\partial x}+(x+z+u)\frac{\partial u}{\partial y}+(x+y+u)\frac{\partial u}{\partial z}=x+y+z$$

tənliyində $e^{\xi}=x-u$, $e^{\eta}=y-u$, $e^{\zeta}=z-u$ götürün.

Aşağıdakı tənliklərdə yeni u,v,w dəyişənlərinə keçin, burada $w=w(u,v)$:

3474. $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z$;

$$u=x^2+y^2,\quad v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y},\quad w=\ln z-(x+y) \text{ olduqda.}$$

3475. $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$; $u=x$, $v=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}$, $w=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}$ olduqda.

3476. $(xy+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(1-y^2)\frac{\partial z}{\partial y}=x+yz$;

$$u=yz-x,\quad v=xz-y,\quad w=xy-z \text{ olduqda.}$$

3477. $\left(x\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(y\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=z^2\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$;

$$x=ue^w,\quad y=ve^w,\quad z=we^w \text{ olduqda.}$$

3478. $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, $v=\operatorname{arctg} z$, $w=x+y+z$ götürməklə

$$(x-y):\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

ifadəsini çevirin, burada $w=w(u,v)$.

3479. $u=xe^z$, $v=ye^z$, $w=ze^z$ götürməklə $A=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$ ifadəsini çevirin, burada $w=w(u,v)$.

3480. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=u+\frac{xy}{z}$ tənliyində $\xi=\frac{x}{z}$, $\eta=\frac{y}{z}$, $\zeta=z$, $w=\frac{u}{z}$ götürün, burada $w=w(\xi,\eta,\zeta)$.

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ götürməklə aşağıdakı ifadələri r və φ polyar koordinatları ilə ifadə edin:

3481. $w = x\dfrac{\partial u}{\partial y} - y\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

3482. $w = x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

3483. $w = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$.

3484. $w = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

3485. $w = x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

3486. $w = y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$.

3487. $I = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial x}$ ifadəsində $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ götürün.

3488. Yeni sərbəst

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at$$

dəyişənləri daxil etməklə

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

tənliyini həll edin.

u və v-ni yeni sərbəst dəyişənlər qəbul edərək aşağıdakı tənlikləri çevirin:

3489. $2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$;

$u = x + 2y = 2$ və $v = x - y - 1$ olduqda.

3490. $(1 + x^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1 + y^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$;

$u = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ və $v = \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$ olduqda.

3491. $ax^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2bxy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + cy^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ (a, b, c sabitlərdir);

$u = \ln x$ və $v = \ln y$ olduqda.

3492. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$; $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ və $v = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}$ olduqda.

3493. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + m^2 z = 0$; $x = e^u\cos v$, $y = e^u\sin v$ olduqda.

3494. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}$ $(y>0)$; $u=x-2\sqrt{y}$ və $v=x+2\sqrt{y}$ olduqda.

3495. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$; $u=xy$ və $v=\frac{x}{y}$ olduqda.

3496. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$;

$u=x+y$ və $v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ olduqda.

3497. $xy\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + xy\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$;

$u=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ və $v=xy$ olduqda.

3498. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2x\sin y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \sin^2 y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$;

$u=x\,\mathrm{tg}\frac{y}{2}$ və $v=x$ olduqda.

3499. $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ $(x>0, y>0)$;

$x=(u+v)^2$ və $y=(u-v)^2$ olduqda.

3500. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)^3$; $u=x$ və $v=y+z$ olduqda.

3501. $\xi = x+\lambda_1 y, \quad \eta = x+\lambda_2 y$

xətti əvəzləməsinin köməyi ilə

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

tənliyini

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0$$

şəklinə gətirin, burada A, B və C - sabitlərdir və $AC-B^2<0$.

(1) tənliyini ödəyən funksiyanın ümumi şəklini tapın.

3502. İsbat edin ki, dəyişənlərin

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{\partial\psi}{\partial v}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial v} = -\frac{\partial\psi}{\partial u}$$

şərtlərini ödəyən istənilən cırlaşmayan

$$x=\varphi(u,v), \quad y=\psi(u,v)$$

əvəzləməsində

$$\Delta z \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

Laplas tənliyinin şəkli dəyişmir.

3503. $u=f(r)$ götürməklə aşağıdakı tənlikləri çevirin, burada $r=\sqrt{x^2+y^2}$:

a) $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$; *b*) $\Delta(\Delta u)=0$.

3504. $w=f(u)$ götürsək,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}+cw=0$$

tənliyi hansı şəklə düşər, burada $u=(x-x_0)(y-y_0)$?

3505. $$x+y=X, \quad y=XY$$

götürməklə

$$A=x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}$$

ifadəsini çevirin.

3506. Göstərin ki,

$$x=uv \quad \text{və} \quad y=\frac{1}{v}$$

əvəzləməsi

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy^2\frac{\partial z}{\partial x}+2(y-y^3)\frac{\partial z}{\partial y}+x^2y^2z=0$$

tənliyinin şəklini dəyişmir.

3507. Göstərin ki,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

tənliyi dəyişənlərin

$$u=x+z \quad \text{və} \quad v=y+z$$

əvəzləməsi zamanı şəklini dəyişmir.

3508. $$x=\eta\zeta, \quad y=\xi\zeta, \quad z=\xi\eta$$

götürməklə

$$xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+yz\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}+xz\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}=0$$

tənliyini çevirin.

3509. $y_1 = x_2 + x_3 - x_1$, $y_2 = x_1 + x_3 - x_2$, $y_3 = x_1 + x_2 - x_3$ götürməklə

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_3} = 0$$

tənliyini çevirin.

3510. $\xi = \frac{y}{x}$, $\eta = \frac{z}{x}$, $\zeta = y - z$

götürməklə

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2xz \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 2yz \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0$$

tənliyini çevirin.

Göstəriş: Tənliyi $A^2 u - Au = 0$ şəklində yazın, burada

$$A = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}.$$

3511. $x = r \sin\theta \cos\varphi$, $y = r \sin\theta \sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ götürməklə

$$\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

və

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

ifadələrini sferik koordinatlar vasitəsi ilə ifadə edin.

Göstəriş: Dəyişənləri əvəzetməni iki xüsusi

$$x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi, \quad z = z$$

və

$$R = r\sin\theta, \quad \varphi = \varphi, \quad z = r\cos\theta$$

kimi əvəzləmələrin kompozisiyası şəklində göstərin.

3512. $w = z^2$ götürməklə

$$z\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

tənliyini yeni w funksiyası ilə ifadə edin.

u və v-ni yeni sərbəst dəyişənlər, $w = w(u, v)$ -ni isə yeni funksiya qəbul edərək aşağıdakı tənlikləri çevirin:

3513. $y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{x}$; $u = \frac{x}{y}$, $v = x$, $w = xz - y$ olduqda.

3514. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$; $u=x+y,\ \ v=\dfrac{y}{x},\ \ w=\dfrac{z}{x}$ olduqda.

3515. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$; $u=x+y,\ \ v=x-y,\ \ w=xy-z$ olduqda.

3516. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial x}=z$; $u=\dfrac{x+y}{2},\ \ v=\dfrac{x-y}{2},\ \ w=ze^y$ olduqda.

3517. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(1+\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$;

$u=x,\ \ v=x+y,\ \ w=x+y+z$ olduqda.

3518. $(1-x^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(1-y^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$;

$x=\sin u,\ \ y=\sin v,\ \ z=e^w$ olduqda.

3519. $(1-x^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2x\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{1}{4}z=0\quad (|x|<1)$;

$u=\dfrac{1}{2}(y+\arccos x),\ \ v=\dfrac{1}{2}(y-\arccos x),\ \ w=z\sqrt[4]{1-x^2}$ olduqda.

3520. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2\dfrac{x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}}{x^2-y^2}-\dfrac{3(x^2+y^2)z}{(x^2-y^2)^2}\quad (|x|>|y|)$;

$u=x+y,\ \ v=x-y,\ \ w=\dfrac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$ olduqda.

3521. İsbat edin ki, hər bir

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}+cz=0$$

(a, b, c - sabitlərdir) tənliyini

$$z=ue^{\alpha x+\beta y}$$

əvəzləməsi ilə

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c_1 u=0\qquad (c_1=\mathrm{const})$$

şəklinə gətirmək olar, burada α və β - sabit kəmiyyətlərdir və $u=u(x,y)$.

3522. Göstərin ki,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial y}$$

tənliyi dəyişənlərin

$$x'=\frac{x}{y}, \quad y'=-\frac{1}{y}, \quad u=\frac{u'}{\sqrt{y}}e^{-\frac{x^2}{4y}}$$

əvəzləməsi zamanı şəklini dəyişmir, burada u' funksiyası x' və y' dəyişənlərindən asılıdır.

3523. $w=w(u,v)$ hesab etməklə

$$q(1+q)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-(1+p+q+2pq)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+p(1+p)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

tənliyində $u=x+z$, $v=y+z$, $w=x+y+z$ götürün, burada $p=\frac{\partial z}{\partial x}$ və $q=\frac{\partial z}{\partial y}$.

3524. $$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+z^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(y\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(z\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

tənliyində $x=e^{\xi}$, $y=e^{\eta}$, $z=e^{\zeta}$, $u=e^{w}$ götürün, burada $w=w(\xi,\ \eta,\ \zeta)$.

3525. Göstərin ki, x, y və z dəyişənlərinin rollarının istənilən cür dəyişməsi

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0$$

tənliyinin şəklini dəyişmir.

3526. x-i y və z dəyişənlərinin funksiyası qəbul edərək

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

tənliyini həll edin.

3527. $$X=\frac{\partial z}{\partial x}, \quad Y=\frac{\partial z}{\partial y}, \quad Z=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-z$$

(burada $Z=Z(X,Y)$) *Lejandr çevirməsini* tətbiq etməklə

$$A\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+C\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

tənliyini çevirin.

§5. Həndəsi tətbiqlər

1°. Toxunan düz xətt və normal müstəvi.

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad z=\chi(t)$$

əyrisinə $M(x,y,z)$ nöqtəsində çəkilən *toxunan düz xəttin* tənliyi

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}}=\frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}}=\frac{Z-z}{\frac{dz}{dt}}$$

şəklindədir. Bu nöqtədə *normal müstəvinin* tənliyi isə

$$\frac{dx}{dt}(X-x)+\frac{dy}{dt}(Y-y)+\frac{dz}{dt}(Z-z)=0$$

kimidir.

2°. Toxunan müstəvi və normal. $z=f(x,y)$ səthinə $M(x,y,z)$ nöqtəsində çəkilən *toxunan müstəvinin* tənliyi

$$Z-z=\frac{\partial z}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial z}{\partial y}(Y-y)$$

şəklindədir. M nöqtəsində *normalın* tənliyi isə

$$\frac{X-x}{\frac{\partial z}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial z}{\partial y}}=\frac{Z-z}{-1}$$

kimidir.

Əgər səthin tənliyi $F(x,y,z)=0$ qeyri-aşkar şəkildə verilmişdirsə, onda toxunan müstəvinin tənliyi

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0$$

və normalın tənliyi

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

olar.

3°. Müstəvi əyriləri ailəsinin qurşayan əyrisi. Birparametrli $f(x,y,\alpha)=0$ (α - parametrdir) əyrilər ailəsinin *qurşayan əyrisi*

$$f(x,y,\alpha)=0, \quad f'_\alpha(x,y,\alpha)=0$$

tənliklər sistemini ödəyir.

4°. Səthlər ailəsinin qurşayan səthi. Birparametrli $F(x,y,z,\alpha)=0$ səthlər ailəsinin *qurşayan səthi*

$$F(x,y,z,\alpha)=0, \quad F'_\alpha(x,y,z,\alpha)=0$$

tənliklər sistemini ödəyir.

İkiparametrli $\Phi(x,y,z,\alpha,\beta)=0$ səthlər ailəsi halında qurşayan səth aşağıdakı tənlikləri ödəyir:

$$\Phi(x,y,z,\alpha,\beta)=0, \quad \Phi'_\alpha(x,y,z,\alpha,\beta)=0, \quad \Phi'_\beta(x,y,z,\alpha,\beta)=0.$$

Aşağıdakı əyrilərə verilən nöqtələrdə toxunan düz xəttin və normal müstəvinin tənliyini yazın:

3528. $x=a\cos\alpha\cos t,\quad y=a\sin\alpha\cos t,\quad z=a\sin t;\quad t=t_0$ nöqtəsində.

3529. $x=a\sin^2 t,\quad y=b\sin t\cos t,\quad z=c\cos^2 t;\quad t=\frac{\pi}{4}$ nöqtəsində.

3530. $y=x,\quad z=x^2;\quad M(1,1,1)$ nöqtəsində.

3531. $x^2+z^2=10,\quad y^2+z^2=10;\quad M(1,1,3)$ nöqtəsində.

3532. $x^2+y^2+z^2=6,\quad x+y+z=0;\quad M(1,-2,1)$ nöqtəsində.

3533. $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$ əyrisinin elə nöqtəsini tapın ki, bu nöqtədə çəkilən toxunan $x+2y+z=4$ müstəvisinə paralel olsun.

3534. İsbat edin ki, $x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad z=bt$ vintvari xəttinə çəkilən toxunan Oz oxu ilə sabit bucaq əmələ gətirir.

3535. İsbat edin ki,

$$x=ae^t\cos t,\quad y=ae^t\sin t,\quad z=ae^t$$

əyrisi $x^2+y^2=z^2$ konusunun bütün doğuranlarını eyni bir bucaq altında kəsir.

3536. İsbat edin ki,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)=e^{k\varphi}\quad (k=\text{const})$$

loksodromu sferanın bütün meridianlarını sabit bucaq altında kəsir, burada φ - sfera nöqtəsinin coğrafi uzunluğu, ψ isə coqrafi enliyidir.

3537. $z=f(x,y),\quad \frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\sin\alpha}$ əyrisinə $M_0(x_0,y_0)$ nöqtəsində çəkilmiş toxunanın Oxy müstəvisi ilə əmələ gətirdiyi bucağın tangensini tapın, burada f - diferensiallanan funksiyadır.

3538. $M(1,2,-2)$ nöqtəsində

$$u=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

funksiyasının bu nöqtədə

$$x=t,\quad y=2t^2,\quad z=-2t^4$$

əyrisinə çəkilmiş toxunanın istiqaməti üzrə törəməsini tapın.

Aşağıdakı səthlərə göstərilən nöqtələrdə toxunan müstəvinin və normalın tənliyini yazın:

3539. $z=x^2+y^2;\quad M_0(1,2,5)$ nöqtəsində.

3540. $x^2+y^2+z^2=169;\ M_0(3,4,12)$ nöqtəsində.

3541. $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x};\quad M_0\left(1,1,\frac{\pi}{4}\right)$ nöqtəsində.

3542. $ax^2+by^2+cz^2=1$; $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsində.

3543. $z=y+\ln\frac{x}{z}$; $M_0(1, 1, 1)$ nöqtəsində.

3544. $2^{\frac{x}{z}}+2^{\frac{y}{z}}=8$; $M_0(2, 2, 1)$ nöqtəsində.

3545. $x=a\cos\psi\cos\varphi$, $y=b\cos\psi\sin\varphi$, $z=c\sin\psi$; $M_0(\varphi_0, \psi_0)$ nöqtəsində.

3546. $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=r\operatorname{ctg}\alpha$; $M_0(\varphi_0, r_0)$ nöqtəsində.

3547. $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=av$; $M_0(u_0, v_0)$ nöqtəsində.

3548. $x=u+v$, $y=u^2+v^2$, $z=u^3+v^3$ səthinə çəkilmiş toxunan müstəvinin $M(u,v)$ $(u\neq v)$ toxunma nöqtəsi səthin $u=v$ kənar xəttinin $M_0(u_0, u_0)$ nöqtəsinə qeyri-məhdud yaxınlaşdıqda limit vəziyyətini tapın.

3549. $x^2+2y^2+3z^2+2xy+2xz+4yz=8$ səthinin koordinat müstəvilərinə paralel toxunan müstəvilərə malik olduğu nöqtələri tapın.

3550. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsoidinin hansı nöqtəsində onun normalı koordinat oxları ilə bərabər bucaq əmələ gətirir?

3551. $x^2+2y^2+3z^2=21$ səthinə $x+4y+6z=0$ müstəvisi ilə paralel olan toxunan müstəvilər keçirin.

3552. İsbat edin ki, $xyz=a^3$ $(a>0)$ səthinə çəkilmiş toxunan müstəvilər koordinat müstəviləri ilə sabit həcmli tetraedr əmələ gətirir.

3553. İsbat edin ki,

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a} \quad (a>0)$$

səthinə çəkilmiş toxunan müstəvilər koordinat oxlarından cəmi sabit olan parçalar ayırır.

3554. İsbat edin ki,

$$z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$$

konusuna toxunan müstəvilər onun təpəsindən keçir.

3555. İsbat edin ki,

$$z=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \quad (f'\neq 0)$$

fırlanma səthinin normalları fırlanma oxunu kəsir.

3556. $x^2+y^2+z^2-xy=1$ ellipsoidinin koordinat müstəvilərinə proyeksiyasını tapın.

3557. $\{0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$ kvadratı diametrləri δ-dan böyük olmayan sonlu sayda σ hissələrinə bölünmüşdür. Əgər eyni bir σ hissəsində yerləşən ixtiyari $P(x,y)$ və $P_1(x_1, y_1)$ nöqtələrində

$$z=1-x^2-y^2$$

səthinə çəkilmiş normalların istiqamətləri arasındakı bucaq 1^0-dən az fərqlənirsə, onda δ ədədini yuxarıdan qiymətləndirin.

3558. Tutaq ki,

$$z = f(x,y)\text{, burada } (x,y) \in D \qquad (1)$$

- səthin tənliyidir və $\varphi(P_1, P)$ isə $P(x,y) \in D$ və $P_1(x_1,y_1) \in D$ nöqtələrində (1) səthinə çəkilmiş normallar arasındakı bucaqdır.

İsbat edin ki, əgər D oblastı məhdud və qapalı olarsa və $f(x,y)$ funksiyasının D oblastında 2-ci tərtib məhdud törəməsi varsa, onda

$$\varphi(P_1, P) < C\rho(P_1, P)$$

Lyapunov bərabərsizliyi doğrudur, burada C - sabitdir və $\rho(P_1, P)$ isə P və P_1 nöqtələri arasındakı məsafədir.

3559. $x^2 + y^2 = a^2$ silindri ilə $bz = xy$ səthi ortaq $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsində hansı bucaq altında kəsişirlər?

3560. Göstərin ki, $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $y = x\operatorname{tg}\varphi$, $x^2 + y^2 = z^2\operatorname{tg}^2\theta$ sferik koordinatlarının koordinat səthləri cüt-cüt ortoqonaldır.

3561. Göstərin ki, $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2by$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2cz$ sferaları üçortoqonal sistem əmələ gətirir.

3562. Hər bir $M(x, y, z)$ nöqtəsindən $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$, $\lambda = \lambda_3$ olduqda üç ikitərtibli səthlər keçir:

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda^2} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda^2} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda^2} = -1 \qquad (a > b > c > 0).$$

Bu səthlərin ortoqonallığını isbat edin.

3563. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ sferasının $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsindəki xarici normalı istiqaməti üzrə bu nöqtədə $u = x + y + z$ funksiyasının törəməsini tapın. Sferanın hansı nöqtələrində u funksiyasının normal törəməsi: a) ən böyük qiymət alır; b) ən kiçik qiymət alır; c) sıfra bərabərdir?

3564. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ellipsoidinin $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsindəki xarici normalı istiqaməti üzrə bu nöqtədə $u = x^2 + y^2 + z^2$ funksiyasının törəməsini tapın.

3565. Tutaq ki, $\frac{\partial u}{\partial n}$ və $\frac{\partial v}{\partial n}$ $F(x, y, z)=0$ səthinin nöqtəsində u və v funksiyalarının normal törəmələridir. İsbat edin ki,

$$\frac{\partial}{\partial n}(uv) = u\frac{\partial v}{\partial n} + v\frac{\partial u}{\partial n}.$$

Aşağıdakı birparametrli müstəvi əyrilər ailəsinin qurşayanını tapın:

3566. $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ $(p = \text{const})$.

3567. $(x-a)^2+y^2=\frac{a^2}{2}$.

3568. $y=kx+\frac{a}{k}$ $(a=\text{const})$. **3569.** $y^2=2px+p^2$.

3570. Ucları koordinat oxları üzrə sürüşən l uzunluqlu parçanın qurşadığı əyrini tapın.

3571. Sabit S sahəli $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipslərinin qurşayanını tapın.

3572. Havasız fəzada v_0 başlanğıc sürəti ilə atılmış mərminin, α atılma bucağı şaquli müstəvidə dəyişdikdə mərminin trayektoriyalarının qurşayanını tapın.

3573. İsbat edin ki, müstəvi əyrisinin normallarının qurşayanı bu əyrinin evolyutasıdır.

3574. Aşağıdakı xətlər ailəsinin *diskriminant əyrilərinin* xüsusiyyətini araşdırın (c - dəyişən parametrdir):

a) $y=(x-c)^3$ kub parabolası;

b) $y^2=(x-c)^3$ yarımkub parabolası;

c) $y^3=(x-c)^2$ Neyl parabolası;

d) $(y-c)^2=x^2\frac{a-x}{a+x}$ strofoidi.

3575. Mərkəzləri $x=R\cos t$, $y=R\sin t$, $z=0$ (t - parametrdir) çevrəsində yerləşən r ($R>r$) radiuslu kürələr ailəsinin qurşayanını təyin edin.

3576. $(x-t\cos\alpha)^2+(y-t\cos\beta)^2+(z-t\cos\gamma)^2=1$ kürələr ailəsinin qurşayanını tapın, burada $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ və t - dəyişən parametrdir.

3577. Sabit V həcmli $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsoidlər ailəsinin qurşayanını təyin edin.

3578. Mərkəzləri $x^2+y^2=z^2$ konusunun səthində yerləşən ρ radiuslu sferalar ailəsinin qurşayanını tapın.

3579. İşıqlanan nöqtə koordinat başlanğıcında yerləşir. $x_0^2+y_0^2+z_0^2>R^2$ olarsa, $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\le R^2$ kürəsinin kölgə konusunu tapın.

3580. p və q parametrləri

$$p^2+q^2=1$$

tənliyini ödəyərsə,

$$z-z_0=p(x-x_0)+q(y-y_0)$$

müstəvilər ailəsinin qurşayanını tapın.

§6. Teylor düsturu

1°. Teylor düsturu. Əgər (a, b) nöqtəsinin müəyyən ətrafında $f(x,y)$ funksiyasının $n+1$ tərtibə qədər bütün kəsilməz xüsusi törəmələri varsa, onda bu ətrafda

$$f(x,y)=f(a,b)+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^i f(a,b)+R_n(x,y) \qquad (1)$$

düsturu doğrudur, burada

$$R_n(x,y)=\frac{1}{(n+1)!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1} f(a+\theta_n(x-a),\ b+\theta_n(y-b))$$

$$(0<\theta_n<1).$$

2°. Teylor sırası. Əgər $f(x,y)$ funksiyası sonsuz diferensiallanandırsa və $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x,y)=0$ olarsa, onda bu funksiya

$$f(x,y)=f(a,b)+\sum_{i+j\geq 1}^{\infty}\frac{1}{i!\,j!}f^{(i+j)}_{x^iy^j}(a,b)(x-a)^i(y-b)^j \qquad (2)$$

qüvvət sırası şəklində göstərilə bilər.

$a=b=0$ olduqda (1) və (2) düsturlarının xüsusi halları uyğun olaraq *Makloren düsturu* və *Makloren sırası* adlanır.

Dəyişənlərinin sayı ikidən çox olan funksiyalar üçün analoji düsturlar doğrudur.

3°. Müstəvi əyrilərinin məxsusi nöqtələri. Diferensiallanan $F(x,y)=0$ əyrisi üçün

$$F(x_0,y_0)=0,\qquad F'_x(x_0,y_0)=0,\qquad F'_y(x_0,y_0)=0$$

olarsa, $M_0(x_0,y_0)$ nöqtəsinə bu əyrinin *məxsusi nöqtəsi* deyilir.

Tutaq ki, $M_0(x_0,y_0)$ - iki dəfə diferensiallanan $F(x,y)=0$ əyrisinin (izolə edilmiş) məxsusi nöqtəsidir və

$$A=F''_{xx}(x_0,y_0),\qquad B=F''_{xy}(x_0,y_0),\qquad C=F''_{yy}(x_0,y_0)$$

ədədlərindən heç olmasa biri sıfra bərabər deyil. Onda

1) $AC-B^2>0$ olarsa, M_0 - *izolə edilmiş nöqtədir*;

2) $AC-B^2<0$ olarsa, M_0 - *ikiqat nöqtədir* (*düyün*);

3) $AC-B^2=0$ olarsa, M_0 - *qayıtma nöqtəsi* və ya *izolə edilmiş nöqtədir*.

$A=B=C=0$ olan halda məxsusi nöqtələrin daha mürəkkəb növləri mümkündür. $C^{(2)}$ hamarlıq sinfinə daxil olmayan əyrilərdə məxsusiyyət daha mürəkkəb təbiətli ola bilər: *qurtarma nöqtələri*, *bucaq nöqtələri* və s.

3581. $A(1,-2)$ nöqtəsinin ətrafında $f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$ funksiyası üçün Teylor düsturunu yazın.

3582. $A(1,1,1)$ nöqtəsinin ətrafında $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$ funksiyasını Teylor düsturuna görə ayırın.

3583. $x=1$, $y=-1$ qiymətindən $x_1=1+h$, $y_1=-1+k$ qiymətinə keçdikdə $f(x, y)=x^2y+xy^2-2xy$ funksiyasının artımını tapın.

3584. $f(x, y, z)=Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz$ olarsa, $f(x+h, y+k, z+l)$-i h, k və l kəmiyyətlərinin müsbət tam qüvvətləri üzrə ayırın.

3585. A (1 , 1) nöqtəsinin ətrafında $f(x, y)=x^y$ funksiyasının ayrılışının ikinci tərtibə qədər hədlərini yazın.

3586. $f(x, y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ funksiyasını Makloren düsturuna görə dördüncü tərtib həddə qədər ayırın.

3587. Əgər $|x|$ və $|y|$ bir ilə müqayisədə kiçik olarsa, onda

$$a)\ \frac{\cos x}{\cos y};\qquad b)\ \operatorname{arctg}\frac{1+x+y}{1-x+y}$$

ifadələri üçün ikinci tərtib hədd dəqiqliyi ilə təqribi düstur çıxarın.

3588. x, y və z-i mütləq qiymətcə kiçik hesab edərək

$$\cos(x+y+z)-\cos x\cos y\cos z$$

ifadəsini sadələşdirin.

3589. $$F(x, y)=\frac{1}{4}[f(x+h, y)+f(x, y+h)+$$
$$+f(x-h, y)+f(x, y-h)]-f(x, y)$$

funksiyasını h-ın qüvvətləri üzrə h^4 dəqiqliyi ilə ayırın.

3590. Tutaq ki, $f(P)=f(x, y)$ və $P_i(x_i, y_i)$ $(i=1, 2, 3)$ - mərkəzi $P(x,y)$ nöqtəsində olan ρ radiuslu çevrənin daxilinə çəkilmiş düzgün üçbucağın təpə nöqtələridir, burada $x_1=x+\rho$ və $y_1=y$.

$$F(\rho)=\frac{1}{3}[f(P_1)+f(P_2)+f(P_3)]$$

funksiyasını ρ-nun müsbət tam qüvvətləri üzrə ρ^2 dəqiqliyi ilə ayırın.

3591. $\Delta_{xy}f(x, y)=f(x+h, y+k)-f(x+h, y)-f(x, y+k)+f(x, y)$ funksiyasını h və k-nın qüvvətləri üzrə ayırın.

3592. $F(\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x+\rho\cos\varphi, y+\rho\sin\varphi)\,d\varphi$ funksiyasını ρ-nun qüvvətləri üzrə ayırın.

Aşağadakı funksiyaları Makloren sırasına ayırın:

3593. $f(x, y)=(1+x)^m(1+y)^n$.

3594. $f(x, y)=\ln(1+x+y)$.

3595. $f(x, y)=e^x\sin y$.

3596. $f(x, y)=e^x\cos y$.

3597. $f(x, y)=\sin x \operatorname{sh} y$.

3598. $f(x, y)=\cos x \operatorname{ch} y$.

3599. $f(x, y)=\sin(x^2+y^2)$.

3600. $f(x, y)=\ln(1+x)\ln(1+y)$.

3601. $f(x,y)=\int_0^1 (1+x)^{t^2 y}\,dt$ funksiyasının Makloren sırasına ayrılışının üç həddini yazın.

3602. e^{x+y} funksiyasını $(x-1)$ və $(y+1)$-in müsbət tam qüvvətləri üzrə qüvvət sırasına ayırın.

3603. $M(1,1)$ nöqtəsinin ətrafında $f(x, y)=\frac{x}{y}$ funksiyasının Teylor sırasına ayrılışını yazın.

3604. Tutaq ki, $z=z(x,y)$ qeyri-aşkar funksiyası $z^3-2xz+y=0$ tənliyindən təyin olunur və $x=1$, $y=1$ olduqda $z=1$ qiyməti alır. $(x-1)$ və $(y-1)$-in artan qüvvətləri üzrə z funksiyasının ayrılışının bir neçə həddini yazın.

Aşağıdakı əyrilərin məxsusi nöqtələrinin növlərini müəyyən edin və bu əyriləri təxmini təsvir edin:

3605. $y^2=ax^2+x^3$.

3606. $x^3+y^3-3xy=0$.

3607. $x^2+y^2=x^4+y^4$.

3608. $x^2+y^4=x^6$.

3609. $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

3610. $(y-x^2)^2=x^5$.

3611. $(a+x)y^2=(a-x)x^2$.

3612. a, b, c $(a\le b\le c)$ parametrlərinin qiymətlərindən asılı olaraq $y^2=(x-a)(x-b)(x-c)$ əyrisinin formasını öyrənin.

Aşağıdakı əyrilərin məxsusi nöqtələrini araşdırın:

3613. $y^2=1-e^{-x^2}$.

3614. $y^2=1-e^{-x^3}$.

3615. $y=x\ln x$.

3616. $y=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

3617. $y=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

3618. $y^2=\sin\dfrac{\pi}{x}$.

3619. $y^2=\sin x^2$.

3620. $y^2=\sin^3 x$.

§7. Çoxdəyişənli funksiyanın ekstremumu

1°. Ekstremumun tərifi. Tutaq ki, $f(P)=f(x_1,\dots,x_n)$ funksiyası P_0 nöqtəsinin ətrafında təyin olunmuşdur. Əgər $0<\rho(P_0,P)<\delta$ olduqda ya $f(P_0)>f(P)$, ya da $f(P_0)<f(P)$ olarsa, onda deyilir ki, $f(P)$ funksiyası P_0 nöqtəsində *ekstremuma* (uyğun olaraq *maksimuma* və ya *minimuma*) malikdir.

2°. Ekstremum üçün zəruri şərt. Diferensiallanan $f(P)$ funksiyası yalnız *stasionar* nöqtədə, yəni $df(P_0)=0$ şərtini ödəyən P_0 nöqtəsində ekstremuma malik ola bilər. Deməli, $f(P)$ funksiyasının ekstremum nöqtələri $f'_{x_i}(x_1,\dots,x_n)=0$ $(i=1,\dots,n)$ tənliklər sistemini ödəyir.

3°. Ekstremum üçün kafi şərt. $f(P)$ funksiyası P_0 nöqtəsində

a) $\sum_{i=1}^{n}|dx_i|\neq 0$ olduqda $df(P_0)=0$, $d^2f(P_0)<0$ olarsa, *maksimuma* və

b) $\sum_{i=1}^{n}|dx_i|\neq 0$ olduqda $df(P_0)=0$, $d^2f(P_0)>0$ olarsa, *minimuma* malikdir.

İkinci tərtib $d^2f(P_0)$ diferensialının işarəsi bu diferensiala uyğun kvadratik formanı kanonik şəklə gətirməklə araşdırıla bilər.

Xüsusi halda, ikidəyişənli $f(x,y)$ funksiyası üçün (x_0,y_0) stasionar nöqtəsində $(df(x_0,y_0)=0)$ $D=AC-B^2\neq 0$ (burada $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$, $B=f''_{xy}(x_0,y_0)$, $C=f''_{yy}(x_0,y_0)$) şərti daxilində aşağıdakılar alınır:

1) $D>0$, $A>0$ $(C>0)$ olarsa, (x_0,y_0) - *minimum* nöqtəsidir;

2) $D>0$, $A<0$ $(C<0)$ olarsa, (x_0,y_0) - *maksimum* nöqtəsidir;

3) $D<0$ olarsa, ekstremum yoxdur.

4°. Şərti ekstremum. $f(P_0)=f(x_1,\dots,x_n)$ funksiyasının $\varphi_i(P)=0$ $(i=1,\dots,m;\ m<n)$ münasibətləri daxilində ekstremumunun təyin olunması məsələsi

$$L(P)=f(P)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i(P)$$

Laqranj funksiyası üçün adi ekstremumun tapılması məsələsinə gətirilir, burada λ_i $(i=1,\dots,m)$ - sabit vuruqlardır. Sadə hallarda şərti ekstremumun varlığı və xüsusiyyəti məsələsi $dx_1,\dots,dx_n$ dəyişənlərinin

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}dx_j=0 \quad (i=1,\dots,m)$$

münasibətləri ilə bağlı olması şərti daxilində P_0 stasionar nöqtəsində $L(P)$ funksiyasının ikinci tərtib $d^2L(P_0)$ diferensialının işarəsinin araşdırılmasına əsasən həll olunur.

5°. **Mütləq ekstremum.** Məhdud və qapalı oblastda diferensiallanan $f(P)$ funksiyası bu oblastda özünün ən böyük və ən kiçik qiymətlərini ya stasionar nöqtələrdə, ya da oblastın sərhəd nöqtələrində alır.

Aşağıdakı çoxdəyişənli funksiyaların ekstremumlarını tədqiq edin:

3621. $z=x^2+(y-1)^2$.

3622. $z=x^2-(y-1)^2$.

3623. $z=(x-y+1)^2$.

3624. $z=x^2-xy+y^2-2x+y$.

3625. $z=x^2y^3(6-x-y)$.

3626. $z=x^3+y^3-3xy$.

3627. $z=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$.

3627.1. $z=2x^4+y^4-x^2-2y^2$.

3628. $z=xy+\frac{50}{x}+\frac{20}{y}$ $(x>0,\ y>0)$.

3629. $z=xy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ $(a>0,\ b>0)$.

3630. $z=\frac{ax+by+c}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$ $(a^2+b^2+c^2\neq 0)$.

3631. $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$.

3632. $z=e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2)$.

3633. $z=e^{x^2-y}(5-2x+y)$.

3634. $z=(5x+7y-25)\,e^{-(x^2+xy+y^2)}$.

3635. $z=x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y$.

3636. $z=\sin x+\cos y+\cos(x-y)$ $\left(0\le x\le\frac{\pi}{2};\ 0\le y\le\frac{\pi}{2}\right)$.

3637. $z=\sin x\sin y\sin(x+y)$ $(0\le x\le\pi;\ 0\le y\le\pi)$.

3638. $z=x-2y+\ln\sqrt{x^2+y^2}+3\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$.

3639. $z=xy\ln(x^2+y^2)$.

3640. $z=x+y+4\sin x\sin y$.

3641. $z=(x^2+y^2)\,e^{-(x^2+y^2)}$.

3642. $u=x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z$.

3643. $u=x^3+y^2+z^2+12xy+2z$.

3644. $u=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z}$ $(x>0,\ y>0,\ z>0)$.

3645. $u=xy^2z^3(a-x-2y-3z)$ $(a>0)$.

3647. $u=\sin x+\sin y+\sin z-\sin(x+y+z)$

$$(0\le x\le\pi;\ 0\le y\le\pi;\ 0\le z\le\pi).$$

3648. $u=x_1x_2^2\ldots x_n^n\ \ (1-x_1-2x_2-\ldots-nx_n)$

$$(x_1>0,\ x_2>0,\ \ldots,\ x_n>0).$$

3649. $u=x_1+\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_3}{x_2}+\ldots+\dfrac{x_n}{x_{n-1}}+\dfrac{2}{x_n}\qquad (x_i>0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$

3650. Hüygens məsələsi. İki müsbət a və b ədədləri arasında n sayda $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ədədlərini elə yerləşdirin ki,

$$u=\frac{x_1x_2\ldots x_n}{(a+x_1)(x_1+x_2)\ldots(x_n+b)}$$

kəsrinin qiyməti ən böyük olsun.

x və y dəyişənlərindən asılı qeyri-aşkar z funksiyasının ekstremal qiymətlərini tapın:

3651. $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0.$

3652. $x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y+2z-2=0.$

3653. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2).$

Aşağıdakı funksiyaların şərti ekstremum nöqtələrini tapın:

3654. $z=xy;\ \ x+y=1$ olduqda.

3655. $z=\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b};\ \ x^2+y^2=1$ olduqda.

3656. $z=x^2+y^2;\ \ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ olduqda.

3657. $z=Ax^2+2Bxy+Cy^2;\ \ x^2+y^2=1$ olduqda.

3657.1. $z=x^2+12xy+2y^2;\ \ 4x^2+y^2=25$ olduqda.

3658. $z=\cos^2x+\cos^2y;\ \ x-y=\dfrac{\pi}{4}$ olduqda.

3659. $u=x-2y+2z;\ \ x^2+y^2+z^2=1$ olduqda.

3660. $u=x^my^nz^p;\ \ x+y+z=a\ \ (m>0,\ n>0,\ p>0,\ a>0)$ olduqda.

3661. $u=x^2+y^2+z^2;\ \ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\ \ (a>b>c>0)$ olduqda.

3662. $u=xy^2z^3;\ \ x+2y+3z=a\ \ (x>0,\ y>0,\ z>0,\ a>0)$ olduqda.

3663. $u=xyz;\ \ x^2+y^2+z^2=1,\ x+y+z=0$ olduqda.

3663.1. $u=xy+yz;\ \ x^2+y^2=2,\ \ y+z=2$ olduqda $(x>0,\ y>0,\ z>0)$.

3664. $u=\sin x\sin y\sin z;\ \ x+y+z=\dfrac{\pi}{2}$ olduqda $(x>0,\ y>0,\ z>0)$.

3665. $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$; $x^2+y^2+z^2=1$, $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0$ olduqda $(a>b>c>0,\ \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1)$.

3666. $u=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2$;

$$Ax+By+Cz=0,\ x^2+y^2+z^2=R^2,$$

$\frac{\xi}{\cos\alpha}=\frac{\eta}{\cos\beta}=\frac{\zeta}{\cos\gamma}$ olduqda, burada $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

3667. $u=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$;

$$\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}+\ldots+\frac{x_n}{a_n}=1 \text{ olduqda } (a_i>0;\ i=1,2,\ldots,n).$$

3668. $u=x_1^p+x_2^p+\ldots+x_n^p$ $(p>1)$; $x_1+x_2+\ldots+x_n=a$ olduqda $(a>0)$.

3669. $u=\frac{\alpha_1}{x_1}+\frac{\alpha_2}{x_2}+\ldots+\frac{\alpha_n}{x_n}$;

$\beta_1x_1+\beta_2x_2+\ldots+\beta_nx_n=1$ olduqda $(\alpha_i>0,\beta_i>0,x_i>0,i=1,2,\ldots,n)$.

3670. $u=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$; $x_1+x_2+\ldots+x_n=a$ olduqda

$$(a>0,\alpha_i>1,i=1,2,\ldots,n).$$

3671. $\sum_{i=1}^{n}x_i^2=1$ şərti daxilində

$$u=\sum_{i,j}^{n}a_{ij}x_ix_j \quad (a_{ij}=a_{ji})$$

kvadratik formasının ekstremumunu tapın.

3672. $n\ge1$ və $x\ge0$, $y\ge0$ olarsa,

$$\frac{x^n+y^n}{2}\ge\left(\frac{x+y}{2}\right)^n$$

bərabərsizliyini isbat edin.

G ö s t ə r i ş. $x+y=s$ şərti daxilində $z=\frac{1}{2}(x^n+y^n)$ funksiyasının minimumunu tapın.

3673. *Hölder bərabərsizliyini* isbat edin:

$$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\le\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}$$

$$\left(a_i\ge0,\ x_i\ge0,\ i=1,2,\ldots,n;\ k>1,\ \frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1\right).$$

Göstəriş. $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = A$ şərti daxilində

$$u = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}$$

funksiyasının minimumunu tapın.

3674. n tərtibli $A = |a_{ij}|$ determinantı üçün *Adamar bərabərsizliyini* isbat edin:

$$A^2 \le \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right).$$

Göstəriş. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = S_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ münasibətləri daxilində $A = |a_{ij}|$ determinantının ekstremumunu araşdırın.

Aşağıdakı funksiyaların göstərilən oblastda ən böyük (sup) və ən kiçik (inf) qiymətini təyin edin:

3675. $z = x - 2y - 3$; $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le x + y \le 1$ olduqda.

3676. $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$; $x^2 + y^2 \le 25$ olduqda.

3677. $z = x^2 - xy + y^2$; $|x| + |y| \le 1$ olduqda.

3678. $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$; $x^2 + y^2 + z^2 \le 100$ olduqda.

3679. $u = x + y + z$; $x^2 + y^2 \le z \le 1$ olduqda.

3680. $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ oblastında

$$u = (x + y + z)\, e^{-(x+2y+3z)}$$

funksiyasının aşağı sərhədini (inf) və yuxarı sərhədini (sup) tapın.

3681. Göstərin ki, $z = (1 + e^y)\cos x - ye^y$ funksiyasının sonsuz sayda maksimumu var və heç bir minimumu yoxdur.

3682. $f(x, y)$ funksiyasının $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsində minimum alması üçün M_0 nöqtəsindən keçən hər bir düz xətt boyunca bu funksiyanın minimuma malik olması kafidirmi?

$f(x, y) = (x - y^2)(2x - y^2)$ misalına baxın.

3683. Verilmiş müsbət a ədədini n sayda müsbət vuruqlara elə ayırın ki, bu vuruqların tərs qiymətlərinin cəmi ən kiçik olsun.

3684. Verilmiş müsbət a ədədini kvadratları cəmi ən kiçik olan n sayda toplananlara ayırın.

3685. Verilmiş müsbət a ədədini n sayda müsbət vuruqlara elə ayırın ki, bu vuruqların verilmiş müsbət qüvvətləri cəmi ən kiçik olsun.

3686. Müstəvi üzərində kütlələri uyğun olaraq $m_1, m_2, \dots, m_n$ olan n sayda $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, ..., $P_n(x_n, y_n)$ maddi nöqtələri verilmişdir.

$P(x, y)$ nöqtəsinin hansı vəziyyətində sistemin bu nöqtəyə nəzərən ətalət momenti ən kiçik olacaq?

3687. Verilmiş V tutumlu açıq düzbucaqlı vanna hansı ölçülərdə ən kiçik səthə malikdir?

3688. Səthi S-ə bərabər olan yarımdairəvi en kəsikli açıq silindrik vanna hansı ölçülərdə ən böyük tutuma malikdir?

3689. $x^2+y^2+z^2=1$ sferasında elə nöqtə tapın ki, verilmiş n sayda $M_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ nöqtələrindən bu nöqtəyə qədər olan məsafələrin kvadratları cəmi ən kiçik olsun.

3690. Cisim düz dairəvi konusla tamamlanan düz dairəvi silindrdən ibarətdir. Tam səthi Q-yə bərabər olan cismin ölçülərini elə seçin ki, cismin həcmi ən böyük olsun.

3691. Həcmi V-yə bərabər olan cisim oturacaqları eyni düzgün dördbucaqlı piramidaların oturacaqları ilə üst-üstə düşən düzbucaqlı paralelepipeddən ibarətdir. Piramidaların yan üzləri oturacaqla hansı bucaq əmələ gətirdikdə cismin tam səthi ən kiçik olacaq?

3692. Tərəflərinin biri ətrafında fırlanmasından ən böyük həcmli cisim əmələ gətirən $2p$ perimetrli düzbucaqlı tapın.

3693. Tərəflərinin biri ətrafında fırlanmasından ən böyük həcmli cisim əmələ gətirən $2p$ perimetrli üçbucaq tapın.

3694. R radiuslu yarımkürənin daxilinə ən böyük həcmli düzbucaqlı paralelepiped çəkin.

3695. Verilmiş düz dairəvi konusun daxilinə ən böyük həcmli düzbucaqlı paralelepiped çəkin.

3696. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsoidinin daxilinə ən böyük həcmli düzbucaqlı paralelepiped çəkin.

3697. l doğuranı oturacaq müstəvisinə α bucağı altında meyl edən düz dairəvi konusun daxilinə ən böyük tam səthli düzbucaqlı paralelepiped çəkin.

3698. $\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$, $z=c$ elliptik paraboloid seqmentinin daxilinə ən böyük həcmli düzbucaqlı paralelepiped çəkin.

3699. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsindən $Ax+By+Cz+D=0$ müstəvisinə qədər olan məsafəni tapın.

3700. Fəzada

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{və} \quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

düz xətləri arasındakı d məsafəsini təyin edin.

3701. $y=x^2$ parabolası ilə $x-y-2=0$ düz xətti arasındakı ən qısa məsafəni tapın.

3702. İkinci tərtib

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$$

mərkəzli əyrisinin yarımoxlarını tapın.

3703. İkinci tərtib

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Eyz+2Fxz=1$$

mərkəzli səthinin yarımoxlarını tapın.

3704. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ silindrinin $Ax+By+Cz=0$ müstəvisi ilə kəsişməsindən əmələ gələn ellipsin sahəsini tapın.

3705. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsoidinin $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0$ müstəvisi ilə kəsiyinin sahəsini təyin edin, burada $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

3706. A nöqtəsindən çıxıb B nöqtəsinə düşən işıq Ferma prinsipinə görə ən az vaxt tələb olunan əyri üzrə yayılır. A və B nöqtələrinin müstəvi ilə ayrılmış müxtəlif optik mühitlərdə yerləşdiyini və işığın yayılma sürətinin birinci mühitdə v_1, ikinci mühitdə isə v_2 olduğunu bilərək işığın sınma qanununu çıxarın.

3707. Sınma bucağı α və sınma əmsalı n olan prizmadan keçən işıq şüası hansı bucaq altında düşməlidir ki, onun meyli (yəni düşən və çıxan şüalar arasındakı bucaq) ən kiçik olsun. Bu ən kiçik meyli təyin edin.

3708. x və y dəyişən kəmiyyətləri əmsallarının təyin olunması tələb olunan $y=ax+b$ xətti tənliyini ödəyir. Bir sıra eyni dəqiqliyə malik ölçmələr nəticəsində x və y kəmiyyətləri üçün x_i, y_i $(i=1,2,\dots,n)$ qiymətləri alınmışdır. Ən kiçik kvadratlar üsulundan istifadə edərək a və b əmsallarının ən çox ehtimal olunan qiymətlərini tapın.

Göstəriş: Ən kiçik kvadratlar üsuluna görə a və b əmsallarının ən çox ehtimal olunan qiymətləri elə ədədlərdir ki, onlar üçün

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2$$

xətalar kvadratları cəmi ən kiçik olsun.

3709. Müstəvi üzərində n sayda $M_i(x_i, y_i)$ $(i=1,2,\dots,n)$ nöqtələr sistemi verilmişdir. $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ düz xəttinin hansı vəziyyətində verilmiş nöqtələrin bu düz xətdən meyllərinin kvadratları cəmi ən kiçik olar?

3710. (1,3) intervalında x^2 funksiyasını $ax+b$ xətti funksiyası ilə təqribi olaraq elə əvəz edin ki, $\Delta=\sup|x^2-(ax+b)|$ $(1\le x\le 3)$ mütləq meyli ən kiçik olsun.

VII B Ö L M Ə

PARAMETRDƏN ASILI İNTEQRALLAR

§1. Parametrdən asılı məxsusi inteqrallar

1°. **İnteqralın kəsilməzliyi.** Əgər $f(x, y)$ funksiyası məhdud $R[a \le x \le A; \quad b \le y \le B]$ oblastında kəsilməzdirsə, onda

$$F(y) = \int_a^A f(x, y)\,dx$$

funksiyası $b \le y \le B$ parçasında kəsilməzdir.

2°. **İnteqral işarəsi altında diferensiallama.** Əgər 1°-da göstərilən şərtlərdən başqa $f'_y(x, y)$ xüsusi törəməsi R oblastında kəsilməzdirsə, onda $b < y < B$ olduqda

$$\frac{d}{dy}\int_a^A f(x, y)\,dx = \int_a^A f'_y(x, y)\,dx$$

Leybnis düsturu doğrudur.

Daha ümumi halda, əgər inteqrallama sərhədləri y parametrindən asılı olan diferensiallanan $\varphi(y), \psi(y)$ funksiyaları və $b<y<B$ olduqda $a<\varphi(y)<A$, $a<\psi(y)<A$ olarsa, onda

$$\frac{d}{dy}\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\,dx =$$

$$= f(\psi(y), y)\,\psi'(y) - f(\varphi(y), y)\,\varphi'(y) + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y)\,dx \qquad (b<y<B).$$

3°. **İnteqral işarəsi altında inteqrallama.** 1°-da göstərilən şərtlər daxilində

$$\int_b^B dy\int_a^A f(x, y)\,dx = \int_a^A dx\int_b^B f(x, y)\,dy$$

düsturu doğrudur.

3711. Göstərin ki, kəsilən $f(x, y) = \operatorname{sgn}(x-y)$ funksiyasının $F(y) = \int_0^1 f(x, y)\,dx$ inteqralı kəsilməz funksiyadır. $u = F(y)$ funksiyasının qrafikini qurun.

3712. $F(y) = \int_0^1 \frac{y f(x)}{x^2+y^2}\,dx$ funksiyasının kəsilməzliyini araşdırın, burada $f(x)$ funksiyası $[0,1]$ parçasında müsbət və kəsilməzdir.

3713. Tapın:

a) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$; c) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_{0}^{2}x^2\cos\alpha x\,dx$;

b) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$.

3713.1. Tapın:

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{-R\sin\theta}\,d\theta.$$

3714. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[A, B]$ parçasında kəsilməzdir. İsbat edin ki,

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_{a}^{x}[f(t+h)-f(t)]\,dt=f(x)-f(a)\quad(A<a<x<B).$$

3714.1. Tutaq ki, 1) $[-1,1]$ parçasında $\varphi_n(x)\geq 0$ $(n=1,2,\ldots)$, 2) $0<\varepsilon\leq|x|\leq 1$ çoxluğunda $n\to\infty$ olduqda $\varphi_n(x)\rightrightarrows 0$, 3) $n\to\infty$ olduqda $\int\limits_{-1}^{1}\varphi_n(x)\,dx\to 1$. İsbat edin ki, $f(x)\in C[-1,1]$ olarsa, onda

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-1}^{1}f(x)\,\varphi_n(x)\,dx=f(0).$$

3715. $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_{0}^{1}\frac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}\,dx$ ifadəsində inteqral işarəsi altında limitə keçmək olarmı?

3716. $F(y)=\int\limits_{0}^{1}\ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx$ funksiyasının törəməsini $y=0$ nöqtəsində Leybnis qaydası ilə hesablamaq olarmı?

3717. $F(x)=\int\limits_{x}^{x^2}e^{-xy^2}\,dy$ olarsa, $F'(x)$ -i hesablayın.

3718. $F'(\alpha)$ -nı tapın:

a) $F(\alpha)=\int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,dx$; c) $F(\alpha)=\int\limits_{0}^{\alpha}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}\,dx$;

b) $F(\alpha)=\int\limits_{a+\alpha}^{b+\alpha}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx$;

d) $F(\alpha)=\int_0^{\alpha} f(x+\alpha,\ x-\alpha)\,dx;$

e) $F(\alpha)=\int_0^{\alpha^2} dx \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} \sin(x^2+y^2-\alpha^2)\,dy.$

3719. $F(x)=\int_0^x (x+y)\,f(y)\,dy$ üçün $F''(x)$-i tapın, burada $f(x)$ - diferensiallanan funksiyadır.

3720. $F(x)=\int_a^b f(y)\,|x-y|\,dy$ üçün $F''(x)$-i tapın, burada $a<b$ və $f(y)$ funksiyası $[a,b]$-də kəsilməzdir.

3721. $F(x)=\frac{1}{h^2}\int_0^h d\xi \int_0^h f(x+\xi+\eta)\,d\eta$ $(h>0)$ üçün $F''(x)$-i tapın, burada $f(x)$ - kəsilməz funksiyadır.

3722. $F(x)=\int_0^x f(t)\,(x-t)^{n-1}\,dt$ olarsa, $F^{(n)}(x)$-i tapın.

3722.1. $\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x y^n \cos\left(y+\frac{n\pi}{2}\right)dy \quad (n=1,2,\ldots) \qquad (1)$

düsturunu isbat edin. (1) düsturundan istifadə edərək $x\in(-\infty,+\infty)$ olduqda

$$\left|\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right|\le\frac{1}{n+1}$$

bərabərsizliyini isbat edin.

3723. $1\le x\le 3$ aralığında $f(x)=x^2$ funksiyasını $a+bx$ xətti funksiyası ilə təqribi elə əvəz edin ki,

$$\int_1^3 (a+bx-x^2)^2\,dx=\min$$

olsun.

3724. $[0,1]$ aralığında $a+bx$ və $\sqrt{1+x^2}$ funksiyalarının orta kvadratik meylinin *ən kiçik* olması şərtindən

$$\sqrt{1+x^2}\approx a+bx \quad (0\le x\le 1)$$

şəklində təqribi düstur alın.

3725. $$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

və

$$F(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\quad (0<k<1)$$

tam elliptik inteqrallarının törəmələrini tapın, onları $E(k)$ və $F(k)$ funksiyaları vasitəsi ilə ifadə edin. Göstərin ki, $E(k)$ funksiyası

$$E''(k)+\frac{1}{k}E'(k)+\frac{E(k)}{1-k^2}=0$$

diferensial tənliyini ödəyir.

3726. İsbat edin ki,

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\,d\varphi$$

tam n indeksli Bessel funksiyası

$$x^2J_n''(x)+xJ_n'(x)+(x^2-n^2)J_n(x)=0$$

Bessel tənliyini ödəyir.

3727. Tutaq ki,

$$I(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{\alpha-x}},$$

burada $0\le x\le a$ parçasında $\varphi(x)$ funksiyası və onun $\varphi'(x)$ törəməsi kəsilməzdir. İsbat edin ki, $0<\alpha<a$ olduqda

$$I'(\alpha)=\frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}}+\int_0^{\alpha}\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}}\,dx.$$

G ö s t ə r i ş. $x=\alpha t$ götürün.

3728. Göstərin ki,

$$u(x)=\int_0^1 K(x,y)\,v(y)\,dy$$

funksiyası

$$u''(x)=-v(x)\quad (0\le x\le 1)$$

tənliyini ödəyir, burada

$$K(x,y)=\begin{cases} x(1-y), & x\le y \ \textbf{olduqda};\\ y(1-x), & x>y \ \textbf{olduqda}\end{cases}$$

və $v(y)$ kəsilməzdir.

3729. $F(x,y)=\int_{\frac{x}{y}}^{xy}(x-yz)f(z)\,dz$ üçün $F''_{xy}(x,y)$-i tapın, burada $f(z)$

- diferensiallanan funksiyadır.

3730. Tutaq ki, $f(x)$ - iki dəfə diferensiallanan funksiyadır və $F(x)$ - diferensiallanan funksiyadır. İsbat edin ki,

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x-at)+f(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(z)\,dz$$

funksiyası

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

simin rəqs tənliyini və $u(x,0)=f(x)$, $u'_t(x,0)=F(x)$ başlanğıc şərtlərini ödəyir.

3731. Göstərin ki, $f(x)$ funksiyası $[0,l]$ parçasında kəsilməzdirsə və $0\le\xi\le l$ olduqda $(x-\xi)^2+y^2+z^2\neq 0$ olarsa, onda

$$u(x,y,z)=\int_0^l\frac{f(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+z^2}}$$

funksiyası

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

Laplas tənliyini ödəyir.

Parametrə görə diferensiallama düsturunu tətbiq edərək aşağıdakı inteqralları hesablayın:

3732. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)\,dx$.

3733. $\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)\,dx$.

3734. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\,dx$.

3735. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos x}$ $(|a|<1)$.

3736.
$$\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=\int_0^1\frac{dy}{1+x^2y^2}$$

düsturundan istifadə edərək

$$\int_0^1\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

inteqralını hesablayın.

3737. İnteqral işarəsi altında inteqrallama düsturunu tətbiq edərək

$$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx \qquad (a>0,\,b>0)$$

inteqralını hesablayın.

3738. İnteqralları hesablayın:

a) $\int\limits_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx$; b) $\int\limits_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx \quad (a>0, b>0)$.

3739. Tutaq ki, $F(k)$ və $E(k)$ - tam elliptik inteqrallardır (3725-ci məsələyə bax).

a) $\int\limits_0^k F(k)\,k\,dk = E(k) - k_1^2 F(k)$;

b) $\int\limits_0^k E(k)\,k\,dk = \frac{1}{3}[(1+k^2)\,E(k) - k_1^2\,F(k)]$

düsturlarını isbat edin, burada $k_1^2 = 1-k^2$.

3740. $$\int\limits_0^x xJ_0(x)\,dx = xJ_1(x)$$

düsturunu isbat edin, burada $J_0(x)$ və $J_1(x)$ - 0 və 1 indeksli Bessel funksiyalarıdır (bax: məsələ 3726).

§2. Parametrdən asılı qeyri-məxsusi inteqrallar. İnteqralların müntəzəm yığılması

1°. Müntəzəm yığılmanın tərifi. Tutaq ki, $a \le x < +\infty$, $y_1 < y < y_2$ oblastında kəsilməz olan $f(x, y)$ funksiyası üçün istənilən $\varepsilon > 0$ ədədinə görə elə $B = B(\varepsilon)$ ədədi var ki, hər bir $b \ge B$ üçün

$$\left|\int\limits_b^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon \quad (y_1 < y < y_2)$$

şərti ödənilir. Onda yığılan

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x,y)\,dx \qquad (1)$$

qeyri-məxsusi inteqralı (y_1, y_2) intervalında *müntəzəm yığılan* adlanır.

(1) inteqralının müntəzəm yığılması

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{a_n}^{a_{n+1}} f(x,y)\,dx \qquad (2)$$

şəklində olan bütün sıraların müntəzəm yığılmasına ekvivalentdir, burada $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots$ və $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Əgər (1) inteqralı (y_1, y_2) intervalında müntəzəm yığılırsa, onda həmin inteqral bu intervalda y parametrindən asılı olan *kəsilməz funksiyadır*.

2^0. Koşi meyarı. (y_1, y_2) intervalında (1) inteqralının müntəzəm yığılan olması üçün zəruri və kafi şərt istənilən $\varepsilon>0$ ədədinə görə elə $B=B(\varepsilon)$ ədədinin varlığıdır ki, istənilən $b'>B$ və $b''>B$ üçün $y_1<y<y_2$ olduqda

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x,y)\,dx\right|<\varepsilon$$

bərabərsizliyi ödənilsin.

3^0. Veyerştrass əlaməti. (1) inteqralının müntəzəm yığılan olması üçün kafi şərt y parametrindən asılı olmayan elə majorantlandıran $F(x)$ funksiyasının varlığıdır ki,

1) $a\le x<+\infty$ olduqda $|f(x,y)|\le F(x)$

və

2) $\int_a^{+\infty} F(x)\,dx<+\infty$

olsun.

4^0. Kəsilən funksiyaların qeyri-məxsusi inteqralları üçün də analoji teoremlər doğrudur.

İnteqralların yığılma oblastını təyin edin:

3741. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{1+x^2}dx$.

3742. $\int_\pi^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^p+x^q}dx$.

3743. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^q}{x^p}dx$.

3744. $\int_0^{2} \frac{dx}{|\ln x|^p}$.

3745. $\int_0^{1} \frac{\cos\frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x^2}}dx$.

3746. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx$ $(p>0)$.

Sıralarla müqayisə edərək aşağıdakı inteqralların yığılmasını araşdırın:

3747. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x+a}dx$.

3748. $\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{1+x^n\sin^2 x}$ $(n>0)$.

3749. $\int_\pi^{+\infty} \frac{dx}{x^p\sqrt[3]{\sin^2 x}}$.

3750. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^n}dx$.

3751. Verilmiş (y_1, y_2) intervalında

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

inteqralının müntəzəm yığılan olmamasının nə demək olduğunu ifadə edin.

3752. İsbat edin ki, əgər 1) $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ inteqralı yığılırsa, 2) $\varphi(x,y)$ funksiyası məhdud və x-ə görə monotondursa, onda

$$\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x,y)\,dx$$

inteqralı (uyğun oblastda) müntəzəm yığılandır.

3753. İsbat edin ki, müntəzəm yığılan

$$I=\int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}dx \quad (0<y<1)$$

inteqralını parametrdən asılı olmayan yığılan inteqral ilə majorantlamaq olmaz.

3754. Göstərin ki,

$$I=\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}\,dx$$

inteqralı 1) istənilən $0<a\le\alpha\le b$ aralığında müntəzəm yığılır və 2) $0\le\alpha\le b$ aralığında müntəzəm yığılmır.

3755. İsbat edin ki,

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx$$

Dirixle inteqralı 1) $\alpha=0$ qiyməti daxil olmayan hər bir $[a,\ b]$ parçasında müntəzəm yığılır və 2) $\alpha=0$ qiyməti daxil olan hər bir $[a,\ b]$ parçasında müntəzəm yığılmır.

3755.1. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ inteqralının aşağıdakı aralıqlarda müntəzəm yığılmasını araşdırın: *a*) $1<\alpha_0\le\alpha<+\infty$; *b*) $1<\alpha<+\infty$.

3755.2. $0<\alpha<1$ olduqda

$$\int_0^1\frac{dx}{x^\alpha}$$

inteqralının müntəzəm yığılmasını araşdırın.

3755.3. Göstərin ki,

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^\alpha+1}$$

inteqralı $1<\alpha<+\infty$ intervalında müntəzəm yığılmır.

Aşağıdakı inteqralların göstərilən aralıqda müntəzəm yığılmasını araşdırın:

3756. $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x\,dx \quad (0<\alpha_0\le\alpha<+\infty)$.

3757. $\int_1^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x}\,dx \quad (a\le\alpha\le b)$.

3758. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx \quad (-\infty<\alpha<+\infty)$.

3759. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2+1} \quad (0\le\alpha<+\infty)$.

3760. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}e^{-\alpha x}\,dx \quad (0\le\alpha<+\infty)$.

3760.1. $\int_1^{\infty} \frac{\ln^p x}{x\sqrt{x}}dx \quad (0\le p\le 10)$.

3761. $\int_1^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\cos x}{x^p}dx \quad (0\le\alpha<+\infty)$, burada $p>0$ qeyd olunub.

3762. $\int_0^{+\infty} \sqrt{\alpha}\,e^{-\alpha x^2}dx \quad (0\le\alpha<+\infty)$.

3763. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2}dx$; a) $a<\alpha<b$; b) $-\infty<\alpha<+\infty$.

3764. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)}\sin x\,dy \quad (-\infty<x<+\infty)$.

3765. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^p}dx \quad (p\ge 0)$.

3765.1. $b>0$ ədədini elə seçin ki, $1{,}1\le n\le 10$ olduqda $0<\int_b^{+\infty}\frac{dx}{1+x^n}<\varepsilon$ olsun, burada $\varepsilon=10^{-6}$.

3766. $\int_0^1 x^{p-1}\ln^q\frac{1}{x}dx$; *a)* $p\ge p_0>0$; *b)* $p>0$ $(q>-1)$.

3767. $\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad (0\le n<+\infty)$.

3768. $\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^n} \quad (0<n<2)$.

3769. $\int_0^2 \frac{x^\alpha\,dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} \quad \left(|\alpha|<\frac{1}{2}\right)$.

3770. $\int_0^1 \frac{\sin\alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}}dx \quad (0\le\alpha\le1)$.

3771. Əgər inteqral parametrin verilmiş qiymətinin müəyyən ətrafında müntəzəm yığılırsa, onda o, *parametrin həmin qiymətində müntəzəm yığılan* adlanır. İsbat edin ki,

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\alpha\,dx}{1+a^2x^2}$$

inteqralı hər bir $\alpha\neq0$ qiymətində müntəzəm yığılır və $\alpha=0$ olduqda müntəzəm yığılmır.

3772. $\lim\limits_{\alpha\to+0}\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}\,dx$ ifadəsində inteqral işarəsi altında limitə keçmək olarmı?

3773. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $(0,+\infty)$ aralığında inteqrallanandır.

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}f(x)dx=\int_0^{+\infty}f(x)dx$$

düsturunu isbat edin.

3773.1. İsbat edin ki, əgər $f'(x)$ funksiyası $[a,+\infty)$-da mütləq inteqrallanandırsa, onda $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ limiti var.

3774. İsbat edin ki, əgər $f(x)$ funksiyası $(0,+\infty)$ aralığında mütləq inteqrallanandırsa, onda

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}f(x)\sin nx\,dx=0.$$

3775. İsbat edin ki, əgər 1) hər bir sonlu (a,b) intervalında $f(x,y)\rightrightarrows f(x,y_0)$, 2) $|f(x,y)|\le F(x)$, $\int_a^{+\infty}F(x)\,dx<+\infty$ olarsa, onda

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^{+\infty}f(x,y)\,dx=\int_a^{+\infty}\lim_{y\to y_0}f(x,y)\,dx.$$

3776. İnteqral işarəsi altında limitə keçmə qaydasından istifadə edərək

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}\right]dx$$

inteqralını hesablayın.

3776.1. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[0,+\infty)$-da kəsilməz və məhduddur. İsbat edin ki,

$$\lim_{y\to 0}\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{y f(x)}{x^2+y^2}dx = f(0).$$

3776.2. Tapın:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^n+1}.$$

3777. İsbat edin ki,

$$F(a)=\int_0^{+\infty} e^{-(x-a)^2}dx$$

inteqralı a parametrindən asılı kəsilməz funksiyadır.

3777.1. Göstərin ki,

$$F(\alpha)=\int_0^1 \frac{\sin\frac{\alpha}{x}}{x^\alpha}dx$$

funksiyası $0<\alpha<1$ intervalında kəsilməzdir.

3778. $F(a)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1-a^2)x}{x}dx$ funksiyasının kəsilmə nöqtələrini tapın. $y=F(a)$ funksiyasının qrafikini qurun.

Aşağıdakı funksiyaların göstərilən aralıqda kəsilməzliyini araşdırın:

3779. $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{2+x^\alpha}$, $\alpha>2$ olduqda.

3780. $F(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}dx$, $\alpha>0$ olduqda.

3781. $F(\alpha)=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}dx$, $0<\alpha<2$ olduqda.

3782. $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{|\sin x|^\alpha}dx$, $0<\alpha<1$ olduqda.

3783. $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\alpha e^{-x\alpha^2}dx$, $-\infty<\alpha<+\infty$ olduqda.

§3. Qeyri-məxsusi inteqralların inteqral işarəsi altında diferensiallanması və inteqrallanması

1⁰. P a r a m e t r ə g ö r ə d i f e r e n s i a l l a m a. Tutaq ki: 1) $a \le x < +\infty$, $y_1 < y < y_2$ oblastında $f(x, y)$ funksiyası və $f'_y(x,y)$ törəməsi kəsilməzdir, 2) $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ inteqralı yığılır, 3) (y_1, y_2) intervalında $\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx$ inteqralı müntəzəm yığılır. Onda $y_1 < y < y_2$ olduqda

$$\frac{d}{dy}\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx \qquad (\textit{Leybnis qaydası}).$$

2⁰. P a r a m e t r ə g ö r ə i n t e q r a l l a m a d ü s t u r u. Əgər 1) $x \ge a$ və $y_1 \le y \le y_2$ olduqda $f(x, y)$ funksiyası kəsilməzdirsə, 2) $[y_1, y_2]$ parçasında $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ inteqralı müntəzəm yığılırsa, onda

$$\int\limits_{y_1}^{y_2} dy \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_{y_1}^{y_2} f(x,y)dy\,. \tag{1}$$

Əgər $f(x,y) \ge 0$ olarsa, onda (1) bərabərliyindəki daxili inteqralların kəsilməzliyi və bu bərabərliyin tərəflərindən birinin mənasının olması şərti daxilində (1) düsturu sonsuz (y_1, y_2) aralığı üçün də doğrudur.

3784. $\int\limits_0^1 x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}$ $(n>0)$ düsturundan istifadə edərək $I = \int\limits_0^1 x^{n-1}\ln^m x\,dx$ inteqralını hesablayın, burada m - natural ədəddir.

3785. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}$ $(a>0)$ düsturundan istifadə edərək $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}}$ inteqralını hesablayın, burada n - natural ədəddir.

3786. İsbat edin ki, $\alpha \ne 0$ olduqda

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}\,dx$$

Dirixle inteqralının törəməsi var, lakin onu Leybnis qaydası ilə hesablamaq olmaz.

G ö s t ə r i ş. $\alpha x = y$ götürün.

3787. Göstərin ki, $-\infty<\alpha<+\infty$ oblastında

$$F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}dx$$

funksiyası kəsilməz və diferensiallanandır.

3788. $\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}=\int_a^b e^{-xy}dy$ bərabərliyindən istifadə edərək

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx \quad (a>0, b>0)$$

inteqralını hesablayın.

3789. *Frullani düsturunu* isbat edin:

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\ln\frac{b}{a} \quad (a>0, b>0),$$

burada $f(x)$ - kəsilməz funksiyadır və ixtiyari $A>0$ üçün $\int_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ inteqralının mənası var.

Frullani düsturunu tətbiq etməklə aşağıdakı inteqralları hesablayın:

3790. $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}dx \ (a>0, b>0)$.

3791. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax-\sin bx}{x}dx \ (a>0, b>0)$.

3792. $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} ax-\operatorname{arctg} bx}{x}dx \ (a>0, b>0)$.

Parametrə görə diferensiallama düsturunu tətbiq edərək aşağıdakı inteqralları hesablayın:

3793. $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}dx \ (\alpha>0, \beta>0)$.

3794. $\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2 dx \ (\alpha>0, \beta>0)$.

3795. $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\, dx \ (\alpha>0, \beta>0)$.

3796. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \cos mx\, dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$.

İnteqralları hesablayın:

3797. $\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2 x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}} dx \quad (|\alpha| \le 1)$. **3799.** $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}} dx$.

3798. $\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2 x^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (|\alpha| \le 1)$. **3800.** $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(\alpha^2 + x^2)}{\beta^2 + x^2} dx$.

3801. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x \operatorname{arctg} \beta x}{x^2} dx$.

3802. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2 x^2) \ln(1+\beta^2 x^2)}{x^4} dx$.

3803. $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ *Eyler-Puasson inteqralını*

$$I^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{+\infty} x e^{-x^2 y^2} dy$$

düsturunu tətbiq edərək hesablayın.

Eyler-Puasson inteqralından istifadə edərək aşağıdakı inteqralların qiymətini tapın:

3804. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+2bx+c)} dx \quad (a > 0, ac - b^2 > 0)$.

3805. $\int_{-\infty}^{+\infty} (a_1 x^2 + 2b_1 x + c_1)\, e^{-(ax^2+2bx+c)} dx \quad (a > 0, ac - b^2 > 0)$.

3806. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \operatorname{ch} bx\, dx \quad (a > 0)$.

3807. $\int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} dx \quad (a > 0)$.

3808. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$.

3809. $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx\, dx \quad (a > 0)$. **3810.** $\int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} \sin bx\, dx \quad (a > 0)$.

3811. $\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} \cos 2bx\, dx$ (n - natural ədəddir).

3811.1. İsbat edin ki,

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-axt^2}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a>0, \delta>0).$$

3812. $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx$ $(\alpha \geq 0)$ inteqralının köməyi ilə

$$D(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx$$

Dirixle inteqralını hesablayın.

3812.1. $y = \operatorname{Si} x$ *inteqral sinusunun* qrafikini təxmini araşdırın, burada

$$\operatorname{Si} x = \int_0^{x} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Dirixle və Frullani inteqrallarından istifadə edərək aşağıdakı inteqralların qiymətini tapın:

3813. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - \cos \beta x}{x^2} dx$ $(\alpha>0)$.

3814. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x} dx$ $(|\alpha| \neq |\beta|)$.

3815. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cos \beta x}{x} dx$.

3816. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \alpha x}{x} dx$.

3817. $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x}\right)^2 dx$.

3818. $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x}\right)^3 dx$.

3819. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx$.

3820. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 \alpha x - \sin^4 \beta x}{x} dx$

$(\alpha\beta \neq 0)$.

3821. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x} dx$.

3822. $\int_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x^2} dx$ $(k \geq 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0)$.

3823. x-in müxtəlif qiymətləri üçün

$$D(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin\lambda \cos\lambda x \frac{d\lambda}{\lambda}$$

kəsilən Dirixle vuruğunu tapın. $y = D(x)$ funksiyasının qrafikini qurun.

3824. İnteqralları hesablayın:

$a)$ v.p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x+b}dx$; $b)$ v.p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax}{x+b}dx$.

3825. $\frac{1}{1+x^2}=\int\limits_0^{+\infty}e^{-y(1+x^2)}dy$ düsturundan istifadə edərək

$$L=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx$$

Laplas inteqralını hesablayın.

3826. İnteqralı hesablayın:

$$L_1=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}dx.$$

İnteqralları hesablayın:

3827. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{1+x^2}dx$. **3828.** $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{(1+x^2)^2}dx$.

3829. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{ax^2+2bx+c}dx \quad (a>0,\ ac-b^2>0)$.

3830. $\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}e^{-xy^2}dy \quad (x>0)$ düsturundan istifadə edərək

$$\int\limits_0^{+\infty}\sin(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$$

və

$$\int\limits_0^{+\infty}\cos(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$$

Frenel inteqrallarını hesablayın.

İnteqralların qiymətini tapın:

3831. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin(ax^2+2bx+c)\,dx \quad (a\neq 0)$.

3832. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin x^2\cdot\cos 2ax\,dx$. **3833.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos x^2\cdot\cos 2ax\,dx$.

3834. Düsturları isbat edin:

1) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{a^2-x^2}dx=\frac{\pi}{2a}\sin a\alpha$; 2) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{a^2-x^2}dx=-\frac{\pi}{2}\cos a\alpha$,

burada $a \neq 0$ və inteqrallar Koşinin baş qiyməti mənasında başa düşülür.

3835. Verilmiş $f(t)$ funksiyaları üçün

$$F(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt \quad (p>0)$$

Laplas çevirməsini tapın:

a) $f(t)=t^n$ (n - natural ədəddir);

b) $f(t)=\sqrt{t}$; *c*) $f(t)=e^{\alpha t}$; *d*) $f(t)=te^{-\alpha t}$;

e) $f(t)=\cos t$; *f*) $f(t)=\frac{1-e^{-t}}{t}$; *g*) $f(t)=\sin\alpha\sqrt{t}$.

3836. $$\int_0^{+\infty} e^{-at} J_0(bt)\,dt=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (a>0)$$

(*Lipşis inteqralı*) düsturunu isbat edin, burada $J_0(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\varphi)\,d\varphi$ - 0 indeksli Bessel funksiyasıdır (bax: məsələ 3726).

3837. Verilmiş $f(y)$ funksiyaları üçün $F(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2} f(y)\,dy$

Veyerştrass çevirməsini tapın:

a) $f(y)=1$; *c*) $f(y)=e^{2ay}$;

b) $f(y)=y^2$; *d*) $f(y)=\cos ay$.

3838. *Çebışev-Ermit çoxhədlisi*

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) \quad (n=0,1,2,\ldots)$$

düsturu ilə təyin olunur. İsbat edin ki,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)\,H_n(x)\,e^{-x^2}dx=\begin{cases} 0, & m\neq n \text{ olduqda;}\\ 2^n n!\sqrt{\pi}, & m=n \text{ olduqda.}\end{cases}$$

3839. Ehtimal nəzəriyyəsində mühüm yer tutan

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\xi^2}{\sigma_1^2}+\frac{(x-\xi)^2}{\sigma_2^2}\right]}d\xi$$

$$(\sigma_1>0,\ \sigma_2>0)$$

inteqralını hesablayın.

3840. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $(-\infty,+\infty)$ aralığında kəsilməzdir və mütləq inteqrallanandır. İsbat edin ki,

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi$$

inteqralı

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

istilikkeçirmə tənliyini və

$$\lim_{t\to+0} u(x,t)=f(x)$$

başlanğıc şərtini ödəyir.

§4. Eyler inteqralları

1°. Qamma-funksiya. $x>0$ olduqda

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt .$$

Qamma-funksiyasının əsas xassəsi

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$$

düsturu ilə ifadə olunur. Əgər n - natural ədəddirsə, onda

$$\Gamma(n)=(n-1)!\,; \qquad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi} .$$

2°. Tamamlama düsturu. x tam ədəddən fərqli olduqda

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x} .$$

Bu düstur arqumentin mənfi qiymətləri üçün qamma-funksiyanı təyin etməyə imkan verir.

3°. Beta-funksiya. $x>0$ və $y>0$ olduqda

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt .$$

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

düsturu doğrudur.

3841. İsbat edin ki, $\Gamma(x)$ qamma-funksiyası $x>0$ oblastında kəsilməzdir və istənilən tərtib kəsilməz törəməyə malikdir.

3842. İsbat edin ki, $B(x,y)$ beta-funksiyası $x>0\,,y>0$ oblastında kəsilməzdir və istənilən tərtib kəsilməz törəməyə malikdir.

Eyler inteqrallarının köməyi ilə aşağıdakı inteqralları hesablayın:

3843. $\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx .$

3844. $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a>0).$

3845. $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\,dx .$

3846. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} .$

3847. $\int_0^{+\infty}\frac{x^2\,dx}{1+x^4}$. **3848.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\cdot\cos^4 x\,dx$. **3849.** $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$ $(n>1)$.

3850. $\int_0^{+\infty}x^{2n}e^{-x^2}\,dx$ (n - müsbət tam ədəddir).

Aşağıdakı inteqralların təyin oblastını tapın və bu inteqralları Eyler inteqralları ilə ifadə edin:

3851. $\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx$ $(n>0)$.

3852. $\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{(1+x)^n}dx$.

3853. $\int_0^{+\infty}\frac{x^m\,dx}{(a+bx^n)^p}$ $(a>0,\ b>0,\ n>0)$.

3854. $\int_a^b\frac{(x-a)^m(b-x)^n}{(x+c)^{m+n+2}}dx$ $(0<a<b,\ c>0)$.

3855. $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}}$ $(m>0)$.

3856. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\,dx$.

3857. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}tg^n x\,dx$.

3858. $\int_0^{\pi}\frac{\sin^{n-1}x}{(1+k\cos x)^n}dx$ $(0<|k|<1)$.

3859. $\int_0^{+\infty}e^{-x^n}dx$ $(n>0)$.

3860. $\int_0^{+\infty}x^m e^{-x^n}dx$.

3861. $\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx$.

3862. $\int_0^{+\infty}x^p e^{-ax}\ln x\,dx$ $(a>0)$.

3863. $\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}dx$.

3864. $\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}\ln^2 x}{1+x}dx$.

3864.1. $\int_0^{\infty}\frac{x\ln x}{1+x^3}dx$.

3864.2. $\int_0^{\infty}\frac{\ln^2 x}{1+x^4}dx$.

3865. $\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{(1+x)\ln x}dx$.

3866. $\int_0^1\frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}dx$ $(0<p<1)$.

G ö s t ə r i ş. Bu inteqrala

$$\lim_{\varepsilon\to+0}[B(p,\varepsilon)-B(1-p,\varepsilon)]$$

kimi baxın.

3867. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sh}\alpha x}{\operatorname{sh}\beta x}dx\ \ (0<\alpha<\beta)$. **3869.** $\int\limits_a^{a+1}\ln\Gamma(x)dx\ \ (a>0)$.

3868. $\int\limits_0^1\ln\Gamma(x)dx$. **3870.** $\int\limits_0^1\ln\Gamma(x)\sin\pi x\,dx$.

3871. $\int\limits_0^1\ln\Gamma(x)\cos 2n\pi x\,dx$ (n - natural ədəddir).

Bərabərlikləri isbat edin:

3872. $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}\cdot\int\limits_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{\pi}{4}$.

3873. $\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^4}dx\cdot\int\limits_0^{+\infty}x^2e^{-x^4}dx=\frac{\pi}{8\sqrt{2}}$.

3874. $\prod\limits_{m=1}^{n}\int\limits_0^{+\infty}x^{m-1}e^{-x^n}dx=\left(\frac{1}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}$.

3875. $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^n}dx=1$.

$\frac{1}{x^m}=\frac{1}{\Gamma(m)}\int\limits_0^{+\infty}t^{m-1}e^{-xt}dt$ ($x>0$) bərabərliyindən istifadə edərək aşağıdakı inteqralları tapın:

3876. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{x^m}dx\ \ (0<m<1)$. **3877.** $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x^m}dx\ \ (0<m<2)$.

3878. Eyler düsturlarını isbat edin:

a) $\int\limits_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\cos(\lambda t\sin\alpha)dt=\frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}\cos\alpha x$;

b) $\int\limits_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)dt=\frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}\sin\alpha x$

$$\left(\lambda>0,\ x>0,\ -\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right).$$

3879. $r^n=a^n\cos n\varphi$ ($a>0$ və n - natural ədəddir) əyrisinin uzunluğunu tapın.

3880. $|x|^n+|y|^n=a^n$ ($n>0$, $a>0$) əyrisi ilə hüdudlanmış sahəni tapın.

§5. Furye inteqral düsturu

1°. Funksiyanın Furye inteqralı ilə göstərilişi. Əgər 1) $f(x)$ funksiyası $-\infty<x<+\infty$ ədəd oxunda təyin olunubsa, 2) hər bir sonlu aralıqda $f(x)$ funksiyası və onun $f'(x)$ törəməsi hissə-hissə kəsilməzdirsə və 3) $(-\infty,+\infty)$ intervalında mütləq inteqrallanandırsa, onda o, kəsilməz olduğu bütün nöqtələrdə

$$f(x)=\int_0^{+\infty}[a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x]d\lambda \qquad (1)$$

Furye inteqralı şəklində göstərilir, burada

$$a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi \text{ və } b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi.$$

$f(x)$ funksiyasının kəsilmə nöqtələrində (1) düsturunun sol tərəfi $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ ilə əvəz olunmalıdır.

Kəsilmə nöqtələrinə dair yuxarıdakı qeydi nəzərə almaqla $f(x)$ cüt funksiyası üçün (1) düsturundan alırıq:

$$f(x)=\int_0^{+\infty}a(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda, \qquad (2)$$

burada

$$a(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi.$$

Analoji olaraq $f(x)$ tək funksiyası üçün

$$f(x)=\int_0^{+\infty}b(\lambda)\sin\lambda x\,d\lambda \qquad (3)$$

olduğunu alarıq, burada

$$b(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi.$$

2°. $(0,+\infty)$ intervalında funksiyanın Furye inteqralı ilə göstərilişi. $(0,+\infty)$-da təyin olunmuş, mütləq inteqrallanan $f(x)$ funksiyası və onun $f'(x)$ törəməsi hər bir sonlu $(a,b)\subset(0,+\infty)$ intervalında hissə-hissə kəsilməzdirsə, onda istəyimizə uyğun olaraq bu funksiya verilmiş intervalda ya (2) (*cüt davam*) düsturu ilə ya da ki, (3) (*tək davam*) düsturu ilə göstərilə bilər.

Aşağıdakı funksiyaları Furye inteqralı şəklində göstərin:

3881. $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1 \text{ olduqda};\\ 0, & |x|>1 \text{ olduqda}.\end{cases}$

3882. $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}x, & |x|<1 \text{ olduqda};\\ 0, & |x|>1 \text{ olduqda}.\end{cases}$

3883. $f(x)=\operatorname{sgn}(x-a)-\operatorname{sgn}(x-b)$ $(b>a)$.

3884. $f(x)=\begin{cases} h\left(1-\dfrac{|x|}{a}\right), & |x|\le a \text{ olduqda;} \\ 0, & |x|>a \text{ olduqda.}\end{cases}$

3885. $f(x)=\dfrac{1}{a^2+x^2}$ $(a>0)$. **3886.** $f(x)=\dfrac{x}{a^2+x^2}$ $(a>0)$.

3887. $f(x)=\begin{cases} \sin x, & |x|\le\pi \text{ olduqda;} \\ 0, & |x|>\pi \text{ olduqda.}\end{cases}$

3888. $f(x)=\begin{cases} \cos x, & |x|\le\dfrac{\pi}{2} \text{ olduqda;} \\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{2} \text{ olduqda.}\end{cases}$

3889. $f(t)=\begin{cases} A\sin\omega t, & |t|\le\dfrac{2\pi n}{\omega} \text{ olduqda;} \\ 0, & |t|>\dfrac{2\pi n}{\omega} \text{ olduqda } (n-\text{natural ədəddir}).\end{cases}$

3890. $f(x)=e^{-\alpha|x|}$ $(\alpha>0)$.

3891. $f(x)=e^{-\alpha|x|}\cos\beta x$ $(\alpha>0)$. **3893.** $f(x)=e^{-x^2}$.

3892. $f(x)=e^{-\alpha|x|}\sin\beta x$ $(\alpha>0)$. **3894.** $f(x)=xe^{-x^2}$.

3895. $f(x)=e^{-x}$ $(0<x<+\infty)$ funksiyasını *a*) cüt; *b*) tək davam etdirərək Furye inteqralı şəklində göstərin.

Aşağıdakı $f(t)$ funksiyaları üçün

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-itx}\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{l\to+\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\,e^{-itx}\,dt$$

Furye çevirməsini tapın:

3896. $f(x)=e^{-\alpha|x|}$ $(\alpha>0)$. **3898.** $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$.

3897. $f(x)=xe^{-\alpha|x|}$ $(\alpha>0)$. **3899.** $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}\cos\alpha x$.

3900. $\varphi(x)$ və $\psi(x)$ funksiyalarını tapın:

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi(y)\cos xy\,dy=\frac{1}{1+x^2}$;

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\psi(y)\sin xy\,dy=e^{-x}$ $(x>0)$.

VIII BÖLMƏ

ÇOXQAT VƏ ƏYRİXƏTLİ İNTEQRALLAR

§1. İkiqat inteqrallar

1°. **İkiqat inteqralın hesablanması.** Ölçülən qapalı məhdud Ω oblastında təyin olunmuş $f(x, y)$ funksiyasının *ikiqat inteqralı*

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{\substack{\max|\Delta x_i|\to 0\\ \max|\Delta y_j|\to 0}} \sum_i \sum_j f(x_i, y_j)\,\Delta x_i\,\Delta y_j$$

ədədinə deyilir, burada $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$ və cəmləmə i və j-nin elə qiymətləri üzrə aparılır ki, $(x_i, y_j) \in \Omega$ olur.

Tutaq ki, Ω oblastı

$$a \le x \le b,\quad y_1(x) \le y \le y_2(x)$$

bərabərsizlikləri ilə verilmişdir, burada $y_1(x)$ və $y_2(x)$ - $[a, b]$ parçasında kəsilməz olan funksiyalardır. Onda uyğun ikiqat inteqral

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy$$

düsturu ilə hesablanır.

2°. **İkiqat inteqralda dəyişəni əvəzetmə.** Əgər kəsilməz diferensiallanan

$$x = x(u, v),\quad y = y(u, v)$$

funksiyaları Oxy müstəvisinin qapalı və məhdud Ω oblastını Ouv müstəvisinin Ω' oblastına keçirən qarşılıqlı birqiymətli inikasdırsa və $I = \dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}$ yakobianı Ω' oblastında sıfırdan fərqlidirsə, onda

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{\Omega'} f(x(u, v), y(u, v))\,|I|\,du\,dv$$

düsturu doğrudur.

Xüsusi halda, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ düsturları vasitəsilə r və φ polyar koordinatlarına keçdikdə

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{\Omega'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

alınır.

3901. İnteqrallama oblastını

$$x = \frac{i}{n},\quad y = \frac{j}{n}\quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1)$$

düz xətləri ilə kvadratlara bölərək və inteqralaltı funksiyanın qiyməti kimi bu kvadratların sağ yuxarı təpə nöqtələrindəki qiymətlərini götürərək $\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1}} xy\,dx\,dy$ inteqralını inteqral cəminin limiti kimi hesablayın.

3902. $1\le x\le 2$, $1\le y\le 3$ oblastını

$$x=1+\frac{i}{n},\quad y=1+\frac{2j}{n}\quad (i,j=0,1,\dots,n)$$

düz xətləri ilə düzbucaqlılara bölərək $f(x,y)=x^2+y^2$ funksiyası üçün $\underline{S}$ aşağı və $\overline{S}$ yuxarı inteqral cəmlərini tərtib edin. $n\to\infty$ olduqda bu cəmlərin limiti nəyə bərabərdir?

3903. İnteqrallama oblastını təpə nöqtələrinin koordinatları tam ədədlər olan daxilə çəkilmiş kvadratlar sistemi ilə approksimasiya edərək və inteqralaltı funksiyanın qiyməti kimi bu kvadratların koordinat başlanğıcından ən böyük məsafədə yerləşən təpələrindəki qiymətlərini götürərək

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 25}\frac{dx\,dy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}$$

inteqralını təqribi hesablayın. Alınan nəticəni inteqralın dəqiq qiyməti ilə müqayisə edin.

3904. $x=0$, $y=0$ və $x+y=1$ düz xətləri ilə hüdudlanmış S üçbucağını x=const, y=const, $x+y$=const düz xətləri ilə dörd bərabər üçbucağa bölərək və inteqralaltı funksiyanın qiyməti kimi bu üçbucaqların ağırlıq mərkəzlərindəki qiymətlərini götürərək

$$\iint\limits_S\sqrt{x+y}\,dS$$

inteqralını təqribi hesablayın.

3905. $S\{x^2+y^2\le 1\}$ oblastı diametrləri δ-dan kiçik olan ölçülən ΔS_i $(i=1,2,\dots,n)$ hissələrinə bölünmüşdür. δ-nın hansı qiymətində

$$\left|\iint\limits_S\sin(x+y)\,dS-\sum_{i=1}^{n}\sin(x_i+y_i)\Delta S_i\right|<0{,}001$$

bərabərsizliyi doğrudur, burada $(x_i,\,y_i)\in\Delta S_i$?

İnteqralları hesablayın:

3906. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1(x+y)\,dy$. **3907.** $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{x} xy^2\,dy$.

3908. $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{a} r^2\sin^2\varphi\,dr$.

3909. $\iint\limits_R X(x)\,Y(y)\,dx\,dy=\int\limits_a^A X(x)\,dx\cdot\int\limits_b^B Y(y)\,dy$ bərabərliyini isbat edin, burada R – $a \le x \le A$, $b \le y \le B$ düzbucaqlısıdır və $X(x)$, $Y(y)$ funksiyaları uyğun parçada kəsilməzdir.

3910. $f(x,y) = F''_{xy}(x,y)$ olarsa, $I = \int_a^A dx \int_b^B f(x,y)\,dy$ inteqralını hesablayın.

3911. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $a \le x \le b$ parçasında kəsilməzdir.

$$\left[\int_a^b f(x)\,dx\right]^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)\,dx$$

bərabərsizliyini isbat edin, burada bərabərlik işarəsi yalnız $f(x)$=const olduqda mümkündür.

Göstəriş. $\int_a^b dx \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 dy$ inteqralına baxın.

3912. Aşağıdakı inteqralların işarəsini müəyyən edin:

a) $\iint\limits_{|x|+|y| \le 1} \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy$; b) $\iint\limits_{x^2+y^2 \le 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,dx\,dy$;

c) $\iint\limits_{\substack{0 \le x \le 1 \\ -1 \le y \le 1-x}} \arcsin(x+y)\,dx\,dy$?

3913. $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi$ kvadratında $f(x, y) = \sin^2 x \sin^2 y$ funksiyasının orta qiymətini tapın.

3914. Orta qiymət teoremindən istifadə edərək

$$I = \iint\limits_{|x|+|y| \le 10} \frac{dx\,dy}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$$

inteqralını qiymətləndirin.

3915. $(x-a)^2+(y-b)^2 \le R^2$ dairəsinin nöqtəsindən koordinat başlanğıcına qədər olan məsafənin kvadratının orta qiymətini tapın.

3916-3922 saylı məsələlərdə göstərilmiş Ω oblastları üçün $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy$ ikiqat inteqralının inteqrallama sərhədlərini müəyyənləşdirin və inteqrallama növbəsini dəyişin:

3916. Ω - təpələri $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$ olan üçbucaqdır.

3917. Ω - təpələri $O(0,0)$, $A(2,1)$, $B(-2,1)$ olan üçbucaqdır.

3918. Ω - təpələri $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,2)$, $C(0,1)$ olan trapesiyadır.

3919. Ω - $x^2+y^2 \le 1$ dairəsidir. **3920.** Ω - $x^2+y^2 \le y$ dairəsidir.

3921. Ω - $y = x^2$ və $y = 1$ əyriləri ilə hüdudlanmış parabolik seqmentdir.

3922. Ω - $1\le x^2+y^2\le 4$ dairəvi halqasıdır.

3923. $\int_0^a dx\int_0^x f(x,y)\,dy=\int_0^a dy\int_y^a f(x,y)\,dx$ $(a>0)$ *Dirixle düsturunu* isbat edin.

Aşağıdakı inteqrallarda inteqrallama növbəsini dəyişin:

3924. $\int_0^2 dx\int_x^{2x} f(x,y)\,dy$.

3925. $\int_{-6}^2 dx\int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)\,dy$.

3926. $\int_0^1 dx\int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\,dy$.

3927. $\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)\,dy$.

3928. $\int_1^2 dx\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy$.

3929. $\int_0^{2a} dx\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\,dy$ $(a>0)$.

3930. $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)\,dy$.

3931. $\int_0^{2\pi} dx\int_0^{\sin x} f(x,y)\,dy$.

Aşağıdakı inteqralları hesablayın:

3932. $\iint_\Omega xy^2\,dx\,dy$, burada Ω – $y^2=2px$ parabolası və $x=\frac{p}{2}$ $(p>0)$ düz xətti ilə hüdudlanmış oblastdır.

3933. $\iint_\Omega \frac{dx\,dy}{\sqrt{2a-x}}$ $(a>0)$, burada Ω – mərkəzi (a,a) nöqtəsində yerləşən a radiuslu çevrənin ən kiçik qövsü və koordinat oxları ilə hüdudlanmış oblastdır.

3934. $\iint_\Omega |xy|\,dx\,dy$, burada Ω – mərkəzi koordinat başlanğıcında yerləşən a radiuslu dairədir.

3935. $\iint_\Omega (x^2+y^2)\,dx\,dy$, burada Ω – tərəfləri $y=x$, $y=x+a$, $y=a$ və $y=3a$ $(a>0)$ olan paraleloqramdır.

3936. $\iint_\Omega y^2\,dx\,dy$, burada Ω – absis oxu və $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$ sikloidinin birinci ayparası (arkası) ilə hüdudlanmış oblastdır.

Aşağıdakı məsələlərdə

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy$$

ikiqat inteqralında $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ götürməklə r, φ polyar koordinatlarına keçin və inteqrallama sərhədlərini müəyyənləşdirin:

3937. Ω – $x^2 + y^2 \le a^2$ dairəsidir.

3938. Ω – $x^2 + y^2 \le ax$ $(a > 0)$ dairəsidir.

3939. Ω – $a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2$ halqasıdır.

3940. Ω – $0 \le x \le 1$; $0 \le y \le 1 - x$ üçbucağıdır.

3941. Ω – $-a \le x \le a$; $\dfrac{x^2}{a} \le y \le a$ parabolik seqmentidir.

3942. Hansı halda polyar koordinatlara keçdikdən sonra inteqrallama sərhədləri sabit olar?

Aşağıdakı inteqrallarda $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ götürməklə r, φ polyar koordinatlarına keçin və inteqrallama sərhədlərini müəyyənləşdirərək inteqrallama növbəsini bu və ya digər qaydada dəyişin:

3943. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x,y)\,dy$.

3944. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$.

3945. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{x\sqrt{3}} f(\sqrt{x^2+y^2})\,dy$.

3946. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)\,dy$.

3947. $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy$, burada Ω - $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ $(x \ge 0)$ əyrisi ilə hüdudlanmış oblastdır.

r və φ-nin polyar koordinatlar olduğunu qəbul edərək aşağıdakı inteqrallarda inteqrallama növbəsini dəyişin:

3948. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} f(\varphi, r)\,dr$ $(a > 0)$.

3949. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} f(\varphi, r)\,dr$ $(a > 0)$.

3950. $\int\limits_0^a d\varphi \int\limits_0^{\varphi} f(\varphi, r)\,dr$ $(0 < a < 2\pi)$.

Polyar koordinatlara keçərək ikiqat inteqralları birqat inteqrallarla əvəz edin:

3951. $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy$.

3952. $\iint\limits_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy$, burada $\Omega=\{|y|\le|x|;\ |x|\le 1\}$.

3953. $\iint\limits_{x^2+y^2\le x} f\left(\dfrac{y}{x}\right)dx\,dy$.

Polyar koordinatlara keçməklə aşağıdakı ikiqat inteqralları hesablayın:

3954. $\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$. **3955.** $\iint\limits_{\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$.

3956. $S\{a<x<a+h,\ b<y<b+h\}$ $(a>0,\ b>0)$ kvadratı $u=\dfrac{y^2}{x}$, $v=\sqrt{xy}$ funksiyalar sisteminin köməyi ilə S' oblastına inikas olunur. S' oblastının sahəsinin S kvadratının sahəsinə olan nisbəti tapın. $h\to 0$ olduqda bu nisbətin limiti nəyə bərabərdir?

Aşağıdakı ikiqat inteqrallarda x və y dəyişənlərinin əvəzinə yeni u və v dəyişənləri daxil edərək inteqrallama sərhədlərini müəyyənləşdirin:

3957. $\int\limits_a^b dx\int\limits_{\alpha x}^{\beta x} f(x,y)\,dy$ $(0<a<b;\ \ 0<\alpha<\beta)$; $u=x$, $v=\dfrac{y}{x}$.

3958. $\int\limits_0^2 dx\int\limits_{1-x}^{2-x} f(x,y)\,dy$; $u=x+y$, $v=x-y$.

3959. $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy$, burada Ω - $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$, $x=0$, $y=0$ $(a>0)$ əyriləri ilə hüdudlanmış oblastdır; $x=u\cos^4 v$, $y=u\sin^4 v$.

3960. Göstərin ki, dəyişənləri

$$x+y=\xi,\quad y=\xi\eta$$

kimi əvəz etdikdə $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1-x$ üçbucağı $0\le\xi\le 1$, $0\le\eta\le 1$ vahid kvadratına çevirilir.

3961. Dəyişənləri necə əvəz etmək lazımdır ki, $xy=1$, $xy=2$, $x-y+1=0$, $x-y-1=0$ $(x>0,\ y>0)$ əyriləri ilə hüdudlanan əyrixətli dördbucaqlı tərəfləri koordinat oxlarına paralel olan düzbucaqlıya çevrilsin?

Dəyişənlərin uyğun əvəzləmələrini aparmaqla aşağıdakı ikiqat inteqralları birqat inteqrallara çevirin:

3962. $\iint\limits_{|x|+|y|\le 1} f(x+y)\,dx\,dy$.

3963. $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(ax+by+c)\,dx\,dy \quad (a^2+b^2\ne 0)$.

3964. $\iint\limits_{\Omega} f(xy)\,dx\,dy$, burada Ω - $xy=1$, $xy=2$, $y=x$, $y=4x$ $(x>0,\ y>0)$ əyriləri ilə hüdudlanmış oblastdır.

Aşağıdakı ikiqat inteqralları hesablayın:

3965. $\iint\limits_{\Omega}(x+y)\,dx\,dy$, burada Ω - $x^2+y^2=x+y$ əyrisi ilə hüdudlanan oblastdır.

3966. $\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}(|x|+|y|)\,dx\,dy$.

3967. $\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy$, burada Ω - $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipsi ilə hüdudlanan oblastdır.

3968. $\iint\limits_{x^4+y^4\le 1}(x^2+y^2)\,dx\,dy$.

3969. $\iint\limits_{\Omega}(x+y)\,dx\,dy$, burada Ω - $y^2=2x$, $x+y=4$, $x+y=12$ əyriləri ilə hüdudlanan oblastdır.

3970. $\iint\limits_{\Omega} xy\,dx\,dy$, burada Ω - $xy=1$, $x+y=\frac{5}{2}$ əyriləri ilə hüdudlanan oblastdır.

3971. $\iint\limits_{\substack{0\le x\le\pi\\ 0\le y\le\pi}}|\cos(x+y)|\,dx\,dy$.

3972. $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right|dx\,dy$. **3973.** $\iint\limits_{\substack{|x|\le 1\\ 0\le y\le 2}}\sqrt{|y-x^2|}\,dx\,dy$.

Kəsilən funksiyaların inteqrallarını hesablayın:

3974. $\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)\,dx\,dy$.

3975. $\iint\limits_{\substack{0\le x\le 2\\ 0\le y\le 2}} [x+y]\,dx\,dy.$ **3976.** $\iint\limits_{x^2\le y\le 4} \sqrt{[y-x^2]}\,dx\,dy.$

3977. Əgər m və n natural ədədlərdirsə və bunlardan heç olmasa biri təkdirsə, onda $\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} x^m y^n\,dx\,dy=0$ olduğunu isbat edin.

3978. Aşağıdakı limiti tapın:

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le\rho^2} f(x,y)\,dx\,dy,$$

burada $f(x,y)$ kəsilməz funksiyadır.

3979. $F(t)=\iint\limits_{\substack{0\le x\le t\\ 0\le y\le t}} e^{\frac{tx}{y^2}}\,dx\,dy$ olarsa, $F'(t)$-ni tapın.

3980. $F(t)=\iint\limits_{(x-t)^2+(y-t)^2\le 1} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$ olarsa, $F'(t)$-ni tapın.

3981. $F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2} f(x,y)\,dx\,dy$ $(t>0)$ olarsa, $F'(t)$-ni tapın.

3982. İsbat edin ki, əgər $f(x,y)$ funksiyası kəsilməzdirsə, onda

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\int\limits_0^x d\xi\int\limits_{\xi-x+y}^{x+y-\xi} f(\xi,\eta)\,d\eta$$

funksiyası $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y)$ tənliyini ödəyir.

3983. Tutaq ki, $f(x,y)$ funksiyasının səviyyə xətləri sadə qapalı əyrilərdir və $S(v_1,v_2)$ oblastı $f(x,y)=v_1$, $f(x,y)=v_2$ əyriləri ilə hüdudlanmışdır. İsbat edin ki,

$$\iint\limits_{S(v_1,v_2)} f(x,y)\,dx\,dy=\int\limits_{v_1}^{v_2} vF'(v)\,dv,$$

burada $F(v)$ – $f(x,y)=v_1$ və $f(x,y)=v$ əyriləri ilə hüdudlanmış sahədir.

Göstəriş. İnteqrallama oblastını $f(x,y)$ funksiyasının səviyyə xətlərinə sonsuz yaxın olan əyrilərlə hüdudlanan hissələrə bölün.

§2. Sahələrin hesablanması

Oxy müstəvisində yerləşən *S oblastının sahəsi*

$$S=\iint\limits_{S} dx\, dy$$

düsturu ilə hesablanır.

Aşağıdakı əyrilərlə hüdudlanmış sahələri tapın:

3984. $xy=a^2,\ x+y=\frac{5}{2}a\ (a>0)$.

3985. $y^2=2px+p^2,\ y^2=-2qx+q^2\ (p>0,\ q>0)$.

3986. $(x-y)^2+x^2=a^2\ (a>0)$.

Polyar koordinatlara keçməklə aşağıdakı əyrilərlə hüdudlanmış sahələri hesablayın:

3987. $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2);\ x^2+y^2\geq a^2$.

3988. $(x^3+y^3)^2=x^2+y^2,\ x\geq 0,\ y\geq 0$.

3989. $(x^2+y^2)^2=a(x^3-3xy^2)\ (a>0)$.

3990. $(x^2+y^2)^2=8a^2xy;\ (x-a)^2+(y-a)^2\leq a^2\ (a>0)$.

$x=ar\cos^{\alpha}\varphi,\ y=br\sin^{\alpha}\varphi\ (r\geq 0)$ düsturları vasitəsilə ümumiləşmiş r, φ polyar koordinatlarını daxil edərək aşağıdakı əyrilərlə hüdudlanan sahələri tapın, burada a, b, α - uyğun qaydada seçilmiş sabitlərdir və $\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}=\alpha\, abr\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi$ (parametrlər müsbət hesab olunur):

3991. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{h}+\frac{y}{k}$.

3992. $\frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3}=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2};\ x=0,\ y=0$.

3993. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}\ (x>0,\ y>0)$.

3994. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4=\frac{x^2}{h^2}-\frac{y^2}{k^2}\ (x>0,\ y>0)$.

3994.1. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^5=\frac{x^2y^2}{c^4}$.

3995. $\sqrt[4]{\frac{x}{a}}+\sqrt[4]{\frac{y}{b}}=1;\ x=0,\ y=0$.

Dəyişənlərin uyğun əvəzləmələrini aparmaqla aşağıdakı əyrilərlə hüdudlanan fiqurların sahəsini tapın:

3996. $x+y=a,\ x+y=b,\ y=\alpha x,\ y=\beta x\quad (0<a<b;\ 0<\alpha<\beta)$.

3997. $xy=a^2, xy=2a^2,\ y=x,\ y=2x\ (x>0;\ y>0)$.

3998. $y^2=2px,\ y^2=2qx,\ x^2=2ry,\ x^2=2sy\quad (0<p<q;\ 0<r<s)$.

3998.1. $x^2=ay,\ x^2=by,\ x^3=cy^2,\ x^3=dy^2\quad (0<a<b;\ 0<c<d)$.

3998.2. $y=ax^p,\ y=bx^p,\ y=cx^q,\ y=dx^q,$

$(0<p<q;\ 0<a<b;\ 0<c<d)$.

3999. $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1,\ \sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=2,$

$\frac{x}{a}=\frac{y}{b},\ 4\frac{x}{a}=\frac{y}{b}\ (a>0, b>0)$.

3999.1. $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1,\ \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=4,\ \frac{x}{a}=\frac{y}{b},$

$8\frac{x}{a}=\frac{y}{b}\quad (x>0,\ y>0)$.

4000. $\frac{x^2}{\lambda}+\frac{y^2}{\lambda-c^2}=1$, burada λ aşağıdakı qiymətləri alır: $\frac{1}{3}c^2,\ \frac{2}{3}c^2,$ $\frac{4}{3}c^2,\ \frac{5}{3}c^2\quad (x>0,\ y>0)$.

4001. $(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1$ ellipsi ilə hüdudlanmış sahəni tapın, burada $\delta=a_1b_2-a_2b_1\neq 0$.

4002. $\frac{x^2}{\mathrm{ch}^2 u}+\frac{y^2}{\mathrm{sh}^2 u}=c^2\quad (u=u_1, u_2)$ ellipsləri və $\frac{x^2}{\cos^2 v}-\frac{y^2}{\sin^2 v}=c^2$ $(v=v_1, v_2)$ hiperbolaları ilə hüdudlanan sahəni tapın $(0<u_1<u_2;$ $0<v_1<v_2;\ x>0,\ y>0)$.

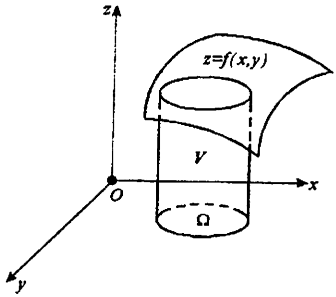
G ö s t ə r i ş. $x=c\,\mathrm{ch}\,u\cos v,\ y=c\,\mathrm{sh}\,u\sin v$ götürün.

4003. $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=a^2$ səthinin $x+y+z=0$ müstəvisi ilə kəsiyinin sahəsini tapın.

4004. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$ səthinin $z=1-2(x+y)$ müstəvisi ilə kəsiyinin sahəsini tapın.

§3. Həcmlərin hesablanması

Kəsilməz $z = f(x,y) \geq 0$ səthi ilə yuxarıdan, $z=0$ müstəvisi ilə aşağıdan, düz silindrik səth ilə yanlardan hüdudlanan və Oxy müstəvisindən ölçülən Ω oblastını ayıran *silindrin həcmi* (şək. 14)



Şək. 14.

$$V = \iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy$$

ədədinə bərabərdir.

4005. Həcmi

$$V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^2+y^2)\,dy$$

inteqralına bərabər olan cismin şəklini çəkin.

4006. Aşağıdakı ikiqat inteqrallarla ifadə olunan həcmləri təsvir edin:

a) $\displaystyle\iint\limits_{\substack{0 \leq x+y \leq 1 \\ x \geq 0,\, y \geq 0}} (x+y)\,dx\,dy;$

d) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2 \leq x} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy;$

b) $\displaystyle\iint\limits_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} \leq 1} \sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}\,dx\,dy;$

e) $\displaystyle\iint\limits_{\substack{1 \leq x \leq 2 \\ x \leq y \leq 2x}} \sqrt{xy}\,dx\,dy;$

c) $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y| \leq 1} (x^2+y^2)\,dx\,dy;$

f) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2 \leq 1} \sin\pi\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy.$

Aşağıdakı səthlərlə hüdudlanan cisimlərin həcmini tapın:

4007. $z=1+x+y,\ z=0,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0.$

4008. $x+y+z=a,\ x^2+y^2=R^2,\ x=0,\ y=0,\ z=0\ \ (a \geq R\sqrt{2}).$

4009. $z=x^2+y^2,\ y=x^2,\ y=1,\ z=0.$

4010. $z=\cos x\cos y,\ z=0,\ |x+y|\le\frac{\pi}{2},\ |x-y|\le\frac{\pi}{2}.$

4011. $z=\sin\frac{\pi y}{2x},\ z=0,\ y=x,\ y=0,\ x=\pi.$

4012. $z=xy,\ x+y+z=1,\ z=0.$

Polyar koordinatlara keçməklə aşağıdakı səthlərlə hüdudlanan cisimlərin həcmini tapın:

4013. $z^2=xy,\ x^2+y^2=a^2.$

4014. $z=x+y,\ (x^2+y^2)^2=2xy,\ z=0\ (x>0, y>0).$

4015. $z=x^2+y^2,\ x^2+y^2=x,\ x^2+y^2=2x,\ z=0.$

4016. $x^2+y^2+z^2=a^2,\ x^2+y^2\ge a|x|\ (a>0).$

4017. $x^2+y^2-az=0,\ (x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2),\ z=0\ (a>0).$

4018. $z=e^{-(x^2+y^2)},\ z=0,\ x^2+y^2=R^2.$

4019. $z=c\cos\frac{\pi\sqrt{x^2+y^2}}{2a},\ z=0,$

$y=x\,\mathrm{tg}\,\alpha,\ y=x\,\mathrm{tg}\,\beta\ (a>0, c>0,\ 0\le\alpha<\beta\le 2\pi).$

4020. $z=x^2+y^2,\ z=x+y.$

Aşağıdakı səthlərlə hüdudlanan cisimlərin həcmini tapın (parametrlər müsbət qəbul olunur):

4021. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}\ (z>0).$

4022. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

4023. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c},\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b},\ z=0.$

4024. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z}{c}=1,\ z=0.$

4025. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

4026. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}.$

4027. $z^2=xy,\ x+y=a,\ x+y=b\ (0<a<b).$

4028. $z=x^2+y^2,\ xy=a^2,\ xy=2a^2,\ y=\frac{x}{2},\ y=2x,\ z=0.$

4029. $z=xy,\ x^2=y,\ x^2=2y,\ y^2=x,\ y^2=2x,\ z=0.$

4030. $z=c\sin\dfrac{\pi\,xy}{a^2},\ z=0,\ xy=a^2,\ y=\alpha x,\ y=\beta x\ (0<\alpha<\beta;\ x>0).$

4031. $z=x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}},\ z=0,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0.$

4032. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z}{c}=1,\ \left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\dfrac{y}{b}\right)^{\frac{3}{2}}=1,\ z=0.$

4033. $z=c\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x},\ z=0,\ \sqrt{x^2+y^2}=a\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}\ (y\ge 0).$

4033.1. $z=y\,e^{-\frac{xy}{a^2}},\ xy=a^2,\ xy=2a^2,\ y=m,\ y=n, z=0\ (0<m<n).$

4034. $\dfrac{x^n}{a^n}+\dfrac{y^n}{b^n}+\dfrac{z^n}{c^n}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0\ (n>0).$

4035. $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)^n+\left(\dfrac{z}{c}\right)^m=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0\ (n>0, m>0).$

§4. Səthlərin sahəsinin hesablanması

1°. **Səthin aşkar şəkildə verildiyi hal.** Hamar əyrixətli $z=z(x,y)$ səthinin sahəsi

$$S=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$$

inteqralı ilə ifadə olunur, burada Ω – verilmiş səthin Oxy müstəvisinə proyeksiyasıdır.

2°. **Səthin parametrik şəkildə verildiyi hal.** Tutaq ki, səthin tənliyi parametrik şəkildə verilmişdir:

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v),$$

burada $(u,v)\in\Omega$, Ω - ölçülən qapalı məhdud oblastdır və x, y, z isə Ω oblastında kəsilməz diferensiallanan funksiyalardır. Onda səthin sahəsi üçün

$$S=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$$

düsturu doğrudur, burada

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

4036. $az = xy$ səthinin $x^2+y^2=a^2$ silindrinin daxilində qalan hissəsinin sahəsini tapın.

4037. $x^2+z^2=a^2$, $y^2+z^2=a^2$ səthləri ilə hüdudlanan cismin səthinin sahəsini tapın.

4038. $x^2+y^2+z^2=a^2$ sferasının $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(b \le a)$ silindrinin daxilində qalan hissəsinin sahəsini tapın.

4039. $z^2=2xy$ səthini $x+y=1$, $x=0$, $y=0$ müstəviləri ilə kəsməklə alınan hissənin sahəsini tapın.

4040. $x^2+y^2+z^2=a^2$ səthinin $x^2+y^2=\pm ax$ silindrlərinin xaricində qalan hissəsinin sahəsini tapın (Viviani məsələsi).

4041. $z=\sqrt{x^2+y^2}$ səthinin $x^2+y^2=2x$ silindrinin daxilində qalan hissəsinin sahəsini tapın.

4042. $z=\sqrt{x^2-y^2}$ səthinin $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ silindrinin daxilində qalan hissəsinin sahəsini tapın.

4043. $z=\frac{1}{2}(x^2-y^2)$ səthinin $x-y=\pm 1$, $x+y=\pm 1$ müstəviləri ilə kəsilmiş hissəsinin sahəsini tapın.

4044. $x^2+y^2=2az$ səthinin $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ silindrinin daxilində qalan hissəsinin sahəsini tapın.

4045. $x^2+y^2=a^2$ səthinin $x+z=0$, $x-z=0$ $(x>0, y>0)$ müstəviləri ilə kəsilmiş hissəsinin sahəsini tapın.

4045.1. $(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}+z=1$ səthinin $z=0$ müstəvisi ilə ayrılan hissəsinin sahəsini tapın.

4045.2. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{2z}{c}=1$ səthinin $x=0$, $y=0$, $z=0$ müstəviləri ilə kəsilmiş hissəsinin sahəsini tapın.

4045.3. $\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}=2z$ səthinin $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(z \ge 0)$ səthi ilə kəsilmiş hissəsinin sahəsini tapın.

4045.4. $\sin z = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y$ səthinin $x=1$ və $x=2$ $(y \ge 0)$ müstəviləri ilə ayrılan hissəsinin sahəsini tapın.

4046. $x^2+y^2=\frac{1}{3}z^2$, $x+y+z=2a$ $(a>0)$ səthləri ilə hüdudlanan cismin səthinin sahəsini və həcmini tapın.

4047. Sferanın iki paralel və iki meridian arasında qalan hissəsinin sahəsini tapın.

4048. $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = h\varphi$ helikoid hissəsinin sahəsini tapın, burada $0 < r < a$, $0 < \varphi < 2\pi$.

4049. $x = (b + a\cos\psi)\cos\varphi$, $y = (b + a\cos\psi)\sin\varphi$, $z = a\sin\psi$ $(0 < a \le b)$ torunun səthinin iki $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ meridianları və iki $\psi = \psi_1$, $\psi = \psi_2$ paralelləri arasında qalan hissəsinin sahəsini tapın. Bütün torun sahəsi nəyə bərabərdir?

4050. Koordinat başlanğıcından $x = a > 0$, $0 \le y \le b$, $0 \le z \le c$ düzbucaqlısına baxdıqda ω görülmə bucağını tapın. Əgər a böyük ədəddirsə, onda ω üçün təqribi düstur çıxarın.

§5. İkiqat inteqralların mexanikaya tətbiqi

1°. A ğ ı r l ı q m ə r k ə z i. Əgər x_0 və y_0 Oxy müstəvisində yerləşən Ω lövhəsinin ağırlıq mərkəzinin koordinatlarıdırsa və $\rho = \rho(x, y)$ - lövhənin sıxlığıdırsa, onda

$$x_0 = \frac{1}{M}\iint_\Omega \rho x\,dx\,dy,\quad y_0 = \frac{1}{M}\iint_\Omega \rho y\,dx\,dy, \tag{1}$$

burada $M = \iint_\Omega \rho\,dx\,dy$ – lövhənin kütləsidir.

Əgər lövhə bircinsdirsə, onda (1) düsturunda $\rho = 1$ götürmək lazımdır.

2°. Ə t a l ə t m o m e n t l ə r i. Oxy müstəvisində yerləşən Ω lövhəsinin Ox və Oy koordinat oxlarına nəzərən I_x və I_y *ətalət momentləri* uyğun olaraq

$$I_x = \iint_\Omega \rho y^2\,dx\,dy,\quad I_y = \iint_\Omega \rho x^2\,dx\,dy \tag{2}$$

düsturları ilə ifadə olunur, burada $\rho(x, y)$ - lövhənin sıxlığıdır.

$$I_{xy} = \iint_\Omega \rho\,xy\,dx\,dy \tag{3}$$

mərkəzəqaçma ətalət momentinə də baxılır.

(2) və (3) düsturlarında $\rho = 1$ qəbul etsək müstəvi fiqurunun *həndəsi ətalət momentini* alarıq.

4051. Əgər tərəfi a olan kvadrat lövhənin hər bir nöqtəsində lövhənin sıxlığı ilə bu nöqtədən kvadratın müəyyən təpəsinə qədər olan məsafə mütənasibdirsə və kvadratın mərkəzində bu sıxlıq ρ_0-a bərabər olarsa, onda bu kvadrat lövhənin kütləsini tapın.

Aşağıdakı əyrilərlə hüdudlanan bircins lövhələrin ağırlıq mərkəzinin koordinatlarını tapın:

4052. $ay=x^2$, $x+y=2a$ $(a>0)$.

4053. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$, $x=0$, $y=0$.

4054. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(x>0, y>0)$.

4055. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3=\frac{xy}{c^2}$ (ilgək).

4056. $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ $(x>0, y>0)$.

4057. $r=a(1+\cos\varphi)$, $\varphi=0$.

4058. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$, $y=0$.

4059. Əgər $x^2+y^2\le a^2$ dairəvi lövhəsinin $M(x, y)$ nöqtəsindəki sıxlığı ilə bu M nöqtəsindən $A(a, 0)$ nöqtəsinə qədər olan məsafə mütənasibdirsə, onda bu lövhənin ağırlıq mərkəzinin koordinatlarını tapın.

4060. $y=\sqrt{2px}$, $y=0$, $x=X$ əyriləri ilə hüdudlanan dəyişən sahənin ağırlıq mərkəzinin cızdığı əyrini təyin edin.

Aşağıdakı əyrilərlə hüdudlanan sahələrin Ox, Oy oxlarına nəzərən I_x, I_y ətalət momentlərini tapın $(\rho=1)$:

4061. $\frac{x}{b_1}+\frac{y}{h}=1$, $\frac{x}{b_2}+\frac{y}{h}=1$, $y=0$ $(b_1>0, b_2>0, h>0)$.

4062. $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$, $x=0$, $y=0$ $(0\le x\le a)$.

4063. $r=a(1+\cos\varphi)$.

4064. $x^4+y^4=a^2(x^2+y^2)$.

4065. $xy=a^2$, $xy=2a^2$, $x=2y$, $2x=y$ $(x>0, y>0)$.

4066. $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ əyrisi ilə hüdudlanan S sahəsinin $I_0=\iint\limits_S (x^2+y^2)\,dx\,dy$ polyar momentini tapın.

4066.1. $ay=x^2$, $ax=y^2$ $(a>0)$ əyriləri ilə hüdudlanan bircins fiqurun I_{xy} mərkəzəqaçma ətalət momentini tapın.

4067. $I_l=I_{l_0}+Sd^2$ düsturunu isbat edin, burada I_l və I_{l_0} - sahəsi S olan fiqurun iki paralel l və l_0 oxlarına nəzərən ətalət momentləri, d bu oxlar arasındakı məsafədir, l_0 isə fiqurun ağırlıq mərkəzindən keçir.

4068. İsbat edin ki, S müstəvi oblastının $O(0,0)$ ağırlıq mərkəzindən keçən və Ox oxu ilə α bucağı əmələ gətirən düz xəttə nəzərən ətalət momenti

$$I = I_x \cos^2\alpha - 2I_{xy} \sin\alpha \cos\alpha + I_y \sin^2\alpha$$

ifadəsinə bərabərdir, burada I_x və I_y - S oblastının Ox və Oy oxlarına nəzərən ətalət momentləri və

$$I_{xy} = \iint\limits_S \rho xy \, dx\, dy$$

mərkəzəqaçma momentidir.

4069. Tərəfi a olan düzgün üçbucağın ağırlıq mərkəzindən keçən və onun hündürlüyü ilə α bucağı əmələ gətirən düz xəttə nəzərən bu üçbucağın ətalət momentini tapın.

4070. $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ silindrik qabın $x \geq 0$ yan divarına səviyyəsi $z = h$ olan suyun təsir etdiyi təzyiq qüvvəsini tapın.

4071. Radiusu a olan kürə sabit δ sıxlıqlı mayenin içərisinə (kürənin mərkəzindən hesablamaqla) h dərinliyə qədər batırılmışdır, burada $h \geq a$. Kürənin yuxarı və aşağı səth hissələrinə mayenin təsir etdiyi təzyiq qüvvəsini tapın.

4072. Oturacağının radiusu a, hündürlüyü isə b olan düz dairəvi silindr δ sıxlıqlı mayeyə tamamilə elə batırılmışdır ki, onun mərkəzi suyun səthindən h dərinlikdə yerləşir və silindrin oxu isə şaquli oxla α bucağı əmələ gətirir. Silindrin aşağı və yuxarı oturacaqlarına mayenin təsir etdiyi təzyiq qüvvəsini tapın.

4073. Əgər bircins $x^2 + y^2 \leq a^2$, $0 \leq z \leq h$ silindrinin kütləsi M, $P(0,0,b)$ maddi nöqtəsinin kütləsi isə m olarsa, onda silindrin bu nöqtəni cəzbetmə qüvvəsini tapın.

4074. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$ *əzilmiş sahəsinə* cismin təzyiqinin paylanması qanunu $p = p_0 \left(1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}\right)$ düsturu ilə verilir. Bu sahəyə cismin orta təzyiqini təyin edin.

4075. a və b tərəfli düzbucaqlı formasında olan çəmənlik p kQ/m^2 sıxlıqlı biçilmiş otla müntəzəm örtülmüşdür. Əgər P kQ yükünün r məsafəyə daşınması üçün görülən iş kPr-ə $(0 < k < 1)$ bərabərdirsə, onda bütün otun çəmənliyin mərkəzinə yığılması üçün nə qədər minimal iş sərf olunmalıdır?

§6. Üçqat inteqrallar

1°. Ü ç q a t   i n t e q r a l ı n   h e s a b l a n m a s ı. Tutaq ki, $f(x, y, z)$ funksiyası kəsilməzdir və məhdud V oblastı

$$x_1 \le x \le x_2, \quad y_1(x) \le y \le y_2(x), \quad z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y)$$

bərabərsizlikləri ilə təyin olunur, burada $y_1(x)$, $y_2(x)$, $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ - kəsilməz funksiyalardır. Onda $f(x, y, z)$ funksiyasının V oblastı üzrə üçqat inteqralı

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

düsturu ilə hesablana bilər.

Bəzən

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \iint\limits_{S(x)} f(x,y,z)\,dy\,dz$$

düsturundan istifadə etmək əlverişlidir, burada $S(x)$ – V oblastının $X = x$ müstəvisi ilə kəsiyidir.

2°. Ü ç q a t   i n t e q r a l d a   d ə y i ş ə n i   ə v ə z e t m ə. Əgər $Oxyz$ fəzasının ölçülən qapalı məhdud V oblastı kəsilməz diferensiallanan

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w)$$

funksiyalarının köməyi ilə $O'uvw$ fəzasının V' oblastına qarşılıqlı birqiymətli inikas olunursa və $I = \dfrac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}$ yakobianı V' oblastında sıfırdan fərqlidirsə, onda

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{V'} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\,|I|\,du\,dv\,dw$$

düsturu doğrudur.

Xüsusi hal kimi alırıq: 1) φ, r, h *silindrik koordinat sistemi*, burada

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = h$$

və

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, h)} = r$$

və 2) φ, ψ, r *sferik koordinat sistemi*, burada

$$x = r\cos\varphi\cos\psi, \quad y = r\sin\varphi\cos\psi, \quad z = r\sin\psi$$

və

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \psi)} = r^2\cos\psi\,.$$

Aşağıdakı üçqat inteqralları hesablayın:

4076. $\iiint\limits_V xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$, burada V oblastı $z=xy$, $y=x$, $x=1$, $z=0$ səthləri ilə hüdudlanmışdır.

4077. $\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}$, burada V oblastı $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ səthləri ilə hüdudlanmışdır.

4078. $\iiint\limits_V xyz\,dx\,dy\,dz$, burada V oblastı $x^2+y^2+z^2=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ səthləri ilə hüdudlanmışdır.

4079. $\iiint\limits_V \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dx\,dy\,dz$, burada V oblastı $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ səthi ilə hüdudlanmışdır.

4080. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, burada V oblastı $x^2+y^2=z^2$, $z=1$ səthləri ilə hüdudlanmışdır.

Aşağıdakı üçqat inteqrallarda müxtəlif qaydalarla inteqrallama növbəsini dəyişin:

4081. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} dy\int\limits_0^{x+y} f(x,y,z)\,dz$.

4082. $\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z)\,dz$.

4083. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz$.

Üçqat inteqralları birqat inteqrallarla əvəz edin:

4084. $\int\limits_0^x d\xi\int\limits_0^\xi d\eta\int\limits_0^\eta f(\zeta)\,d\zeta$.

4085. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{x+y} f(z)\,dz$.

4086. $f(x,y,z)=F'''_{xyz}(x,y,z)$ olarsa,

$$\int\limits_a^A dx\int\limits_b^B dy\int\limits_c^C f(x,y,z)\,dz$$

inteqralını hesablayın, burada a, b, c, A, B, C - sabitlərdir.

Sferik koordinatlara keçməklə aşağıdakı inteqralları hesablayın:

4087. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, burada V oblastı $x^2+y^2+z^2=z$ səthi ilə hüdudlanmışdır.

4088. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2\,dz$.

4089. $\iiint\limits_V f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) dx\,dy\,dz$ inteqralında sferik koordinatlara keçin, burada V oblastı $z=x^2+y^2$, $x=y$, $x=1$, $y=0$, $z=0$ səthləri ilə hüdudlanmışdır.

4090. Dəyişənləri uyğun əvəz etməklə

$$\iiint\limits_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dx\,dy\,dz$$

üçqat inteqralını hesablayın, burada V - $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsoidinin daxilidir.

4091. Silindrik koordinatlara keçərək

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$$

inteqralını hesablayın, burada V oblastı $x^2+y^2=2z$, $z=2$ səthləri ilə hüdudlanmışdır.

4092. $\iiint\limits_V x^2\,dx\,dy\,dz$ inteqralını hesablayın, burada V oblastı $z=ay^2$, $z=by^2$, $y>0$ $(0<a<b)$, $z=\alpha x$, $z=\beta x$ $(0<\alpha<\beta)$, $z=h$ $(h>0)$ səthləri ilə hüdudlanmışdır.

4093. $\iiint\limits_V xyz\,dx\,dy\,dz$ inteqralını hesablayın, burada V – $x>0$, $y>0$, $z>0$ oktantında yerləşən və $z=\frac{x^2+y^2}{m}$, $z=\frac{x^2+y^2}{n}$, $xy=a^2$, $xy=b^2$, $y=\alpha x$, $y=\beta x$ $(0<a<b;\ 0<\alpha<\beta;\ 0<m<n)$ səthləri ilə hüdudlanan oblastdır.

4094. $x^2+y^2+z^2 \le x+y+z$ oblastında $f(x, y, z)=x^2+y^2+z^2$ funksiyasının orta qiymətini tapın.

4095. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1$ oblastında $f(x, y, z)=e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}$ funksiyasının orta qiymətini tapın.

4096. Orta qiymət haqqında teoremdən istifadə edərək

$$u=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \le R^2} \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$$

inteqralını qiymətləndirin, burada $a^2+b^2+c^2>R^2$.

4097. İsbat edin ki, əgər $f(x, y, z)$ funksiyası V oblastında kəsilməzdirsə və istənilən $\omega \subset V$ oblastı üçün

$$\iiint\limits_{\omega} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz=0$$

olarsa, onda $(x, y, z) \in V$ üçün $f(x, y, z) \equiv 0$ olar.

4098. $F'(t)$-ni tapın:

a) $F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \le t^2} f(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$,

burada f - diferensiallanan funksiyadır;

b) $F(t)=\iiint\limits_{\substack{0 \le x \le t\\ 0 \le y \le t\\ 0 \le z \le t}} f(xyz)\,dx\,dy\,dz$,

burada f - diferensiallanan funksiyadır.

4099. $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \le 1} x^m y^n z^p\,dx\,dy\,dz$ inteqralını hesablayın, burada m, n və p - mənfi olmayan tam ədədlərdir.

4100. $\iiint\limits_{V} x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s\,dx\,dy\,dz$ $(p>0, q>0, r>0, s>0)$

Dirixle inteqralını $x+y+z=\xi$, $y+z=\xi\eta$, $z=\xi\eta\zeta$ qəbul edərək hesablayın, burada V oblastı $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ səthləri ilə hüdudlanmışdır.

§7. Üçqat inteqralın köməyi ilə həcmlərin hesablanması

V oblastının həcmi

$$V=\iiint\limits_V dx\,dy\,dz$$

düsturu ilə hesablanır.

Aşağıdakı səthlərlə hüdudlanan cisimlərin həcmini tapın:

4101. $z=x^2+y^2,\ z=2x^2+2y^2,\ y=x,\ y=x^2.$

4102. $z=x+y,\ z=xy,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0.$

4103. $x^2+z^2=a^2,\ x+y=\pm a,\ x-y=\pm a.$

4104. $az=x^2+y^2,\ z=\sqrt{x^2+y^2}\ \ (a>0).$

4105. $az=a^2-x^2-y^2,\ z=a-x-y,\ x=0,\ y=0,\ z=0\ \ (a>0).$

4106. $z=6-x^2-y^2,\ z=\sqrt{x^2+y^2}.$

Sferik və ya silindrik koordinatlara keçməklə aşağıdakı səthlərlə hüdudlanan cisimlərin həcmini hesablayın:

4107. $x^2+y^2+z^2=2az,\ x^2+y^2\le z^2.$

4108. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2).$

4109. $(x^2+y^2+z^2)^3=3xyz.$

4110. $x^2+y^2+z^2=a^2,\quad x^2+y^2+z^2=b^2,\quad x^2+y^2=z^2\ (z\ge 0)$ $(0<a<b).$

Aşağıdakı misallarda

$$\left.\begin{aligned} x&=ar\cos^{\alpha}\varphi\cos^{\beta}\psi\\ y&=br\sin^{\alpha}\varphi\cos^{\beta}\psi\\ z&=cr\sin^{\beta}\psi \end{aligned}\right\}$$

$(a, b, c, \alpha, \beta$ - sabitlərdir)

düsturları ilə daxil edilən ümumiləşmiş

$$r,\ \varphi \text{ və } \psi\ \left(r\ge 0;\ 0\le\varphi\le 2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\le\psi\le\frac{\pi}{2}\right)$$

polyar koordinatlarından istifadə etmək əlverişlidir, burada

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)}=\alpha\beta abcr^2\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi\cos^{2\beta-1}\psi\sin^{\beta-1}\psi.$$

Aşağıdakı səthlərlə hüdudlanan cisimlərin həcmini hesablayın:

4111. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x}{h}$.

4114. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^4}{c^4}=1$.

4112. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$.

4112.1. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}$.

4113. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$.

4115. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z^4}{c^4}=1$.

Dəyişənləri uyğun əvəz etməklə aşağıdakı səthlərlə hüdudlanan cisimlərin həcmini tapın (parametrlər müsbət qəbul olunur):

4116. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{x}{h}+\frac{y}{k}$ $(x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0)$.

4116.1. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{x}{h}-\frac{y}{k}$ $(x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0)$.

4117. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^4=\frac{xyz}{abc}$ $(x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0)$.

4118. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$ $(x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0)$.

4118.1. $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}+\sqrt{\frac{z}{c}}=1$ $(x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0)$.

4118.2. $\sqrt[3]{\frac{x}{a}}+\sqrt[3]{\frac{y}{b}}+\sqrt[3]{\frac{z}{c}}=1$ $(x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0)$.

4118.3. $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}}=1$.

4119. $z=x^2+y^2$, $z=2(x^2+y^2)$, $xy=a^2$, $xy=2a^2$, $x=2y$, $2x=y$ $(x>0,\ y>0)$.

4120. $x^2+z^2=a^2$, $x^2+z^2=b^2$, $x^2-y^2-z^2=0\ (x>0)$.

4121. $(x^2+y^2+z^2)^3=\frac{a^6z^2}{x^2+y^2}$.

4122. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{z}{h}\cdot e^{-\frac{\frac{z^2}{c^2}}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}$.

4123. $\frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}=\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, $x=0$, $x=a$.

4124. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\ln\frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}$, $x=0$, $z=0$, $\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

4125. $x^2+y^2+az=4a^2$ səthi $x^2+y^2+z^2\le 4az$ kürəsinin həcmini hansı nisbətdə bölür?

4126. $x^2+y^2=az$, $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ $(a>0)$ səthləri ilə hüdudlanan cismin həcmini və səthinin sahəsini tapın.

4127. Əgər $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\ne 0$ olarsa, onda $a_i x+b_i y+c_i z=\pm h_i$ $(i=1,2,3)$ müstəviləri ilə hüdudlanan paralelepipedin həcmini tapın.

4128. Əgər $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\ne 0$ olarsa, onda $(a_1x+b_1y+c_1z)^2+$ $+(a_2x+b_2y+c_2z)^2+(a_3x+b_3y+c_3z)^2=h^2$ səthi ilə hüdudlanan cismin həcmini tapın.

4129. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^n+\frac{z^{2n}}{c^{2n}}=\frac{z}{h}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^{n-2}$ $(n>1)$ səthi ilə hüdudlanan cismin həcmini tapın.

4130. *Oxyz* fəzasının müsbət oktantında $(x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$ yerləşən və $\frac{x^m}{a^m}+\frac{y^n}{b^n}+\frac{z^p}{c^p}=1$ $(m>0, n>0, p>0)$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ səthləri ilə hüdudlanan cismin həcmini tapın.

§8. Üçqat inteqralların mexanikaya tətbiqi

1⁰. Cismin kütləsi. Əgər cismin həcmi V və (x, y, z) nöqtəsində sıxlığı $\rho = \rho(x, y, z)$ olarsa, onda *cismin kütləsi*

$$M = \iiint\limits_V \rho \, dx\, dy\, dz \tag{1}$$

ədədinə bərabərdir.

2⁰. Cismin ağırlıq mərkəzi. Cismin *ağırlıq mərkəzinin* (x_0, y_0, z_0) *koordinatları*

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{M}\iiint\limits_V \rho x \, dx\, dy\, dz, \\ y_0 &= \frac{1}{M}\iiint\limits_V \rho y \, dx\, dy\, dz, \\ z_0 &= \frac{1}{M}\iiint\limits_V \rho z \, dx\, dy\, dz \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

düsturları ilə hesablanır.

Əgər cisim bircinsdirsə, onda (1) və (2) düsturlarında $\rho = 1$ götürmək lazımdır.

3⁰. Ətalət momentləri. *Cismin koordinat müstəvilərinə nəzərən ətalət momentləri*

$$I_{xy} = \iiint\limits_V \rho z^2 \, dx\, dy\, dz, \qquad I_{yz} = \iiint\limits_V \rho x^2 dx\, dy\, dz,$$

$$I_{zx} = \iiint\limits_V \rho y^2 dx\, dy\, dz$$

inteqrallarına deyilir.

Cismin müəyyən l oxuna nəzərən ətalət momenti

$$I_l = \iiint\limits_V \rho r^2 dx\, dy\, dz$$

inteqralına deyilir, burada r - cismin dəyişən (x, y, z) nöqtəsindən l oxuna qədər olan məsafədir. Xüsusi halda, Ox, Oy və Oz koordinat oxları üçün uyğun olaraq

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}, \quad I_y = I_{yx} + I_{yz}, \quad I_z = I_{zx} + I_{zy}$$

alınır.

Cismin koordinat başlanğıcına nəzərən ətalət momenti

$$I_0 = \iiint\limits_V \rho(x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$$

inteqralına deyilir.

Aydındır ki, $I_0 = I_{xy} + I_{yz} + I_{zx}$.

4⁰. Cazibə sahəsinin potensialı. $P(x, y, z)$ nöqtəsində *cismin Nyuton potensialı*

$$u(x, y, z) = \iiint\limits_V \rho(\xi, \eta, \zeta)\frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r}$$

inteqralına deyilir, burada V - cismin həcmi, $\rho = \rho(\xi, \eta, \zeta)$ - cismin sıxlığı və

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}.$$

Cisim m kütləli maddi nöqtəni Ox, Oy, Oz oxları üzərindəki proyeksiyaları uyğun olaraq

$$X = km\frac{\partial u}{\partial x} = km\iiint\limits_V \rho\frac{\xi - x}{r^3}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

$$Y = km\frac{\partial u}{\partial y} = km\iiint\limits_V \rho\frac{\eta - y}{r^3}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

$$Z = km\frac{\partial u}{\partial z} = km\iiint\limits_V \rho\frac{\zeta - z}{r^3}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

ədədlərinə bərabər olan $F = (X, Y, Z)$ qüvvəsi ilə cəzb edir, burada k - cazibə qanununun sabitidir.

4131. Əgər cismin sıxlığı $M(x, y, z)$ nöqtəsində $\rho = x + y + z$ düsturu ilə verilirsə, onda vahid həcmli $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$ cisminin kütləsini tapın.

4132. Əgər cismin sıxlığı $\rho = \rho_0 e^{-k\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ qanunu ilə dəyişirsə, onda sonsuz $x^2 + y^2 + z^2 \ge 1$ oblastını tutan cismin kütləsini tapın, burada $\rho_0 > 0$ və $k > 0$ sabitlərdir.

Aşağıdakı səthlərlə hüdudlanan bircins cisimlərin ağırlıq mərkəzinin koordinatlarını tapın:

4133. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$, $z = c$.

4134. $z = x^2 + y^2$, $x + y = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

4135. $x^2 = 2pz$, $y^2 = 2px$, $x = \dfrac{p}{2}$, $z = 0$.

4136. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

4137. $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$ $(z \ge 0)$.

4138. $x^2 + y^2 = 2z$, $x + y = z$.

4139. $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}\right)^2 = \dfrac{xyz}{abc}$ $(x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0)$.

4140. $z = x^2 + y^2$, $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $x + y = \pm 1$, $x - y = \pm 1$.

4141. $\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^n}{c^n} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

$(n > 0,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0)$.

4142. Kub formasında olan $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ cisminin (x, y, z) nöqtəsində sıxlığı

$$\rho = x^{\frac{2\alpha - 1}{1 - \alpha}} y^{\frac{2\beta - 1}{1 - \beta}} z^{\frac{2\gamma - 1}{1 - \gamma}} \qquad (0 < \alpha < 1,\ 0 < \beta < 1,\ 0 < \gamma < 1)$$

olarsa, onda onun ağırlıq mərkəzinin koordinatlarını tapın.

Aşağıdakı səthlərlə hüdudlanan bircins cisimlərin koordinat müstəvilərinə nəzərən ətalət momentlərini tapın (parametrlər müsbətdir):

4143. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

4144. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. **4145.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, $z = c$.

4146. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a}$.

4147. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{z}{c}$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

4147.1. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$.

4147.2. $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n + \left(\frac{z}{c}\right)^n = 1$,

$x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ $(n > 0;\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$.

Aşağıdakı səthlərlə hüdudlanan bircins cisimlərin Oz oxuna nəzərən ətalət momentini tapın:

4148. $z = x^2 + y^2$, $x + y = \pm 1$, $x - y = \pm 1$, $z = 0$.

4149. $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $x^2 + y^2 = z^2$ $(z > 0)$.

4149.1. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^5 z$.

4150. Əgər M kütləli qeyri-bircins $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ kürəsinin cari $P(x, y, z)$ nöqtəsində sıxlığı bu nöqtədən kürənin mərkəzinə qədər olan məsafəyə mütənasibdirsə, onda bu kürənin öz diametrinə nəzərən ətalət momentini tapın.

4151. $I_l = I_{l_0} + Md^2$ bərabərliyini isbat edin, burada I_l - cismin müəyyən l oxuna nəzərən ətalət momenti, I_{l_0} - cismin ağırlıq mərkəzindən keçən və l oxuna paralel olan l_0 oxuna nəzərən ətalət momenti, d - bu oxlar arasındakı məsafə, M isə cismin kütləsidir.

4152. İsbat edin ki, həcmi V olan cismin $O(0,0,0)$ ağırlıq mərkəzindən keçən və koordinat oxları ilə α, β, γ bucaqları əmələ gətirən l oxuna nəzərən ətalət momenti

$$I_l = I_x \cos^2\alpha + I_y \cos^2\beta + I_z \cos^2\gamma - 2K_{xy}\cos\alpha\cos\beta -$$
$$-2K_{xz}\cos\alpha\cos\gamma - 2K_{yz}\cos\beta\cos\gamma$$

ifadəsinə bərabərdir, burada I_x, I_y, I_z - cismin koordinat oxlarına nəzərən ətalət momentləridir və

$$K_{xy} = \iiint\limits_V \rho\, xy\, dx\, dy\, dz, \qquad K_{xz} = \iiint\limits_V \rho\, xz\, dx\, dy\, dz,$$

$$K_{yz} = \iiint\limits_V \rho\, yz\, dx\, dy\, dz$$

- mərkəzəqaçma momentləridir.

4153. Sıxlığı ρ_0 olan bircins $x^2 + y^2 \le a^2$, $z = \pm h$ silindrinin $x = y = z$ düz xəttinə nəzərən ətalət momentini tapın.

4154. Sıxlığı ρ_0 olan və $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2)$ səthi ilə hüdudlanan bircins cismin koordinat başlanğıcına nəzərən ətalət momentini tapın.

4155. Sıxlığı ρ_0 olan bircins $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \le R^2$ kürəsinin $P(x, y, z)$ nöqtəsində Nyuton potensialını tapın.

G ö s t ə r i ş. $O\zeta$ oxunun $P(x, y, z)$ nöqtəsindən keçdiyini qəbul edin.

4156. Əgər $R_1^2 \le \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \le R_2^2$ sferik layının sıxlığı $\rho = f(R)$ olarsa, onda $P(x, y, z)$ nöqtəsində onun Nyuton potensialını tapın, burada f - məlum funksiyadır və $R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$.

4157. Sabit ρ_0 sıxlıqlı $\xi^2 + \eta^2 \le a^2$, $0 \le \zeta \le h$ silindrinin $P(0, 0, z)$ nöqtəsində Nyuton potensialını tapın.

4158. Kütləsi M olan $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \le R^2$ bircins kürə m kütləli $P(0, 0, a)$ maddi nöqtəsini hansı qüvvə ilə cəzb edir?

4159. Vahid kütləli $P(0, 0, z)$ nöqtəsini ρ_0 sıxlıqlı $\xi^2 + \eta^2 \le a^2$, $0 \le \zeta \le h$ bircins silindrinin hansı qüvvə ilə cəzb etdiyini tapın.

4160. Əgər ρ_0 sıxlıqlı bircins kürəvi sektorun kürəvi səthinin radiusu R, ox kəsiyinin bucağı isə 2α olarsa, onda onun təpə nöqtəsində yerləşən vahid kütləli maddi nöqtəni bu sektorun hansı qüvvə ilə cəzb etdiyini tapın.

§9. İkiqat və üçqat qeyri-məxsusi inteqrallar

1°. **Sonsuz oblast halı.** Əgər ikiölçülü Ω oblastı məhdud deyilsə və $f(x, y)$ funksiyası Ω-da kəsilməzdirsə, onda tərif kimi

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \iint_{\Omega_n} f(x, y)\,dx\,dy \qquad (1)$$

qəbul edirlər, burada Ω_n - Ω oblastını örtən istənilən ölçülən məhdud qapalı oblastlar ardıcıllığıdır. Əgər sağ tərəfdəki limit varsa və Ω_n ardıcıllığının seçilməsindən asılı deyilsə, onda uyğun inteqral *yığılan*; əks halda isə *dağılan* adlanır.

Qeyri-məhdud üçölçülü oblastda təyin olunmuş kəsilməz funksiya üçün analoji qayda ilə üçqat qeyri-məxsusi inteqral təyin olunur.

2°. **Kəsilən funksiya halı.** Əgər $f(x, y)$ funksiyası məhdud və qapalı Ω oblastının $P(a, b)$ nöqtəsindən başqa qalan hər yerdə kəsilməzdirsə, onda

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{\varepsilon\to+0} \iint_{\Omega-U_\varepsilon} f(x, y)\,dx\,dy \qquad (2)$$

qəbul edirlər, burada U_ε - P nöqtəsini saxlayan və diametri ε olan oblastdır. Əgər sağ tərəfdəki limit varsa, baxılan inteqral *yığılan*; əks halda isə *dağılan* adlanır.

Tutaq ki, $P(a, b)$ nöqtəsinin yaxınlığında

$$f(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{r^{\alpha}}$$

bərabərliyi doğrudur, burada $\varphi(x, y)$ funksiyasının mütləq qiyməti $m>0$ və $M>0$ ədədləri arasında yerləşir və $r = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$. Onda (2) inteqralı 1) $\alpha < 2$ olduqda yığılır; 2) $\alpha \geq 2$ olduqda isə dağılır.

Əgər $f(x, y)$ funksiyası kəsilmə xəttinə malikdirsə, onda analoji qayda ilə (2) qeyri-məxsusi inteqralı təyin olunur.

Kəsilən funksiya üçün üçqat qeyri-məxsusi inteqral anlayışı analoji olaraq asanlıqla təyin olunur.

Sonsuz inteqrallama oblastı üzrə qeyri-məxsusi inteqralların yığılmasını araşdırın $(0 < m \leq |\varphi(x, y)| \leq M)$:

4161. $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\geq 1} \frac{\varphi(x, y)}{(x^2+y^2)^p}\,dx\,dy.$ **4162.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx\,dy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}.$

4163. $\displaystyle\iint_{0\leq y\leq 1} \frac{\varphi(x, y)}{(1+x^2+y^2)^p}\,dx\,dy.$

4164. $\displaystyle\iint_{|x|+|y|\geq 1} \frac{dx\,dy}{|x|^p+|y|^q} \quad (p>0,\ q>0).$

4165. $\iint\limits_{x+y\geq 1} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p}\, dx\, dy.$

4166. İsbat edin ki, əgər kəsilməz $f(x, y)$ funksiyası mənfi deyilsə və S_n $(n=1, 2, \ldots)$ - S oblastını örtən hər hansı məhdud qapalı oblastlar ardıcıllığı olarsa, onda

$$\iint\limits_{S} f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{S_n} f(x, y)\, dx\, dy,$$

burada sol və sağ tərəflərin mənası eyni zamanda ya var, ya da yoxdur.

4167. Göstərin ki,

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{\substack{|x|\leq n \\ |y|\leq n}} \sin(x^2+y^2)\, dx\, dy = \pi,$$

lakin

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{x^2+y^2\leq 2\pi n} \sin(x^2+y^2)\, dx\, dy = 0$$

(n - natural ədəddir).

4168. Göstərin ki,

$$\int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dy \quad \text{və} \quad \int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx$$

təkrari inteqralların yığılmasına baxmayaraq

$$\iint\limits_{x\geq 1,\, y\geq 1} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy$$

inteqralı dağılır.

İnteqralları hesablayın (parametrlər müsbətdir):

4169. $\iint\limits_{\substack{xy\geq 1, \\ x\geq 1}} \frac{dx\, dy}{x^p y^q}.$

4170. $\iint\limits_{\substack{x+y\geq 1, \\ 0\leq x\leq 1}} \frac{dx\, dy}{(x+y)^p}.$

4171. $\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \frac{dx\, dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$

4172. $\iint\limits_{x^2+y^2\geq 1} \frac{dx\, dy}{(x^2+y^2)^p}.$

4173. $\iint\limits_{y\geq x^2+1} \frac{dx\, dy}{x^4+y^2}.$

4174. $\iint\limits_{0\leq x\leq y} e^{-(x+y)}\, dx\, dy.$

Polyar koordinatlara keçərək aşağıdakı inteqralları hesablayın:

4175. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy.$

4176. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)\,dx\,dy$.

4177. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy$.

İnteqralları hesablayın:

4178. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f}\,dx\,dy$, burada $a<0$, $ac-b^2>0$.

4179. $\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\geq 1} e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}dx\,dy$.

4180. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xye^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+2\varepsilon\frac{x}{a}\frac{y}{b}+\frac{y^2}{b^2}\right)}dx\,dy \quad (0<|\varepsilon|<1)$.

Kəsilən funksiyaların ikiqat qeyri-məxsusi inteqrallarının yığılmasını araşdırın $(0<m\leq|\varphi(x,y)|\leq M)$:

4181. $\iint\limits_{\Omega}\frac{dx\,dy}{x^2+y^2}$, burada Ω oblastı $|y|\leq x^2$; $x^2+y^2\leq 1$ şərtləri ilə təyin olunur.

4182. $\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}\frac{\varphi(x,y)}{(x^2+xy+y^2)^p}dx\,dy$.

4183. $\iint\limits_{|x|+|y|\leq 1}\frac{dx\,dy}{|x|^p+|y|^q}$ $(p>0,\ q>0)$.

4184. $\int\limits_0^a\int\limits_0^a\frac{\varphi(x,y)}{|x-y|^p}dx\,dy$.

4185. $\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}\frac{\varphi(x,y)}{(1-x^2-y^2)^p}dx\,dy$.

4186. İsbat edin ki, əgər: 1) $\varphi(x,y)$ funksiyası məhdud $a\leq x\leq A$, $b\leq y\leq B$ oblastında kəsilməzdirsə, 2) $f(x)$ funksiyası $a\leq x\leq A$ parçasında kəsilməzdirsə və 3) $p<1$ olarsa, onda

$$\int\limits_a^A dx\int\limits_b^B\frac{\varphi(x,y)}{|f(x)-y|^p}dy$$

inteqralı yığılır.

Aşağıdakı inteqralları hesablayın:

4187. $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy.$ **4188.** $\int\limits_0^a dx\int\limits_0^x \frac{dy}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}$ $(a>0)$

4189. $\iint\limits_{\Omega} \ln\sin(x-y)\,dx\,dy$, burada Ω oblastı $y=0$, $y=x$, $x=\pi$ düz xətləri ilə hüdudlanır.

4190. $\iint\limits_{x^2+y^2\le x} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

Aşağıdakı üçqat inteqralların yığılmasını araşdırın:

4191. $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\ge 1} \frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p}\,dx\,dy\,dz,$

burada $0<m\le|\varphi(x,y,z)|\le M$.

4192. $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1} \frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p}\,dx\,dy\,dz,$

burada $0<m\le|\varphi(x,y,z)|\le M$.

4193. $\iiint\limits_{|x|+|y|+|z|\ge 1} \frac{dx\,dy\,dz}{|x|^p+|y|^q+|z|^r}$ $(p>0,\ q>0,\ r>0)$.

4194. $\int\limits_0^a\int\limits_0^a\int\limits_0^a \frac{f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p},$

burada $0<m\le|f(x,y,z)|\le M$, $\varphi(x)$ və $\psi(x)$ funksiyaları isə $[0,\ a]$ parçasında kəsilməzdirlər.

4195. $\iiint\limits_{\substack{|x|\le 1,\\ |y|\le 1,\\ |z|\le 1}} \frac{dx\,dy\,dz}{|x+y-z|^p}.$

İnteqralları hesablayın:

4196. $\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \frac{dx\,dy\,dz}{x^p y^q z^r}.$ **4197.** $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\ge 1} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^3}.$

4198. $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1} \frac{dx\,dy\,dz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}.$

4199. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dx\,dy\,dz.$

4200. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-P(x_1,x_2,x_3)}\,dx_1\,dx_2\,dx_3$ inteqralını hesablayın, burada

$P(x_1,x_2,x_3)=\sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{3} a_{ij}\,x_i\,x_j \qquad (a_{ij}=a_{ji})$ - müsbət-müəyyən kvadratik formadır.

§10. Çoxqat inteqrallar

1⁰. Ç o x q a t i n t e q r a l ı n h e s a b l a n m a s ı. Tutaq ki, $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ funksiyası

$$\begin{cases} x_1'\le x_1\le x_1'', \\ x_2'(x_1)\le x_2\le x_2''(x_1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n'(x_1,x_2,\dots,x_{n-1})\le x_n\le x_n''(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}) \end{cases}$$

bərabərsizlikləri ilə təyin olunan məhdud Ω oblastında kəsilməzdir, burada x_1' və x_1'' - sabit ədədlərdir və $x_2'(x_1), x_2''(x_1),\dots, x_n'(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}), x_n''(x_1,x_2,\dots,x_{n-1})$ - kəsilməz funksiyalardır. Onda uyğun çoxqat inteqral

$$\iint\limits_{\Omega}\dots\int f(x_1,x_2,\dots,x_n)\,dx_1\,dx_2\dots dx_n =$$

$$=\int\limits_{x_1'}^{x_1''}dx_1\int\limits_{x_2'(x_1)}^{x_2''(x_1)}dx_2\dots\int\limits_{x_n'(x_1,\dots,x_{n-1})}^{x_n''(x_1,\dots,x_{n-1})} f(x_1,x_2,\dots,x_n)\,dx_n$$

düsturu ilə hesablana bilər.

2⁰. Ç o x q a t i n t e q r a l d a d ə y i ş ə n l ə r i ə v ə z e t m ə. Əgər 1) $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ funksiyası ölçülən məhdud Ω oblastında müntəzəm kəsilməzdirsə, 2) kəsilməz diferensiallanan

$$x_i=\varphi_i(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n) \quad (i=1,2,\dots,n)$$

funksiyaları $Ox_1x_2\dots x_n$ fəzasının Ω oblastını $O'\xi_1\xi_2\dots\xi_n$ fəzasının məhdud Ω' oblastına qarşılıqlı birqiymətli inikas etdirirlərsə, 3) $I=\dfrac{D(x_1,x_2,\dots,x_n)}{D(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)}$ yakobianı Ω' oblastında sanki hər yerdə (ölçüsü sıfır olan çoxluqdan başqa qalan yerdə) işarəsini sabit saxlayırsa, onda

$$\iint\limits_{\Omega}\dots\int f(x_1,x_2,\dots,x_n)\,dx_1\,dx_2\dots dx_n =$$

$$=\iint\limits_{\Omega'}\dots\int f(\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n)\,|I|\,d\xi_1\,d\xi_2\dots d\xi_n$$

düsturu doğrudur.

Xüsusi halda,

$$x_1 = r\cos\varphi_1,$$
$$x_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{n-1} = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1},$$
$$x_n = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}$$

düsturlarının köməyi ilə $(r,\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_{n-1})$ polyar koordinatlarına keçdikdə

$$I = \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})} = r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}$$

olduğu alınır.

4201. Tutaq ki, $K(x,y)$ funksiyası $R(a\le x\le b;\ a\le y\le b)$ oblastında kəsilməzdir və

$$K_n(x,y) = \int_a^b\int_a^b\ldots\int_a^b K(x,t_1)K(t_1,t_2)\ldots K(t_n,y)\,dt_1\,dt_2\ldots dt_n.$$

İsbat edin ki,

$$K_{n+m+1}(x,y) = \int_a^b K_n(x,t)K_m(t,y)\,dt.$$

4202. Tutaq ki, $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiyası $0\le x_i\le x$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ oblastında kəsilməzdir. İsbat edin ki,

$$\int_0^x dx_1\int_0^{x_1}dx_2\ldots\int_0^{x_{n-1}} f dx_n = \int_0^x dx_n\int_{x_n}^x dx_{n-1}\ldots\int_{x_2}^x f dx_1 \quad (n\ge 2).$$

4203. İsbat edin ki,

$$\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}dt_2\ldots\int_0^{t_{n-1}} f(t_1)f(t_2)\ldots f(t_n)\,dt_n = \frac{1}{n!}\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\}^n,$$

burada f - kəsilməz funksiyadır.

Aşağıdakı çoxqat inteqralları hesablayın:

4204. a) $\int_0^1\int_0^1\ldots\int_0^1 (x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n;$

b) $\int_0^1\int_0^1\ldots\int_0^1 (x_1+x_2+\ldots+x_n)^2\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n.$

4205. $I_n = \displaystyle\iint\limits_{\substack{x_1\ge 0, x_2\ge 0, \ldots, x_n\ge 0,\\ x_1+x_2+\ldots+x_n\le a}}\ldots\int dx_1\,dx_2\ldots dx_n.$

4206. $\int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \ldots \int_0^{x_{n-1}} x_1 x_2 \ldots x_n \, dx_n$.

4207. $$\iint\limits_{\substack{x_1\ge 0,\, x_2\ge 0,\, \ldots,\, x_n\ge 0,\\ x_1+x_2+\ldots+x_n\le 1}} \ldots \int \sqrt{x_1+x_2+\ldots+x_n}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n .$$

4208. Əgər $\Delta = |a_{ij}| \neq 0$ olarsa, onda

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = \pm h_i \quad (i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$$

müstəviləri ilə hüdudlanan n - ölçülü paralelepipedin həcmini tapın.

4209. n - ölçülü $\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \ldots + \frac{x_n}{a_n} \le 1,\ x_i \ge 0 \quad (i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$

$$(a_i > 0,\ i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$$

piramidasının həcmini tapın.

4210. $$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} = \frac{x_n^2}{a_n^2},\ x_n = a_n$$

səthləri ilə hüdudlanan n - ölçülü konusun həcmini tapın.

4211. n - ölçülü $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \le a^2$ kürəsinin həcmini tapın.

4212. $\iint\limits_{\Omega} \ldots \int x_n^2 dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$ inteqralını hesablayın, burada Ω oblastı $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 \le a^2,\ -\frac{h}{2} \le x_n \le \frac{h}{2}$ bərabərsizlikləri ilə təyin olunur.

4213. Hesablayın:

$$\iint\limits_{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\le 1} \ldots \int \frac{dx_1\, dx_2 \ldots dx_n}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2}} .$$

4214. $$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \ldots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n)\, dx_n = \int_0^x f(u) \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}\, du$$

bərabərliyini isbat edin.

4215. $\int_0^x x_1\, dx_1 \int_0^{x_1} x_2\, dx_2 \ldots \int_0^{x_n} f(x_{n+1})\, dx_{n+1} = \frac{1}{2^n n!} \int_0^x (x^2 - u^2)^n f(u)\, du$

bərabərliyini isbat edin.

4216. *Dirixle düsturunu* isbat edin:

$$\iint\limits_{\substack{x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0,\\ x_1+x_2+\ldots+x_n\le 1}} \ldots \int x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \ldots x_n^{p_n-1}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\ldots+p_n+1)} \quad (p_1, p_2, \ldots, p_n > 0).$$

4217. *Liuvill düsturunu* isbat edin:

$$\iint\limits_{\substack{x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0 \\ x_1+x_2+\ldots+x_n \le 1}} \ldots \int f(x_1+x_2+\ldots+x_n)\, x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \ldots$$

$$\ldots x_n^{p_n-1}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\ldots+p_n)} \int_0^1 f(u)\, u^{p_1+p_2+\ldots+p_n-1}\, du \quad (p_1, p_2, \ldots, p_n > 0),$$

burada $f(u)$ - kəsilməz funksiyadır.

Göstəriş. Riyazi induksiya üsulunu tətbiq edin.

4218. $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \le R^2$ oblastı üzrə

$$\iint\limits_{\Omega} \ldots \int f\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}\right) dx_1\, dx_2 \ldots dx_n \quad (n \ge 2)$$

n-qat inteqralını birqat inteqrala gətirin, burada $f(u)$ kəsilməz funksiyadır.

4219. Sıxlığı ρ_0 və radiusu R olan bircins kürənin *özünə potensialını*, yəni

$$u = \frac{\rho_0^2}{2} \iiint\limits_{x_1^2+y_1^2+z_1^2 \le R^2} \iiint\limits_{x_2^2+y_2^2+z_2^2 \le R^2} \frac{dx_1\, dy_1\, dz_1\, dx_2\, dy_2\, dz_2}{r_{1,2}}$$

inteqralını hesablayın, burada $r_{1,2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.

4220. Tutaq ki, $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i x_j \quad (a_{ij} = a_{ji})$ - müsbət müəyyən kvadratik formadır.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left\{\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j + 2\sum\limits_{i=1}^{n} b_i x_i + c\right\}} dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

n-qat inteqralını hesablayın.

§11. Əyrixətli inteqrallar

1°. I növ əyrixətli inteqral. Əgər $f(x,y,z)$ funksiyası

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t) \quad (t_0 \le t \le T) \tag{1}$$

hamar C əyrisinin nöqtələrində təyin olunub kəsilməzdirsə və ds - qövsün diferensialıdırsa, onda

$$\int\limits_C f(x,y,z)\,ds=\int\limits_{t_0}^{T} f(x(t),\,y(t),\,z(t))\,\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt\,.$$

Bu inteqralın xüsusiyyəti ondan ibarətdir ki, o, C əyrisinin istiqamətindən asılı deyil.

2⁰. I növ əyrixətli inteqralların mexanikada tətbiqləri. Tutaq ki, $\rho=\rho(x,y,z)$ - C əyrisinin cari (x,y,z) nöqtəsindəki xətti sıxlığıdır. Onda *C əyrisinin kütləsi*

$$M=\int\limits_C \rho(x,y,z)\,ds$$

ədədinə bərabərdir.

Bu əyrinin *ağırlıq mərkəzinin* (x_0, y_0, z_0) *koordinatları*

$$x_0=\frac{1}{M}\int\limits_C x\rho(x,y,z)\,ds,\quad y_0=\frac{1}{M}\int\limits_C y\rho(x,y,z)\,ds,\quad z_0=\frac{1}{M}\int\limits_C z\rho(x,y,z)\,ds$$

düsturları ilə ifadə olunur.

3⁰. II növ əyrixətli inteqral. Əgər $P=P(x,y,z)$, $Q=Q(x,y,z)$, $R=R(x,y,z)$ funksiyaları t parametrinin artma istiqamətində yönəlmiş (1) əyrisinin nöqtələrində kəsilməzdirlərsə, onda

$$\int\limits_C P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz=$$

$$=\int\limits_{t_0}^{T}\{P(x(t),y(t),z(t))\,x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))\,y'(t)+ \tag{2}$$

$$+R(x(t),y(t),z(t))\,z'(t)\}\,dt\,.$$

C əyrisi boyunca hərəkət istiqaməti dəyişdikdə bu inteqral işarəsini əksinə dəyişir. Mexaniki nöqteyi-nəzərdən (2) inteqralı tətbiq nöqtələri C əyrisi ilə təsvir olunan *dəyişən* $\{P, Q, R\}$ *qüvvəsinin işini* təyin edir.

4⁰. Tam diferensial halı. Tutaq ki,

$$P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz=du\,,$$

burada $u=u(x,y,z)$ - V oblastında birqiymətli funksiyadır. Onda tamamilə V oblastına daxil olan C əyrisinin formasından asılı olmayaraq

$$\int\limits_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz=u(x_2,y_2,z_2)-u(x_1,y_1,z_1)$$

olur, burada (x_1,y_1,z_1) - inteqrallama yolunun başlanğıc və (x_2,y_2,z_2) - son nöqtəsidir. Əgər V - birrabitəli oblastdırsa və P, Q, R funksiyaları birinci tərtib kəsilməz xüsusi törəmələrə malikdirsə, onda sonuncu düsturun doğru olması üçün V oblastında eynilik kimi

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}$$

bərabərliklərinin ödənilməsi zəruri və kafi şərtdir.

Bu halda u funksiyasını

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(x,y,z)\,dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y,z)\,dy+\int_{z_0}^{z}R(x_0,y_0,z)\,dz+c$$

düsturu ilə tapmaq olar, burada (x_0, y_0, z_0) - paralelepiped şəkilli V oblastının müəyyən qeyd olunmuş nöqtəsidir və c - istənilən sabitdir.

Mexaniki nöqteyi-nəzərdən bu hal potensiallı qüvvənin gördüyü işə uyğundur.

Aşağıdakı I növ əyrixətli inteqralları hesablayın.

4221. $\int_C (x+y)\,ds$, burada C - təpə nöqtələri $O(0,0)$, $A(1,0)$ və $B(0,1)$ olan üçbucağının konturudur.

4222. $\int_C y^2 ds$, burada C - $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$ sikloidinin ayparasıdır.

4223. $\int_C (x^2+y^2)\,ds$, burada C - $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$ əyrisidir.

4224. $\int_C xy\,ds$, burada C - $x=a\,\mathrm{ch}\,t$, $y=a\,\mathrm{sh}\,t$ $(0\le t\le t_0)$ hiperbolasının qövsüdür.

4225. $\int_C (x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})\,ds$, burada C - $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ astroidinin qövsüdür.

4226. $\int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$, burada C - $r=a$, $\varphi=0$, $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ (r və φ - polyar koordinatlardır) əyriləri ilə hüdudlanan qabarıq konturdur.

4227. $\int_C |y|\,ds$, burada C - $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ lemniskatının qövsüdür.

4228. $\int_C x\,ds$, burada C - $r=ae^{k\varphi}$ $(k>0)$ loqarifmik spiralının $r=a$ dairəsinin daxilində qalan hissəsidir.

4229. $\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, burada C - $x^2+y^2=ax$ çevrəsidir.

4230. $\int_C \dfrac{ds}{y^2}$, burada C - $y=a\,\mathrm{ch}\dfrac{x}{a}$ zəncirvari xəttidir.

Fəza əyrilərinin qövsünün uzunluğunu tapın (parametrlər müsbətdir):

4231. $x=3t$, $y=3t^2$, $z=2t^3$; $O(0,0,0)$-dan $A(3,3,2)$-yə qədər.

4232. $x=e^{-t}\cos t$, $y=e^{-t}\sin t$, $z=e^{-t}$; $0<t<+\infty$ olduqda.

4233. $y=a\arcsin\dfrac{x}{a}$, $z=\dfrac{a}{4}\ln\dfrac{a-x}{a+x}$; $O(0,0,0)$-dan $A(x_0,\ y_0,\ z_0)$-a qədər.

4234. $(x-y)^2=a(x+y)$, $x^2-y^2=\dfrac{9}{8}z^2$; $O(0,0,0)$-dan $A(x_0,\ y_0,\ z_0)$-a qədər.

4235. $x^2+y^2=cz$, $\dfrac{y}{x}=\operatorname{tg}\dfrac{z}{c}$; $O(0,0,0)$-dan $A(x_0, y_0, z_0)$-a qədər.

4236. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $\sqrt{x^2+y^2}\operatorname{ch}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\right)=a$; $A(a,0,0)$ nöqtəsindən $B(x,y,z)$ nöqtəsinə qədər.

Fəza əyriləri üzrə I növ əyrixətli inteqralları hesablayın:

4237. $\int\limits_C(x^2+y^2+z^2)\,ds$, burada C - $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ $(0\le t\le 2\pi)$ vintvari xəttinin hissəsidir.

4238. $\int\limits_C x^2\,ds$, burada C - $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$ çevrəsidir.

4239. $\int\limits_C z\,ds$, burada C - $x=t\cos t$, $y=t\sin t$, $z=t$ $(0\le t\le t_0)$ konik vintvari xəttidir.

4240. $\int\limits_C z\,ds$, burada C - $x^2+y^2=z^2$, $y^2=ax$ əyrisinin $O(0,0,0)$ nöqtəsindən $A\ (a,\ a,\ a\sqrt{2}\,)$ nöqtəsinə qədər olan qövsüdür.

4241. Əgər $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ $(0\le t\le 2\pi)$ əyrisinin (x,y) nöqtəsində xətti sıxlığı $\rho=|y|$ olarsa, onda bu əyrinin kütləsini tapın.

4241.1. Əgər $y^2=2px$ $\left(0\le x\le\dfrac{p}{2}\right)$ parabola qövsünün cari $M(x,y)$ nöqtəsində xətti sıxlığı $|y|$ olarsa, onda bu parabola qövsünün kütləsini tapın.

4242. Sıxlığı $\rho=\sqrt{\dfrac{2y}{a}}$ qanunu ilə dəyişən $x=at$, $y=\dfrac{a}{2}t^2$, $z=\dfrac{a}{3}t^3$ $(0\le t\le 1)$ qövsünün kütləsini tapın.

4243. Bircins $y = a \operatorname{ch}\frac{x}{a}$ əyrisinin $A(0,a)$ nöqtəsindən $B(b,h)$ nöqtəsinə qədər olan qövsünün ağırlıq mərkəzinin koordinatlarını hesablayın.

4244. $x = a\,(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$ $(0 \le t \le \pi)$ sikloid qövsünün ağırlıq mərkəzini təyin edin.

4244.1. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ $(x \ge 0, y \ge 0)$ C astroid qövsünün koordinat oxlarına nəzərən

$$S_y = \int_C x\,ds, \; S_x = \int_C y\,ds$$

statik momentlərini tapın.

4244.2. $x^2 + y^2 = a^2$ çevrəsinin diametrinə nəzərən ətalət momentini tapın.

4244.3. Aşağıdakı xətlərin $O(0,0)$ nöqtəsinə nəzərən

$$I_0 = \int_C (x^2 + y^2)\,ds$$

polyar ətalət momentini tapın:
a) $\max\{|x|, |y|\} = a$ kvadratının C konturunun; b) polyar koordinatlarda təpə nöqtələri $P(a, 0)$, $Q\left(a, \frac{2\pi}{3}\right)$, $R\left(a, \frac{4\pi}{3}\right)$ olan düzgün üçbucağın C konturunun.

4244.4. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ astroidinin orta polyar radiusunu, yəni

$$I_0 = s \cdot r_0^2$$

düsturu ilə təyin olunan r_0 $(r_0 > 0)$ ədədini tapın, burada I_0 - astroidin koordinat başlanğıcına nəzərən polyar ətalət momenti (bax: 4244.3) və s - astroid qövsünün uzunluğudur.

4245. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$ sferik üçbucağının konturunun ağırlıq mərkəzinin koordinatlarını hesablayın.

4246. $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$ $(-\infty < t \le 0)$ bircins qövsünün ağırlıq mərkəzinin koordinatlarını tapın.

4247. Koordinat oxlarına nəzərən $x = a\cos t, y = a\sin t, z = \frac{h}{2\pi}t$ $(0 \le t \le 2\pi)$ vintvari xəttinin bir burumunun ətalət momentini tapın.

4248. II növ əyrixətli $\int_{OA} x\,dy - y\,dx$ inteqralını hesablayın, burada O -

koordinat başlanğıcı, A isə koordinatları (1,2) olan nöqtədir: a) OA - düz xətt parçasıdır; b) OA - oxu Oy olan paraboladır; c) OA - Ox oxunun OB parçasından və Oy oxuna paralel BA parçasından ibarət olan sınıq xətdir.

4249. Əvvəlki məsələdə verilən a), b) və c) yolları üçün

$$\int_{OA} x\,dy + y\,dx$$

inteqralını hesablayın.

Göstərilən əyrilər üzrə parametrin artma istiqamətində aşağıdakı II növ əyrixətli inteqralları hesablayın:

4250. $\int_C (x^2-2xy)\,dx + (y^2-2xy)\,dy$, burada C - $y=x^2$ $(-1\le x\le 1)$ parabolasıdır.

4251. $\int_C (x^2+y^2)\,dx + (x^2-y^2)\,dy$, burada C - $y=1-|1-x|$ $(0\le x\le 2)$ əyrisidir.

4252. $\oint_C (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$, burada C - saat əqrəbinin əksi istiqamətində yönəlmiş $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipsidir.

4253. $\int_C (2a-y)\,dx + x\,dy$, burada C - $x=a\,(t-\sin t)$, $y=a\,(1-\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$ sikloidinin ayparasıdır.

4254. $\oint_C \frac{(x+y)\,dx-(x-y)\,dy}{x^2+y^2}$, burada C - saat əqrəbinin əksi istiqamətində yönəlmiş $x^2+y^2=a^2$ çevrəsidir.

4255. $\oint_{ABCDA} \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, burada $ABCDA$ - təpə nöqtələri A(1,0), B(0,1), C(−1,0), D(0,−1) olan kvadratın konturudur.

4256. $\int_{AB} dx\,\sin y + dy\,\sin x$, burada AB - $A(0,\pi)$ və $B(\pi,0)$ nöqtələrini birləşdirən düz xətt parçasıdır.

4257. $\oint_{OmAnO} dy\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} - dx$, burada OmA - $y=x^2$ parabolasının, OnA isə $y=x$ düz xəttinin bir hissəsidir.

İnteqralaltı ifadənin tam diferensial olduğunu müəyyən edərək aşağıdakı əyrixətli inteqralları hesablayın:

4258. $\int\limits_{(-1,2)}^{(2,3)} x\,dy + y\,dx$.

4261. $\int\limits_{(1,-1)}^{(1,1)} (x-y)(dx-dy)$.

4259. $\int\limits_{(0,1)}^{(3,-4)} x\,dx + y\,dy$.

4262. $\int\limits_{(0,0)}^{(a,b)} f(x+y)(dx+dy)$, burada $f(u)$ kəsilməzdir.

4260. $\int\limits_{(0,1)}^{(2,3)} (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$.

4263. $\int\limits_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2}$; Oy oxunu kəsməyən yol üzrə.

4264. $\int\limits_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; koordinat başlanğıcından keçməyən yol üzrə.

4265. $\int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy$, burada φ və ψ - kəsilməz funksiyalardır.

4266. $\int\limits_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4 + 4xy^3)\,dx + (6x^2y^2 - 5y^4)\,dy$.

4267. $\int\limits_{(0,-1)}^{(1,0)} \frac{x\,dy - y\,dx}{(x-y)^2}$; $y = x$ düz xəttini kəsməyən yol üzrə.

4268. $\int\limits_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx + \left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$; Oy oxunu kəsməyən yol üzrə.

4269. $\int\limits_{(0,0)}^{(a,b)} e^x(\cos y\,dx - \sin y\,dy)$.

4270. İsbat edin ki, əgər $f(u)$ kəsilməz funksiya və C - hissə-hissə hamar qapalı konturdursa, onda

$$\oint\limits_C f(x^2+y^2)(x\,dx + y\,dy) = 0.$$

z ibtidai funksiyasını tapın:

4271. $dz = (x^2 + 2xy - y^2)\,dx + (x^2 - 2xy - y^2)\,dy$.

4272. $dz = \dfrac{y\,dx - x\,dy}{3x^2 - 2xy + 3y^2}$.

4273. $dz = \dfrac{(x^2 + 2xy + 5y^2)\,dx + (x^2 - 2xy + y^2)\,dy}{(x+y)^3}$.

4274. $dz = e^x\,[e^y\,(x - y + 2) + y]\,dx + e^x\,[e^y(x-y) + 1]\,dy$.

4275. $dz = \dfrac{\partial^{n+m+1} u}{\partial x^{n+1} \partial y^m} dx + \dfrac{\partial^{n+m+1} u}{\partial x^n \partial y^{m+1}} dy$.

4276. $dz = \dfrac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+2} \partial y^{m-1}} \left(\ln \dfrac{1}{r} \right) dx - \dfrac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n-1} \partial y^{m+2}} \left(\ln \dfrac{1}{r} \right) dy$,
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4277. İsbat edin ki, əyrixətli inteqral üçün aşağıdakı qiymətləndirmə doğrudur:

$$\left| \int_C P\,dx + Q\,dy \right| \le LM,$$

burada L - inteqrallama yolunun uzunluğudur və M ədədi $\sqrt{P^2 + Q^2}$ funksiyasının C qövsü üzrə maksimumudur, yəni $M = \max\limits_C \sqrt{P^2 + Q^2}$.

4278. $I_R = \oint\limits_{x^2+y^2=R^2} \dfrac{y\,dx - x\,dy}{(x^2 + xy + y^2)^2}$ inteqralını qiymətləndirin. İsbat edin ki, $\lim\limits_{R \to \infty} I_R = 0$.

Fəza əyriləri üzrə əyrixətli inteqralları hesablayın (sağ koordinat sistemi nəzərdə tutulur):

4279. $\int\limits_C (y^2 - z^2)\,dx + 2yz\,dy - x^2\,dz$, burada C - parametrin artma istiqamətində yönəlmiş $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ $(0 \le t \le 1)$ əyrisidir.

4280. $\int\limits_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$, burada C - parametrin artma istiqamətində yönəlmiş $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ $(0 \le t \le 2\pi)$ vintvari xəttinin bir burumudur.

4281. $\int\limits_C (y - z)\,dx + (z - x)\,dy + (x - y)\,dz$, burada C - müsbət x-lər tərəfdən baxdıqda saat əqrəbinin əksi istiqamətində yönəlmiş $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha$ $(0 < \alpha < \pi)$ çevrəsidir.

4282. $\int\limits_C y^2dx+z^2dy+x^2dz$, burada C - Ox oxunun müsbət hissəsindən $(x>a>0)$ baxdıqda saat əqrəbinin əksi istiqamətində yönəlmiş $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=ax$ $(z\geq 0)$ Viviani əyrisidir.

4283. $\int\limits_C (y^2-z^2)\,dx+(z^2-x^2)\,dy+(x^2-y^2)\,dz$, burada C - $x^2+y^2+z^2=1$, $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$ sfera hissəsini hüdudlandıran konturdur və elə istiqamətə yönəlmişdir ki, bu səthin xarici tərəfi solda qalır.

Tam diferensialların aşağıdakı əyrixətli inteqrallarını hesablayın:

4284. $\int\limits_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} x\,dx+y^2dy-z^2dz$.

4285. $\int\limits_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz$.

4286. $\int\limits_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, burada (x_1,y_1,z_1) nöqtəsi $x^2+y^2+z^2=a^2$ sferasında, (x_2,y_2,z_2) nöqtəsi isə $x^2+y^2+z^2=b^2$ $(a>0,\ b>0)$ sferasında yerləşir.

4287. $\int\limits_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \varphi(x)\,dx+\psi(y)\,dy+\chi(z)\,dz$, burada φ, ψ, χ - kəsilməz funksiyalardır.

4288. $\int\limits_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(x+y+z)\ (dx+dy+dz)$, burada f - kəsilməz funksiyadır.

4289. $\int\limits_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\ (x\,dx+y\,dy+z\,dz)$, burada f - kəsilməz funksiyadır.

u ibtidai funksiyasını tapın:

4290. $du=(x^2-2yz)\,dx+(y^2-2xz)\,dy+(z^2-2xy)\,dz$.

4291. $du=\left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\right)dx+\left(\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2}\right)dy-\frac{xy}{z^2}dz$.

4292. $du = \dfrac{(x+y-z)\,dx+(x+y-z)\,dy+(x+y+z)\,dz}{x^2+y^2+z^2+2xy}$.

4293. Kütləsi m olan nöqtəni (x_1, y_1, z_1) vəziyyətindən (x_2, y_2, z_2) vəziyyətinə keçirən ağırlıq qüvvəsinin gördüyü işi tapın (Oz oxu şaquli yuxarı yönəlmişdir).

4294. Tutaq ki, maddi nöqtə saat əqrəbinin əksi istiqamətində hərəkət etdikdə $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ellipsinin müsbət rübünü cızır. Onda koordinat başlanğıcına doğru yönələn və qiymətcə koordinat başlanğıcından bu maddi nöqtəyə qədər olan məsafəyə mütənasib olan elastiki qüvvənin gördüyü işi tapın.

4295. $F=\dfrac{k}{r^2}$ $(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ ağırlıq qüvvəsinin təsiri ilə vahid kütlə $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nöqtəsindən $M_2(x_2, y_2, z_2)$ nöqtəsinə yerini dəyişdikdə, bu qüvvənin gördüyü işi tapın.

§12. Qrin düsturu

1°. Əyrixətli inteqralın ikiqat inteqralla əlaqəsi. Tutaq ki, sonlu birrabitəli S oblastını hüdudlandıran qapalı sadə hissə-hissə hamar S əyrisi elə istiqamətlənmişdir ki, bu əyri üzrə hərəkət etdikdə S oblastı sol tərəfdə qalır və $P(x,y), Q(x,y)$ funksiyaları və onların birinci tərtib $P'_y(x,y), Q'_x(x,y)$ xüsusi törəmələri S oblastında və onun sərhədində kəsilməzdirlər. Onda

$$\oint\limits_C P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\iint\limits_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy \qquad (1)$$

Qrin düsturu doğrudur.

Tutaq ki, sonlu S oblastı bir neçə sadə konturla hüdudlanmışdır, onun C sərhədi bütün sərhəd konturlarının birləşməsindən ibarətdir və belə ki, bu konturlar üzrə hərəkət etdikdə S oblastı sol tərəfdə qalır. Bu halda da Qrin düsturu doğrudur.

2°. Müstəvi oblastının sahəsi. Sadə hissə-hissə hamar C konturu ilə hüdudlanan S fiqurunun sahəsi

$$S=\oint\limits_C x\,dy=-\oint\limits_C y\,dx=\frac{1}{2}\oint\limits_C (x\,dy-y\,dx)$$

ədədinə bərabərdir.

Bu paraqrafda əgər əksi deyilməyibsə, onda qəbul olunur ki, qapalı inteqrallama konturu sadədir (öz-özünükəsmə nöqtəsi yoxdur) və hərəkət istiqaməti elə seçilib ki, onun hüdudlandırdığı oblast (bu oblast sonsuz uzaqlaşmış nöqtəni özündə saxlamır) sol tərəfdə qalır (müsbət istiqamət).

4296. Qrin düsturunun köməyi ilə

$$I = \oint_C \sqrt{x^2+y^2}\,dx + y[xy + \ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]\,dy$$

əyrixətli inteqralını ikiqat inteqrala çevirin, burada C konturu sonlu S oblastını hüdudlandırır.

4297. Qrin düsturunu tətbiq edərək

$$I = \oint_K (x+y)^2 dx - (x^2+y^2)\,dy$$

əyrixətli inteqralını hesablayın, burada K - təpə nöqtələri $A(1,1)$, $B(3,2)$, $C(2,5)$ olan ABC üçbucağının müsbət istiqamətdə yönələn konturudur. İnteqralı bilavasitə hesablamaqla alınan nəticəni yoxlayın.

Qrin düsturunu tətbiq edərək aşağıdakı əyrixətli inteqralları hesablayın:

4298. $\oint_C xy^2\,dy - x^2y\,dx$, burada C - $x^2+y^2=a^2$ çevrəsidir.

4299. $\oint_C (x+y)\,dx - (x-y)\,dy$, burada C - $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipsidir.

4300. $\oint_C e^x[(1-\cos y)\,dx - (y-\sin y)\,dy]$, burada C - $0<x<\pi$, $0<y<\sin x$ oblastını hüdudlandıran müsbət istiqamətdə yönəlmiş konturdur.

4301. $\oint_{x^2+y^2=R^2} e^{-(x^2-y^2)}(\cos 2xy\,dx + \sin 2xy\,dy)$.

4302.
$$I_1 = \int_{AmB} (x+y)^2\,dx - (x-y)^2 dy$$

və

$$I_2 = \int_{AnB} (x+y)^2\,dx - (x-y)^2\,dy$$

əyrixətli inteqrallarının fərqini tapın, burada AmB - $A(1,1)$ və $B(2,6)$ nöqtələrini birləşdirən düz xətt parçası, AnB isə həmin A, B nöqtələrindən və koordinat başlanğıcından keçən şaquli oxlu paraboladır.

4303. $\int_{AmO} (e^x \sin y - my)\,dx + (e^x\cos y - m)\,dy$ əyrixətli inteqralını hesablayın, burada AmO - $x^2+y^2=ax$ çevrəsinin $A(a,0)$ nöqtəsindən $O(0,0)$ nöqtəsinə qədər olan yuxarı hissəsidir.

G ö s t ə r i ş. *AmO yolunu Ox oxunun OA düz xətt parçası ilə qapalı kontura qədər tamamlayın.*

4304. $\int\limits_{AmB} [\varphi(y)e^x - my]dx + [\varphi'(y)e^x - m]dy$ əyrixətli inteqralını hesablayın, burada $\varphi(y)$ və $\varphi'(y)$ - kəsilməz funksiyalardır və AmB - $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ nöqtələrini birləşdirən və sahəsi S olan $AmBA$ oblastını AB parçası ilə birlikdə hüdudlandıran istənilən yoldur.

4305. İki dəfə kəsilməz diferensiallanan elə $P(x,y)$ və $Q(x,y)$ funksiyaları tapın ki,

$$I = \oint\limits_C P(x+\alpha, y+\beta)dx + Q(x+\alpha, y+\beta)dy$$

əyrixətli inteqralı istənilən qapalı C konturu üçün α və β sabitlərindən asılı olmasın.

4306. Diferensiallanan $F(x,y)$ funksiyası hansı şərti ödəməlidir ki,

$$\int\limits_{AmB} F(x,y)(y\,dx + x\,dy)$$

əyrixətli inteqralı inteqrallama yolunun formasından asılı olmasın?

4307. $$I = \oint\limits_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$$

inteqralını hesablayın, burada C - koordinat başlanğıcından keçməyən və müsbət istiqamətdə yönələn sadə qapalı konturdur.

G ö s t ə r i ş. **İki hala baxın: 1) koordinat başlanğıcı konturun xaricindədir; 2) koordinat başlanğıcı konturun daxilindədir.**

Əyrixətli inteqralların köməyi ilə aşağıdakı əyrilərlə hüdudlanan sahələri hesablayın:

4308. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ $(0 \le t \le 2\pi)$ ellipsi ilə.

4309. $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$ $(0 \le t \le 2\pi)$ astroidi ilə.

4310. $(x+y)^2 = ax$ $(a > 0)$ parabolası və Ox oxu ilə.

4311. $x^3 + y^3 = 3axy$ $(a > 0)$ dekart yarpağının ilgəyi ilə.

G ö s t ə r i ş. $y = tx$ götürün.

4312. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ lemniskatı ilə.

G ö s t ə r i ş. $y = x\,\mathrm{tg}\,\varphi$ götürün.

4313. $x^3 + y^3 = x^2 + y^2$ əyrisi və koordinat oxları ilə.

4314. $(x+y)^{n+m+1} = ax^n y^m$ $(a > 0,\ n > 0,\ m > 0)$ əyrisi ilə hüdudlanan sahəni hesablayın.

4315. $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1$ $(a > 0,\ b > 0,\ n > 0)$ əyrisi və koordinat oxları ilə hüdudlanan sahəni hesablayın.

G ö s t ə r i ş. $\frac{x}{a} = \cos^{\frac{2}{n}} \varphi$, $\frac{y}{b} = \sin^{\frac{2}{n}} \varphi$ götürün.

4316. $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = \left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1}$ $(a>0,\ b>0,\ n>0)$ əyrisi və koordinat oxları ilə hüdudlanan sahəni hesablayın.

4317. $\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1} = c\left(\frac{x}{a}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^n$ $(a>0,\ b>0,\ c>0,\ n>0)$ əyrisinin ilgəyinin sahəsini hesablayın.

4318. R radiuslu tərpənməz çevrə xaricində qalmaqla bu çevrə üzrə sürüşmədən diyirlənən r radiuslu çevrənin hər hansı bir nöqtəsinin əmələ gətirdiyi əyriyə *episikloid* deyilir.

$\frac{R}{r} = n$ nisbətinin natural ədəd olduğunu fərz edərək episikloid ilə hüdudlanan fiqurun sahəsini tapın.

$r = R$ (kardioid) xüsusi halını araşdırın.

4319. R radiuslu tərpənməz çevrə daxilində qalmaqla bu çevrə üzrə sürüşmədən diyirlənən r radiuslu çevrənin hər hansı bir nöqtəsinin əmələ gətirdiyi əyriyə *hiposikloid* deyilir.

$\frac{R}{r} = n$ $(n \geq 2)$ nisbətinin tam ədəd olduğunu fərz edərək hiposikloid ilə hüdudlanan fiqurun sahəsini tapın.

$r = \frac{R}{4}$ (astroid) xüsusi halını araşdırın.

4320. $x^2 + y^2 = ax$ silindrik səthini $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ səthi ilə kəsdikdə alınan hissənin sahəsini hesablayın.

4320.1. İsbat edin ki, $y \geq 0$ yuxarı yarımmüstəvisində yerləşən sadə qapalı C konturunun Ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan cismin həcmi

$$V = -\pi \oint_C y^2\, dx$$

ədədinə bərabərdir.

4321. Əgər $X = ax + by$, $Y = cx + dy$ $(ad - bc \neq 0)$ olarsa və koordinat başlanğıcı sadə qapalı C konturunun daxilindədirsə, onda

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{X\, dY - Y\, dX}{X^2 + Y^2}$$

inteqralını hesablayın.

4322. Əgər $X = \varphi(x, y)$, $Y = \psi(x, y)$, koordinat başlanğıcı sadə C konturunun daxilində olarsa və $\varphi(x, y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$ əyrilərinin C konturu daxilində bir neçə sadə kəsişmə nöqtələri varsa, onda I inteqralını hesablayın (əvvəlki misala bax).

4323. Göstərin ki, əgər C - qapalı konturdursa və l - ixtiyari istiqamətdirsə, onda

$$\oint_C \cos(l, n)\, ds = 0,$$

burada n - C konturunun xarici normalıdır.

4324. $I = \oint_C [x\cos(n, x) + y\cos(n, y)]\, ds$ inteqralını hesablayın, burada C - sonlu S oblastını hüdudlayan sadə qapalı əyridir və n - onun xarici normalıdır.

4325. $\lim\limits_{d(S)\to 0} \frac{1}{S}\oint_C (F \cdot n)\, ds$ limitini tapın, burada S - (x_0, y_0) nöqtəsini daxilində saxlayan C konturu ilə hüdudlanan sahə, $d(S)$ - S oblastının diametri, n - C konturunun xarici normalının vahid vektoru və $F\{X, Y\}$ - $S+C$-də kəsilməz diferensiallanan vektordur.

§13. Əyrixətli inteqralların fiziki tətbiqləri

4326. $x^2 + y^2 = a^2$, $y \geq 0$ yarımçevrəsi üzrə müntəzəm paylanan M kütləsi (0,0) nöqtəsində yerləşən m kütləli maddi nöqtəni hansı qüvvə ilə cəzb edir?

4327. $u(x, y) = \oint_C \chi \ln\frac{1}{r}\, ds$ *sadə lay loqarifmik potensialını* hesablayın, burada $\chi = \text{const}$ - sıxlıq, $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ və C konturu $\xi^2 + \eta^2 = R^2$ çevrəsidir.

4328. $I_1 = \int_0^{2\pi} \cos m\psi \ln\frac{1}{r}\, d\psi$ və $I_2 = \int_0^{2\pi} \sin m\psi \ln\frac{1}{r}\, d\psi$ sadə lay loqarifmik potensiallarını ρ və φ polyar koordinatlarında hesablayın, burada r - (ρ, φ) nöqtəsi ilə dəyişən $(1, \psi)$ nöqtəsi arasındakı məsafədir və m - natural ədəddir.

4329. $u(x, y) = \oint_C \frac{\cos(r, n)}{r}\, ds$ *Qauss inteqralını* hesablayın, burada $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ - $A(x,y)$ nöqtəsi ilə sadə qapalı hamar C konturunun dəyişən $M(\xi,\eta)$ nöqtəsini birləşdirən $\boldsymbol{r}$ vektorunun uzunluğu və $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})$ - C əyrisinin M nöqtəsindəki $\boldsymbol{n}$ xarici normalı ilə $\boldsymbol{r}$ vektoru arasında qalan bucaqdır.

4330. $K_1 = \int\limits_0^{2\pi} \cos m\psi \frac{\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r} d\psi$, $K_2 = \int\limits_0^{2\pi} \sin m\psi \frac{\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r} d\psi$

ikiqat lay loqarifmik potensiallarını ρ və φ polyar koordinatlarında hesablayın, burada r - $A(\rho, \varphi)$ nöqtəsi ilə dəyişən $M(1,\psi)$ nöqtəsi arasındakı məsafə, $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})$ - $O(0,0)$ nöqtəsindən keçən $OM=\boldsymbol{n}$ radiusu ilə $AM=\boldsymbol{r}$ istiqaməti arasında qalan bucaq və m - natural ədəddir.

4331. Əgər iki dəfə diferensiallanan $u = u(x, y)$ funksiyası üçün $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ olarsa, onda u-ya *harmonik* funksiya deyilir. İsbat edin ki, u-nun harmonik funksiya olması üçün

$$\oint\limits_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$$

olması zəruri və kafidir, burada C - ixtiyari qapalı kontur və $\frac{\partial u}{\partial n}$ - bu konturun xarici normalı üzrə törəmədir.

4332. İsbat edin ki,

$$\iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx\,dy = -\iint\limits_S u \Delta u \, dx\,dy + \oint\limits_C u \frac{\partial u}{\partial n} ds,$$

burada hamar C konturu sonlu S oblastını hüdudlandırır.

4333. İsbat edin ki, sonlu S oblastı daxilində və onun C sərhədində harmonik olan funksiya, özünün C konturundakı qiymətləri ilə birqiymətli təyin olunur (bax: məsələ 4332).

4334. Müstəvi üzərində

$$\iint\limits_S \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dx\,dy = \oint\limits_C \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix}$$

ikinci Qrin düsturunu isbat edin, burada hamar C konturu sonlu S oblastını hüdudlayır və $\frac{\partial}{\partial n}$ - C konturunun xarici normalı istiqaməti üzrə törəmədir.

4335. İkinci Qrin düsturundan istifadə edərək isbat edin ki, əgər $u = u(x, y)$ funksiyası qapalı sonlu S oblastında harmonikdirsə, onda

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\oint_C\left(u\frac{\partial \ln r}{\partial n}-\ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds,$$

burada C - S oblastının sərhədi, n - C konturunun xarici normalının istiqaməti, (x,y) - S oblastının daxili nöqtəsidir və $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$ - (x,y) nöqtəsi ilə C konturunun dəyişən (ξ,η) nöqtəsi arasındakı məsafədir.

G ö s t ə r i ş. **(x,y) nöqtəsini sonsuz kiçik dairəvi ətrafı ilə birlikdə S oblastından atın və S oblastının qalan hissəsinə ikinci Qrin düsturunu tətbiq edin.**

4336. $u(M)=u(x,y)$ harmonik funksiyası üçün *orta qiymət haqqında teoremi* isbat edin:

$$u(M)=\frac{1}{2\pi R}\oint_C u(\xi,\eta)\,ds,$$

burada C - mərkəzi M nöqtəsində olan R radiuslu çevrədir.

4337. İsbat edin ki, qapalı məhdud oblastda sabit olmayan harmonik funksiya bu oblastın daxilində özünün ən böyük və ən kiçik qiymətlərini almır (*maksimum prinsipi*).

4338. $\iint\limits_S \begin{vmatrix} L[u] & M[v] \\ u & v \end{vmatrix} dx\,dy=\oint\limits_C P\,dx+Q\,dy$ *Riman düsturunu* isbat edin, burada

$$L[u]=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu,$$

$$M[v]=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-a\frac{\partial v}{\partial x}-b\frac{\partial v}{\partial y}+cv$$

(a,b,c - sabitlərdir), P və Q - müəyyən funksiyalardır və C konturu sonlu S oblastını hüdudlandırır.

4339. Tutaq ki, $u=u(x,y)$ və $v=v(x,y)$ - maye selini müəyyənləşdirən sürət komponentləridir. Vahid zaman ərzində S oblastının məhdud S konturundan çıxan maye miqdarını (yəni çıxan və daxil olan maye miqdarlarının fərqini) təyin edin. Əgər maye sıxılan deyilsə və S oblastında mayenin mənbəyi və mənsəbi yoxdursa, onda u və v funksiyaları hansı tənliyi ödəyir?

4340. Bio-Savar qanununa görə naqilin ds elementindən keçən i elektrik cərəyanı fəzanın $M(x, y, z)$ nöqtəsində $dH=ki\frac{(r\times ds)}{r^3}$ gərginlikli maqnit sahəsi yaradır, burada r - ds elementini M nöqtəsi ilə birləşdirən vektor və k - mütənasiblik əmsalıdır. Qapalı C naqili üçün M nöqtəsində maqnit sahəsinin H gərginliyinin H_x, H_y, H_z proyeksiyalarını tapın.

§14. Səth inteqralları

1⁰. **I növ səth inteqralı.** Əgər S - hissə-hissə hamar ikiüzlü

$$x = x(u, v) \quad y = y(u, v) \quad z = z(u, v) \quad \left((u, v) \in \Omega\right) \tag{1}$$

səthidirsə və $f(x, y, z)$ - S səthi üzərində kəsilməz funksiyadırsa, onda

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_\Omega f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\sqrt{EG - F^2}\, du\, dv, \tag{2}$$

burada

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Xüsusi halda, əgər S səthinin tənliyi

$$z = z(x, y) \quad \left((x, y) \in \sigma\right)$$

şəklində verilibsə, onda

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_\sigma f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy,$$

burada $z(x, y)$ - birqiymətli kəsilməz diferensiallanan funksiyadır. Bu inteqral S səthinin üzünün seçilməsindən asılı deyil.

Əgər $f(x, y, z)$ funksiyasına S səthinin (x, y, z) nöqtəsindəki sıxlığı kimi baxsaq, onda (2) inteqralı bu səthin kütləsini təyin edər.

2⁰. **II növ səth inteqralı.** Əgər S - hamar ikiüzlü səth, S^+ - bu səthin $\boldsymbol{n}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ normalının istiqaməti ilə xarakterizə olunan üzü, $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ - S səthində kəsilməz olan funksiyalardırsa, onda

$$\iint_{S^+} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS. \tag{3}$$

Əgər S səthinin tənliyi (1) parametrik şəklində verilibsə, onda $\boldsymbol{n}$ normalının istiqamətləndirici kosinusları

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

düsturları ilə təyin olunur, burada

$$A = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad B = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \quad C = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

və radikal qarşısındakı işarə lazımi qaydada seçilir.

S səthinin digər S^- üzünə keçdikdə (3) inteqralı işarəsini əksinə dəyişir.

4341. S - $x^2+y^2+z^2=a^2$ sferasının və P - bu sfera daxilinə çəkilmiş $|x|+|y|+|z|=a$ oktaedrinin səthi olarsa,

$$I_1=\iint_S (x^2+y^2+z^2)\,dS$$

və

$$I_2=\iint_P (x^2+y^2+z^2)\,dP$$

səth inteqralları bir-birindən nə qədər fərqlənir?

4342. $\iint_S z\,dS$ inteqralını hesablayın, burada S - $x^2+z^2=2az$ $(a>0)$ səthinin $z=\sqrt{x^2+y^2}$ səthi ilə kəsilmiş hissəsidir.

Aşağıdakı I növ səth inteqrallarını hesablayın:

4343. $\iint_S (x+y+z)\,dS$, burada S - $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z\geq 0$ səthidir.

4344. $\iint_S (x^2+y^2)\,dS$, burada S - $\sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq 1$ cisminin sərhədidir.

4345. $\iint_S \frac{dS}{(1+x+y)^2}$, burada S - $x+y+z\leq 1$, $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$ tetraedrinin sərhədidir.

4346. $\iint_S |xyz|\,dS$, burada S - $z=x^2+y^2$ səthinin $z=1$ müstəvisi ilə ayrılmış hissəsidir.

4347. $\iint_S \frac{dS}{h}$, burada S - ellipsoidin səthi və h - ellipsoidin mərkəzindən bu ellipsoid səthinin dS elementinə toxunan müstəviyə qədər olan məsafədir.

4348. $\iint_S z\,dS$, burada S - $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=v$ $(0<u<a;\ 0<v<2\pi)$ helikoid səthinin hissəsidir.

4349. $\iint_S z^2\,dS$, burada S - $x=r\cos\varphi\sin\alpha$, $y=r\sin\varphi\sin\alpha$, $z=r\cos\alpha$ $(0\leq r\leq a;\ 0\leq\varphi\leq 2\pi)$ konus səthinin hissəsidir və α - sabitdir $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

4350. $\iint\limits_S (xy+yz+zx)\,dS$, burada S - $z=\sqrt{x^2+y^2}$ konik səthinin $x^2+y^2=2ax$ səthi ilə kəsilmiş hissəsidir.

4351. $$\iint\limits_S f(ax+by+cz)dS=2\pi\int\limits_{-1}^{1} f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\,du$$

Puasson düsturunu isbat edin, burada S - $x^2+y^2+z^2=1$ sferasının səthidir.

4352. Sıxlığı $\rho=z$ qanunu ilə dəyişən
$$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)\ (0\le z\le 1)$$
parabolik örtüyünün kütləsini tapın.

4352.1. Hər bir $M(x, y, z)$ nöqtəsində sıxlığı $\frac{z}{a}$ -ya bərabər olan
$$x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\ge 0)$$
yarımsferasının kütləsini tapın.

4352.2. Koordinat müstəvilərinə nəzərən
$$x+y+z=a\ (x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0)$$
bircins üçbucaq lövhəsinin statik momentlərini tapın.

4353. Sıxlığı ρ_0 olan
$$x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\ge 0)$$
bircins sferik örtüyünün Oz oxuna nəzərən ətalət momentini hesablayın.

4354. Sıxlığı ρ_0 olan
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0\ (0\le z\le b)$$
bircins konik örtüyünün
$$\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-b}{0}$$
düz xəttinə nəzərən ətalət momentini hesablayın.

4355. $z=\sqrt{x^2+y^2}$ bircins səthinin $x^2+y^2=ax$ səthi ilə kəsilmiş hissəsinin ağırlıq mərkəzinin koordinatlarını tapın.

4356. $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ $(x\ge 0;\ y\ge 0;\ x+y\le a)$ bircins səthinin ağırlıq mərkəzinin koordinatlarını tapın.

4356.1. Aşağıdakı S səthlərinin
$$I_0=\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\,dS$$
polyar ətalət momentini tapın:

a) $\max\{|x|, |y|, |z|\} = a$ kubunun səthinin;

b) $x^2 + y^2 \le R^2$, $0 \le z \le H$ silindrinin tam səthinin.

4356.2. Koordinat müstəvilərinə nəzərən

$$x + y + z = 1 \quad (x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0)$$

üçbucaq lövhəsinin ətalət momentlərini tapın.

4357. ρ_0 sıxlıqlı

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = r \quad (0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 < b \le r \le a)$$

bircins kəsik konik səth bu səthin təpəsində yerləşən m kütləli maddi nöqtəni hansı qüvvə ilə cəzb edir?

4358. ρ_0 sıxlıqlı $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (S) bircins sferik səthin $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsində potensialını tapın, yəni

$$u = \iint_S \frac{\rho_0 dS}{r}$$

inteqralını hesablayın, burada $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$.

4359. $$F(t) = \iint_{x+y+z=t} f(x, y, z)\, dS$$

inteqralanı hesablayın, burada

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2 - z^2, & x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \text{ olduqda;} \\ 0, & x^2 + y^2 + z^2 > 1 \text{ olduqda.} \end{cases}$$

$u = F(t)$ funksiyasının qrafikini qurun.

4360. $$F(t) = \iint_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x, y, z) dS$$

inteqralını hesablayın, burada

$$f(x,y,z) = \begin{cases} x^2 + y^2, & z \ge \sqrt{x^2 + y^2} \text{ olduqda;} \\ 0, & z < \sqrt{x^2 + y^2} \text{ olduqda.} \end{cases}$$

4361. $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > a > 0$ olduğunu fərz edərək

$$F(x, y, z, t) = \iint_S f(\xi, \eta, \zeta)\, dS$$

inteqralını hesablayın, burada S -

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = t^2$$

dəyişən sferasıdır və

$$f(\xi,\eta,\zeta)=\begin{cases}1, & \xi^2+\eta^2+\zeta^2<a^2 \text{ olduqda;}\\ 0, & \xi^2+\eta^2+\zeta^2\geq a^2 \text{ olduqda.}\end{cases}$$

Aşağıdakı 2-ci növ səth inteqrallarını hesablayın:

4362. $\iint\limits_S (x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy)$, burada S - $x^2+y^2+z^2=a^2$ sferasının xarici üzüdür.

4363. $\iint\limits_S f(x)\,dy\,dz+g(y)\,dz\,dx+h(z)\,dx\,dy$, burada $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$ - kəsilməz funksiyalar və S - $0\leq x\leq a$, $0\leq y\leq b$, $0\leq z\leq c$ paralelepipedinin səthinin xarici üzüdür.

4364. $\iint\limits_S (y-z)\,dy\,dz+(z-x)\,dz\,dx+(x-y)\,dx\,dy$, burada S - $x^2+y^2=z^2$ $(0\leq z\leq h)$ konik səthinin xarici üzüdür.

4365. $\iint\limits_S \left(\frac{dy\,dz}{x}+\frac{dz\,dx}{y}+\frac{dx\,dy}{z}\right)$, burada S - $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsoidinin xarici üzüdür.

4366. $\iint\limits_S x^2dy\,dz+y^2dz\,dx+z^2dx\,dy$, burada S - $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ sferasının xarici üzüdür.

§15. Stoks düsturu

Əgər $P=P(x,y,z)$, $Q=Q(x,y,z)$, $R=R(x,y,z)$ - **kəsilməz diferensiallanan funksiyalar və C - sonlu hissə-hissə hamar ikiüzlü S səthini hüdudlayan sadə qapalı hissə-hissə hamar kontur olarsa, onda**

$$\oint\limits_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint\limits_S \begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix} dS$$

Stoks düsturu **doğrudur, burada** $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - S **səthinə çəkilmiş normalın istiqamətləndirici kosinuslarıdır və S səthinə nəzərən C konturu boyunca hərəkət saat əqrəbinin əksi istiqamətindədir (sağ koordinat sistemi üçün).**

4367. Stoks düsturunu tətbiq edərək

$$\oint\limits_C y\,dx+z\,dy+x\,dz$$

əyrixətli inteqralını hesablayın, burada C - Ox oxunun müsbət tərəfindən baxdıqda saat əqrəbinin əksi istiqamətində yönələn $x^2+y^2+z^2=a^2$,

$x+y+z=0$ çevrəsidir.

İnteqralı bilavasitə hesablayaraq nəticəni yoxlayın.

4368. $$\int\limits_{AmB} (x^2-yz)\,dx+(y^2-xz)\,dy+(z^2-xy)\,dz$$

inteqralını

$$x=a\cos\varphi,\quad y=a\sin\varphi,\quad z=\frac{h}{2\pi}\varphi$$

vintvari əyrisinin $A\ (a,0,0)$ nöqtəsindən $B\ (a,0,h)$ nöqtəsinə qədər olan parçası boyunca hesablayın.

G ö s t ə r i ş . AmB əyrisini düz xətt parçası ilə tamamlayın və Stoks düsturunu tətbiq edin.

4369. Tutaq ki, C - $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ müstəvisində ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - müstəvi normalının istiqamətləndirici kosinuslarıdır) yerləşən və S sahəsini hüdudlayan qapalı konturdur.

$$\oint\limits_C \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

inteqralını tapın, burada C konturu müsbət istiqamətdə yönəlmişdir.

Stoks düsturunu tətbiq edərək aşağıdakı inteqralları hesablayın:

4370. $$\oint\limits_C (y+z)\,dx+(z+x)\,dy+(x+y)\,dz,$$

burada C - t parametrinin artma istiqamətində yönələn $x=a\sin^2 t$, $y=2a\sin t\cos t$, $z=a\cos^2 t$ $(0\le t\le\pi)$ ellipsidir.

4371. $$\oint\limits_C (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz,$$

burada C - Ox oxunun müsbət tərəfindən baxdıqda saat əqrəbinin əksi istiqamətində yönələn $x^2+y^2=a^2$, $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$ $(a>0,\ h>0)$ ellipsidir.

4372. $$\oint\limits_C (y^2+z^2)\,dx+(x^2+z^2)\,dy+(x^2+y^2)\,dz,$$

burada C - elə $x^2+y^2+z^2=2Rx$, $x^2+y^2=2rx$, $(0<r<R,\ z>0)$ əyrisidir ki, bu əyri üzrə hərəkət etdikdə $x^2+y^2+z^2=2Rx$ sferasının xarici tərəfində həmin əyri ilə hüdudlanan ən kiçik oblast solda qalır.

4373. $$\oint\limits_C (y^2-z^2)\,dx+(z^2-x^2)\,dy+(x^2-y^2)\,dz,$$

burada C - $0\le x\le a$, $0\le y\le a$, $0\le z\le a$ kubunun səthinin $x+y+z=\frac{3}{2}a$ müstəvisi ilə kəsiyidir və C əyrisi Ox oxunun müsbət tərəfindən baxdıqda saat əqrəbinin əksi istiqamətində yönəlmişdir.

4374. $$\oint_C y^2z^2\,dx+x^2z^2\,dy+x^2y^2\,dz\,,$$

burada C - t parametrinin artma istiqamətində yönələn qapalı $x=a\cos t$, $y=a\cos 2t$, $z=a\cos 3t$ əyrisidir.

4375. İsbat edin ki,

$$H(x,y,z)=ki\iint_S \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}\,dS \quad (k=\text{const})$$

funksiyası C konturu boyunca axan i cərəyanı tərəfindən yaradılan $\boldsymbol{H}$ maqnit sahəsinin potensialıdır, burada S - C konturu ilə hüdudlanan sahə, $\boldsymbol{n}$ - S səthinə çəkilmiş normal, $\boldsymbol{r}$ - fəzanın $M(x,y,z)$ nöqtəsini C konturunun cari $A(\xi,\eta,\zeta)$ nöqtəsi ilə birləşdirən radius-vektordur (bax: məsələ 4340).

§16. Ostroqradski düsturu

Əgər S – V həcmini hüdudlayan hissə-hissə hamar səth və $P=P(x,y,z)$, $Q=Q(x,y,z)$, $R=R(x,y,z)$ və onların 1-ci tərtib xüsusi törəmələri $V+S$ oblastında kəsilməz funksiyalardırsa, onda

$$\iint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$

Ostroqradski düsturu **doğrudur, burada $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - S səthinin xarici normalının istiqamətləndirici kosinuslarıdır.**

Ostroqradski düsturunu tətbiq edərək aşağıdakı səth inteqrallarını çevirin, burada hamar S səthi sonlu V həcmini hüdudlayır və $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - S səthinin xarici normalının istiqamətləndirici kosinuslarıdır:

4376. $\iint_S x^3dy\,dz+y^3dz\,dx+z^3dx\,dy\,.$

4377. $\iint_S yz\,dy\,dz+zx\,dz\,dx+xy\,dx\,dy\,.$

4378. $\iint_S \frac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dS\,.$

4379. $\iint_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)dS\,.$

4380. $$\iint_S\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS.$$

4381. İsbat edin ki, əgər S - qapalı sadə səth və l - istənilən sabit istiqamətdirsə, onda
$$\iint_S \cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{l})\, dS = 0,$$
burada $\boldsymbol{n}$ - S səthinin xarici normalıdır.

4382. İsbat edin ki, S - səthi ilə hüdudlanan cismin həcmi
$$V=\frac{1}{3}\iint_S (x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\,dS$$
ədədinə bərabərdir, burada $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - S səthinə çəkilmiş xarici normalın istiqamətləndirici kosinuslarıdır

4383. İsbat edin ki, $F(x,y,z)=0$ hamar konik səthi və $Ax+By+Cz+D=0$ müstəvisi ilə hüdudlanan konusun həcmi
$$V=\frac{1}{3}SH$$
ədədinə bərabərdir, burada S - konusun verilmiş müstəvidə yerləşən oturacağının sahəsi və H - onun hündürlüyüdür.

4384. $z=\pm c$ və
$$\left.\begin{aligned} x&=a\cos u\cos v+b\sin u\sin v,\\ y&=a\cos u\sin v-b\sin u\cos v,\\ z&=c\sin u \end{aligned}\right\}$$
səthləri ilə hüdudlanan cismin həcmini tapın.

4385. $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=-u+a\cos v$ $(u\geq 0)$ səthi və $x=0$ və $z=0$ $(a>0)$ müstəviləri ilə hüdudlanan cismin həcmini tapın.

4385.1.
$$\left.\begin{aligned} x&=(b+a\cos\psi)\cos\varphi,\\ y&=(b+a\cos\psi)\sin\varphi,\\ z&=a\sin\psi \end{aligned}\right\}$$
$$(0<a\leq b)$$
toru ilə hüdudlanan cismin həcmini tapın.

4386.
$$\frac{d}{dt}\left\{\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leq t^2} f(x,y,z,t)\,dx\,dy\,dz\right\}=$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x,y,z,t)\,dS + \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} \frac{\partial f}{\partial t}\,dx\,dy\,dz \quad (t>0)$$

dusturunu isbat edin.

Ostroqradski düsturunun köməyi ilə aşağıdakı səth inteqrallarını hesablayın:

4387. $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz + y^2 dz\,dx + z^2\,dx\,dy$,

burada S - $0\le x\le a$, $0\le y\le a$, $0\le z\le a$ kubunun sərhədinin xarici üzüdür.

4388. $\iint\limits_S x^3\,dy\,dz + y^3\,dz\,dx + z^3\,dx\,dy$,

burada S - $x^2+y^2+z^2=a^2$ sferasının xarici üzüdür.

4389. $\iint\limits_S (x-y+z)\,dy\,dz + (y-z+x)\,dz\,dx +$

$$+ (z-x+y)\,dx\,dy,$$

burada S - $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$ səthinin xarici üzüdür.

4390. $\iint\limits_S (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\,dS$ inteqralını hesablayın,

burada S - $x^2+y^2=z^2$ $(0\le z\le h)$ konik səthinin hissəsidir və $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - bu səthə çəkilmiş xarici normalın istiqamətləndirici kosinuslarıdır.

G ö s t ə r i ş. $z=h$, $x^2+y^2\le h^2$ müstəvi hissəsini birləşdirin.

4391.

$$\iiint\limits_V \frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{r} = \frac{1}{2}\iint\limits_S \cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\,dS$$

düsturunu isbat edin, burada S - V həcmini hüdudlayan qapalı səth, $\boldsymbol{n}$ - S səthinin cari (ξ,η,ζ) nöqtəsində çəkilmiş xarici normal, $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$ və $\boldsymbol{r}$ - (x,y,z) nöqtəsindən (ξ,η,ζ) nöqtəsinə yönələn radius-vektordur.

4392. $I(x,y,z)=\iint\limits_S \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}\,dS$ *Qauss inteqralını* hesablayın, burada S - V həcmini hüdudlayan sadə qapalı hamar səth, $\boldsymbol{n}$ - S səthinin (ξ,η,ζ) nöqtəsində çəkilmiş xarici normal, $\boldsymbol{r}$ - (x,y,z) nöqtəsini (ξ,η,ζ) nöqtəsi ilə birləşdirən radius-vektordur və $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$.

İki hala baxın:

a) S səthi (x, y, z) nöqtəsini əhatə etmir,

b) S səthi (x, y, z) nöqtəsini əhatə edir.

4393. İsbat edin ki, əgər

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

və S - sonlu V cismini hüdudlayan hamar səth olarsa, onda aşağıdakı düsturlar doğrudur:

a) $\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint\limits_V \Delta u \, dx\, dy\, dz$;

b) $\iint\limits_S u\frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint\limits_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] dx\, dy\, dz +$

$$+\iiint\limits_V u\, \Delta u \, dx\, dy\, dz,$$

burada u - $V+S$ oblastında ikinci tərtibə qədər kəsilməz xüsusi törəmələrə malik olan funksiyadır və $\frac{\partial u}{\partial n}$ - S səthinin xarici normalı üzrə törəmədir.

4394. Fəzada

$$\iiint\limits_V \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dx\, dy\, dz = \iint\limits_S \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} dS$$

ikinci Qrin düsturunu isbat edin, burada V həcmi S səthi ilə hüdudlanır, $\boldsymbol{n}$ - S səthinə çəkilmiş xarici normalın istiqamətidir və $u=u(x, y, z)$, $v=v(x, y, z)$ - $V+S$ oblastında iki dəfə diferensiallanan funksiyalardır.

4395. Müəyyən oblastda ikinci tərtibə qədər kəsilməz xüsusi törəmələrə malik olan $u=u(x, y, z)$ funksiyası üçün

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

olarsa, onda u funksiyası bu oblastda *harmonik* adlanır.

İsbat edin ki, əgər u funksiyası hamar S səthi ilə hüdudlanan sonlu qapalı V oblastında harmonikdirsə, onda

a) $\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$;

b) $\iiint\limits_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] dx\, dy\, dz = \iint\limits_S u\frac{\partial u}{\partial n} dS$

düsturları doğrudur, burada $\boldsymbol{n}$ - S səthinə çəkilmiş xarici normaldır.

b) düsturundan istifadə edərək isbat edin ki, V oblastında harmonik olan funksiya S sərhədindəki qiymətləri ilə birqiymətli təyin olunur.

4396. İsbat edin ki, əgər $u=u(x, y, z)$ funksiyası hamar S səthi ilə hüdudlanan sonlu qapalı V oblastında harmonikdirsə, onda

$$u(x, y, z)=\frac{1}{4\pi}\iint_S \left[u\frac{\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right] dS,$$

burada $\boldsymbol{r}$ - V oblastının daxili (x, y, z) nöqtəsindən S səthinin dəyişən (ξ, η, ζ) nöqtəsinə doğru yönələn radius-vektor, $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$ və $\boldsymbol{n}$ - (ξ, η, ζ) nöqtəsində S səthinə çəkilmiş xarici normal vektordur.

4397. İsbat edin ki, əgər $u=u(x, y, z)$ funksiyası mərkəzi (x_0, y_0, z_0) nöqtəsi olan R radiuslu S sferasının daxilində harmonikdirsə, onda

$$u(x_0, y_0, z_0)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint_S u(x, y, z)\, dS$$

(*orta qiymət haqqında teorem*).

4398. İsbat edin ki, əgər qapalı məhdud V oblastında kəsilməz və onun daxilində harmonik olan $u=u(x, y, z)$ funksiyası eyniliklə sabit deyilsə, onda bu funksiya özünün ən böyük və ən kiçik qiymətlərini bu oblastın daxili nöqtəsində almır (*maksimum prinsipi*).

4399. Tutaq ki, V cismi tamamilə mayeyə batırılmışdır. Paskal qanunundan istifadə edərək isbat edin ki, mayenin itələyici qüvvəsi cismin həcmi qədər olan mayenin çəkisinə bərabərdir və şaquli yuxarı yönəlmişdir (*Arximed qanunu*).

4400. Tutaq ki, S_t - $(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2=t^2$ dəyişən sferasıdır və $f(\xi, \eta, \zeta)$ funksiyası kəsilməzdir. İsbat edin ki,

$$u(x, y, z, t)=\frac{1}{4\pi}\iint_{S_t}\frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{t}\, dS_t$$

funksiyası

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

dalğa tənliyini və

$$u|_{t=0}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=f(x, y, z)$$

başlanğıc şərtlərini ödəyir.

G ö s t ə r i ş. $\frac{\partial u}{\partial t}$ törəməsini üçqat inteqral ilə ifadə edin.

§17. Sahə nəzəriyyəsinin elementləri

1°. Qradiyent. Əgər $u(\boldsymbol{r})=u(x,y,z)$ (burada $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$) kəsilməz diferensiallanan skalyar sahədirsə, onda

$$\text{grad}\, u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

və ya qısa olaraq $\text{grad}\, u=\nabla u$ vektoru bu sahənin *qradiyenti* adlanır, burada $\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$. Verilmiş (x,y,z) nöqtəsində u sahəsinin qradiyenti bu nöqtədən keçən $u(x,y,z)=c$ *səviyyə səthinə* çəkilmiş normal üzrə istiqamətlənmişdir. Sahənin hər bir nöqtəsi üçün bu vektorun uzunluğu

$$|\text{grad}\, u|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

ədədinə bərabərdir və istiqamətcə həmin vektor u funksiyasının dəyişməsinin ən böyük sürətini verir.

u sahəsinin müəyyən $\boldsymbol{l}\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$ istiqamətində törəməsi

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\text{grad}\, u\cdot\boldsymbol{l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

ifadəsinə bərabərdir.

2°. Sahənin divergensiyası və rotoru. Əgər

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})=a_x(x,y,z)\boldsymbol{i}+a_y(x,y,z)\boldsymbol{j}+a_z(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

kəsilməz diferensiallanan *vektorial sahədirsə*, onda

$$\text{div}\,\boldsymbol{a}=\nabla\boldsymbol{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}$$

skalyarı bu sahənin *divergensiyası* və ya *dağılanlığı* adlanır.

$$\text{rot}\,\boldsymbol{a}=\nabla\times\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}$$

vektoru *sahənin rotoru* və ya *burulğanı* adlanır.

3°. Səthdən keçən vektor axını. Tutaq ki, $\boldsymbol{a}(\mathrm{r})$ vektoru Ω oblastında vektorial sahə yaradır və Ω-da yerləşən S səthi verilmişdir. Onda

$$\iint_S a_n\, dS=\iint_S (a_x\cos\alpha+a_y\cos\beta+a_z\cos\gamma)\, dS$$

inteqralı vahid normal $\boldsymbol{n}\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$ vektoru ilə xarakterizə olunan tərəfə istiqamətlənən *S səthindən keçən vektor seli* adlanır, burada $a_n=\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}$ - vektorun normal proyeksiyasıdır. *Ostroqradski düsturu* vektor vasitəsilə aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\oiint_S a_n\, dS=\iiint_V \text{div}\,\boldsymbol{a}\, dx\, dy\, dz,$$

burada S - V həcmini hüdudlayan səth, $\boldsymbol{n}$ - S səthinə çəkilmiş xarici normalın vahid vektorudur.

4°. Vektorun sirkulyasiyası.

$$\int_C \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r} = \int_C a_x dx + a_y dy + a_z dz$$

ədədinə $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ vektorunun C əyrisi üzrə *xətti inteqralı* (*sahənin işi*) deyilir.

Əgər C konturu qapalıdırsa, onda xətti inteqral C konturu boyunca *$\boldsymbol{a}$ vektorunun sirkulyasiyası* adlanır.

Stoks düsturu vektor şəklində

$$\oint_C \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r} = \iint_S (\operatorname{rot}\boldsymbol{a})_n\,dS$$

kimi olur, burada C - S səthini hüdudlayan qapalı konturdur və S səthinə çəkilmiş $\boldsymbol{n}$ normalı elə seçilməlidir ki, S səthi üzərində başı normal istiqamətində dayanan müşahidəçi üçün C konturu boyunca hərəkət saat əqrəbinin əksi istiqamətində olsun (sağ koordinat sistemi üçün).

5°. Potensiallı sahə. Tutaq ki, $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ vektorial sahəsi müəyyən u skalyarının qradiyentidir (yəni $\operatorname{grad} u = \boldsymbol{a}$). Onda $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ - *potensiallı sahə*, u kəmiyyəti isə sahənin *potensialı* adlanır.

Əgər u potensialı birqiymətli funksiyadırsa, onda

$$\int_{AB} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r} = u(B) - u(A).$$

Bu halda $\boldsymbol{a}$ vektorunun sirkulyasiyası sıfra bərabərdir.

Birrabitəli oblastda verilmiş $\boldsymbol{a}$ sahəsinin potensiallı olması üçün zəruri və kafi şərt $\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = 0$ olmasıdır (yəni bu sahə burulğansız olmalıdır).

4401. Aşağıdakı nöqtələr üçün $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 5z$ sahəsinin qradiyentinin uzunluğunu və istiqamətini tapın:

a) $O\,(0,0,0)$; *b*) $A\,(1,1,1)$ *c*) $B\,(2,0,1)$.

Hansı nöqtədə sahənin qradiyenti sıfra bərabərdir?

4401.1. Tutaq ki, $u = xy - z^2$. $M\,(-9, 12, 10)$ nöqtəsində grad$u$-nun uzunluğunu və istiqamətini tapın. xOy koordinat bucağının tənböləni istiqamətində $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ törəməsi nəyə bərabərdir?

4402. $Oxyz$ fəzasının hansı nöqtələrində

$$u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

sahəsinin qradiyenti

a) Oz oxuna perpendikulyardır;

b) Oz oxuna paraleldir;

c) sıfra bərabərdir?

4403. Tutaq ki,

$$u = \ln\frac{1}{r}$$

skalyar sahəsi verilmişdir, burada $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$. $Oxyz$ fəzasının hansı nöqtələrində

$$|\,\mathrm{grad}\, u\,| = 1$$

olar?

4404. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+8)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2}$ skalyar sahəsinin səviyyə səthlərini qurun. M (9, 12, 28) nöqtəsindən keçən səviyyə səthini tapın. $x^2 + y^2 + z^2 \le 36$ oblastında max u nəyə bərabərdir?

4405.
$$u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$$

sahəsinin A (1, 2, 2) və B (−3, 1, 0) nöqtələrindəki qradiyentləri arasındakı φ bucağını tapın.

4406. Tutaq ki,

$$u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

skalyar sahəsi verilmişdir. Bu sahənin səviyyə səthlərini ($u(x,y,z)=c$) və eyni modullu qradiyent səthlərini ($|\mathrm{grad}\, u|=c$) qurun. $1 < z < 2$ oblastında inf u, sup u, inf | grad u |, sup | grad u |-nu tapın.

4407. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsində iki

$$u(x, y, z) = c \quad \text{və} \quad u(x, y, z) = c + \Delta c$$

sonsuz yaxın səviyyə səthləri arasındakı məsafəni yüksək tərtibli sonsuz kiçik dəqiqliklə tapın, burada $u(x_0, y_0, z_0) = c$.

4408. Aşağıdakı düsturları isbat edin:

a) $\mathrm{grad}\,(u + c) = \mathrm{grad}\, u$ (c - sabitdir);

b) $\mathrm{grad}\, cu = c\,\mathrm{grad}\, u$ (c - sabitdir);

c) $\mathrm{grad}\,(u + v) = \mathrm{grad}\, u + \mathrm{grad}\, v$;

d) $\mathrm{grad}\, uv = v\,\mathrm{grad}\, u + u\,\mathrm{grad}\, v$;

e) $\mathrm{grad}\,(u^2) = 2u\,\mathrm{grad}\, u$;

f) $\mathrm{grad}\, f'(u) = f'(u)\,\mathrm{grad}\, u$.

4409. Hesablayın: *a*) grad r; *b*) $\mathrm{grad}\, r^2$; *c*) $\mathrm{grad}\,\frac{1}{r}$, burada $r = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

4410. $\mathrm{grad}\, f(r)$-i tapın, burada $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

4411. grad ($\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{r}$)-i tapın, burada $\boldsymbol{c}$ - sabit vektor və $\boldsymbol{r}$ - başlanğıcı koordinat başlanğıcı olan radius-vektordur.

4412. $\mathrm{grad}\,\{|\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r}|^2\}$-nı tapın ($\boldsymbol{c}$ - sabit vektordur).

4413. $\mathrm{grad}\, f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{grad}\, u + \frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{grad}\, v$ düsturunu isbat edin.

4414. $\nabla^2(uv)=u\nabla^2 v+v\nabla^2 u+2\nabla u\nabla v$ düsturunu isbat edin, burada

$$\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\nabla^2=\nabla\nabla=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

4415. İsbat edin ki, əgər $u=u(x, y, z)$ funksiyası qabarıq Ω oblastında diferensiallanandırsa və $|\mathbf{grad}\, u|\le M$ (M - sabitdir) olarsa, onda Ω oblastının istənilən A və B nöqtələri üçün

$$|u(A)-u(B)|\le M\rho(A, B)$$

bərabərsizliyi doğrudur, burada $\rho(A, B)$ - A və B nöqtələri arasındakı məsafədir.

4415.1. $u=u(x, y, z)$ funksiyası üçün grad u-nu: *a*) silindrik koordinatlarla; *b*) sferik koordinatlarla ifadə edin.

4416. Verilmiş M (x, y, z) nöqtəsində bu nöqtənin $\boldsymbol{r}$ radius-vektoru istiqaməti üzrə $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ sahəsinin törəməsini tapın.

Hansı halda bu törəmə qradiyentin uzunluğuna bərabərdir?

4417. $u=\frac{1}{r}$ sahəsinin $\boldsymbol{l}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ istiqamətində törəməsini tapın, burada $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Hansı halda bu törəmə sıfra bərabərdir?

4418. $v=v(x, y, z)$ sahəsinin qradiyenti istiqamətində $u=u(x, y, z)$ sahəsinin törəməsini tapın.

Hansı halda bu törəmə sıfra bərabərdir?

4419. $u=\mathrm{arctg}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ və $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ olarsa, $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}\times \mathrm{grad}\, u$ vektorial sahəsinin ort vektorlar üzrə ayrılışını yazın.

4420. $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k}$ vektorial sahəsinin qüvvə xətlərini təyin edin.

4421. Bilavasitə hesablamaqla isbat edin ki, $\boldsymbol{a}$ vektorunun divergensiyası düzbucaqlı koordinat sisteminin seçilməsindən asılı deyil.

4422. İsbat edin ki,

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}\,(M)=\lim_{d(S)\to 0}\frac{1}{V}\iint_S a_n\, dS,$$

burada S - M nöqtəsini əhatə edən və V oblastını hüdudlayan qapalı səth, $\boldsymbol{n}$ - S səthinin xarici normalı, $d(S)$ - S-in diametridir.

4422.1. M (3, 4, 5) nöqtəsində

$$\boldsymbol{a}=\frac{-\boldsymbol{i}x+\boldsymbol{j}y+\boldsymbol{k}z}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

sahəsinin divergensiyasını tapın. $\boldsymbol{a}$ vektorunun sonsuz kiçik $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=\varepsilon^2$ sferasından keçən Π axını təqribən nəyə bərabərdir?

4423. Tapın:

$$\operatorname{div}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}.$$

4424. Aşağıdakı düsturları isbat edin:

a) $\operatorname{div}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\operatorname{div}\boldsymbol{a}+\operatorname{div}\boldsymbol{b}$; *b*) $\operatorname{div}(u\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}\operatorname{grad}u$

(s - sabit vektor, u - skalyardır);

c) $\operatorname{div}(u\boldsymbol{a})=u\operatorname{div}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\operatorname{grad}u$.

4425. div (grad u)-nu tapın.

4426. div [grad $f(r)$]-i tapın, burada $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Hansı halda div [grad $f(r)$]=0?

4427. Hesablayın: *a*) div $\boldsymbol{r}$; *b*) $\operatorname{div}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$.

4428. div [$f(r)$ $\boldsymbol{c}$]-ni hesablayın, burada $\boldsymbol{c}$ - sabit vektordur.

4429. div [$f(r)\boldsymbol{r}$]-i tapın. Hansı halda bu vektorun divergensiyası sıfra bərabərdir?

4430. Tapın: *a*) div (u grad u); *b*) div (u grad v).

4431. Fəzanı dolduran maye Oz oxu ətrafında sabit ω bucaq sürəti ilə saat əqrəbinin əksi istiqamətində fırlanır. Zamanın verilmiş anında fəzanın M (x,y,z) nöqtəsində $\boldsymbol{v}$ sürət vektorunun və w təcil vektorunun divergensiyasını tapın.

4432. Cazibə mərkəzlərinin sonlu sistemi tərəfindən yaranan qravitasiyalı qüvvə sahəsinin divergensiyasını tapın.

4433. r, φ polyar koordinat sistemində $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(r,\varphi)$ müstəvi vektorunun divergensiyasının ifadəsini tapın.

4434. $x=f(u,v,w)$, $y=g(u,v,w)$, $z=h(u,v,w)$ olarsa, div$\boldsymbol{a}(x,y,z)$-i u, v, w ortoqonal əyrixətli koordinatları ilə ifadə edin.

Xüsusi hal kimi div$\boldsymbol{a}$-nın silindrik və sferik koordinatlarda ifadəsini tapın.

G ö s t ə r i ş. $\boldsymbol{a}$ vektorunun u=const, v=const, w=const səthləri ilə hüdudlanmış sonsuz kiçik paralelepipeddən keçən axınına baxın.

4435. Aşağıdakı düsturları isbat edin:

a) rot $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ = rot $\boldsymbol{a}$ + rot $\boldsymbol{b}$;

b) rot $(u\boldsymbol{a})$ = u rot $\boldsymbol{a}$ + grad $(u\times\boldsymbol{a})$.

4436. Tapın: *a*) rot $\boldsymbol{r}$; *b*) rot $[f(r)\boldsymbol{r}]$.

4436.1. $\boldsymbol{a}=\dfrac{y}{z}\boldsymbol{i}+\dfrac{z}{x}\boldsymbol{j}+\dfrac{x}{y}\boldsymbol{k}$ olarsa, M (1, 2, –2) nöqtəsində rot $\boldsymbol{a}$-nın uzunluğunu və istiqamətini tapın.

4437. Tapın: *a*) rot $c f(r)$; *b*) rot $[c \times f(r)\, r]$ (c - sabit vektordur).

4438. İsbat edin ki, div $(a \times b) = b\,\mathrm{rot}\, a - a\,\mathrm{rot}\, b$.

4439. Tapın: *a*) rot (grad u); *b*) div (rot a).

4440. Fəzanı dolduran maye $l\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ oxu ətrafında sabit ω bucaq sürəti ilə fırlanır. Zamanın verilən anında fəzanın $M(x,y,z)$ nöqtəsində v xətti sürət vektorunun rotorunu tapın.

4440.1. $a = a(r, \varphi)$ müstəvi vektorunun rotorunu r və φ polyar koordinatları ilə ifadə edin.

4440.2. rot $a(x, y, z)$-i

a) silindrik koordinatlarla;

b) sferik koordinatlarla ifadə edin.

4441. r vektorunun *a*) $x^2+y^2 \le z^2$ $(0 \le z \le h)$ konusunun yan səthindən; *b*) bu konusun oturacağından keçən axınını tapın.

4442. $a = iyz + jxz + kxy$ vektorunun *a*) $x^2+y^2 \le a^2$ $(0 \le z \le h)$ silindrinin yan səthindən; *b*) bu silindrin tam səthindən keçən axınını tapın.

4443. r radius-vektorunun

$$z = 1 - \sqrt{x^2+y^2} \quad (0 \le z \le 1)$$

səthindən keçən axınını tapın.

4444. $a = x^2 i + y^2 j + z^2 k$ vektorunun $x^2+y^2+z^2 = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$ sferasının müsbət oktantından keçən axınını tapın.

4445. $a = yi + zj + xk$ vektorunun $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=a$ $(a>0)$ müstəviləri ilə hüdudlanan piramidanın tam səthindən keçən axınını tapın. Ostroqradski düsturunu tətbiq edərək nəticəni yoxlayın.

4445.1. $a = x^3 i + y^3 j + z^3 k$ vektorunun $x^2+y^2+z^2 = x$ sferasından keçən axınını tapın.

4446. İsbat edin ki, a vektorunun $r = r(u, v)$ $((u, v) \in \Omega)$ tənliyi ilə verilmiş S səthindən keçən axını

$$\iint_S a_n\, dS = \iint_\Omega \left(a \frac{\partial r}{\partial u} \frac{\partial r}{\partial v} \right) du\, dv \text{-yə}$$

bərabərdir, burada $a_n = a\,n$ və n - S səthinə çəkilmiş normalın vahid vektorudur.

4447. $a = m\dfrac{r}{r^3}$ (m - sabitdir) vektorunun koordinat başlanğıcını əhatə edən qapalı S səthindən keçən axınını tapın.

4448. Verilmiş

$$a(r)=\sum_{i=1}^{n}\operatorname{grad}\left(-\frac{e_i}{4\pi r_i}\right)$$

vektorunun M_i $(i=1,2,\dots,n)$ nöqtələrini (*mənbələrini*) əhatə edən qapalı S səthindən keçən axınını tapın, burada e_i - sabitlər və r_i -dəyişən $M(r)$ nöqtəsi ilə M_i nöqtələri arasındakı məsafələrdir.

4449. İsbat edin ki,

$$\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}dS=\iiint\limits_V \nabla^2 u\,dx\,dy\,dz,$$

burada S - V cismini hüdudlayan səthdir.

4450. Vahid zaman ərzində u temperatur sahəsində səthin dS elementindən keçən istilik miqdarı

$$dQ=-k\boldsymbol{n}\operatorname{grad}u\,dS\text{-ə}$$

bərabərdir, burada k - daxili istilikkeçirmə əmsalı və $\boldsymbol{n}$ - S səthinə çəkilmiş normalın vahid vektorudur. Vahid zaman ərzində V cismində toplanan istilik miqdarını tapın. Temperaturun artma sürətindən istifadə edərək cismin temperaturunun ödədiyi tənliyi (*istilikkeçirmə tənliyini*) çıxarın.

4451. Hərəkətdə olan sıxılmayan maye V həcmini doldurur. V oblastında mənbə və mənsəbin olmadığını fərz edərək

$$\frac{d\rho}{dt}+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})=0$$

kəsilməzlik tənliyini çıxarın, burada $\rho=\rho(x,y,z)$ - mayenin sıxlığı, $\boldsymbol{v}$ - sürət vektoru, t - zamandır.

G ö s t ə r i ş. V-də yerləşən istənilən ω həcmindən keçən maye axınına baxın.

4452. $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}a\cos t+\boldsymbol{j}a\sin t+\boldsymbol{k}bt$ $(0\le t\le 2\pi)$ vintvari xətt parçası boyunca $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}$ vektorunun işini tapın.

4452.1. M (1, 1, 1) və N (2, 4, 8) nöqtələrini birləşdirən düz xətt parçası boyunca

$$\boldsymbol{a}=\frac{1}{y}\boldsymbol{i}+\frac{1}{z}\boldsymbol{j}+\frac{1}{x}\boldsymbol{k}$$

sahəsinin işini tapın.

4452.2. O (0, 0, 0) və M (1, 3, 5) nöqtələri arasındakı düz xətt parçası boyunca

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}e^{y-z}+\boldsymbol{j}e^{z-x}+\boldsymbol{k}e^{x-y}$$

sahəsinin işini tapın.

4452.3. $x^2+y^2+z^2=25$ sferasının böyük çevrəsinin M (3, 4, 0) və N (0, 0, 5) nöqtələrini birləşdirən ən qısa qövsü boyunca

$$\boldsymbol{a}=(y+z)\boldsymbol{i}+(2+x)\boldsymbol{j}+(x+y)\boldsymbol{k}$$

sahəsinin işini tapın.

4453. $\boldsymbol{a}=f(r)\,\boldsymbol{r}$ vektorunun AB qövsü boyunca işini tapın, burada f - kəsilməz funksiyadır.

4454. $\boldsymbol{a}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$ vektorunun (c - sabitdir): *a*) $x^2+y^2=1$, $z=0$ çevrəsi boyunca; *b*) $(x-2)^2+y^2=1$, $z=0$ çevrəsi boyunca sirkulyasiyasını tapın.

4455. $\boldsymbol{a}=\mathrm{grad}\left(\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}\right)$ vektorunun C konturu boyunca Γ sirkulyasiyasını aşağıdakı iki hal üçün tapın: *a*) C konturu Oz oxunu əhatə etmir; *b*) C konturu Oz oxunu əhatə edir.

4455.1. Tutaq ki,

$$\boldsymbol{a}=\frac{y}{\sqrt{z}}\boldsymbol{i}-\frac{x}{\sqrt{z}}\boldsymbol{j}+\sqrt{xy}\,\boldsymbol{k}$$

vektorial sahəsi verilmişdir. M (1, 1, 1) nöqtəsində rot$\boldsymbol{a}$-nı hesablayaraq sonsuz kiçik

$$\left.\begin{aligned}(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=\varepsilon^2,\\ (x-1)\cos\alpha+(y-1)\cos\beta+(z-1)\cos\gamma=0\end{aligned}\right\}$$

çevrəsi boyunca sahənin Γ sirkulyasiyasını təqribi hesablayın, burada $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

4456. Səthi qərarlaşmış maye axını

$$w=u(x,y)\,\boldsymbol{i}+v(x,y)\,\boldsymbol{j}$$

sürət vektoru ilə xarakterizə olunur. 1) S oblastını hüdudlayan qapalı C konturu boyunca axan mayenin Q miqdarını (maye sərfini); 2) C konturu boyunca sürət vektorunun Γ sirkulyasiyasını təyin edin. Əgər maye sıxılmayan və axın burulğansız olarsa, onda u və v funksiyaları hansı tənlikləri ödəyir?

4457. Göstərin ki,

$$\boldsymbol{a}=yz\,(2x+y+z)\,\boldsymbol{i}+xz\,(x+2y+z)\,\boldsymbol{j}+xy\,(x+y+2z)\,\boldsymbol{k}$$

sahəsi potensiallıdır və bu sahənin potensialını tapın.

4457.1. Verilmiş

$$\boldsymbol{a}=\frac{2}{(y+z)^{\frac{1}{2}}}\boldsymbol{i}-\frac{x}{(y+z)^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{j}-\frac{x}{(y+z)^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{k}$$

sahəsinin potensiallı olmasını isbat edərək M (1, 1, 3) və N (2, 4, 5) nöqtələrini müsbət oktantda birləşdirən yol boyunca bu sahənin işini tapın.

4458. Koordinat başlanğıcında yerləşən m kütləsinin yaratdığı

$$\boldsymbol{a}=-\frac{m}{r^3}\boldsymbol{r}$$

qravitasiya sahəsinin potensialını tapın.

4459. M_i $(i=1,2,\dots,n)$ nöqtələrində yerləşən m_i $(i=1,2,\dots,n)$ kütlələrinin yaratdığı qravitasiya sahəsinin potensialını tapın.

4460. İsbat edin ki, $\boldsymbol{a}=f(r)\,\boldsymbol{r}$ sahəsi potensiallıdır, burada $f(r)$ - birqiymətli kəsilməz funksiyadır. Bu sahənin potensialını tapın.

4461. $$\operatorname{grad}_P\left\{\iiint\limits_V \rho(Q)\frac{dV}{r}\right\}=-\iint\limits_S \rho(Q)\,\boldsymbol{n}\frac{dS}{r}+\iiint\limits_V \operatorname{grad}_Q \rho(Q)\frac{dV}{r}$$

düsturunu isbat edin, burada S - V həcmini hüdudlayan səth, $\boldsymbol{n}$ - bu səthə çəkilmiş xarici normal, r - $P(x,y,z)$ və $Q(\xi,\eta,\zeta)$ nöqtələri arasındakı məsafədir.

4462. Tutaq ki,

$$u(x,y,z)=-\frac{1}{4\pi}\int\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{r}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

və

$$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$$

(burada fərz edilir ki, uyğun inteqralların mənası var). İsbat edin ki, əgər $\boldsymbol{a}=\operatorname{grad} u$ olarsa, onda

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\rho(x,y,z).$$

CAVABLAR

I HİSSƏ

I Bölmə

16. 0; 1. **17.** $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$. **22.** $-1{,}01 < x < -0{,}99$. **23.** $x \le -8$; $x \ge 12$. **24.** $x < -\frac{1}{2}$. **25.** $0 < x < \frac{2}{3}$. **26.** $|x| \le 6$. **27.** $x > -\frac{1}{2}$. **28.** $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$. **29.** $\frac{5-\sqrt{30}}{10} < x < \frac{5-\sqrt{20}}{10}$; $\frac{5+\sqrt{20}}{10} < x < \frac{5+\sqrt{30}}{10}$. **31.** İkinci. **32.** İki işarə. **33.** 0,41%-i aşmır. **34.** 9,9102 $sm^2 \le S \le 10{,}0902$ sm^2; $\Delta \le 0{,}0902$ sm^2; $\delta \le 0{,}91\%$. **35.** 3,93 $Q/sm^3 \pm 0{,}27$ Q/sm^3; $\delta \le 7{,}3\%$. **36.** $\delta \le 3{,}05\%$. **37.** 172,480 $m^3 \le v \le 213{,}642$ m^3; $v = 192{,}660$ $m^3 \pm 20{,}982$ m^3; $\delta \approx 12\%$. **38.** $\Delta \le 0{,}17$ mm. **39.** $\Delta < 0{,}0005$ m. **42.** a) $N \ge \frac{1}{\varepsilon}$; b) $N \ge \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$; c) $N \ge 1 + \frac{\lg\frac{1}{\varepsilon}}{\lg 2}$; d) $N \ge \frac{\lg\varepsilon}{\lg 0{,}999} \approx$ $\approx 2330 \lg\frac{1}{\varepsilon}$. **43.** a) $N \ge E$; b) $N \ge \left(\frac{\lg E}{\lg 2}\right)^2$; c) $N \ge 10^{10^E}$. **46.** 0. **47.** 0. **48.** 0. **49.** $\frac{1}{3}$. **50.** $\frac{1-b}{1-a}$. **51.** $\frac{1}{2}$. **52.** $\frac{1}{2}$. **53.** $\frac{1}{3}$. **54.** $\frac{4}{3}$. **55.** 3. **56.** 1. **57.** 2. **67.** a) ikinci; b) birinci; c) ikinci. **72.** $e = 2{,}71828\ldots$. **92.** $a \ne 0$ olduqda 1-ə bərabərdir və $a = 0$ olduqda ya $[-1, 1]$-ə daxildir ya da yoxdur. **96.** $x_3 = 1\frac{1}{8}$. **97.** $x_{100} = \frac{1}{20}$. **98.** $x_{1000} = \frac{1000^{1000}}{1000!} \approx 2{,}49 \cdot 10^{452}$. **99.** $x_4 = x_5 = -120$. **100.** $x_{10} = 20$. **101.** 0; 1; 1; 1. **101.1.** $-3\frac{1}{2}$; 5; -2; 2. **102.** -1; $1\frac{1}{2}$; 0; 1. **103.** 0; 2; 0; 2. **104.** -4; 6; -4; 6. **105.** $-\frac{1}{2}$; 1; $-\frac{1}{2}$; 1. **106.** $-\infty$; $+\infty$; $-\infty$; $+\infty$. **107.** $-\infty$; -1; $-\infty$; $-\infty$. **108.** 0; $+\infty$; 0; $+\infty$. **109.** $-\infty$; $+\infty$; $-\infty$; $+\infty$. **110.** -5; 1,25; 0; 0. **111.** $-\frac{1}{2}$; 1. **112.** $-\left(e + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $e+1$. **113.** 0; 1. **114.** 1; 2. **115.** 0; 1. **116.** 0; 1. **117.** 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; ...; 0. **118.** 0 və 1 daxil olmaqla onlar arasında olan bütün ədədlər. **119.** 1; 5. **120.** a; b. **127.** a) dağılır; b) yığıldığı kimi dağıla da bilər. **128.** a) olmaz; b) olmaz. **129.** Yox. **130.** Yox. **144.** a) 0; b) 0. **147.** ln2. **148.** $\frac{1}{3}(a+2b)$. **151.** $-\infty < x < +\infty$, $x \ne -1$. **152.** $-\infty < x \le -\sqrt{3}$ və

$0\le x\le\sqrt{3}$. **153.** $-1\le x<1$. **154.** a) $|x|>2$; b) $x>2$. **155.** $4k^2\pi^2\le x\le(2k+1)^2\pi^2$ $(k=0,1,2,...)$. **156.** $|x|\le\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ və $\sqrt{\frac{\pi}{2}(4k-1)}\le|x|\le\sqrt{\frac{\pi}{2}(4k+1)}$ $(k=1,2,...)$.
157. $\frac{1}{2k+1}<x<\frac{1}{2k}$ və $-\frac{1}{2k+1}<x<-\frac{1}{2k+2}$ $(k=0,1,2,...)$. **158.** $x>0$, $x\neq n$ $(n=1,2,...)$. **159.** $-\frac{1}{3}\le x\le 1$. **160.** $|x-k\pi|\le\frac{\pi}{6}$ $(k=0,\pm1,\pm2,...)$.
161. $10^{\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi}<x<10^{\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}$ $(k=0,\pm1,\pm2,...)$. **162.** $x=-1,-2,-3,...$ və $x\ge0$.
163. $x<0$, $x\neq -n$ $(n=1,2,...)$. **164.** $1<x\le 2$. **165.** $x=\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, ...$.
165.1. $x>4$. **165.2.** $k\pi+\frac{\pi}{4}\le x<k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,...)$. **165.3.** $0\le x\le\frac{\pi}{3}$ və $\frac{4\pi}{3}\le x\le\frac{3\pi}{2}$. **166.** $-1\le x\le 2$; $0\le y\le 1\frac{1}{2}$. **167.** $2k\pi+\frac{\pi}{3}<x<2k\pi+\frac{5\pi}{3}$ $(k=0,\pm1,\pm2,...)$; $-\infty<y\le\lg 3$. **168.** $-\infty<x<+\infty$; $0\le y\le\pi$. **169.** $1\le x\le 100$; $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$. **170.** $x=\frac{p}{2q+1}$, burada p və q - tam ədədlərdir; $y=\pm 1$. **171.**

$$P=2b+2\left(1-\frac{b}{h}\right)x \quad (0<x<h);\qquad S=bx\left(1-\frac{x}{h}\right)\quad (0<x<h).$$

172. $a=\sqrt{100-96\cos x}$ $(0<x<\pi)$; $S=24\sin x$ $(0<x<\pi)$.
173. $0\le x\le\frac{a-b}{2}$ olduqda $S=\frac{h}{a-b}x^2$; $\frac{a-b}{2}<x<\frac{a+b}{2}$ olduqda $S=h\left(x-\frac{a-b}{4}\right)$; $\frac{a+b}{2}\le x\le a$ olduqda $S=h\left[\frac{a+b}{2}-\frac{(a-x)^2}{a-b}\right]$. **174.** $-\infty<x\le0$ olduqda $m(x)=0$; $0<x\le1$ olduqda $m(x)=2x$; $1<x\le2$ olduqda $m(x)=2$; $2<x\le3$ olduqda $m(x)=3$; $3<x<+\infty$ olduqda $m(x)=4$. **178.** $E_y=\{0\le y\le4\}$. **179.** $E_y=\{1<y<3\}$. **180.** $E_y=\{0<y<1\}$. **181.** $E_y=\{1\le|y|<+\infty\}$. **182.** $E_y=\{1\le y\le2\}$. **183.** $a<b$ olduqda $a<y<b$ və $a>b$ olduqda $b<y<a$. **184.** $1<y<+\infty$. **185.** $0>y>-\infty$ və $+\infty>y>1$. **186.** $0<y\le\frac{1}{2}$.
187. $+\infty>y>-\infty$. **188.** $0<y<\frac{1}{2}$ və $\frac{3}{2}\le y<2$. **189.** 0; 0; 0; 0; 24. **190.** 0; –6; 4. **191.** 1; 1; 1; 2. **192.** –1; 0; 1; 2; 4. **193.** 1, $\frac{1+x}{1-x}$, $\frac{-x}{2+x}$, $\frac{2}{1+x}$, $\frac{x-1}{x+1}$, $\frac{1+x}{1-x}$. **194.** a) əgər $x=-1$, $x=0$ və $x=1$ olarsa, $f(x)=0$; əgər $-\infty<x<-1$ və $0<x<1$ olarsa, $f(x)>0$; əgər $-1<x<0$ və $1<x<+\infty$ olarsa, $f(x)<0$;

b) əgər $x=\pm\frac{1}{k}$ olarsa, $f(x)=0$; əgər $\frac{1}{2k+1}<x<\frac{1}{2k}$ və $-\frac{1}{2k+1}<x<-\frac{1}{2k+2}$ $(k=0,1,2,...)$ olarsa, $f(x)>0$; əgər $\frac{1}{2k+2}<x<\frac{1}{2k+1}$ və $-\frac{1}{2k}<x<-\frac{1}{2k+1}$ $(k=0,1,2,...)$ olarsa, $f(x)<0$; c) əgər $x\le 0$ və $x=1$ olarsa, $f(x)=0$. əgər $0<x<1$ olarsa, $f(x)>0$; əgər $1<x<+\infty$ olarsa, $f(x)<0$. **195.** a) a. b) $2x+h$; c) $a^x\cdot\frac{a^h-1}{h}$. **197.** $f(x)=\frac{7}{3}x-2$; $f(1)=\frac{1}{3}$; $f(2)=2\frac{2}{3}$ **198.** $f(x)=\frac{7}{6}x^2+\frac{17}{6}x+1$; $f(-1)=-\frac{2}{3}$; $f(0{,}5)=2\frac{17}{24}$. **199.** $f(x)=\frac{10}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2-\frac{29}{6}x+2$. **200.** $f(x)=10+5\cdot 2^x$. **203.** a) $2k\pi<x<\pi+2k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,...)$; b) $1<x<e$; c) $x>0$, $x\ne k$ $(k=0,1,2,...)$ **205.** a) $z=x+y$; b) $z=\frac{xy}{x+y}$; c) $z=\frac{x+y}{1-xy}$; d) $z=\frac{x+y}{1+xy}$ **206.** $\varphi(\varphi(x))=x^4$; $\psi(\psi(x))=2^{2^x}$; $\varphi(\psi(x))=2^{2x}$; $\psi(\varphi(x))=2^{x^2}$ **207.** $\varphi(\varphi(x))=\operatorname{sgn}x$; $\psi(\psi(x))=x$ $(x\ne 0)$; $\varphi(\psi(x))=\psi(\varphi(x))=\operatorname{sgn}x$ $(x\ne 0)$. **208.** $\varphi(\varphi(x))=\varphi(x)$; $\psi(\varphi(x))=\psi(x)$; $\psi(\psi(x))=\varphi(\psi(x))=0$ **209.** $-\frac{1-x}{x}$; $x\ (x\ne 0,\ x\ne 1)$. **210.** $f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$. **211.** x^2-5x+6. **212.** x^2-2 $(|x|\ge 2)$. **213.** $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$. **213.1.** $f(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)^2$. **221.** a) $a>0$ olduqda artır və $a<0$ olduqda azalır; b) $a>0$ olduqda $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right)$ intervalında azalır və $\left(-\frac{b}{2a},+\infty\right)$ intervalında artır; c) artır; d) $ad-bc>0$ olduqda $\left(-\infty,-\frac{d}{c}\right)$ və $\left(-\frac{d}{c},+\infty\right)$ intervallarında artır; e) $a>1$ olduqda artır və $0<a<1$ olduqda azalır. **222.** Əgər loqarifmanın əsası 1-dən böyükdürsə, olar. **224.** $\frac{y-3}{2}$ $(-\infty<y<+\infty)$. **225.** a) $-\sqrt{y}$ $(0\le y<+\infty)$; b) $\sqrt{y}$ $(0\le y<+\infty)$. **226.** $\frac{1-y}{1+y}$ $(y\ne -1)$. **227.** a) $-\sqrt{1-y^2}$ $(0\le y\le 1)$; b) $\sqrt{1-y^2}$ $(0\le y\le 1)$. **228.** $\operatorname{Arsh}y=\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)$ $(-\infty<y<+\infty)$. **229.** $\operatorname{Arth}y=\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}$ $(-1<y<1)$. **230.** $-\infty<y<1$ olarsa, $x=y$;

$1 \le y \le 16$ olarsa, $x=\sqrt{y}$; $16 < y < +\infty$ olarsa, $x=\log_2 y$. **231.** a) Təkdir; b) cütdür; c) cütdür; d) təkdir; e) təkdir. **233.** a) Periodikdir, $T=\frac{2\pi}{\lambda}$; b) periodikdir, $T=2\pi$; c) periodikdir, $T=6\pi$; d) periodikdir, $T=\pi$; e) periodik deyil; f) periodikdir, $T=\pi$; g) periodik deyil; h) periodik deyil. **241.** $t=1\frac{2}{3}$ *san*, $x=-3\frac{1}{3}$ *m*. **243.** $x_0=-\frac{b}{2a}$, $y_0=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

244. $y=x-\frac{x^2}{36000}$; 9 *km*; 36 *km*. **251.** $x_0=-\frac{d}{c}$; $y_0=\frac{a}{c}$. **252.** $p=\frac{12}{v}$ $(v>0)$. **263.** $k=\frac{a}{a_1}$, $m=\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2}$, $n=\frac{c}{a_1}-\frac{b_1}{a_1^3}(a_1b-ab_1)$, $x_0=-\frac{b_1}{a_1}$.

264. $y=\frac{10}{x^2}$. **287.** $A=\sqrt{a^2+b^2}$; $\sin x_0=-\frac{a}{A}$, $\cos x_0=\frac{b}{A}$. **356.** $|x-\pi k|\le\frac{\pi}{6}$ olarsa, $y=2\sin x$; $\frac{\pi}{6}<|x-\pi k|<\frac{5\pi}{6}$ $(k=0,\pm1,\pm2,...)$ olarsa, $y=(-1)^k$. **357.** a) $y=\frac{1}{2}(x+|x|)$; b) və c) $x\ge0$ olarsa, $y=x^2; x<0$ olarsa, $y=0$; d) $x<0$ olarsa, $y=x$; $x\ge0$ olarsa, $y=x^4$. **358.** a) $y=1$; b) $1\le|x|\le\sqrt{3}$ olarsa, $y=1$; $|x|<1$ və $|x|>\sqrt{3}$ olarsa, $y=0$; c) $|x|\le1$ olarsa, $y=1$; $|x|>1$ olarsa, $y=2$; d) $|x|>2$ olarsa, $y=-2$; $|x|\le2$ olarsa, $y=2-(2-x^2)^2$. **359.** $x<0$ olduqda alırıq: a) 1) $f(x)=1+x$, 2) $f(x)=-(1+x)$; b) 1) $f(x)=-2x-x^2$, 2) $f(x)=2x+x^2$; c) 1) $f(x)=\sqrt{-x}$, 2) $f(x)=-\sqrt{-x}$; d) 1) $f(x)=-\sin x$, 2) $f(x)=\sin x$; e) 1) $f(x)=e^{-x}$, 2) $f(x)=-e^{-x}$; f) 1) $f(x)=\ln(-x)$, 2) $f(x)=-\ln(-x)$. **360.** a) $x=-\frac{b}{2a}$; b) $x=\frac{1}{2}$; c) $x=\frac{b-a}{2}$; d) $x=k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,...)$.

361. a) (x_0, ax_0+b), burada x_0 - ixtiyaridir; b) $\left(-\frac{d}{c},\frac{a}{c}\right)$; c) (x_0, y_0), burada $x_0=-\frac{b}{3a}$ və $y_0=ax_0^3+bx_0^2+cx_0+d$; d) (2, 0); e) (2, 1). **372.** Köklər: –1,88; 0,35; 1,53. **373.** 2,11; –0,25; –1,86. **374.** 0,25; 1,49. **375.** 0,64. **376.** 1,37; 10. **377.** –0,54. **378.** 0; 4,49. **379.** $x_1=-0{,}57$, $y_1=-1{,}26$; $x_2=-0{,}42$, $y_2=1{,}19$; $x_3=0{,}45$, $y_3=0{,}74$; $x_4=0{,}54$, $y_4=-0{,}68$. **380.** $x_1=-1{,}30$, $y_1=9{,}91$; $x_2=2{,}30$, $y_2=9{,}73$; $x_3=-0{,}62$, $y_3=-9{,}98$; $x_4=1{,}62$, $y_4=-9{,}87$. **382.** a) Ümumiyyətlə, yox; b) hə. **385.** Yuxarıdan məhduddur və aşağıdan məhdud deyildir. **387.** $f(a)$ və (b). **388.** 0; 25.

389. 0; 1. **390.** 0; 1. **391.** 2; $+\infty$. **392.** -1; 1. **393.** $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$. **394.** $\frac{1}{2}$; 4. **395.** a) 0, 1; b) 0; 2. **396.** 0; 1. **397.** a) 8; b) 0,8; c) 0,08; d) 0,008. **398.** a) π; b) π; c) π; d) π. **411.** a) 1; b) $\frac{2}{3}$; c) $\frac{1}{2}$. **412.** 6. **413.** 10. **414.** $\frac{1}{2}nm(n-m)$.

415. 5^{-5}. **416.** $\left(\frac{3}{2}\right)^{30}$. **417.** $n^{-\frac{n(n+1)}{2}}$. **418.** $-\frac{1}{2}$. **419.** $\frac{1}{2}$. **420.** 1. **421.** $\frac{1}{4}$. **422.** $\frac{1}{3}$.

423. $\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$. **424.** $\frac{n(n+1)}{2}$. **424.1.** $2\frac{1}{24}$. **425.** $\frac{m}{n}$. **426.** $\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}$. **427.** $\frac{n(n+1)}{2}$

428. $\frac{m-n}{2}$. **429.** $x+\frac{a}{2}$. **430.** $x^2+ax+\frac{a^2}{3}$. **431.** 1. **432.** $\frac{1}{2}$. **433.** 3

434. $\frac{ab}{3}$. **435.** 1. **436.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **437.** $\frac{4}{3}$. **438.** -2. **439.** $\frac{1}{\sqrt{2a}}$. **440.** $-\frac{1}{16}$

441. $\frac{1}{144}$. **442.** $\frac{1}{4}$. **443.** $\frac{12}{5}$. **444.** $\frac{1}{n}$. **445.** -2. **446.** $\frac{1}{4}$. **447.** $\frac{2}{27}$. **448.** $\frac{3}{2}$.

449. $4\frac{4}{27}$. **450.** $\frac{7}{36}$. **451.** $-\frac{1}{2}$. **452.** $\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}$. **453.** $\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}$. **455.** $\frac{n}{m}$.

455.1. $\frac{1}{2}$. **456.** $\frac{1}{n!}$. **457.** $\frac{1}{2}(a+b)$. **458.** $\frac{1}{2}$. **459.** $-\frac{1}{4}$. **460.** 1. **461.** $\frac{2}{3}$.

462. 2. **463.** $\frac{4}{3}$. **464.** $-\frac{1}{4}$. **465.** $\frac{1}{n}(a_1+a_2+...+a_n)$. **466.** 2^n. **467.** $2n$.

468. $\lim\limits_{a\to 0} x_1=\infty$, $\lim\limits_{a\to 0} x_2=-\frac{c}{b}$. **469.** $a=1$, $b=-1$. **470.** $a_i=\pm 1$; $b_i=\mp\frac{1}{2}$ $(i=1,2)$. **471.** 5. **472.** 0. **473.** $(-1)^{m-n}\frac{m}{n}$. **474.** $\frac{1}{2}$. **474.1.** 1. **474.2.** $\frac{1}{3}$.

475. $\frac{1}{2}$. **476.** 2. **477.** 4. **478.** $\frac{1}{p}$. **479.** $\frac{1}{2}$. **480.** $\frac{2}{\pi}$. **482.** $\cos a$. **483.** $-\sin a$.

484. $\sec^2 a$ $\left(a\neq(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k=0,\pm1,...\right)$. **485.** $-\frac{1}{\sin^2 a}$ ($a\neq k\pi$, burada k - tamdır). **486.** $\frac{\sin a}{\cos^2 a}$ ($a\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$, burada k - tamdır). **487.** $-\frac{\cos a}{\sin^2 a}$ ($a\neq k\pi$, burada k-tamdır). **488.** $-\sin a$. **489.** $-\cos a$. **490.** $\frac{2\sin a}{\cos^3 a}$ ($a\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$, burada k - tamdır). **491.** $\frac{2\cos a}{\sin^3 a}$ ($a\neq k\pi$, burada k - tamdır). **492.** $\frac{3}{2}\sin 2a$.

493. -3. **494.** 14. **495.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **496.** -24. **497.** $-\frac{\cos 2a}{\cos^4 a}$ ($a\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$, burada k - tamdır). **498.** $\frac{3}{4}$. **499.** $\frac{1}{4}$. **500.** $\frac{4}{3}$. **501.** $-\frac{1}{12}$. **502.** $\sqrt{2}$. **503.** 0. **504.** 3.

505. 0. **506.** a) $\frac{1}{2}$; b) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; c) 1. **507.** 0. **508.** 0. **509.** 0. **510.** 0. **511.** 1.
512. e^3. **513.** 1. **514.** e^{-2}. **515.** e^{2a}. **516.** $a_1<a_2$ olarsa, 0; $a_1>a_2$ olarsa, $+\infty$; $a_1=a_2$ olarsa, $e^{\frac{b_1-b_2}{a_1}}$. **517.** e. **518.** e^{-1}. **519.** 1. **519.1.** $\sqrt{e}$. **520.** $e^{\operatorname{ctg} a}$ ($a\neq k\pi$, burada k - tamdır). **521.** $e^{\frac{3}{2}}$. **522.** e^{-1}. **523.** 1. **524.** e^{-2}. **525.** e.
526. $\frac{1}{\sqrt{e}}$. **527.** e^{x+1}. **528.** $e^{-\frac{x^2}{2}}$. **529.** 1. **530.** 1. **531.** $\frac{1}{a}$. **532.** 0. **533.** $\frac{1}{5}$.
534. 2. **535.** $\frac{3}{2}$. **536.** $\frac{3}{2}$. **537.** $-\frac{\log e}{x^2}$. **538.** $\frac{2a}{b}$. **539.** $\left(\frac{a}{b}\right)^2$. **540.** 0.
540.1. n. **541.** $\ln a$. **542.** $a^a\ln\frac{a}{e}$. **543.** $a^a\ln ea$. **544.** e^2. **545.** $\frac{2}{3}$.
545.1. $e^{\beta^2-\alpha^2}$. **545.2.** $\frac{\alpha}{\beta}$. **545.3.** 2. **546.** e^2. **547.** 1. **548.** $\frac{\alpha}{\beta}a^{\alpha-\beta}$. **549.** $a^b\ln a$. **550.** $a^x\ln^2 a$. **551.** $e^{-(a+b)}$. **552.** $\ln x$. **553.** $\ln x$. **554.** $\sqrt[a]{b}$. **555.** $\sqrt{ab}$.
556. $\sqrt[3]{abc}$. **557.** $(a^ab^bc^c)^{\frac{1}{a+b+c}}$. **558.** $\frac{1}{\sqrt{ab}}$. **559.** $\left(\ln\frac{a}{b}\right)^{-1}$. **560.** $a^{a^a}\ln a$.
561. a) 0; b) $\frac{\ln 3}{\ln 2}$. **562.** $\ln 8$. **563.** $\ln 2$. **566.** a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{2}$. **567.** 1. **568.** 0.
569. $\ln a^2$. **570.** $\frac{1}{8}$. **571.** $\frac{1}{2}$. **572.** 2. **573.** e^2. **574.** $e^{\frac{2}{\pi}}$. **575.** $\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}$. **576.** a) 1; b) $\frac{1}{2}$; c) 1. **576.1.** $\frac{2}{9}$. **577.** $2\operatorname{sh}\frac{1}{2}$. **577.1.** a) $\operatorname{ch}a$; b) $\operatorname{sh}a$. **577.2.** 1. **578.** $\ln 2$.
579. 1. **580.** e^{π^2}. **581.** $-\frac{\pi}{2}$. **582.** $\frac{\pi}{3}$. **583.** $-\frac{\pi}{2}$. **584.** $\frac{3\pi}{4}$. **585.** $\frac{1}{1+x^2}$.
586. 2. **587.** $\frac{e^x}{x^2+1}$. **588.** $\frac{1}{2}$. **589.** 1. **590.** $e^{\frac{2}{\pi}}$. **591.** 0. **592.** 0. **593.** a) $+\infty$; b) $\frac{1}{2}$. **594.** a) $+\infty$; b) 1. **594.1.** $\ln\frac{b^2}{a^2}$. **595.** a) $\frac{\pi}{2}$; b) $\frac{\pi}{2}$. **596.** a) 1; b) 0.
597. a) 0; b) 1. **600.** 2; 1; 2. **601.** 0; $(-1)^{n-1}$; $(-1)^n$. **602.** 0. **603.** 1. **604.** 0.
605. 1. **606.** 0. **613.** b) $|x|<1$ olarsa, $y=1$; $|x|=1$ olarsa, $y=0$.
614. b) $0\le x<1$ olarsa, $y=0$; $x=1$ olarsa, $y=\frac{1}{2}$; $1<x<+\infty$ olarsa, $y=1$. **615.** $0<|x|<1$ olarsa, $y=-1$; $|x|=1$ olarsa, $y=0$; $|x|>1$ olarsa, $y=1$. **616.** $y=|x|$. **617.** $0\le x\le 1$ olarsa, $y=1$; $x>1$ olarsa, $y=x$.
618. $0\le x\le 1$ olarsa, $y=1$; $1<x<2$ olarsa, $y=x$; $x\ge 2$ olarsa, $y=\frac{x^2}{2}$.

619. $0 \le x < 2$ olarsa, $y=0$; $x=2$ olarsa, $y=2\sqrt{2}$; $x>2$ olarsa, $y=x^2$ **620.** b) $x \ne (2k+1)\frac{\pi}{2}$ olarsa, $y=0$; $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ olarsa, $y=1$. **621.** $0 \le x \le 2$ olarsa, $y=\ln 2$; $x>2$ olarsa, $y=\ln x$. **622.** $-1<x\le 1$ olarsa, $y=0$; $x>1$ olarsa, $y=\frac{\pi}{2}(x-1)$. **623.** $x \le -1$ olarsa, $y=1$; $x>-1$ olarsa, $y=e^{x+1}$. **624.** $x<0$ olduqda $y=x$; $x=0$ olduqda $y=\frac{1}{2}$; $x>0$ olduqda $y=1$. **625.** $\frac{1}{x}$. **625.1.** $0\le x<1$ və $4k-1<x<4k+1$ olduqda $y=\sqrt{x}$; $4k-3<x<4k-2$ və $4k-2<x<4k-1$ olduqda $y=x$. $x=2k-1$ $(k=1,2,3,\ldots)$ olduqda $y=\frac{1}{2}(\sqrt{x}+x)$. **625.2.** x rasionaldırsa, $y=0$; x irrasionaldırsa, $y=x$. **625.3.** $\max\{|x|,|y|\}=1$ kvadratının konturu. **627.** a) $x=1$, $x=-2$, $y=x-1$; b) $x\to+\infty$ olduqda $y=x+\frac{1}{2}$. $x\to-\infty$ olduqda $y=-x-\frac{1}{2}$; c) $y=\frac{1}{3}-x$; d) $x\to+\infty$ olduqda $y=x$. $x\to-\infty$ olduqda $y=0$; e) $x\to-\infty$ olduqda $y=0$, $x\to+\infty$ olduqda $y=x$; f) $y=x+\frac{\pi}{2}$. **628.** 0. **629.** $\frac{1}{1-x}$. **630.** $\frac{\sin x}{x}$. **632.** $\frac{1}{6}$. **633.** $\frac{a}{2}$. **634.** $\frac{1}{2}\ln a$. **635.** $\sqrt{e}$. **636.** $e^{-\frac{a^2}{6}}$. **637.** $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4a}\right)$. **637.1.** $\frac{2}{3}$. **637.2.** $\frac{b}{1-\alpha}$. **637.3.** $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **638.** $\sqrt{1+x}-1$. **639.** $1-\sqrt{1-x}$. **641.** a) 2; b) $+\infty$; c) 0; d) 1; e) 2; f) 1; g) $2\operatorname{sh}1$. **643.** a) $l=-1$, $L=2$; b) $l=-2$, $L=2$; c) $l=2$, $L=e$. **644.** a) $l=-1$, $L=1$; b) $l=0$, $L=+\infty$; c) $l=\frac{1}{2}$, $L=2$; d) $l=0$, $L=+\infty$. **645.** a) Birinci tərtib; b) ikinci; c) birinci; d) üçüncü; e) üçüncü; f) üçüncü. **653.** a) $2x$; b) x; c) $\frac{x^2}{2}$; d) $\frac{x^3}{2}$.

655. a) $3(x-1)^2$; b) $\frac{(1-x)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{2}}$; c) $x-1$; d) $e(x-1)$; e) $x-1$. **656.** a) x^2; b) $2x^2$; c) $x^{\frac{2}{3}}$; d) $x^{\frac{1}{8}}$. **657.** a) $\left(\frac{1}{x}\right)^3$; b) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^{2}$; c) $-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}$; d) $\left(\frac{1}{x}\right)^2$.

658. a) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)$; b) $\sqrt{2}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}$; c) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{3}}$; d) $\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1-x}$; d) $\frac{1}{1-x}$.

663. a) $9{,}95<x<10{,}05$; b) $9{,}995<x<10{,}005$; c) $9{,}9995<x<10{,}0005$; d) $\sqrt{100-\varepsilon}<x<\sqrt{100+\varepsilon}$. **664.** $\Delta<\frac{\varepsilon}{27}$; a) $\Delta<3{,}7$ *mm*; b) $\Delta<0{,}37$ *mm*; c) $\Delta<0{,}037$ *mm*. **665.** $100[1-10^{-(n+1)}]^2<x<100[1+10^{-(n+1)}]^2$; a) $81<x<121$; b) $98{,}01<x<102{,}01$; c) $99{,}8001<x<100{,}2001$; d) $99{,}980001<x<100{,}020001$. **666.** $\delta=\min\left(\frac{\varepsilon}{11},1\right)$. **667.** $\delta=\frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0}\approx 0{,}001x_0^2$; a) $\delta\approx10^{-5}$; b) $\delta\approx10^{-7}$; c) $\delta\approx10^{-9}$. Olmaz. **669.** a) Olmaz; b) olar. **671.** Yox; x_0 nöqtəsində məhdudiyyət. **672.** Yox; əgər $f(x)$ funksiyası sonlu (a,b) aralığında təyin olunubsa, onda bu bərabərsizliklər həmişə doğrudur, əgər heç olmasa a və b-dən biri ∞ simvoluna bərabərdirsə, onda $\lim\limits_{x\to\infty}|f(x)|=+\infty$. **673.** Yox, tərs funksiyanın birqiymətliliyi və kəsilməzliyi. **675.** Kəsilməzdir. **676.** $A=4$ olduqda kəsilməzdir və $A\neq4$ olarsa, $x=2$ olduqda kəsiləndir. **677.** $x=-1$ olduqda kəsiləndir. **678.** a) Kəsilməzdir; b) $x=0$ olduqda kəsiləndir. **679.** $x=0$ olduqda kəsiləndir. **680.** Kəsilməzdir. **681.** Kəsilməzdir. **682.** $x=1$ olduqda kəsiləndir. **683.** $a=0$ olduqda kəsilməzdir və $a\neq0$ olduqda kəsiləndir. **684.** $x=0$ olduqda kəsiləndir. **685.** $x=k$ (k – tamdır) olduqda kəsiləndir. **686.** $x=k^2$ $(k=1,2,...)$ olduqda kəsiləndir. **687.** $x=-1$ sonsuz kəsilmə nöqtəsidir. **688.** $x=-1$ aradan qaldırıla bilən kəsilmə nöqtəsidir. **689.** $x=-2$ və $x=1$ - sonsuz kəsilmə nöqtələridir. **690.** $x=0$ və $x=1$ - aradan qaldırıla bilən kəsilmə nöqtələridir; $x=-1$ - sonsuz kəsilmə nöqtəsidir. **691.** $x=0$ - aradan qaldırıla bilən kəsilmə nöqtəsidir; $x=k\pi$ $(k=\pm1,\pm2,...)$ - sonsuz kəsilmə nöqtələridir. **692.** $x=\pm2$ - aradan qaldırıla bilən kəsilmə nöqtələridir. **693.** $x=0$ - II növ kəsilmə nöqtəsidir. **694.** $x=\frac{1}{k}$ $(k=\pm1,\pm2,...)$ - I növ kəsilmə nöqtələridir; $x=0$ - II növ kəsilmə nöqtəsidir. **695.** $x=0$ və $x=\frac{2}{2k+1}$ $(k=0,\pm1,...)$ - aradan qaldırıla bilən kəsilmə nöqtələridir. **696.** $x=0$ - I növ kəsilmə nöqtəsidir. **697.** $x=0$ - aradan qaldırıla bilən kəsilmə nöqtəsidir. **698.** $x=0$ - II növ kəsilmə nöqtəsidir. **699.** $x=0$ - aradan qaldırıla bilən kəsilmə nöqtəsidir; $x=1$ - sonsuz kəsilmə nöqtəsidir. **700.** $x=0$ - sonsuz kəsilmə nöqtəsidir; $x=1$ - I növ kəsilmə nöqtəsidir. **701.** $x=k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,...)$ - I növ kəsilmə nöqtələridir. **702.** $x=k$ $(k=0,\pm1,\pm2,...)$ - I növ kəsilmə nöqtələridir. **703.** $x=k$ $(k=\pm1,\pm2,...)$ - I növ kəsilmə nöqtələridir. **704.** Funksiya kəsilməzdir. **705.** $x=\pm\sqrt{n}$ $(n=1,2,...)$ - I növ kəsilmə nöqtələridir. **706.** $x=\frac{1}{k}$ $(k=\pm1,\pm2,...)$ - I növ kəsilmə nöqtələridir; $x=0$ - sonsuz kəsilmə nöqtəsidir. **707.** $x=\frac{1}{k}$ $(k=\pm1,\pm2,...)$ - I növ kəsilmə nöqtələridir;

$x=0$ - aradan qaldırıla bilən kəsilmə nöqtəsidir. **708.** $x=\frac{2}{(2k+1)\pi}$ $(k=0,\pm1,\pm2,...)$ - I növ kəsilmə nöqtələridir; $x=0$ - II növ kəsilmə nöqtəsidir. **709.** $x=\pm\frac{1}{k}$ və $x=\pm\frac{1}{\sqrt{k}}$ $(k=1,2,...)$ - I növ kəsilmə nöqtələridir; $x=0$ - II növ kəsilmə nöqtəsidir. **710.** $x=\frac{1}{k}$ $(k=\pm1,\pm2,...)$ - sonsuz kəsilmə nöqtələridir; $x=0$ - II növ kəsilmə nöqtəsidir. **711.** $x=\frac{2}{(2k+1)\pi}$ $(k=0,\pm1,\pm2,...)$ - sonsuz kəsilmə nöqtələridir; $x=0$ - II növ kəsilmə nöqtəsidir. **712.** $x=\pm\sqrt{n}$ $(n=1,2,...)$ - I növ kəsilmə nöqtələridir. **713.** $x=0$, $x=1$ və $x=2$ - I növ kəsilmə nöqtələridir. **714.** $x=k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,...)$ - sonsuz kəsilmə nöqtələridir. **715.** $x=\pm\sqrt{k\pi}$ $(k=0,1,2,...)$ - sonsuz kəsilmə nöqtələridir. **716.** $x=-1$ və $x=3$ - sonsuz kəsilmə nöqtələridir. **717.** $x=0$ - II növ kəsilmə nöqtəsidir. **718.** $x=0$ - aradan qaldırıla bilən kəsilmə nöqtəsidir. **719.** $x=\pm1$ - I növ kəsilmə nöqtələridir. **720.** $0\le x<1$ olarsa, $y=1$; $x=1$ olarsa, $y=\frac{1}{2}$; $x>1$ olarsa, $y=0$; $x=1$ - I növ kəsilmə nöqtəsidir. **721.** $y=\operatorname{sgn}x$ $x=0$ - I növ kəsilmə nöqtəsidir. **722.** $|x|\le1$ olarsa, $y=1$; $|x|>1$ olarsa, $y=x^2$. **723.** $x\ne k\pi$ olarsa, $y=0$; $x=k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,...)$ - olarsa, $y=1$; $x=k\pi$ - I növ kəsilmə nöqtələridir. **724.** $|x-k\pi|<\frac{\pi}{6}$ olarsa, $y=x$; $x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ olarsa, $y=\frac{x}{2}$; $\frac{\pi}{6}<|x-k\pi|<\frac{5\pi}{6}$ $(k=0,\pm1,...)$ olarsa, $y=0$; $x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ - I növ kəsilmə nöqtələridir. **725.** $k\pi<x<k\pi+\frac{\pi}{2}$ olarsa, $y=\frac{\pi}{2}x$; $k\pi+\frac{\pi}{2}<x<k\pi+\pi$ olarsa, $y=-\frac{\pi}{2}x$; $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,...)$ olarsa, $y=0$; $x=\frac{k\pi}{2}$ - I növ kəsilmə nöqtələridir. **726.** $y=x$, $x\le0$ olduqda; $y=x^2$, $x>0$ olduqda. Funksiya kəsilməzdir. **727.** $y=0$, $x\le0$ olduqda və $y=x$, $x>0$ olduqda. Funksiya kəsilməzdir. **728.** $y=-(1+x)$, $x<0$ olduqda; $y=0$, $x=0$ olduqda; $y=1+x$, $x>0$ olduqda; $x=0$ - I növ kəsilmə nöqtəsidir. **729.** Yox. **730.** $a=1$. **731.** a) Funksiya kəsilməzdir; b) $x=-1$ - I növ kəsilmə nöqtəsidir; c) $x=-1$ - I növ kəsilmə nöqtəsidir; d) $x=k$ $(k=0,\pm1,\pm2,...)$ - sonsuz kəsilmə nöqtələridir;

e) $x \neq k$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ - II növ kəsilmə nöqtələridir. **732.** $-\infty < x < 0$ olduqda $d=-x$; $0 \le x \le 1$ olduqda $d=0$; $1 < x \le \frac{3}{2}$ olduqda $d=x-1$; $\frac{3}{2} < x < 2$ olduqda $d=2-x$; $2 \le x \le 3$ olduqda $d=0$; $3 < x < +\infty$ olduqda $d=x-3$. Funksiya kəsilməzdir **733.** $0 \le y \le 1$ olduqda $S=3y-\frac{y^2}{2}$; $1 < y \le 2$ olduqda $S=\frac{1}{2}+2y$; $2 < y \le 3$ olduqda $S=\frac{5}{2}+y$; $3 < y < +\infty$ olduqda $S=\frac{11}{2}$; funksiya kəsilməzdir, $0 \le y \le 1$ olduqda $b=3-y$; $1 < y \le 2$ olduqda $b=2$; $2 < y \le 3$ olduqda $b=1$; $3 < y < +\infty$ olduqda $b=0$; $x=2$ və $x=3$ - I növ kəsilmə nöqtələridir. **735.** $x=0$ olduqda kəsilməzdir və $x \neq 0$ olduqda kəsiləndir. **737.** Arqumentin bütün mənfi qiymətlərində və bütün müsbət rasional qiymətlərində kəsiləndir. **738.** $f(0)=0{,}5$. **740.** a) 1,5; b) 2; c) 0; e) e; e) 0; f) 1; g) 0. **741.** a) Hə; b) yox. **742.** a) Yox; b) yox. **743.** Yox. x - rasionaldırsa, $f(x)=1$; x - irrasionaldırsa, $f(x)=-1$. **744.** a) $f(g(x))$ kəsilməzdir; $x=0$ olduqda $g(f(x))$ kəsiləndir; b) $x=-1$, $x=0$ və $x=1$ olduqda $f(g(x))$ kəsiləndir; $g(f(x))=0$ kəsilməzdir; c) $f(g(x))$ və $g(f(x))$ kəsilməzdir. **745.** $f(\varphi(x)) \equiv x$. **759.** $x=\frac{-dy+b}{cy-a}$; $a+d=0$.
760. $2k \le y < 2k+1$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ olarsa, $x=y-k$. **764.** $f(f(x)) \equiv x$. **767.** $x=-\sqrt{y}$ $(0 \le y < +\infty)$; $x=\sqrt{y}$ $(0 \le y < +\infty)$. **768.** $x=1-\sqrt{1-y}$ $(-\infty < y \le 1)$; $x=1+\sqrt{1-y}$ $(-\infty < y \le 1)$. **769.** $x=\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ $(-1 \le y \le 1)$, $x=\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$ $(0<|y|\le 1)$. **770.** $x=(-1)^k \arcsin y + k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ $(-1 \le y \le 1)$. **771.** $x=2k\pi \pm \arccos y$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ $(-1 \le y \le 1)$. **772.** $x=\operatorname{arctg} y + k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ $(-\infty < y < +\infty)$. **776.** $xy<1$ olarsa, $\varepsilon=0$; $xy>1$ olarsa, $\varepsilon=\operatorname{sgn} x$. **779.** a) $-1 \le x \le 0$ olarsa, $y=-\frac{\pi}{2}$; $0 \le x \le 1$ olarsa, $y=2\arcsin x-\frac{\pi}{2}$; b) $-1 \le x \le -\frac{1}{\sqrt{2}}$ olarsa, $y=-(\pi+4\arcsin x)$; $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ olarsa, $y=0$; $\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1$ olarsa, $y=\pi-4\arcsin x$.
780. $y=\frac{\pi}{2}-x$ $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$. **781.** $y=\sqrt{x^2-1}$ $(1 \le x < +\infty)$;

$y=-\sqrt{x^2-1}$ $(1\le x<+\infty)$. **782.** $\varphi(t)=x$ olan bütün t-lər üçün, $\psi(t)$ funksiyası eyni qiymət almalıdır, burada x - $\varphi(t)$ funksiyasının ixtiyari qiymətidir. **783.** $\alpha<\tau<\beta$ olduqda $\chi(\tau)$-nın qiymətlər çoxluğu (a,b) intervalı olmalıdır. **784.** $\varphi(x)=u$ olan bütün x-lər üçün $\psi(x)$ eyni qiymət almalıdır, burada u - (A, B) intervalından olan ixtiyari ədəddir. **785.** $|\delta|\le\frac{\varepsilon}{20}$ *sm*. a) 0,5 *mm*; b) 0,005 *mm*; c) 0,00005 *mm*. **786.** a) $\delta<\frac{1}{4}$; b) $\delta<2{,}5\cdot10^{-4}$; c) $\delta<\frac{5}{2}\cdot10^{-7}$; d) $\delta<\frac{\varepsilon^3}{4}$ $(\varepsilon\le1)$. **793.** a) Hə; b) yox. **794.** Müntəzəm kəsilməzdir. **795.** Müntəzəm kəsilməz deyil. **796.** Müntəzəm kəsilməzdir. **797.** Müntəzəm kəsilməz deyil. **798.** Müntəzəm kəsilməzdir. **799.** Müntəzəm kəsilməzdir. **800.** Müntəzəm kəsilməz deyil. **802.** a) $\delta=\frac{\varepsilon}{5}$; b) $\delta=\frac{\varepsilon}{8}$; c) $\delta=0{,}01\varepsilon$; d) $\delta=\varepsilon^2$ $(\varepsilon\le1)$; e) $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$; f) $\delta=\min\left(\frac{\varepsilon}{3}, \frac{\varepsilon^2}{3+\varepsilon}\right)$. **803.** $n\ge1\,800\,000$. **808.** a) $\omega_f(\delta)\le3\delta$; b) $\omega_f(\delta)\le\sqrt{\delta}$; $\omega_f(\delta)\le\frac{\delta}{\sqrt{2a}}$; c) $\omega_f(\delta)\le\delta\sqrt{2}$. **818.** $f(x)=\cos ax$ və ya $f(x)=\operatorname{ch} ax$. **819.** $f(x)=\cos ax$; $g(x)=\pm\sin ax$ $(a=\text{const})$.

II Bölmə

821. $\Delta x=999$; $\Delta y=3$. **822.** $\Delta x=-0{,}009$; $\Delta y=990\,000$. **823.** a) $\Delta y=a\Delta x$; b) $\Delta y=(2ax+b)\Delta x+a(\Delta x)^2$; c) $\Delta y=a^x(a^{\Delta x}-1)$. **825.** a) 5; b) 4,1; c) 4,01; d) $4+\Delta x$; 4. **826.** $3+3h+h^2$; a) 3,31; 3, b) 3,0301; c) 3,003001; 3. **827.** a) $v_{or}=215\,\frac{m}{san}$; b) $v_{or}=210{,}5\,\frac{m}{san}$; c) $v_{or}=210{,}05\,\frac{m}{san}$; $210\,\frac{m}{san}$. **828.** a) $2x$; b) $3x^2$; c) $-\frac{1}{x^2}$ $(x\ne0)$; d) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x>0)$; e) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $(x\ne0)$; f) $\frac{1}{\cos^2 x}$ $(x\ne(2k-1)\frac{\pi}{2}, k=0,\pm1,\dots)$; g) $-\frac{1}{\sin^2 x}$ $(x\ne k\pi, k=0,\pm1,\dots)$; h) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x|<1)$; i) $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x|<1)$; j) $\frac{1}{1+x^2}$. **829.** –8; 0; 0. **830.** 4. **831.** $1+\frac{\pi}{4}$. **832.** $f'(a)$. **834.** $y'=1-2x$; 1, 0, –1, 21. **835.** $y'=x^2+x-2$; a) –2; 1; b) –1; 0; c) –4; 3. **836.** $10a^3x-5x^4$. **837.** $\frac{a}{a+b}$.

838. $2x-(a+b)$. **839.** $2(x+2)(x+3)^2(3x^2+11x+9)$. **840.** $x\sin 2a+\cos 2a$.
841. $mn[x^{m-1}+x^{n-1}+(m+n)x^{m+n-1}]$. **842.** $-(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)^2\times$ $\times(1+6x+15x^2+14x^3)$. **842.1.** $-20(17+12x)(5+2x)^9(3-4x)^{19}$.
843. $-\left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}+\frac{9}{x^4}\right)$ $(x\neq 0)$. **845.** $\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$ $(|x|\neq 1)$. **846.** $\frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}$.
847. $\frac{1-x+4x^2}{(1-x)^3(1+x)^4}$ $(|x|\neq 1)$. **848.** $\frac{12-6x-6x^2+2x^3+5x^4-3x^5}{(1-x)^3}$ $(|x|\neq 1)$. **849.** $-\frac{(1-x)^{p-1}[(p+q)+(p-q)x]}{(1+x)^{q+1}}$ $(x\neq -1)$. **850.** $\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1+x)^2}\times$ $\times[p-(q+1)x-(p+q-1)x^2]$ $(x\neq -1)$. **851.** $1+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $(x>0)$.
852. $-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}-\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$ $(x>0)$. **853.** $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}$ $(x>0)$. **854.** $\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$.
855. $\frac{6+3x+8x^2+4x^3+2x^4+3x^5}{\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{(3+x^3)^2}}$ $(x\neq\sqrt[3]{-3})$. **856.** $\frac{(n-m)-(n+m)x}{(n+m)^{n+m}\sqrt{(1-x)^n(1+x)^m}}$.
857. $\frac{a^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ $(|x|<|a|)$. **858.** $\frac{2x^2}{1-x^6}\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$ $(|x|\neq 1)$. **859.** $-\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.
860. $\frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ $(x>0)$. **861.** $\frac{1}{27}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1+\sqrt[3]{x})^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}\right)^2}}$ $(x\neq 0,\ x\neq -1,\ x\neq -8)$. **862.** $-2\cos x(1+2\sin x)$. **863.** $x^2\sin x$. **864.** $-\sin 2x\times$ $\times\cos(\cos 2x)$. **865.** $n\sin^{n-1}x\cdot\cos(n+1)x$. **866.** $\cos x\cdot\cos(\sin x)\times$ $\times\cos[\sin(\sin x)]$. **867.** $\frac{2\sin x(\cos x\sin x^2-x\sin x\cos x^2)}{\sin^2 x^2}$ $(x^2\neq k\pi;\ k=1,2,...)$.
868. $-\frac{1+\cos^2 x}{2\sin^3 x}$ $(x\neq k\pi;\ k=0,\pm1,\pm2,...)$. **869.** $\frac{n\sin x}{\cos^{n+1}x}$ $\left(x\neq\frac{2k-1}{2}\pi,\ k\ -\text{tamdır}\right)$. **870.** $\frac{x^2}{(\cos x+x\sin x)^2}$. **871.** $\frac{2}{\sin^2 x}$; $(x\neq k\pi;\ k=0,\pm1,\pm2,...)$. **872.** $1+\operatorname{tg}^6 x$ $(x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2};\ k=0,\pm1,...)$.
873. $-\frac{8}{3\sin^4 x\sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}}$ $(x\neq k\pi,\ k-$ tamdır). **874.** $\frac{-16\cos\frac{2x}{a}}{a\sin^5\frac{2x}{a}}$ $\left(x\neq\frac{k\pi a}{2}\right.$,

k tamdır$\Big)$. **875.** $-3\text{tg}^2x\cdot\sec^2x\cdot\sin(2\text{tg}^3x)\cdot\cos[\cos^2(\text{tg}^3x)]$ $\left(x\neq\dfrac{\pi}{3}+k\pi\right.$

k – tamdır$\Big)$. **876.** $-2xe^{-x^2}$. **877.** $-\dfrac{1}{x^2}2^{\text{tg}\frac{1}{x}}\sec^2\dfrac{1}{x}\ln 2$. **878.** x^2e^x.

879. $x^2e^{-x}\sin x$. **880.** $\dfrac{e^x(\sin x-\cos x)}{2\sin^2\frac{x}{2}}$ $(x\neq 2k\pi$, k – tamdır).

881. $-\dfrac{1+\ln^2 3}{3^x}\sin x$. **882.** $\sqrt{a^2+b^2}\,e^{ax}\sin bx$. **883.** $e^x[1+e^{e^x}(1+e^{e^{e^x}})]$.

884. $y\left(\ln\dfrac{a}{b}-\dfrac{a-b}{x}\right)$ $(x>0)$. **885.** $a^a\cdot x^{a^a-1}+ax^{a-1}a^{x^a}\ln a+a^x\cdot a^{a^x}\ln^2 a$.

886. $\dfrac{6}{x}\lg e\cdot\lg^2x^2$ $(x\neq 0)$. **887.** $\dfrac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}$ $(x>e)$

888. $\dfrac{6}{x\ln x\ln(\ln^3x)}$ $(x>e)$. **889.** $\dfrac{1}{(1+x)^2(1+x^2)}$ $(x>-1)$. **890.** $\dfrac{x}{x^4-1}$

$(|x|>1)$. **891.** $\dfrac{1}{x(1+x^4)^2}$ $(x\neq 0)$. **892.** $\dfrac{1}{3x^2-2}$ $\left(|x|>\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$

893. $\dfrac{2}{(1-x^2)(1-kx^2)}$ $(|x|<1)$. **894.** $\dfrac{1}{2(1+\sqrt{x+1})}$ $(x>-1)$. **895.** $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

896. $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$. **897.** $\ln^2(x+\sqrt{x^2+1})$. **898.** $\sqrt{x^2+a^2}$

899. $\dfrac{1}{a-bx^2}$ $\left(|x|<\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)$. **900.** $-\dfrac{8}{x^5\sqrt{1-x^2}}$ $(0<x<1)$. **901.** $\dfrac{1}{\sin x}$

$(0<x-2k\pi<\pi$, k – tamdır). **902.** $\dfrac{1}{\cos x}$ $\left(|x-2k\pi|<\dfrac{\pi}{2},\ k\ -\ \text{tamdır}\right)$.

903. $-\text{ctg}^3x$ $(0<x-2k\pi<\pi$, k – tamdır). **904.** $-\dfrac{1}{\cos x}$

$\left(x\neq\dfrac{2k-1}{2}\pi,\ k\ -\ \text{tamdır}\right)$. **905.** $\dfrac{\cos^2x}{\sin^3x}$ $(0<x-2k\pi<\pi$, k – tamdır).

906. $\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{a+b\cos x}$ **907.** $-\dfrac{\ln^3x}{x^2}$ $(x>0)$. **908.** $\dfrac{1}{x^5}\ln x$ $(x>0)$.

909. $\dfrac{2x}{1+\sqrt[3]{1+x^2}}$. **910.** $-\dfrac{1+x+\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}}{\left(1+x\ln\frac{1}{x}\right)\left[1+x\ln\left(\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}\right)\right]}$. **911.** $2\sin(\ln x)$

$(x>0)$. **912.** $\sin x\cdot\ln\text{tg}x$ $(0<x-2k\pi<\dfrac{\pi}{2}$, k – tamdır). **913.** $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

$(|x|<2)$. **914.** $\frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}$ $(|x-1|<\sqrt{2})$. **915.** $-\frac{2ax}{x^4+a^2}$ $(a\neq 0)$.

916. $\frac{1}{x^2+2}$ $(x\neq 0)$. **917.** $\frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$ $(x\geq 0)$. **918.** $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x$

$(|x|<1)$. **919.** $\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}$ $(x\geq 0)$. **920.** $\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ $(|x|>1)$.

921. $\operatorname{sgn}(\cos x)$ $\left(x\neq\frac{2k-1}{2}\pi,\ k - \text{tamdır}\right)$. **922.** $\frac{2\operatorname{sgn}(\sin x)\cdot\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$

($x\neq k\pi$, k – tamdır). **923.** $\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}$ $\left(0<x-k\pi<\frac{\pi}{2},\ k - \text{tamdır}\right)$.

924. $\frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{1-x^2}}$ $(0<|x|<1)$. **925.** $\frac{1}{1+x^2}$ $(x\neq 1)$. **926.** 1

$\left(x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k - \text{tamdır}\right)$. **927.** $\frac{1}{a+b\cos x}$. **928.** $-\frac{2\operatorname{sgn} x}{1+x^2}$ $(x\neq 0)$.

929. $\frac{4x}{\sqrt{1-x^4}\arccos^3(x^2)}$ $(|x|<1)$. **930.** $\frac{1+x^4}{1+x^6}$. **931.** $-2\cos x\cdot\operatorname{arctg}(\sin x)$.

932. $\frac{1}{2x\sqrt{x-1}\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}}$ $(x>1)$. **933.** $\frac{a^2+b^2}{(x+a)(x^2+b^2)}$ $(x>-a)$.

934. $\sqrt{a^2-x^2}$. **935.** $\frac{1}{x^3+1}$ $(x\neq -1)$. **936.** $\frac{1}{x^4+1}$ $(|x|\neq 1)$. **937.** $(\arcsin x)^2$

$(|x|<1)$. **938.** $-\frac{\arccos x}{x^2}$ $(0<|x|<1)$. **939.** $\frac{x\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$ $(x>1)$.

940. $\frac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ $(|x|<1)$. **941.** $\frac{x^3}{x^6+1}$ $\left(|x|\neq\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. **942.** $\frac{12x^5}{(1+x^{12})^2}$.

943. $-\frac{1}{(1-x)\sqrt[3]{x}}$ $(x<1)$. **944.** $\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ $(|x|<1)$. **945.** $\frac{1}{\sqrt{ax-x^2}}$

$(0<x<a)$. **946.** $\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}$ $(|x+1|<\sqrt{2})$. **947.** $\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

948. $\frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$ $\left(x\neq\frac{2k-1}{2}\pi,\ k - \text{tamdır}\right)$. **949.** $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

$(|x|<1)$. **950.** $\frac{x^2}{1+x^2}\operatorname{arctg} x$. **951.** $\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$. **952.** $\frac{1}{2(1+x^2)}$.

953. $\dfrac{\sin a \operatorname{sgn}(\cos x-\cos a)}{1-\cos a\cos x}$ $(\cos x \neq \cos a)$. **954.** $\dfrac{1}{(x^4-1)\sqrt{x^2+2}}$ $(0<|x|<1)$.

955. $\dfrac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}$ $(|x|\neq 1)$. **956.** $\dfrac{4}{(1+x^2)^2\sqrt{1-x^2}}$ $(|x|<1)$.

957. $\dfrac{2x(\cos x^2+\sin x^2)}{\sqrt{\sin(2x^2)}}$ $\left(0<|x|<\sqrt{\left(+\frac{1}{2}\right)\pi},\, k=0,1,\ldots\right)$.

958. $2x[\operatorname{sgn}(\cos x^2)+\operatorname{sgn}(\sin x^2)]$ $\left(|x|\neq \frac{k\pi}{2},\, k=0,1,2,\ldots\right)$.

959. $\dfrac{2m}{\sqrt{1-x^2}}\cdot e^{m(\arcsin x)}\cos m(\arcsin x)$ $(|x|<1)$. **960.** $\dfrac{e^x-1}{e^{2x}+1}$.

960.1. $\dfrac{x^3}{6\sqrt{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{1+x^4}}}\cdot\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{1+x^4})^2}\cdot\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}$.

960.2. $\dfrac{1}{x^3\cos\frac{1}{x^2}\left(\sin\frac{1}{x^2}+\cos\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{\operatorname{ctg}\frac{1}{x^2}}}$.

960.3. $\dfrac{2^{1+\sqrt[3]{x}}\ln 2\cdot\sin(2^{\sqrt[3]{x}})\cdot\ln(\sec 2^{\sqrt[3]{x}})}{3\sqrt[3]{x^2}\cdot\cos^2(2^{\sqrt[3]{x}})}$. **961.** $1+x^x(1+\ln x)+x^x x^{x^x}\times$ $\times\left(\frac{1}{x}+\ln x+\ln^2 x\right)$ $(x>0)$. **962.** $x^{a-1}x^{x^a}(1+a\ln x)+a^x x^{a^a}\left(\frac{1}{x}+\ln a\ln x\right)+x^x a^{x^x}\times$ $\times\ln a(1+\ln x)$ $(x>0)$. **963.** $x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$ $(x>0)$. **964.** $(\sin x)^{1+\cos x}\times$ $\times(\operatorname{ctg}^2 x-\ln\sin x)-(\cos x)^{1+\sin x}(\operatorname{tg}^2 x-\ln\cos x)$ $\left(0<x-2k\pi<\frac{\pi}{2},\right.$ k – tamdır). **965.** $\dfrac{(\ln x)^{x-1}}{x^{\ln x+1}}[x-2\ln^2 x+x\ln x\cdot\ln(\ln x)]$ $(x>1)$.

965.1. $y'=2y\left\{\dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\ln\dfrac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)}+\operatorname{arctg}^2 x\left[\dfrac{\sin x\cdot\operatorname{sgn}(\cos x)}{\arcsin(\sin^2 x)\sqrt{1+\sin^2 x}}-\right.\right.$ $\left.\left.\dfrac{\cos x\cdot\operatorname{sgn}(\sin x)}{\arccos(\cos^2 x)\sqrt{1+\cos^2 x}}\right]\right\}$ $\left(x\neq\frac{k\pi}{2},\, k=0,\pm1,\ldots\right)$. **966.** $-\frac{1}{x}(\log_x e)^2$ $(x>0,\, x\neq 1)$. **967.** $\operatorname{th}^3 x$. **968.** $-\dfrac{2}{\operatorname{sh}^3 x}$ $(x>0)$. **969.** $\dfrac{1}{\operatorname{ch} 2x}$. **970.** $\dfrac{\operatorname{sgn}(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{ch} x}$ $(x\neq 0)$. **971.** $\dfrac{a+b\operatorname{ch} x}{b+a\operatorname{ch} x}$. **972.** $-\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}$. **973.** $-\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x\cdot\ln(\arccos x)$

$(|x|<1)$. **974.** $-\frac{x^{-1}}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}$. **975.** $-\frac{2xe^{-x^2}\arcsin(e^{-x^2})}{(1-e^{-2x^2})^{3/2}}$ $(x\neq 0)$.

976. $\frac{4a^{2x}\ln a}{(1+a^{2x})^2}\operatorname{arcctg} a^{-x}$ $(a>0)$. **977.** a) $\operatorname{sgn} x$ $(x\neq 0)$; b) $2|x|$; c) $\frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$.

978. a) $(x-1)(x+1)^2(5x-1)\operatorname{sgn}(x+1)$; b) $\frac{3}{2}\sin 2x\cdot|\sin x|$; c) $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ $(|x|>1)$; d) $\pi[x]\sin 2\pi x$. **979.** $-\infty<x<1$ olduqda $y'=-1$; $1\le x\le 2$ olduqda $y'=2x-3$; $2<x<+\infty$ olduqda $y'=1$. **980.** $x\in[a,b]$ olduqda $y'=2(x-a)(x-b)(2x-a-b)$; $x\overline{\in}[a,b]$ olduqda $y'=0$. **981.** $x<0$ olduqda $y'=1$; $0\le x<+\infty$ olduqda $y'=\frac{1}{1+x}$. **982.** $-1<x\le 1$ olduqda $y'=\frac{1}{1+x^2}$; $|x|>1$ olduqda $y'=\frac{1}{2}$. **983.** $y'=2xe^{-x^2}(1-x^2)$ $|x|\le 1$; $y'=0$ $|x|>1$.

984. a) $\frac{1-x-x^2}{x(1-x^2)}$; b) $\frac{54-36x+4x^2+2x^3}{3x(1-x)(9-x^2)}$ $(x\neq 0, x\neq 1, x\neq\pm 3)$; c) $\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{x-a_i}$; d) $\frac{n}{\sqrt{1+x^2}}$. **985.** a) $\frac{\varphi(x)\varphi'(x)+\psi(x)\psi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}}$ $(\varphi^2(x)+\psi^2(x)\neq 0)$;

b) $\frac{\varphi'(x)\psi(x)-\varphi(x)\psi'(x)}{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$ $(\varphi^2(x)+\psi^2(x)\neq 0)$;

c) $\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}\left\{\frac{1}{\varphi(x)}\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}-\frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}\ln\psi(x)\right\}$; d) $\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\cdot\frac{1}{\ln\varphi(x)}-\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\cdot\frac{\ln\psi(x)}{\ln^2\varphi(x)}$.

986. a) $2xf'(x^2)$; b) $\sin 2x[f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)]$; c) $e^{f(x)}[e^x f'(e^x)+f'(x)f(e^x)]$; d) $f'(x)\cdot f'[f(x)]\cdot f'\{f[f(x)]\}$. **986.1.** 1000!. **988.** $3x^2+15$. **989.** $6x^2$. **992.** a) $n>0$; b) $n>1$; c) $n>2$. **993.** a) $n\ge m+1$; b) $1<n<m+1$. **994.** $\varphi(a)$. **995.** $f'_-(a)=-\varphi(a)$, $f'_+(a)=\varphi(a)$. **999.** a) $x=1$ olduqda diferensiallanmayandır; b) $x=\frac{2k-1}{2}\pi$ (k – tamdır) olduqda diferensiallanmayandır; c) hər yerdə diferensiallanandır; d) $x=k\pi$ (k – tamdır) olduqda diferensiallanmayandır; e) $x=-1$ olduqda diferensiallanmayandır. **1000.** $x\neq 0$ olduqda $f'_-(x)=f'_+(x)=\operatorname{sgn} x$; $f'_-(0)=-1$, $f'_+(0)=1$. **1001.** $f'_-(x)=f'_+(x)=\pi[x]\cos\pi x$, $x\neq$ tam ədəddən; $f'_-(k)=\pi(k-1)(-1)^k$, $f'_+(k)=\pi k(-1)^k$, k - tam olduqda. **1002.** $x\neq\frac{2}{2k+1}$ (k – tamdır) olduqda $f'_-(x)=f'_+(x)=\left(\cos\frac{\pi}{x}+\frac{\pi}{x}\sin\frac{\pi}{x}\right)\cdot\operatorname{sgn}\left(\cos\frac{\pi}{x}\right)$;

$f'_-\left(\frac{2}{2k+1}\right)=-(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $f'_+\left(\frac{2}{2k+1}\right)=(2k+1)\frac{\pi}{2}$. **1003.** $\sqrt{2k\pi}<|x|<\sqrt{(2k+1)\pi}$ $(k=0,1,2,...)$ olduqda $f'(x)=f'_+(x)=\frac{x\cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}$; $f'_-(0)=-1$. $f'_+(0)=1$; $f'_+(\sqrt{(2k+1)\pi})=\mp\infty$, $f'_\pm(\sqrt{2k\pi})=\pm\infty$ $(k=1,2,...)$

1004. $x\neq 0$ olduqda $f'(x)=f'_+(x)=\frac{1+\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{1/x}}{(1+e^{1/x})^2}$; $f'_-(0)=1$. $f'_+(0)=0$. **1005.** $x\neq 0$ olduqda $f'(x)=f'_+(x)=\frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}$; $f'_-(0)=-1$ $f'_+(0)=1$. **1006.** $f'(x)=f'_+(x)=\frac{\varepsilon}{x}$, burada $0<|x|<1$ olduqda $\varepsilon=-1$ və $1<|x|<+\infty$ olduqda $\varepsilon=1$; $f'_-(\mp 1)=-1$, $f'_+(\mp 1)=1$. **1007.** $x\neq\mp 1$ olduqda $f'(x)=f'_+(x)=\frac{2\operatorname{sgn}(1-x^2)}{1+x^2}$; $f'_-(\mp 1)=\mp 1$, $f'_+(\mp 1)=\pm 1$. **1008.** $x\neq 2$ olduqda $f'(x)=f'_+(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x-2}-\frac{x-2}{(x-2)^2+1}$; $f'_\pm(2)=\mp\frac{\pi}{2}$.

1009.1. a) $f'_-(0)=-\frac{1}{2}$, $f'_+(0)=\frac{1}{2}$; b) $f'_-(1)=f'_+(1)=\frac{1}{2}$; c) $f'_-(0)=f'_+(0)=0$. **1010.** $a=2x_0$; $b=-x_0^2$. **1011.** $a=f'_-(x_0)$; $b=f(x_0)-x_0f'_-(x_0)$. **1012.** $A=\frac{k_1+k_2}{(b-a)^2}$, $c=\frac{ak_2+bk_1}{k_1+k_2}$. **1013.** $a=\frac{3m^2}{2c}$. $b=-\frac{m^2}{2c^3}$. **1014.** a) Olar; b) olmaz. **1015.** a) Olmaz; b) olmaz. **1016.** a), b), c) $F(x)$ funksiyası $F'(x)$-ə malik olduğu kimi malik olmaya da bilər. **1017.** $x=k\pi$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,...)$. **1018.** a) Ola bilməz; b) ola bilər. **1019.** 1) Doğru olmaya da bilər; 2) doğrudur. **1020.** Alınmaya da bilər. **1021.** Alınmır. **1022.** Alınmır. **1023.** Ümumiyyətlə desək, olmaz. **1024.** $P_n=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$; $Q_n=\frac{1+x-(n+1)^2x^n+(2n^2+2n-1)x^{n+1}-n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}$.

1025. $S_n=\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$; $T_n=\frac{n\sin\frac{x}{2}\sin\frac{2n+1}{2}x-\sin^2\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}$.

1025.1. $S_n = \dfrac{n \operatorname{sh}\frac{x}{2} \operatorname{sh}\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \operatorname{sh}^2\frac{nx}{2}}{2\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}$. **1026.** $S_n = \frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n} - \operatorname{ctg} x$.

1029. 40π *sm²/san*. **1030.** 25 *m²/san*; 0,4 *m/san*. **1031.** 50 *km/saat*.

1032. $0 \le x \le 2$ olarsa, $S(x) = \frac{x^2}{2}$; $x > 2$ olarsa, $S(x) = x^2 - 2x + 2$; $0 \le x \le 2$ olarsa, $S'(x) = x$; $x > 2$ olarsa, $S'(x) = 2x - 2$.

1033. $S(x) = \frac{|x|}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{|x|}{a}$; $S'(x) = \sqrt{a^2 - x^2}\operatorname{sgn} x$ $(0 < |x| \le a)$. **1034.** $y'_x = \frac{1}{3(y^2+1)}$. **1035.** $y'_x = \frac{1}{1 - \varepsilon\cos y}$. **1036.** a) $-\infty < y < +\infty$; $x'_y = \frac{x}{x+1}$; b) $-\infty < y < +\infty$, $x'_y = \frac{1}{1 - x + y}$; c) $-\infty < y < +\infty$, $x'_y = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$; d) $-1 < y < 1$, $x'_y = \frac{1}{1-y^2}$. **1037.** a) $x_1 = -\sqrt{1 + \sqrt{1-y}}$ $(-\infty < y \le 1)$; $x_2 = -\sqrt{1 - \sqrt{1-y}}$ $(0 \le y \le 1)$; $x_3 = \sqrt{1 - \sqrt{1-y}}$ $(0 \le y \le 1)$; $x_4 = \sqrt{1 + \sqrt{1-y}}$ $(-\infty < y \le 1)$; $x'_i = \frac{1}{4x(1-x^2)}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$; b) $x_1 = -\sqrt{\frac{y}{1-y}}$ $(0 \le y < 1)$; $x_2 = \sqrt{\frac{y}{1-y}}$ $(0 \le y < 1)$; $x'_i = \frac{x^3}{2y^2}$ $(i = 1, 2)$; c) $x_1 = -\ln(1 + \sqrt{1-y})$ $(-\infty < y \le 1)$; $x_2 = \ln\frac{1 + \sqrt{1-y}}{y}$ $(0 < y \le 1)$; $x'_i = -\frac{1}{2(e^{-x} - e^{-2x})}$ $(i = 1, 2)$.

1038. $y'_x = -\frac{3}{2}(1+t)$; 3; $-\frac{3}{2}$ və $-\frac{9}{2}$; (4, 4). **1039.** $\sqrt[6]{\frac{(1-\sqrt{t})^4}{t(1-\sqrt[3]{t})^3}}$ $(t > 0,\ t \ne 1)$. **1040.** $y'_x = -1$ $(0 < x < 1)$. **1041.** $y'_x = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t$ $(0 < |t| < \pi)$.

1042. $y'_x = \frac{b}{a}\operatorname{cth} t$ $(|t| > 0)$. **1043.** $y'_x = -\operatorname{tg} t$ $\left(t \ne \frac{2k+1}{2}\pi,\ k \text{ – tamdır}\right)$.

1044. $y'_x = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}$ $(t \ne 2k\pi,\ k$ tamdır). **1045.** $y'_x = \operatorname{tg} t \cdot \operatorname{tg}\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$ $\left(t \ne \frac{\pi}{4} + k\pi, t \ne \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$. **1046.** $y'_x = \operatorname{sgn} t$ $(0 < |t| < +\infty)$. **1048.** $y' = \frac{1 - x - y}{x - y}$; $\frac{5}{2}$; $-\frac{1}{2}$. **1049.** $\frac{p}{y}$. **1050.** $-\frac{b^2 x}{a^2 y}$. **1051.** $-\sqrt{\frac{y}{x}}$. **1052.** $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$. **1053.** $\frac{x+y}{x-y}$.

1054. a) $\operatorname{tg}(\varphi+\operatorname{arctg}\varphi)$; b) $-\operatorname{ctg}\frac{3\varphi}{2}\left(\varphi\neq 0, \varphi\neq\pm\frac{2\pi}{3}\right)$; c) $\operatorname{tg}\left(\varphi+\operatorname{arctg}\frac{1}{m}\right)$.

1055. a) $y=\sqrt[3]{4}(x+1)$; $y=-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(x+1)$; b) $y=3$, $x=2$; c) $x=3$, $y=0$.

1056. a) $\left(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}\right)$; b) (0,2). **1058.** $|x|<\frac{\pi}{3}$ və $\frac{2\pi}{3}<|x|\leq\pi$.

1059. $\max|y_1'-y'|=10\pi\approx 31{,}4$. **1060.** $\frac{\pi}{4}$. **1061.** $\frac{\pi}{2}$; $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\approx\operatorname{arc}37^0$.

1062. $\operatorname{arctg}2\sqrt{2}\approx\operatorname{arc}70^0 30'$. **1063.** $n>57{,}3$. **1064.** a) $2\operatorname{arctg}\frac{1}{|a|}$;

b) $\frac{\pi}{2}$. **1066.** $\left|\frac{x}{n}\right|$. **1069.** $\frac{y_0^2}{|a|}$. **1071.** $b^2-4ac=0$. **1072.** $\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2=0$.

1073. $a=\frac{1}{2e}$. **1077.** a) $3x-2y=0$, $2x+3y=0$; b) $3x-y-1=0$, $x+3y-7=0$. **1078.** a) $y=x$, $y=-x$; b) $3x-y-4=0$, $x+3y-3=0$; c) $y=-x$, $y=x$. **1079.** $y-2a=(x-at_0)\operatorname{ctg}\frac{t_0}{2}$. Sikloidə çəkilmiş toxunan fırlanan dairənin yaxınlaşma nöqtəsini toxunma nöqtəsi ilə birləşdirən parçaya perpendikulardır. **1081.** $3x+5y-50=0$, $5x-3y-10{,}8=0$. **1082.** $x+2y-3=0$, $2x-y-1=0$. **1083.** $\Delta f(1)=\Delta x+3(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$; $df(1)=\Delta x$. a) 5, 1; b) 0,131, 0,1; c) 0,010301, 0,01. **1084.** $\Delta x=20\Delta t+5(\Delta t)^2$; $dx=20\Delta t$; a) 25 m, 20 m; b) 2,05 m, 2 m; c) 0,020005 m, 0,02 m. **1085.** $-\frac{dx}{x^2}$ $(x\neq 0)$. **1086.** $\frac{dx}{a^2+x^2}$. **1087.** $\frac{dx}{x^2-a^2}$ $(|x|\neq|a|)$. **1088.** $\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$. **1089.** $\frac{\operatorname{sgn}a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$ $(|x|<|a|)$.

1090. a) $(1+x)e^x dx$; b) $x\sin x\,dx$; c) $-\frac{3dx}{x^4}$ $(x\neq 0)$; d) $\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}dx$ $(x>0)$; e) $\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$; f) $\frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$ $(|x|<1)$; g) $-\frac{2x\,dx}{1-x^2}$ $(|x|<1)$;

h) $\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ $(|x|>1)$; i) $\frac{dx}{\cos^3 x}$ $\left(x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k \text{ -tamdır}\right)$.

1091. $vw\,du+uw\,dv+uv\,dw$. **1092.** $\frac{v\,du-2u\,dv}{v^3}$ $(v\neq 0)$. **1093.** $-\frac{u\,du+v\,dv}{(u^2+v^2)^{3/2}}$ $(u^2+v^2>0)$. **1094.** $\frac{v\,du-u\,dv}{u^2+v^2}$ $(u^2+v^2>0)$. **1095.** $\frac{u\,du+v\,dv}{u^2+v^2}$ $(u^2+v^2>0)$.

1096. a) $1-4x^3-3x^6$; b) $\frac{1}{2x^2}\left(\cos x-\frac{\sin x}{x}\right)$; c) $-\operatorname{ctg} x$ ($x\neq k\pi$, k – tamdır); d) $-\operatorname{tg}^2 x$ $\left(x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k-\text{tamdır}\right)$; e) -1 ($|x|<1$).

1097. a) 104,7 sm^2 qədər artar; b) 43,6 sm^2 qədər azalar. **1098.** 2,23 *sm* qədər artar. **1099.** 1,007 (cədvəllərə görə: 1,0066). **1100.** 0,4849 (cədvəllərə görə: 0,4848). **1101.** –0,8747 (cədvəllərə görə: –0,8746). **1102.** $0{,}8104=\operatorname{arc}46^0 26'$ (cədvəllərə görə: $\operatorname{arc}46^0 24'$). **1103.** 1,043 (cədvəllərə görə: 1,041). **1104.** a) 2,25 (cədvəllərə görə: 2,24); b) 5,833 (cədvəllərə görə: 5,831); c) 10,9546 (cədvəllərə görə: 10,9545). **1105.** a) 2,083 (cədvəllərə görə: 2,080); b) 2,9907 (cədvəllərə görə: 2,9907); c) 1,938 (cədvəllərə görə: 1,931); d) 1,9954 (cədvəllərə görə: 1,9953). **1106.** 0,24 m^2; 4,2%. **1107.** $\delta_R\le 0{,}33\%$. **1108.** a) $\delta_g=\delta_l$; b) $\delta_g=2\delta_T$. **1109.** 0,43 δ. **1111.** $\frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)^{3/2}}$. **1112.** $\frac{3x}{(1-x^2)^{5/2}}$ ($|x|<1$).

1113. $2e^{-x^2}(2x^2-1)$. **1114.** $\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$ $\left(x\neq\frac{2k+1}{2}\pi,\ k=0,\pm1,\ldots\right)$.

1115. $\frac{2x}{1+x^2}+2\operatorname{arctg} x$. **1116.** $\frac{3x}{(1-x^2)^2}+\frac{(1+2x^2)\arcsin x}{(1-x^2)^{5/2}}$ ($|x|<1$).

1117. $\frac{1}{x}$ ($x>0$). **1118.** $\frac{f(x)\,f''(x)-f'^2(x)}{f^2(x)}$ ($f(x)>0$).

1119. $-\frac{2}{x}\sin(\ln x)$ ($x>0$). **1120.** $y(0)=1$, $y'(0)=1$, $y''(0)=0$.

1121. $2(uu''+u'^2)$. **1122.** $\frac{uu''-u'^2}{u^2}-\frac{vv''-v'^2}{v^2}$ ($uv>0$).

1123. $\frac{(u^2+v^2)(uu''+vv'')+(u'v-uv')^2}{(u^2+v^2)^{3/2}}$ ($u^2+v^2>0$).

1124. $y''=u^v\left[\left(v\frac{u'}{u}+v'\ln u\right)^2+v\frac{uu''-u'^2}{u^2}+\frac{2u'v'}{u}+v''\ln u\right]$.

1125. $y''=4x^2f''(x^2)+2f'(x^2)$; $y'''=8x^3f'''(x^2)+12xf''(x^2)$.

1126. $y''=\frac{1}{x^4}f''\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{2}{x^3}f'\left(\frac{1}{x}\right)$; $y'''=-\frac{1}{x^6}f'''\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{6}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{6}{x^4}f'\left(\frac{1}{x}\right)$.

1127. $y''=e^{2x}f''(e^x)+e^xf'(e^x)$; $y'''=e^{3x}f'''(e^x)+3e^{2x}f''(e^x)+e^xf'(e^x)$.

1128. $y''=\frac{1}{x^2}[f''(\ln x)-f'(\ln x)]$; $y'''=\frac{1}{x^3}[f'''(\ln x)-3f''(\ln x)+2f'(\ln x)]$.

1129. $y''=\varphi'^2(x)f''(\varphi(x))+\varphi''(x)f'(\varphi(x))$; $y'''=\varphi'^3(x)f'''(\varphi(x))+3\varphi'(x)\times$

$\times\varphi''(x)f''(\varphi(x))+\varphi'''(x)f'(\varphi(x))$. **1130.** a) $e^x\,dx^2$; b) $e^x(dx^2+d^2x)$.
1131. $\dfrac{dx^2}{(1+x^2)^{3/2}}$. **1132.** $\dfrac{2\ln x-3}{x^3}dx^2$ $(x>0)$. **1133.** $x^x\left[(1+\ln x)^2+\dfrac{1}{x}\right]dx^2$.
1134. $u\,d^2v+2du\,dv+v\,d^2u$. **1135.** $\dfrac{(vd^2u-ud^2v)-2dv(v\,du-u\,dv)}{v^3}$ $(v>0)$.
1136. $u^{m-2}v^{n-2}\{[m(m-1)v^2du^2+2mnuvdudv+n(n-1)u^2dv^2]+$
$+uv(mvd^2u+nud^2v)\}$. **1137.** $a^u\ln a(du^2\ln a+d^2u)$. **1138.** $[(v^2-u^2)du^2-$
$-4uvdudv+(u^2-v^2)dv^2+(u^2+v^2)(ud^2u+vd^2v)](u^2+v^2)^{-2}$ $(u^2+v^2>0)$.
1139. $[-2uv\,du^2+2(u^2-v^2)dudv+2uvdv^2+(u^2+v^2)(v\,d^2u-ud^2v)](u^2+v^2)^{-2}$
$(u^2+v^2>0)$. **1140.** $y'=\dfrac{3}{4(1-t)}$; $y'''=\dfrac{3}{8(1-t)^3}$ $(t\neq 1)$. **1141.** $y''=-\dfrac{1}{a\sin^3 t}$;
$y'''=-\dfrac{3\cos t}{a^2\sin^5 t}$ $(t\neq k\pi, k$ – tamdır). **1142.** $y''=-\dfrac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}$; $y'''=\dfrac{\cos\frac{t}{2}}{4a^2\sin^7\frac{t}{2}}$
$(t\neq 2k\pi$, k – tamdır). **1143.** $y''=\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{2}\cos^3\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}$; $y'''=\dfrac{e^{-2t}(2\sin t+\cos t)}{\sqrt{2}\cos^5\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}$
$\left(t\neq\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k=0,\pm1,\ldots\right)$. **1144.** $y''=\dfrac{1}{f''(t)}$; $y'''=-\dfrac{f'''(t)}{f''^3(t)}$ $(f''(t)\neq 0)$.
1145. $x'=\dfrac{1}{y'}$; $x''=-\dfrac{y''}{y'^3}$; $x'''=-\dfrac{y'y'''-3y''^2}{y'^5}$; $x^{IV}=$
$=-\dfrac{y'^2y^{IV}-10y'y''y'''+15y''^3}{y'^7}$ $(y'\neq 0)$. **1146.** $-\dfrac{x}{y}$, $-\dfrac{25}{y^3}$, $-\dfrac{75x}{y^5}$; $-\dfrac{3}{4}$,
$-\dfrac{25}{64}$, $-\dfrac{225}{1024}$. **1147.** $\dfrac{p}{y}$, $-\dfrac{p^2}{y^3}$, $\dfrac{3p^3}{y^5}$. **1148.** $y'=\dfrac{2x-y}{x-2y}$, $y''=\dfrac{6}{(x-2y)^3}$,
$y'''=\dfrac{54x}{(x-2y)^5}$. **1149.** $y'=\dfrac{2x^3y}{1+y^2}$; $y''=\dfrac{2x^2y}{(1+y^2)^3}[3(1+y^2)^2+2x^4(1-y^2)]$.
1150. $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$; $y''=\dfrac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$. **1151.** $a=\dfrac{1}{2}f''(x_0)$; $b=f'(x_0)$;
$c=f(x_0)$. **1152.** $20-10t$, -10; 0, -10. **1153.** $v=-\dfrac{2\pi a}{T}\sin\dfrac{2\pi}{T}t$,
$j=-\dfrac{4\pi^2a}{T^2}\cos\dfrac{2\pi}{T}t$. **1154.** $x=v_0t\cos\alpha$, $y=v_0t\sin\alpha-\dfrac{gt^2}{2}$;
$v=\sqrt{v_0^2-2v_0gt\sin\alpha+g^2t^2}$; $j=g$; $y=x\,\mathrm{tg}\alpha-\dfrac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$; $\dfrac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$;

$\frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$. **1155.** $x^2+y^2=25$; $5|\omega|$, $5\omega^2$. **1156.** $y^{(6)}=4\cdot 6!$; $y^{(7)}=0$.

1157. $y'''=-\frac{am(m+1)(m+2)}{x^{m+3}}$ $(x\neq 0)$. **1158.** $y^{(10)}=-\frac{17!!}{2^{10}x^9\sqrt{x}}$ $(x>0)$, burada $n!!$ - n-ni aşmayan və onunla eyni cütlüyə malik olan natural ədədlərin hasili deməkdir, məsələn, $17!!=1\cdot 3\cdot 5\ldots 17$. **1159.** $y^{(8)}=\frac{8!}{(1-x)^9}$ $(x\neq 1)$. **1160.** $y^{(100)}=\frac{197!!(399-x)}{2^{100}(1-x)^{100}\sqrt{1-x}}$ $(x<1)$. **1161.** $y^{(20)}=2^{20}e^{2x}\times$ $\times(x^2+20x+95)$. **1162.** $y^{(10)}=e^x\sum_{i=0}^{10}(-1)^i\frac{A_{10}^i}{x^{i+1}}$, $A_{10}^i=10\cdot 9\cdot\ldots(11-i)$ $A_{10}^0=1$. **1163.** $y^{(5)}=-\frac{6}{x^4}$ $(x>0)$. **1164.** $y^{(5)}=\frac{274}{x^6}-\frac{120}{x^6}\ln x$ $(x>0)$.

1165. $y^{(50)}=2^{50}\left(-x^2\sin 2x+50x\cos 2x+\frac{1225}{2}\sin 2x\right)$. **1166.** $y'''=$ $=\frac{27(1-3x)^2-36}{(1-3x)^{\frac{7}{3}}}\sin 3x-\frac{27(1-3x)^2-28}{(1-3x)^{\frac{10}{3}}}\cos 3x$ $\left(x\neq\frac{1}{3}\right)$. **1167.** $y^{(10)}=$ $=-2^8\sin 2x-2^{18}\sin 4x+2^8\cdot 3^{10}\sin 6x$. **1168.** $y^{(100)}=x\operatorname{sh}x+100\operatorname{ch}x$.

1169. $y^{IV}=-4e^x\cos x$ **1170.** $y^{(6)}=-\frac{60}{x^6}+\left(\frac{144}{x^5}-\frac{160}{x^3}+\frac{96}{x}\right)\sin 2x+$ $\left(\frac{60}{x^6}-\frac{180}{x^4}+\frac{120}{x^2}+32\ln x\right)\cos 2x$. **1171.** $120\,dx^5$. **1172.** $-\frac{15}{8x^3\sqrt{x}}dx^3$ $(x>0)$.

1173. $-1024(x\cos 2x+5\sin 2x)\,dx^{10}$. **1174.** $e^x\left(\ln x+\frac{4}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{8}{x^3}-\frac{6}{x^4}\right)dx^4$.

1175. $8\sin x\operatorname{sh}x\,dx^6$. **1176.** $2ud^{10}u+20\,du\,d^9u+90\,d^2u\,d^6u+240d^3u\,d^7u+$ $+420\,d^4u\,d^6u+252\,(d^5u)^2$. **1177.** $e^u(du^4+6du^2d^2u+4du\,d^3u+3d^2u^2+d^4u)$.

1178. $\frac{2du^2}{u^3}-\frac{3du\,d^2u}{u^2}+\frac{d^3u}{u}$. **1179.** $d^2y=y''dx^2+y'd^2x$; $d^3y=y'''dx^3+$ $+3y''dxd^2x+y'd^3x$; $d^4y=y^{IV}dx^4+6y'''dx^2d^2x+4y''dxd^3x+3y''d^2x^2+y'd^4x$.

1180. $y''=\frac{\begin{vmatrix}dx & dy\\ d^2x & d^2y\end{vmatrix}}{d^3x}$; $y'''=\frac{dx\begin{vmatrix}dx & dy\\ d^3x & d^3y\end{vmatrix}-3d^2x\begin{vmatrix}dx & dy\\ d^2x & d^2y\end{vmatrix}}{dx^5}$.

1187. $P^{(n)}(x)=a_0n!$. **1188.** $\frac{(-1)^{n-1}n!\,c^{n-1}(ad-bc)}{(cx+d)^{n+1}}$.

1189. $n!\left[\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}+\frac{1}{(1-x)^{n+1}}\right]$. **1190.** $(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$.

1191. $\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{(1-2x)^{n+1/2}}\quad\left(x<\frac{1}{2}\right)$. **1192.** $\frac{(-1)^{n+1}\cdot 1\cdot 4\ldots(3n-5)(3n+2x)}{3^n(1+x)^{n+1/3}}$

$(n\geq 2;\ x\neq -1)$. **1193.** $-2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$. **1194.** $2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

1195. $\frac{3}{4}\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{3^n}{4}\sin\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)$. **1196.** $\frac{3}{4}\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)+$

$+\frac{3^n}{4}\cos\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)$. **1197.** $\frac{(a-b)^n}{2}\cos\left[(a-b)x+\frac{n\pi}{2}\right]-\frac{(a+b)^n}{2}\cos\left[(a+b)x+\frac{n\pi}{2}\right]$.

1198. $\frac{(a-b)^n}{2}\cos\left[(a-b)x+\frac{n\pi}{2}\right]+\frac{(a+b)^n}{2}\cos\left[(a+b)x+\frac{n\pi}{2}\right]$.

1199. $\frac{(a-b)^n}{2}\sin\left[(a-b)x+\frac{n\pi}{2}\right]+\frac{(a+b)^n}{2}\sin\left[(a+b)x+\frac{n\pi}{2}\right]$.

1200. $\frac{b^n}{2}\cos\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{(2a-b)^n}{4}\cos\left[(2a-b)x+\frac{n\pi}{2}\right]-$

$-\frac{(2a+b)^n}{4}\cos\left[(2a+b)x+\frac{n\pi}{2}\right]$. **1201.** $4^{n-1}\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

1202. $a^n x\cos\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right)+na^{n-1}\sin\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right)$.

1203. $a^n\left[x^2-\frac{n(n-1)}{a^2}\right]\sin\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right)-2na^{n-1}x\cos\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right)$.

1204. $(-1)^n e^{-x}[x^2-2(n-1)x+(n-1)(n-2)]$.

1205. $e^x\left\{\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{x^{k+1}}\right\}$. **1206.** $e^x 2^{n/2}\cos\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)$.

1207. $e^x 2^{n/2}\sin\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)$. **1208.** $\frac{(n-1)!\,b^n}{(a^2-b^2x^2)^n}[(a+bx)^n+(-1)^{n-1}(a-bx)^n]$

$\left(|x|<\left|\frac{a}{b}\right|\right)$. **1209.** $e^{ax}[a^nP(x)+C_n^1a^{n-1}P'(x)+\ldots+P^{(n)}(x)]$.

1210. $\frac{1}{2}\{[(x+n)-(-1)^n(x-n)]\text{ch }x+[(x+n)+(-1)^n(x-n)]\text{ sh }x\}$.

1211. $d^ny=e^x\left[x^n+n^2x^{n-1}+\frac{n^2(n-1)^2}{2!}x^{n-2}+\ldots+n!\right]dx^n$. **1212.** $\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\times$

$\times\left\{\ln x-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right\}dx^n\quad(x>0)$. **1214.** a) $(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\left[\cos\left(n\varphi-\frac{n\pi}{2}\right)\text{ch }ax\times\right.$

$\times\cos\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right)-\sin\left(n\varphi-\frac{n\pi}{2}\right)\text{ sh } ax\sin\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right)\Big]$; b) $(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\times$
$\times\left[\cos\left(n\varphi-\frac{n\pi}{2}\right)\text{ ch } ax\sin\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right)+\sin\left(n\varphi-\frac{n\pi}{2}\right)\text{ sh } ax\cos\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right)\right]$,
$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **1215.** $f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p+k}2^{n-2p+1}\times$
$\times(p-k)^n C_{2p}^k\cos\left[(2p-2k)x+\frac{n\pi}{2}\right]$. **1216.** a) $\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p+k}\frac{(2p-2k+1)^n}{2^{2p}}\times$
$\times C_{2p+1}^k\sin\left[(2p-2k+1)x+\frac{n\pi}{2}\right]$; b) $\sum_{k=0}^{p-1}2^{n-2p+1}(p-k)^n C_{2p}^k\cos\left[(2p-2k)x+\frac{n\pi}{2}\right]$;
c) $\sum_{k=0}^{p}\left\{\frac{(2p-2k+1)^n}{2^{2p}}C_{2p+1}^k\cos\left[(2p-2k+1)x+\frac{n\pi}{2}\right]\right\}$.
1218. $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}\sin(n\operatorname{arcctg}x)$ $(x\neq 0)$. **1219.** a) $\frac{n!}{3}[2^{n+1}+(-1)^n]$;
b) $\frac{n(2n-3)!!}{2^{n-1}}$ $(n>1)$. **1220.** a) $n(n-1)a^{n-2}$; b) $f^{(2k)}(0)=0$,
$f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k(2k!)$ $(k=0,1,2,\ldots)$; c) $f^{(2k)}(0)=0$, $f^{(2k+1)}(0)=$
$=[1\cdot 3\ldots(2k-1)]^2$ $(k=0,1,2,\ldots)$. **1221.** a) $f^{(2k)}(0)=(-1)^k m^2(m^2-2^2)\times$
$\times\ldots[m^2-(2k-2)^2]$, $f^{(2k-1)}(0)=0$; b) $f^{(2k)}(0)=0$, $f'(0)=m$,
$f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k m(m^2-1^2)\ldots[m^2-(2k-1)^2]$ $(k=1,2,\ldots)$. **1222.** a) $f^{(2k)}(0)=$
$=(-1)^{k-1}\cdot 2(2k-1)!\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2k-1}\right)$, $f^{(2k-1)}(0)=0$ $(k=1,2,\ldots)$;
b) $f^{(2k)}(0)=2^{2k-1}[(k-1)!]^2$, $f^{(2k-1)}(0)=0$ $(k=1,2,\ldots)$. **1223.** $n!\,\varphi(a)$.
1228. $L_m(x)=(-1)^m\left[x^m-m^2x^{m-1}+\frac{m^2(m-1)^2}{1\cdot 2}x^{m-2}+\ldots+(-1)^m m!\right]$.
1231. $H_m(x)=(2x)^m-\frac{m(m-1)}{1!}(2x)^{m-2}+\frac{m(m-1)(m-2)\cdot(m-3)}{2!}(2x)^{m-4}-\ldots$
1236. $x=0$ olduqda sonlu $f'(x)$ törəməsi yoxdur. **1244.** $A(-1,-1)$, $C(1,1)$. **1245.** Doğru deyil. **1246.** a) $\theta=\frac{1}{2}$;
b) $\theta=\frac{\sqrt{x^2+x\Delta x+\frac{1}{3}(\Delta x)^2}-x}{\Delta x}$ $(x\geq 0,\Delta x>0)$; c) $\theta=\frac{x}{\Delta x}\left(\sqrt{1+\frac{\Delta x}{x}}-1\right)$

$(x(x+\Delta x)>0)$; d) $\theta=\frac{1}{\Delta x}\ln\frac{e^{\Delta x-1}}{\Delta x}$. **1248.** $c=\frac{1}{2}$ və ya $\sqrt{2}$. **1250.** Ümumiyyətlə desək, yox. **1261.** $f(x)=c_0+c_1x+...+c_{n-1}x^{n-1}$, burada $c_i\ (i=0,1,...,n-1)$ - sabitlərdir. **1268.** Funksiya $-\infty<x<\frac{1}{2}$ olduqda artır, $\frac{1}{2}<x<+\infty$ olduqda isə azalır. **1269.** Funksiya $-\infty<x<-1$ olduqda azalır, $-1<x<1$ olduqda artır; $1<x<+\infty$ olduqda isə azalır.
1270. Funksiya $-\infty<x<-1$ olduqda azalır, $-1<x<1$ olduqda artır; $1<x<+\infty$ olduqda azalır. **1271.** Funksiya $0<x<100$ olduqda artır; $100<x<+\infty$ olduqda azalır. **1272.** Funksiya artır. **1273.** Funksiya $\left(\frac{k\pi}{2},\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$ aralıqlarında artır; $\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3},\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$ aralıqlarında azalır $(k=0,\pm1,\pm2,...)$. **1274.** Funksiya $\left(\frac{1}{2k+1},\frac{1}{2k}\right)$ və $\left(-\frac{1}{2k+1},-\frac{1}{2k+2}\right)$ aralıqlarında artır; $\left(\frac{1}{2k+2},\frac{1}{2k+1}\right)$ və $\left(-\frac{1}{2k},-\frac{1}{2k+1}\right)$ aralıqlarında isə azalır $(k=0,1,2,...)$. **1275.** Funksiya $-\infty<x<0$ olduqda azalır; $0<x<\frac{2}{\ln 2}$ olduqda artır; $\frac{2}{\ln 2}<x<+\infty$ olduqda azaır. **1276.** Funksiya $0<x<n$ olduqda artır; $n<x<+\infty$ olduqda azalır. **1277.** Funksiya $-\infty<x<-1$ və $0<x<1$ olduqda azalır; $-1<x<0$ və $1<x<+\infty$ olduqda artır.
1278. Funksiya $\left(e^{-\frac{7\pi}{12}+2k\pi},e^{\frac{13\pi}{12}+2k\pi}\right)$ aralıqlarında artır; $\left(e^{\frac{13\pi}{12}+2k\pi},e^{\frac{17\pi}{12}+2k\pi}\right)$ aralıqlarında isə azalır $(k=0,\pm1,\pm2,...)$. **1283.** Həmişə yox. **1298.** A nöqtəsində əyri yuxarıya doğru; B nöqtəsində aşağıya doğru çökükdür; C - əyilmə nöqtəsidir. **1299.** $-\infty<x<1$ olduqda qrafik yuxarıya doğru çökükdür; $1<x<+\infty$ olduqda aşağıya doğru çökükdür; $x=1$ - əyilmə nöqtəsidir. **1300.** $|x|<\frac{a}{\sqrt{3}}$ olduqda çöküklük yuxarıya doğrudur; $|x|>\frac{a}{\sqrt{3}}$ olduqda çöküklük aşağıya doğrudur; $|x|=\pm\frac{a}{\sqrt{3}}$ - əyilmə nöqtələridir. **1301.** $x<0$ olduqda çöküklük aşağıya doğrudur; $x>0$ olduqda çöküklük yuxarıya doğrudur; $x=1$ - əyilmə nöqtəsidir.
1302. Çöküklük yuxarıya doğrudur. **1303.** $2k\pi<x<(2k+1)\pi$ olduqda

çöküklük aşağıya doğrudur; $(2k+1)\pi<x<(2k+2)\pi$ olduqda çöküklük yuxarıya doğrudur; $x=k\pi$ - əyilmə nöqtələridir $(k=0,\pm1,\pm2,...)$.

1304. $|x|<\sqrt{\frac{1}{2}}$ olduqda çöküklük aşağıya doğrudur; $|x|>\sqrt{\frac{1}{2}}$ olduqda çöküklük yuxarıya doğrudur; $|x|=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ - əyilmə nöqtələridir.

1305. $|x|<1$ olduqda çöküklük yuxarıya doğrudur; $|x|>1$ olduqda çöküklük aşağıya doğrudur; $x=\pm1$ - əyilmə nöqtələridir.

1306. $e^{2k\pi-\frac{3\pi}{4}}<x<e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}$ olduqda çöküklük yuxarıya doğrudur; $e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}<x<e^{2k\pi+\frac{5\pi}{4}}$ olduqda çöküklük aşağıya doğrudur; $x=e^{k\pi+\frac{\pi}{4}}$ - əyilmə nöqtələridir. $(k=0,\pm1,\pm2,...)$. **1307.** $0<x<+\infty$ olduqda çöküklük yuxarıya doğrudur. **1309.** $h=\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$. **1310.** Aşağıya doğru çökükdür ($a>0$ olduqda). **1318.** $\frac{a}{b}$. **1319.** 1. **1320.** 2. **1321.** –2. **1322.** $\frac{1}{3}$.

1323. $-\frac{1}{3}$. **1324.** $\frac{1}{3}$. **1325.** $\frac{1}{6}$. **1326.** $\frac{1}{2}$. **1327.** 1. **1328.** $\frac{a-b}{3ab}$. **1329.** $\frac{1}{6}\ln a$.

1330. –2. **1331.** 1. **1332.** $\left(\frac{a}{b}\right)^2$. **1333.** $\frac{1}{6}$. **1334.** $\frac{2}{3}$. **1335.** 1. **1336.** 0.

1337. 0. **1338.** 0.

1339. 0. **1340.** 0. **1341.** 0. **1342.** 1. **1343.** 1. **1344.** –1. **1345.** e^k. **1346.** e^{-1}.

1347. $e^{\frac{2}{\pi}}$. **1348.** e^{-1}. **1349.** 1. **1350.** 1. **1351.** 1. **1352.** $e^{-\frac{2}{\sin 2a}}$ $\left(a\neq\frac{k\pi}{2},\ k\text{ -tamdır}\right)$. **1353.** $e^{\frac{1}{2}(\ln^2 a-\ln^2 b)}$. **1354.** $\frac{1}{2}$. **1355.** $\frac{1}{2}$. **1356.** 0.

1357. $-\frac{1}{2}$. **1358.** $a^a(\ln a-1)$. **1359.** $-\frac{e}{2}$. **1360.** $\frac{1}{a}$. **1361.** $e^{-\frac{2}{\pi}}$. **1362.** 1.

1363. $e^{\frac{1}{6}}$. **1363.1.** $e^{-\frac{1}{6}}$. **1363.2.** $e^{\frac{1}{3}}$. **1363.3.** $e^{-\frac{1}{3}}$. **1363.4.** $e^{-\frac{1}{6}}$. **1364.** $e^{-\frac{1}{2}}$.

1365. $e^{-\frac{2}{\pi}}$. **1366.** e^{-1}. **1367.** $\frac{mn}{n-m}$. **1368.** $\sqrt{e}$. **1368.1.** 0. **1369.** $-\frac{1}{6}$.

1370. a. **1371.** tg α. **1373.1.** $f'(0)=-\frac{1}{12}$. **1373.2.** $y=\frac{1}{e}\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

1374. a) Lopital qaydasını tətbiq etmək olmaz, limit sıfra bərabərdir; b) Lopital qaydasını tətbiq etmək olmaz, limit 1-ə bərabərdir; c) formal olaraq tətbiq edilmiş Lopital qaydası 0-a bərabər doğru olmayan limit verir, limit yoxdur; d) Lopital qaydasının tətbiqi düzgün deyil və bu sıfra bərabər doğru olmayan nəticəyə gətirir, limit yoxdur. **1375.** $\frac{4}{3}$.

1376. $5-13(x+1)+11(x+1)^2-2(x+1)^3$. **1377.** $1+2x+2x^2-2x^4+o(x^4)$; -48. **1378.** $1+60x+1950x^2+o(x^2)$. **1379.** $a+\frac{x}{ma^{m-1}}-\frac{(m-1)x^2}{2m^2a^{2m-1}}+o(x^2)$.

1380. $\frac{1}{6}x^2+x^3+o(x^3)$. **1381.** $1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^4-\frac{1}{15}x^5+o(x^5)$.

1382. $1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{720}+o(x^4)$. **1383.** $x-\frac{x^7}{18}-\frac{x^{13}}{3240}+o(x^{13})$. **1384.** $-\frac{x^2}{2}-$ $-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}+o(x^6)$. **1385.** $x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$. **1386.** $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5)$.

1387. $-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}-\frac{x^6}{2835}+o(x^6)$. **1388.** $1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+o((x-1)^2)$.

1389. $(x-1)+(x-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)^3+o((x-1)^3)$. **1390.** $y=a+\frac{x^2}{2a}+o(x^2)$.

1391. $\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$. **1392.** $\ln x+\frac{h}{x}-\frac{h^2}{2x^2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{h^n}{nx^n}+o(h^n)$.

1394. a) $\frac{3}{(n+1)!}$-dan az; b) $\frac{1}{3840}$-ı aşmır; c) $2\cdot10^{-6}$-dan az; d) $\frac{1}{16}$-dan az. **1395.** $|x|<0{,}222=\text{arc}\,12^0 30'$. **1396.** a) 3,1072; b) 3,0171; c) 1,9961; d) 1,64872; e) 0,309017; f) 0,182321; g) $0{,}67474=\text{arc}\,38^0 39' 35''$; h) $0{,}46676=\text{arc}\,26^0 44' 37''$; i) 1,12117. **1397.** a) 2,718281828; b) 0,01745241; c) 0,98769; d) 2,2361; e) 1,04139. **1398.** $-\frac{1}{12}$. **1399.** $\frac{1}{3}$.

1400. $-\frac{1}{4}$. **1401.** $\frac{1}{3}$. **1402.** $\frac{1}{6}$. **1403.** $\ln^2 a$. **1404.** $\frac{1}{2}$. **1405.** 0. **1406.** $\frac{1}{3}$.

1406.1. $\frac{19}{90}$. **1406.2.** $\frac{1}{2}$. **1406.3.** $\frac{1}{2}$. **1407.** $\frac{x^7}{30}$. **1408.** x^2. **1409.** $\frac{x}{2}$.

1410. $a=\frac{4}{3}$; $b=-\frac{1}{3}$. **1410.1.** $A=-\frac{2}{5}$; $B=-\frac{1}{15}$. **1410.2.** $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{12}$, $C=-\frac{1}{2}$, $D=\frac{1}{12}$. **1411.** a) $\frac{2x}{R^3}$; b) $\frac{4}{3}x$; c) $\frac{An}{100}$; d) $\frac{70}{x}$. **1412.** $\alpha=\frac{2}{3}$; $\beta=\frac{1}{3}$. **1413.** $\frac{\alpha^4}{180}$, burada α – qövsün mərkəzi bucağının yarısıdır.

1414. $x=\frac{1}{2}$ olduqda maksimum $y=2\frac{1}{4}$. **1415.** Ekstremum yoxdur. **1416.** $x=1$ olduqda minimum $y=0$. **1417.** m – təkdirsə, $x=0$ olduqda minimum $y=0$, m – cütdürsə, $x=0$ olduqda ekstremum yoxdur; $x=\frac{m}{m+n}$ olduqda maksimum $y=\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$; n – cütdürsə, $x=1$ olduqda minimum $y=0$, n – təkdirsə, $x=1$ olduqda ekstremum yoxdur. **1418.** $x=0$ olduqda minimum $y=2$. **1419.** $x=-1$ olduqda minimum $y=0$; $x=9$ olduqda maksimum $y=10^{10}e^{-9}\approx 1\,234\,000$. **1420.** n – təkdirsə, $x=0$ olduqda maksimum $y=1$; n – cütdürsə, $x=0$ olduqda ekstremum yoxdur. **1421.** $x=0$ olduqda minimum $y=0$. **1422.** $x=\frac{1}{3}$ olduqda maksimum $y=\frac{1}{3}\sqrt[3]{4}\approx 0{,}529$; $x=1$ olduqda minimum $y=0$; $x=0$ olduqda ekstremum yoxlur. **1423.** $\varphi(x_0)>0$ və n – cüt olarsa, minimum $f(x_0)=0$; $\varphi(x_0)<0$ və n – cüt olarsa, maksimum $f(x_0)=0$; n – təkdirsə, $f(x_0)$ ekstremum deyil. **1425.** Yox. **1427.** a) Minimum $f(0)=0$; b) minimum $f(0)=0$. **1428.** Minimum $f(0)=0$. **1429.** $x=1$ olduqda maksimum $y=0$; $x=3$ olduqda minimum $y=-4$. **1430.** $x=0$ olduqda minimum $y=0$; $x=\pm 1$ olduqda maksimum $y=1$. **1431.** $x=\frac{5-\sqrt{13}}{6}\approx 0{,}23$ olduqda minimum $y\approx -0{,}76$; $x=1$ olduqda maksimum $y=0$; $x=\frac{5+\sqrt{13}}{6}\approx 1{,}43$ olduqda minimum $y\approx -0{,}05$; $x=2$ olduqda ekstremum yoxdur. **1432.** $x=-1$ olduqda maksimum $y=-2$; $x=1$ olduqda minimum $y=2$. **1433.** $x=-1$ olduqda minimum $y=-1$; $x=1$ olduqda maksimum $y=1$. **1434.** $x=\frac{7}{5}$ olduqda minimum $y=-\frac{1}{24}$. **1435.** $x=0$ və $x=2$ olduqda uc minimum $y=0$; $x=1$ olduqda maksimum $y=1$. **1436.** $x=\frac{3}{4}$ olduqda minimum $y=-\frac{3}{8}\sqrt[3]{2}\approx -0{,}46$; $x=1$ olduqda ekstremum yoxdur.

1437. $x=1$ olduqda maksimum $y=e^{-1}\approx 0{,}368$. **1438.** $x=+0$ olduqda uc maksimumu $y=0$; $x=e^{-2}\approx 0{,}135$ olduqda minimum $y=-\frac{2}{e}\approx -0{,}736$. **1439.** $x=1$ olduqda minimum $y=0$; $x=e^2\approx 7{,}389$ olduqda maksimum $y=\frac{4}{e^2}\approx 0{,}541$. **1440.** $x=k\pi$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$ olduqda maksimum $y=(-1)^k+\frac{1}{2}$; $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$ olduqda minimum $y=-\frac{3}{4}$. **1441.** $x=k\pi$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$ olduqda maksimum $y=10$; $x=\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$ olduqda minimum

$y=5$. **1442.** $x=1$ olduqda maksimum $y=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\approx 0{,}439$.

1443. $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi k$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$ olduqda minimum $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}$; $x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$ olduqda maksimum $y=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}$.

1444. $x=-1$ olduqda maksimum $y=e^{-2}\approx 0{,}135$; $x=0$ olduqda minimum $y=0$ (künc nöqtəsi); $x=1$ olduqda maksimum $y=1$. **1445.** $\frac{1}{2}$; 32. **1446.** 2; 66. **1447.** 0; 132. **1448.** 2; 100,01. **1449.** 1; 3. **1450.** 0; $\frac{100}{e}\approx 36{,}8$. **1451.** 0; 1. **1452.** 0; $\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})\approx 1{,}2$. **1453.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}\approx -0{,}067$; 1. **1454.** $m(x)=-\frac{1}{6}$, $-\infty<x\le -3$; $m(x)=\frac{1+x}{3+x^2}$, $-3<x\le -1$; $m(x)=0$, $-1<x<+\infty$; $M(x)=\frac{1}{2}$, $-\infty<x\le 1$; $M(x)=\frac{1+x}{3+x^2}$, $1<x<+\infty$.

1455. a) $\frac{14^{10}}{2^{14}}\approx 1{,}77\cdot 10^7$; b) $\frac{1}{200}$; c) $\sqrt[3]{3}\approx 1{,}44$. **1457.** $\frac{9+6\sqrt{3}}{4}\approx 4{,}85$. **1458.** $q=-\frac{1}{2}$. **1459.** $\frac{4}{27}$. **1460.** $g(x)=(x_1+x_2)x-\frac{1}{8}(x_1^2+x_2^2+6x_1x_2)$; $\Delta=\frac{1}{8}(x_1-x_2)^2$. **1461.** $\frac{2}{3}$. **1462.** Bir kök: $(3;\ +\infty)$. **1463.** $h>27$ olduqda bir kök: $-\infty<x_1<-1$; $-5<h<27$ olduqda üç kök: $-\infty<x_1<-1$, $-1<x_2<3$ və $3<x_3<+\infty$; $h<-5$ olduqda bir kök: $3<x_3<+\infty$. **1464.** İki kök: $-\infty<x_1<-1$ və $1<x_2<+\infty$. **1465.** $-\infty<a<-4$ olduqda bir kök: $-\infty<x_1<-1$; $-4<a<4$ olduqda üç kök: $-\infty<x_1<-1$, $-1<x_2<1$ və $1<x_3<+\infty$; $4<a<+\infty$ olduqda bir kök: $1<x_1<+\infty$. **1466.** $-\infty<k<0$ olduqda bir kök: $0<x_1<1$; $0<k<\frac{1}{e}$ olduqda iki kök: $0<x_1<\frac{1}{k}$ və $\frac{1}{k}<x_2<+\infty$; $k>\frac{1}{e}$ olduqda kök yoxdur. **1467.** $a<0$ olarsa kök yoxdur; $0<a<\frac{e^2}{4}$ olduqda bir kök: $-\infty<x_1<0$; $\frac{e^2}{4}<a<+\infty$ olduqda üç kök: $-\infty<x_1<0$, $0<x_2<2$ və $2<x_3<+\infty$. **1468.** $|a|<3\sqrt{3}/16$ olduqda iki kök; $|a|>3\sqrt{3}/16$ olduqda kök yoxdur. **1469.** $|k|>\operatorname{sh}\xi\approx 1{,}50$ olduqda iki kök: $0<|x_1|<\xi$ və $\xi<|x_2|<+\infty$, burada $\xi\approx 1{,}2$ -

cth $x=x$ tənliyinin müsbət köküdür; $|k|<\operatorname{sh}\xi$ olduqda kök yoxdur. **1470.** a) $\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}>0$; b) $\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}<0$. **1471.***) Koordinat başlanğıcına nəzərən simmetriya. Funksiyanın sıfırları: $x=0$ və $x=\pm\sqrt{3}\approx\pm1,73$. Minimum $y=-2$, $x=-1$ olduqda; maksimum $y=2$, $x=1$ olduqda. Əyilmə nöqtəsi: $x=0$, $y=0$. **1472.** *Oy* oxuna nəzərən simmetriya. Sıfırları: $x=\pm\sqrt{1+\sqrt{3}}\approx\pm1,65$. Minimum $y=1$, $x=0$ olduqda; maksimum $y=1\frac{1}{2}$, $x=\pm1$ olduqda. Əyilmə nöqtəsi: $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\approx\pm0,58$; $y=1\frac{5}{18}$.

1473. *A* (1, 2) nöqtəsinə nəzərən simetriya. Sıfırları: $x=-1$ və $x=2$. Minimum $y=0$, $x=2$ olduqda; maksimum $y=4$, $x=0$ olduqda. Əyilmə nöqtəsi: $x=1$, $y=2$. **1474.** *Oy* oxuna nəzərən simmetriya. Sıfırları: $x=\pm\sqrt{2}\approx\pm1,41$. Maksimum $y=2$, $x=0$ olduqda; minimum $y=1-\frac{\sqrt{5}}{2}\approx-0,12$, $x=\pm\sqrt{2+\sqrt{5}}\approx\pm2,06$ olduqda. Əyilmə nöqtələri: $x_{1,2}=\pm0,77$, $y_{1,2}=1,04$; $x_{3,4}\approx\pm2,67$, $y_{3,4}\approx-0,010$. $y=0$. **1475.** Kəsilmə nöqtələri: $x=2$ və $x=3$. Sıfırları: $x=\pm1$. Minimum $y=-(10-\sqrt{96})\approx-0,20$, $x=\frac{7-\sqrt{24}}{5}\approx0,42$ olduqda; maksimum $y=-(10+\sqrt{96})\approx-19,80$, $x=\frac{7+\sqrt{24}}{5}\approx2,38$ olduqda. Əyilmə nöqtəsi $x\approx-0,58$, $y\approx-0,07$. Asimptotları: $x=2$, $x=3$ və $y=1$. **1476.** Kəsilmə nöqtələri: $x_1=-1$ və $x_2=1$. Funksiyanın sıfırı $x=0$. Eksremum nöqtələri yoxdur. Əyilmə nöqtəsi $x\approx-0,22$, $y\approx-0,19$. Asimptotları: $x=-1$, $x=1$ və $y=0$. **1477.** Funksiyanın sıfırı $x=0$. Kəsilmə nöqtəsi $x=-1$. Minimum $y=0$, $x=0$ olduqda; maksimum $y=-9\frac{13}{27}$, $x=-4$ olduqda. Əyilmə nöqtələri yoxdur. Asimptotları $x=-1$ və $y=x-3$. **1478.** Minimum $y=0$, $x=-1$ olduqda; əyilmə nöqtəsi $x=-4$, $y=\frac{81}{625}$. Asimptotları: $x=1$ və $y=1$. **1479.** Maksimumları $y=-\frac{34\sqrt{17}+142}{32}\approx-8,82$,

---

*) Qrafiklərin qurulmasına aid məsələlərə tam cavab hər yerdə verilməmişdir.

$x=-\frac{3+\sqrt{17}}{2}\approx-3{,}56$ olduqda və $y=0$, $x=0$ olduqda; minimum $y=\frac{34\sqrt{17}-142}{32}\approx-0{,}06$, $x=\frac{\sqrt{17}-3}{2}\approx0{,}56$ olduqda. Əyilmə nöqtəsi $x=\frac{1}{5}$, $y=-\frac{1}{45}$. Asimptotları: $x=-1$ və $y=x-3$. **1480.** Koordinat başlanğıcına nəzərən simmetriya. Ekstremum nöqtələri yoxdur; əyilmə nöqtəsi $x=0$, $y=0$. Asimptotları: $x=-1$, $x=1$ və $y=0$. **1481.** Minimum $y=13\frac{1}{2}$, $x=5$ olduqda; əyilmə nöqtələri $x=-1$, $y=0$. Asimptotları: $x=1$ və $y=x+5$. **1482.** Minimum $y=2\frac{2}{3}$, $x=2$ olduqda; maksimum $y\approx-3{,}2$, $x\approx-2{,}4$ olduqda; əyilmə nöqtəsi $x=0$, $y=8$. Asimptotları: $x=-1$ və $y=x$. **1483.** *Oy* oxuna nəzərən simmetriya. Funksiyanın sıfırları: $x=\pm\frac{\sqrt{10}}{4}\approx\pm0{,}79$. Ekstremum nöqtələri yoxdur. Əyilmə nöqtələri: $x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\approx\pm0{,}71$, $y=-2\frac{2}{3}$. Asimptotları: $x=-1$, $x=0$, $x=1$ və $y=0$. **1484.** Təyin oblastı: $0\le x<+\infty$. Sıfırları: $x=0$ və $x=3$. Minimum $y=-2$, $x=1$ olduqda; uc maksimumu $y=0$, $x=0$ olduqda. Yuxarıya doğru çökükdür. **1485.** Təyin oblastı: $|x|\le2\sqrt{2}\approx2{,}83$. Koordinat başlanğıcına və koordinat oxlarına nəzərən simmetriya. Sıfırları: $x=0$ və $x=\pm2\sqrt{2}$. Maksimum $|y|=4$, $x=\pm2$ olduqda; minimum $|y|=0$, $x=0$ olduqda; uc minimumu $|y|=0$, $x=\pm2\sqrt{2}$ olduqda. Əyilmə nöqtəsi yoxdur. **1485.1.** $x=2$ funksiyanın sıfırıdır. Minimum $y=-\sqrt{5}\approx-2{,}24$, $x=-0{,}5$ olduqda. Əyilmə nöqtəsi $x_1=-\frac{3+\sqrt{41}}{8}\approx-1{,}18$; $y_1\approx-2{,}06$ və $x_2=\frac{\sqrt{41}-3}{8}\approx0{,}42$; $y_2\approx-1{,}46$. Asimptotları: $y=-1$, $x\to-\infty$ olduqda və $y=1$, $x\to+\infty$ olduqda. **1486.** Təyin oblastı: $1\le x\le2$ və $3\le x<+\infty$. Sıfırları: $x=1$, $x=2$ və $x=3$. Minimum $|y|=\frac{1}{3}\sqrt[4]{12}\approx0{,}62$, $x=\frac{6-\sqrt{3}}{3}\approx1{,}42$ olduqda; uc minimumları $|y|=0$, $x=1,2$ və 3 olduqda. **1487.** Minimum $y=0$, $x=1$ olduqda; maksimum $y=\frac{2}{3}\sqrt[3]{4}\approx1{,}06$, $x=-\frac{1}{3}$

olduqda; əyilmə nöqtəsi $x=-1$, $y=0$. Asimptotu $y=x-\frac{1}{3}$. **1488.** *Oy* oxuna nəzərən simmetriya. Minimum $y=-1$, $x=0$ olduqda. Aşağıya doğru çökükdür. Asimptotu $y=0$. **1489.** Koordinat başlanğıcına nəzərən simmetriya. Funksiyanın sıfırı: $x=0$. Minimum $y=-\sqrt[3]{16}\approx-2{,}52$, $x=-2$ olduqda; maksimum $y=\sqrt[3]{16}$, $x=2$ olduqda. Əyilmə nöqtəsi: $x=0$, $y=0$. Asimptotu: $y=0$. **1490.** *Oy* oxuna nəzərən simmetriya. Minimum $y=\sqrt[3]{4}\approx1{,}59$, $x=\pm1$ olduqda; maksimum $y=2$, $x=0$ olduqda. Aşağıya doğru çökükdür. **1491.** Koordinat başlanğıcına nəzərən simmetriya. Kəsilmə nöqtəsi: $x=\pm1$. Funksiyanın sıfırı: $x=0$. Minimum $y=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\approx1{,}38$, $x=\sqrt{3}$ olduqda; maksimum $y=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$, $x=-\sqrt{3}$ olduqda. Əyilmə nöqtələri: $x_1=0$, $y_1=0$ və $x_{2,3}=\pm3$ $y_{2,3}=\pm1\frac{1}{2}$. **1492.** Təyin oblastı: $|x|\geq1$. *Oy* oxuna nəzərən simmetriya. Uc minimumu $y=0$, $x=\pm1$ olduqda. Aşağıya doğru çökükdür. Asimptotları: $y=\frac{x}{2}$, $x\to+\infty$ olduqda və $y=-\frac{x}{2}$, $x\to-\infty$ olduqda. **1493.** Funksiyanın təyin oblastı: $x>0$. Minimum $y=\frac{3}{2}\sqrt{3}\approx2{,}60$, $x=\frac{1}{2}$ olduqda. Yuxarıya doğru çökükdür. Asimptotları: $y=x+\frac{3}{2}$ və $x=0$. **1494.** Təyin oblastı: $x\geq0$ və $x<-3$. Funksiyanın sıfırı $x=\frac{5+\sqrt{13}}{2}\approx4{,}30$. Minimum $y=13$, $x=-4$ olduqda; uc maksimumu $y=1$, $x=0$ olduqda. Yuxarıya doğru çökükdür. Asimptotları: $y=\frac{5}{2}-2x$, $x\to-\infty$ olduqda; $y=-\frac{1}{2}$, $x\to+\infty$ olduqda; $x=-3$, $x\to-3-0$ olduqda. **1495.** Minimum $y=0$, $x=0$ olduqda; maksimum $y=-\sqrt[3]{4}\approx-1{,}59$, $x=-2$ olduqda. Əyilmə nöqtələri: $x_1=-(2-\sqrt{3})\approx-0{,}27$, $y_1=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{27}-5}{2}}\approx0{,}46$; $x_2=-(2+\sqrt{3})\approx-3{,}73$, $y_2=-\sqrt[3]{\frac{5+\sqrt{27}}{2}}\approx-1{,}72$. Asimptotu $x=-1$. **1496.** *Oy* oxuna nəzərən simmetriya. Funksiya müsbətdir. Maksimum $y=\sqrt{3}\approx1{,}73$, $x=0$ olduqda, minimum $y=\sqrt{2}\approx1{,}41$, $x=\pm1$ olduqda. Əyilmə nöqtələri: $x_{1,2}\approx\pm0{,}47$; $y_{1,2}\approx1{,}14$ və

$x_{3,4}=\pm 4{,}58$, $y_{3,4}=4{,}55$. Asimptotları: $y=\pm x$. **1497.** Fuknsiyanın periodu: $T=2\pi$; əsas oblast $0\le x\le 2\pi$. Funksiyanın sıfırları: $x_1=\pi+\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 1{,}21\pi$ və $x_2=2\pi-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 1{,}79\pi$. Minimumları $y=1$, $x=\frac{\pi}{2}$ olduqda və $y=-1$, $x=\frac{3\pi}{2}$ olduqda; maksimum $y=1\frac{1}{4}$, $x=\frac{\pi}{6}$ və $x=\frac{5\pi}{6}$ olduqda. Əyilmə nöqtələri: $x_1=\arcsin\frac{1+\sqrt{33}}{8}\approx 0{,}32\pi$, $y_1=\frac{19+3\sqrt{33}}{32}\approx 1{,}13$; $x_2=\pi-\arcsin\frac{1+\sqrt{33}}{8}\approx 0{,}68\pi$, $y_2=\frac{19+3\sqrt{33}}{32}$; $x_3=\pi+\arcsin\frac{\sqrt{33}-1}{8}\approx 1{,}20\pi$, $y_3=\frac{19-3\sqrt{33}}{32}\approx 0{,}055$; $x_4=2\pi-\arcsin\frac{\sqrt{33}-1}{8}\approx 1{,}80\pi$, $y_4=\frac{19-3\sqrt{33}}{32}$. **1498.** Fuknsiyanın periodu: 2π; əsas oblast $-\pi\le x\le\pi$. Koordinat başlanğıcına nəzərən simmetriya. Sıfırları: $x_1=0$ və $x_{2,3}=\pm\pi$. Minimum $y=-\frac{15}{8}\sqrt{15}\approx -7{,}3$, $x=-\arccos\frac{1}{4}\approx -0{,}42\pi$ olduqda; maksimum $y=\frac{15}{8}\sqrt{15}\approx 7{,}3$, $x=\arccos\frac{1}{4}\approx 0{,}42\pi$ olduqda. Əyilmə nöqtələri: $x_1=0$, $y_1=0$; $x_{2,3}=\pm\arccos\left(-\frac{7}{8}\right)\approx\pm 0{,}84\pi$; $y_{2,3}=\pm\frac{21}{32}\sqrt{15}\approx\pm 2{,}54$; $x_{4,5}=\pm\pi$, $y_{4,5}=0$.
1499. Fuknsiyanın periodu: $T=2\pi$; əsas oblast $-\pi\le x\le\pi$. Koordinat başlanğıcına nəzərən simmetriya. Sıfırları: $x_1=0$ və $x_{2,3}=\pm\pi$. Minimumları: $y=-\frac{2}{3}\sqrt{2}\approx -0{,}94$, $x=-\frac{3\pi}{4}$ və $x=-\frac{\pi}{4}$ olduqda, $y=\frac{2}{3}$, $x=\frac{\pi}{2}$ olduqda; maksimumları: $y=-\frac{2}{3}$, $x=-\frac{\pi}{2}$ olduqda, $y=\frac{2}{3}\sqrt{2}$, $x=\frac{\pi}{4}$ və $x=\frac{3\pi}{4}$ olduqda. Əyilmə nöqtələri: $x_1=0$, $y_1=0$; $x_{2,3}=\pm\arcsin\sqrt{\frac{5}{6}}\approx\pm 0{,}37\pi$, $y_{2,3}=\pm\frac{4}{27}\sqrt{30}\approx\pm 0{,}81$; $x_{4,5}=\pm\left(\pi-\arcsin\sqrt{\frac{5}{6}}\right)\approx\pm 0{,}63\pi$, $y_{4,5}=\pm\frac{4}{27}\sqrt{30}$; $x_{6,7}=\pm\pi$, $y_{6,7}=0$. **1500.** Fuknsiyanın periodu: $T=2\pi$; əsas oblast $[-\pi,\pi]$. *Oy* oxuna nəzərən simmetriya. Funksiyanın sıfırları: $x_{1,2}=\pm\arccos\frac{1-\sqrt{3}}{2}\approx\pm 0{,}62\pi$. Minimumları: $y=\frac{1}{2}$, $x=0$ olduqda;

$y=-1\frac{1}{2}$, $x=\pm\pi$ olduqda; maksimumları: $y=\frac{3}{4}$, $x=\pm\frac{\pi}{3}$ olduqda. Əyilmə nöqtələri: $x_{1,2}=\pm\arccos\frac{1+\sqrt{33}}{8}\approx\pm 0{,}18\,\pi$, $y_{1,2}\approx 0{,}63$; $x_{3,4}=\pm\arccos\frac{1-\sqrt{33}}{8}\approx\pm 0{,}70\,\pi$, $y_{3,4}\approx -0{,}44$. **1501.** Funksiyanın periodu: $T=\frac{\pi}{2}$; əsas oblast $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$. Oy oxuna nəzərən simmetriya. Funksiya müsbətdir. Maksimum $y=1$, $x=0$ olduqda; minimum $y=\frac{1}{2}$, $x=\pm\frac{\pi}{4}$ olduqda. Əyilmə nöqtələri: $x_{1,2}=\pm\frac{\pi}{8}$, $y_{1,2}=\frac{3}{4}$. **1502.** Funksiyanın periodu: $T=\pi$; əsas oblast $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Oy oxuna nəzərən simmetriya. Funksiyanın sıfırları: $x_1=0$ və $x_{2,3}=\pm\frac{\pi}{3}$. Minimumları: $y=0$, $x=0$ olduqda və $y=-1$, $x=\pm\frac{\pi}{2}$ olduqda; maksimum $y=\frac{9}{16}$, $x=\pm\arccos\frac{1}{4}\approx\pm 0{,}21\,\pi$ olduqda. Əyilmə nöqtələri: $x_{1,2}=$ $=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1+\sqrt{129}}{16}\approx\pm 0{,}11\pi$, $y_{1,2}\approx 0{,}29$; $x_{3,4}=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1-\sqrt{129}}{16}\approx$ $\approx\pm 0{,}36\,\pi$, $y_{3,4}\approx -0{,}24$. **1503.** Funksiyanın periodu: $T=\pi$; əsas oblast $0\le x\le\pi$. Kəsilmə nöqtəsi: $x=\frac{3\pi}{4}$. Sıfırları: $x_1=0$, $x_2=\pi$. Ekstremumları yoxdur, funksiya artır. Əyilmə nöqtəsi: $x=\frac{\pi}{4}$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Asimptotu $x=\frac{3\pi}{4}$. **1504.** Funksiyanın periodu: $T=2\pi$; əsas oblast $[-\pi,\pi]$. Oy oxuna nəzərən simmetriya. Funksiyanın sıfırları: $x_{1,2}=\pm\frac{\pi}{2}$. Minimum $y=1$, $x=0$ olduqda; maksimum $y=-1$, $x=\pm\pi$ olduqda. Əyilmə nöqtələri: $x_{1,2}=\frac{\pi}{2}$; $y_{1,2}=0$. Asimptotları: $x=\pm\frac{\pi}{4}$ və $x=\pm\frac{3\pi}{4}$. **1504.1.** Funksiyanın periodu: $T=2\pi$; əsas oblast $-\pi\le x\le\pi$. Funksiya təkdir. Minimum $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}\approx -0{,}58$, $x=-\frac{2\pi}{3}$ olduqda; maksimum $y=\frac{\sqrt{3}}{3}\approx 0{,}58$, $x=\frac{2\pi}{3}$ olduqda. Əyilmə nöqtələri: $x_1=0, y_1=0$; $x_{2,3}=\mp\pi$,

$y_{2,3}=0$. **1505.** Simmetriya mərkəzləri: $(k\pi, 2k\pi)$. Funksiyanın sıfırları: $x_1=0$, $x_{2,3}\approx\pm 0{,}37\pi$,... Maksimumları: $y=\frac{\pi}{2}-1+2k\pi$, $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ olduqda; minimumları $y=-\left(\frac{\pi}{2}-1+2k\pi\right)$, $x=-\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$ olduqda. Əyilmə nöqtələri: $x=k\pi$, $y=2k\pi$. Asimptotları: $x=\frac{2k+1}{2}\pi$ (k - tamdır). **1506.** $x=1$ düz xəttinə nəzərən simmetriya. Funksiya müsbətdir. Maksimum $y=e$, $x=1$ olduqda. Əyilmə nöqtələri: $x_{1,2}=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_{1,2}=\sqrt{e}\approx 1{,}65$. Asimptotu $y=0$. **1507.** *Oy* oxuna nəzərən simmetriya. Funksiya müsbətdir. Maksimum $y=1$, $x=0$ olduqda. Əyilmə nöqtələri: $x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\approx\pm 1{,}22$, $y_{1,2}=\frac{5}{2}e^{-\frac{3}{2}}\approx 0{,}56$. Asimptotu: $y=0$. **1508.** Funksiya müsbətdir. Minimum $y=1$, $x=0$ olduqda. Yuxarıya doğru çökükdür. Asimptotu $y=x$, $x\to+\infty$ olduqda. **1509.** Funksiya mənfi deyil, sıfırı $x=0$. Minimum $y=0$, $x=0$ olduqda; maksimum $y=\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\,e^{-\frac{3}{2}}\approx 0{,}39$, $x=\frac{2}{3}$ olduqda. Əyilmə nöqtələri: $x_1=\frac{2-\sqrt{6}}{3}\approx -0{,}15$, $y_1\approx 0{,}34$, $x_2=\frac{2+\sqrt{6}}{3}\approx 1{,}48$, $y_2\approx 0{,}30$. Asimptotu $y=0$, $x\to+\infty$ olduqda. **1509.1.** Funksiya mənfi deyil. Minimum $y=0$, $x=k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,...)$ olduqda; maksimumları $y=\frac{1}{2}e^{-\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}$, $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ olduqda. Əyilmə nöqtələri $x_k=(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi$, $y_k=\frac{1}{4}e^{-\left[2k+\frac{1}{3}(-1)^k\right]\pi}$. **1510.** $x>-1$ olduqda fuqkstya müsbətdir və $x<-1$ olduqda mənfidir. Minimum $y=1$, $x=0$ olduqda. $x>-1$ olduqda yuxarıya doğru çökükdür və $x<-1$ olduqda aşağıya doğru çökükdür. **1511.** *Oy* oxuna nəzərən simmetriya. Funksiya mənfi deyil, sıfırı $x=0$. Minimum $y=0$ (künc nöqtələri), $x=0$ olduqda. Aşağıya doğru çökükdür. **1512.** Funksiyanın təyin oblastı: $x>0$. Funksiyanın sıfırı $x=1$. Maksimum $y=\frac{2}{e}\approx 0{,}74$, $x=e^2\approx 7{,}39$ olduqda. Əyilmə nöqtəsi $x=e^{\frac{8}{3}}\approx 14{,}33$, $y=\frac{8}{3}e^{-\frac{4}{3}}\approx 0{,}70$. Asimptotları: $x=0$, $x\to+0$ olduqda və $y=0$, $x\to+\infty$ olduqda.

1513. Koordinat başlanğıcına nəzərən simmetriya. Sıfırı $x=0$. Ekstremum nöqtələri yoxdur, funksiya artandır. Əyilmə nöqtəsi: $x=0$, $y=0$.
1514. Koordinat başlanğıcına nəzərən simmetriya. Funksiyanın sıfırı $x=0$. Funksiya artır. $x>0$ olduqda funksiya yuxarıya doğru çökükdür və $x<0$ olduqda aşağıya doğru çökükdür; $O(0,0)$ - əyilmə nöqtəsi.
1515. Funksiyanın təyin oblastı: $|x|<1$. Koordinat başlanğıcına nəzərən simmetriya. Funksiya monoton artır. $x>0$ olduqda funksiya yuxarıya doğru çökükdür və $x<0$ olduqda aşağıya doğru çökükdür; əyilmə nöqtəsi: $x=0$, $y=0$. Asimptotları: $x=\pm 1$. **1516.** Koordinat başlanğıcına nəzərən simmetriya. Funksiyanın sıfırı: $x=0$. Funksiyanın ekstremumu yoxdur, funksiya artandır. Əyilmə nöqtəsi: $x=0$, $y=0$. Asimptotları: $y=x-\frac{\pi}{2}$, $x\to-\infty$ olduqda və $y=x+\frac{\pi}{2}$, $x\to+\infty$ olduqda.
1517. Funksiyanın sıfırı $x\approx-5{,}95$. Minimum $y=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\approx 1{,}285$, $x=1$ olduqda; maksimum $y=-\frac{1}{2}+\frac{3\pi}{4}\approx 1{,}856$, $x=-1$ olduqda. $x>0$ olduqda yuxarıya doğru çökükdür və $x<0$ olduqda aşağıya doğru çökükdür; əyilmə nöqtəsi $x=0$, $y=\frac{\pi}{2}$. Asimptotları $y=\frac{x}{2}+\pi$, $x\to-\infty$ olduqda və $y=\frac{x}{2}$, $x\to+\infty$ olduqda. **1518.** *Oy* oxuna nəzərən simmetriya. Funksiya mənfi deyil; sıfırı $x=0$. Minimum $y=0$, $x=0$ olduqda. Asimptotları: $y=-\frac{\pi}{2}x-1$, $x\to-\infty$ olduqda və $y=\frac{\pi}{2}x-1$, $x\to+\infty$ olduqda. **1519.** Koordinat başlanğıcına nəzərən simmetriya. Funksiyanın sıfırı $x=0$. Minimum $y=-\frac{\pi}{2}$ (künc nöqtəsi), $x=1$ olduqda; maksimum $y=\frac{\pi}{2}$ (küc nöqtəsi), $x=1$ olduqda. Əyilmə nöqtəsi $x=0$, $y=0$. Asimptotu $y=0$. **1520.** *Oy* oxuna nəzərən simmetriya.
Funksiya mənfi deyil; sıfırı $x=0$. Minimum $y=0$, $x=0$ olduqda (künc nöqtəsi). Aşağıya doğru çökükdür. Asimptotu $y=\pi$. **1521.** Funksiyanın kəsilmə nöqtəsi $x=0$. Funksiyanın sıfırı $x=-2$. Minimum $y=4\sqrt{e}\approx 6{,}59$, $x=2$ olduqda; maksimum $y=\frac{1}{e}\approx 0{,}37$, $x=-1$ olduqda. Əyilmə nöqtəsi $x=-\frac{2}{5}$, $y=\frac{8}{5}e^{-5/2}\approx 0{,}13$. Asimptotları: $x=0$ və $y=x+3$. **1522.** Funksiyanın təyin oblastı $|x|\geq 1$. *Oy* oxuna nəzərən simmetriya. Uc maksimumu $y=2^{\sqrt{2}}\approx 2{,}67$, $x=\pm 1$ olduqda. Yuxarıya

doğru çökükdür. Asimptotu $y=1$. **1523.** Funksiyanın təyin oblastı $x<1$ və $x>2$. Koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələri: $(0, \ln 2)$ və $(1/3, 0)$. Maksimum $y\approx 1{,}12$, $x=\frac{1-\sqrt{10}}{3}\approx -0{,}72$ olduqda. Asimptotları: $x=1$ $x=2$ və $y=0$. **1524.** Funksiyanın təyin oblastı $|x|\leq a$. Koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələri: $(0,-a)$ və $(0{,}67a, 0)$ (təqribən!). Funksiya monoton artır. Uc minimumu $y=-\frac{\pi}{2}a$, $x=-a$ olduqda və $y=\frac{\pi}{2}a$, $x=a$ olduqda. Yuxarıya doğru çökükdür. **1525.** Funksiyanın təyin oblastı $x\leq 0$ və $x\geq\frac{2}{3}$. Uc minimmu $y=0$, $x=0$ olduqda; uc maksimumu $y=\pi$, $x=\frac{2}{3}$ olduqda. $x\leq 0$ olduqda aşağıya doğru çökükdür və $x\geq\frac{2}{3}$ olduqda yuxarıya doğru çökükdür. Asimptotu $y=\frac{\pi}{3}$. **1526.** Funksiyanın təyin oblastı $x>0$. Funksiya müsbətdir. Minimum $y=\left(\frac{1}{e}\right)^{1/e}\approx 0{,}692$, $x=\frac{1}{e}\approx 0{,}368$ olduqda; uc maksimumu $y=1$, $x=+0$ olduqda. **1527.** Funksiyanın təyin oblastı $x>0$. Uc minimumu $y=0$, $x=+0$ olduqda; maksimum $y=e^{\frac{1}{e}}\approx 1{,}44$, $x=e$ olduqda. Asimptotu $y=1$. **1528.** Təyin oblastı: $x>-1$, $x\neq 0$. Funksiya müsbətdir. Aradan qaldırıla bilən kəsilmə nöqtəsi: $x=0$. Ekstremum nöqtələri yoxdur, funksiya azalandır. Yuxarıya doğru çökükdür. Asimptotları: $x=-1$ və $y=1$. **1529.** $x>0$ olduqda fnuksiya monotondur. Uc minimumu $y=0$, $x=+0$ olduqda. Asimptotu $y=e\left(x-\frac{1}{2}\right)$. **1530.** Funksiya müsbətdir. *Oy* oxuna nəzərən simmetriya. Kəsilmə nöqtələri: $x=\pm 1$. Minimum $y=e$, $x=0$ olduqda; maksimum $y=\frac{1}{4\sqrt{e}}\approx 0{,}15$, $x=\pm\sqrt{3}$ olduqda. Dörd əyilmə nöqtəsi var. Asimptotları: $x=-1$, $x\to -1+0$ olduqda; $x=1$, $x\to 1-0$ olduqda və $y=0$, $x\to\infty$ olduqda. **1531.** x və y funksiyaları mənfi deyillər; $x_{min}=0$, $t=-1$ olduqda; $y_{min}=0$, $t=1$ olduqda. $t>-1$ olduqda yuxarıya doğru çökükdür və $t<-1$ olduqda aşağıya doğru çökükdür. **1532.** Koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələri: (0, 0), $t=0$ olduqda; $(\pm 2\sqrt{3}-3, 0)$, $t=\pm\sqrt{3}$ olduqda və $(0,-2)$, $t=2$ olduqda; $x_{max}=1$ və $y_{max}=2$, $t=1$

olduqda; $y_{min}=-2$, $t=-1$ olduqda. $t<1$ olduqda yuxarıya doğru və $t>1$ olduqda aşağıya doğru çökükdür. **1533.** Koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələri: (0, 0), $t=0$ olduqda; $x_{max}=0$, $t=0$ olduqda, $x_{min}=4$, $t=2$ olduqda; t artdıqda y azalır. Əyilmə nöqtəsi $(-0{,}08; 0{,}3)$, $t\approx-0{,}32$ olduqda (təqribən). Asimptotları: $y=0$, $x=-\frac{1}{2}$ və $y=\frac{x}{2}-\frac{3}{4}$. **1534.** Oy oxu ilə kəsişmə nöqtəsi: (0, 1), $t=0$ olduqda; Ox oxu ilə kəsişmə nöqtəsi: (–1,0), $t=\infty$ olduqda. Uc minimumları: $x_{min}=0$ və $y_{max}=1$, $t=0$ olduqda; $x_{max}=-1$ və $y_{min}=0$, $t=\infty$ olduqda. $|t|>1$ olduqda yuxarıya doğru və $|t|<1$ olduqda aşağıya doğru çökükdür. **1535.** x və y funksiyaları müsbətdir; $x_{min}=1$ və $y_{min}=1$, $t=0$ olduqda (qayıdış nöqtəsi). $t<0$ olduqda yuxarıya doğru və $t>0$ olduqda aşağıya doğru çökükdür. Asimptotu $y=2x$, $t\to+\infty$ olduqda. **1536.** Əsas oblast: $[0, \pi]$. Koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələri: $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$, $t=\frac{\pi}{6}$ olduqda; $\left(0, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$, $t=\frac{\pi}{4}$ olduqda; $(-a, 0)$, $t=\frac{\pi}{2}$ olduqda; $\left(0, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$, $t=\frac{3\pi}{4}$ olduqda; $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$, $t=\frac{5\pi}{6}$ olduqda. Ekstremumları: $x_{max}=a$ və $y_{max}=a$, $t=0$ olduqda; $y_{min}=-a$, $t=\frac{\pi}{3}$ olduqda; $x_{min}=-a$, $t=\frac{\pi}{2}$ olduqda; $y_{max}=a$, $t=\frac{2\pi}{3}$ olduqda; $x_{max}=a$ və $y_{min}=-a$, $t=\pi$ olduqda. $0<t<\frac{\pi}{2}$ olduqda yuxarıya doğru və $\frac{\pi}{2}<t<\pi$ olduqda aşağıya doğru çökükdür. **1537.** x və y funksiyaları mənfi deyildirlər və periodikdirlər; əsas oblast $0\le t\le\frac{\pi}{2}$. Ekstremumları: $x_{min}=0$ və $y_{max}=1$, $t=\frac{\pi}{2}$ olduqda və $x_{max}=1$ və $y_{min}=0$, $t=0$ olduqda. Yuxarıya doğru çökükdür. **1538.** Təyin oblastı: $t>0$. $x+y=0$ oxuna nəzərən simmetriya. Ekstremumları: $x_{min}=-\frac{1}{e}\approx-0{,}37$, $y=-e\approx-2{,}72$, $t=\frac{1}{e}$ olduqda; $y_{max}=\frac{1}{e}$, $x=e$, $t=e$ olduqda. Əyilmə nöqtələri: $x_1=-\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}\approx-0{,}34$, $y_1=-\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}\approx-5{,}82$, $t=e^{-\sqrt{2}}\approx0{,}24$ olduqda və $x_2=\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$, $y_2=\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}$, $t=e^{\sqrt{2}}\approx4{,}10$ olduqda. $t=\frac{1}{e}$ olduqda çöküklüyün işarəsi dəyişir. Asimptotları: $x=0$ və $y=0$. **1539.** x və y - $T=2\pi$ periodlu periodik funksiyalardır; əsas oblast $-\pi \le t \le \pi$. Koordinat oxlarına nəzərən simmetriya. Əyrinin iki budağı var. Ekstremumları: $x_{\min}=a$, $y=0$, $t=0$ olduqda; $x_{\max}=-a$, $y=0$, $t=\pm\pi$ olduqda. $-\pi<t<-\pi/2$ və $0<t<\pi/2$ olduqda çöküklük yuxarıya doğru; $-\pi/2<t<0$ və $\pi/2<t<\pi$ olduqda çöküklük aşağıya doğrudur. **1540.** Oy oxuna nəzərən simmetriya. $y_{\min}=0$, $x=0$, $t=0$ olduqda. Aşağıya doğru çökükdür. **1541.** Parametrik tənlikləri: $x=\frac{3at}{1+t^3}$, $y=\frac{3at^2}{1+t^3}$ $(-\infty<t<+\infty)$ $y=x$ düz xəttinə nəzərən simmetriya. Koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtəsi: $O(0,0)$ (ikili nöqtə). $x_{\max}=a\sqrt[3]{4}\approx 1{,}59a$, $y=a\sqrt[3]{2}\approx 1{,}2a$ olduqda; $y_{\max}=a\sqrt[3]{4}$, $x=a\sqrt[3]{2}$ olduqda. Asimptotu $x+y+a=0$ **1542.** Koordinat başlanğıcına, koordinat oxlarına və koordinat bucaqlarının tənbölənlərinə nəzərən simmetriya. $O(0,0)$ - izolə edilmiş nöqtə. Koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələri: $(\pm 1,0)$ və $(0,\pm 1)$. $|x|_{\min}=1$. $y=0$ olduqda; $|x|_{\max}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\approx 1{,}10$, $|y|=\sqrt{\frac{1}{2}}\approx 0{,}71$ olduqda; $|y|_{\min}=1$. $x=0$ olduqda; $|y|_{\max}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$, $|x|=\sqrt{\frac{1}{2}}$ olduqda. **1543.** Parametrik tənlikləri: $x=\frac{1-t^3}{t^2}$, $x=\frac{1-t^3}{t}$, burada $t=\frac{y}{x}$ $(-\infty<t<+\infty)$. Əyrinin iki budağı var. $x+y=0$ düz xəttinə nəzərən simmetriya. Ekstremumları: $x_{\min}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}\approx 1{,}89$, $y=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}\approx -2{,}38$, $t=-\sqrt[3]{2}\approx -1{,}26$ olduqda; $y_{\max}=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$, $x=\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}$, $t=-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\approx -0{,}79$ olduqda. Əyilmə nöqtələri: $x_1\approx 2{,}18$, $y_1\approx -4{,}14$, $t=-\sqrt[3]{\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5})}\approx -1{,}90$ olduqda; $x_2\approx 4{,}14$, $y_2\approx -2{,}18$, $t=-\sqrt[3]{\frac{1}{2}(7-3\sqrt{5})}\approx -0{,}53$ olduqda; $t=-\sqrt[3]{2}$ olduqda çöküklük işarəsini dəyişir. **1544.** Əyri $y=x$ düz xəttindən və $x=(1+t)^{\frac{1}{t}}$, $x=(1+t)^{1+\frac{1}{t}}$ $(-1<t<+\infty)$ hiperbolik budaqdan ibarətdir. $(e,\ e)$ - ikili nöqtə. $x\ne y$ olduqda yuxarıya doğru çökükdür. Asimptotları: $x=1$ və $y=1$. **1545.** Təyin oblastı: $|x|\ge \ln(1+\sqrt{2})\approx 0{,}88$. Koordinat oxlarına nəzərən simmetriya. Uc minimumu $|y|=0$, $x=\pm\ln(1+\sqrt{2})$ olduqda.

$y>0$ olduqda çöküklük yuxarıya doğru və $y<0$ olduqda çöküklük aşağıya doğrudur. Asimptotları: $y=x$ və $y=-x$. **1546.** Funksiyanın təyin oblastı: $r\geq 0$, $|\varphi|\leq\alpha$, burada $\alpha=\arccos\left(-\frac{a}{b}\right)$. Əyri qapalıdır. Polyar oxa nəzərən simmetriya. Maksimum $r=a+b$, $\varphi=0$ olduqda; uc minimumu $r=0$, $\varphi=\pm\alpha$ olduqda. **1547.** Təyin oblastı: $0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}\leq\varphi\leq\pi$; $\frac{4\pi}{3}\leq\varphi\leq\frac{5\pi}{3}$. r - $\frac{2\pi}{3}$ periodlu periodik funksiyadır. Əyri qapalıdır və üç eyni yarpağa malikdir. Simmetriya oxları: $\varphi=\frac{\pi}{6}$, $\varphi=\frac{5\pi}{6}$ və $\varphi=\frac{3\pi}{2}$. Koordinat başlanğıcı $O(0,0)$ - üçlü nöqtə. $0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{3}$ olduqda alırıq: $r=a$, $\varphi=\frac{\pi}{6}$ olduqda; $r=0$, $\varphi=0$ və $\varphi=\frac{\pi}{3}$ olduqda. **1548.** Funksiyanın təyin oblastı: $|\varphi|<\frac{\pi}{6}$ və $\frac{\pi}{2}<|\varphi|<\frac{5}{6}\pi$; periodu: $\frac{2\pi}{3}$. Minimum $r=a$, $\varphi=0$ və $\varphi=\pm\frac{2\pi}{3}$ olduqda. Asimptotları: $\varphi=\pm\frac{\pi}{6}$, $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$ və $\varphi=\pm\frac{5\pi}{6}$. **1549.** Koordinat başlanğıcı asimptotik nöqtəsi olan r spiralı φ artdıqda monoton azalır. Asimptotu $\varphi=1$. **1550.** Təyin oblastı: $r\geq\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0,62$. Uc maksimumu $\varphi=\pi$, $r=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ olduqda; minimum $\varphi=\arccos\frac{1}{4}\approx\text{arc}\,75^{0}30'$, $r=2$ olduqda. Asimptotu $r\cos\varphi=1$, $r\to+\infty$ olduqda. **1551.** $(1,\ a-1)$ başlanğıclı (minimumları) parabolalar ailəsi. Koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələri: $(0,\ a)$ və $(1\mp\sqrt{1-a},\ 0)$ ($a\leq 1$ olduqda). Yuxarıya doğru çökükdür. **1552.** $a\neq 0$ olduqda hiperbolalar ailəsi və $a=0$ olduqda $y=x$ düz xətti. Minimum $y=2|a|$, $x=|a|$ olduqda və $y=-2|a|$, $x=-|a|$ olduqda $(a\neq 0)$. Asimptotları: $y=x$ və $x=0$. **1553.** $0<a<+\infty$ olduqda ellipslər ailəsi; $-\infty<a<0$ olduqda hiperbolalar ailəsi; $a=0$ olduqda $y=x$ düz xətti. Ailələrin bütün əyriləri $(-1,\ -1)$ və $(1,\ 1)$ nöqtələrindən keçir. $y\geq x$ olduqda alırıq: 1) $a>0$ olarsa, maksimum $y=\sqrt{1+a}$, $x=\frac{1}{\sqrt{1+a}}$ olduqda; $-1<a<0$ olarsa, maksimum $y=-\sqrt{1+a}$, $x=-\frac{1}{\sqrt{1+a}}$ olduqda;

uc minimumları $y=\mp 1$, $x=\mp 1$ $(a\neq 0)$ olduqda; 2) aşağıya doğru çökükdür. $y\leq x$ olduqda alırıq: 1) $a>0$ olarsa, minimum $y=-\sqrt{1+a}$, $x=-\frac{1}{\sqrt{1+a}}$ olduqda; $-1<a<0$ olarsa, minimum $y=\sqrt{1+a}$, $x=\frac{1}{\sqrt{1+a}}$ olduqda; maksimumları $y=\mp 1$, $x=\mp 1$ olduqda; 2) yuxarıya doğru çökükdür. Asimptotları: $y=(1+\sqrt{-a})x$ və $y=(1-\sqrt{-a})x$, $a<0$ olduqda.
1554. $a\neq 0$ olarsa, üstlü əyrilər ailəsi; $a=0$ olarsa, $y=1+\frac{x}{2}$ düz xətti. Ailələrin ortaq nöqtəsi: (0,1). $a>0$ olarsa, minimumları $y=\frac{1}{2a}(1+\ln 2a)$, $x=\frac{1}{a}\ln 2a$ olduqda; $a\leq 0$ olarsa, y monoton artır. Asimptotu $y=\frac{x}{2}$.
1555. (0,0) nöqtəsindən keçən və bu nöqtədə $y=x$ düz xətti ilə orta toxunmaya malik olan əyrilər ailəsi. $a>0$ olarsa, maksimum $y=ae^{-1}\approx 0{,}37a$, $x=a$ olduqda; $a<0$ olarsa, minimum $y=ae^{-1}$, $x=a$ olduqda. Əyilmə nöqtəsi $x=2a$, $y=2ae^{-2}\approx 0{,}27a$. Asimptotu $y=0$.
1558. $\frac{a^{m+n}m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$. **1559.** $(m+n)\left(\frac{a^{mn}}{m^m n^n}\right)^{\frac{1}{m+n}}$. **1560.** Loqarifmaların əsasları $e^{\frac{1}{e}}\approx 1{,}445$-i aşmamalıdır. **1561.** Tərəfi $\sqrt{S}$ olan kvadrat. **1562.** Üçbucağın iti bucaqları 30^0 və 60^0-dir. **1563.** Bankanın $H=2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ hündürlüyü onun əsasının diametrinə bərabərdir; tam səthinin sahəsi $P=\sqrt[3]{54\pi V^2}$. **1564.** $\cos\varphi=\frac{\cos\alpha+\sqrt{\cos^2\alpha+8}}{4}$, burada 2α - seqmentin qövsü və 2φ - düzbucaqlının tərəfi ilə gərilmiş qövsdür.
1565. Düzbucaqlının tərəfləri $a\sqrt{2}$ və $b\sqrt{2}$-dir. **1566.** $h>b$ olarsa, x oturacaqlı və y hündürlüklü daxilə çəkilmiş düzbucaqlının P perimetri $y=h$ olduqda uc maksimumuna malikdir; $h<b$ olarsa, P perimetri $y=0$ olduqda uc minimumuna malikdir; $h=b$ olarsa, P perimetri sabitdir. **1567.** $b=\frac{d}{\sqrt{3}}$, $h=d\sqrt{\frac{2}{3}}$. **1568.** Paralelepipedin ölçüləri: $\frac{2R}{\sqrt{3}}$, $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ və $\frac{R}{\sqrt{3}}$. **1569.** $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}R^3$. **1570.** Kürənin səthinin $\pi R^2(1+\sqrt{5})\approx 81\%$-i.
1571. Konusun həcmi kürənin həcminin iki mislinə bərabərdir.

1572. $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$. **1573.** $\operatorname{tg}\alpha<\frac{1}{2}$ olarsa, silindrin tam səthinin sahəsi maksimuma $r=\frac{R}{2(1-\operatorname{tg}\alpha)}$ olduqda çatır, burada r – silindrin oturacağının sahəsidir. $\operatorname{tg}\alpha\geq\frac{1}{2}$ olarsa, uc maksimumu $r=R$ olduqda alırıq. **1574.** $p(\sqrt[3]{2}-1)\sqrt{\frac{2+\sqrt[3]{2}}{2}}$. **1575.** 1; 3. **1576.** $b\leq\frac{a}{\sqrt{2}}$ olarsa, onda $MB=\frac{a^2}{c}$ vətərinin uzunluğu minimumu $x=\pm\frac{a^2}{c^2}\sqrt{a^2-2b^2}$ olduqda alır, burada , $c=\sqrt{a^2-b^2}$ və M nöqtəsi x və y koordinatlarına malikdir; $y=\frac{b^3}{c^2}$; $b>\frac{a}{\sqrt{2}}$ olarsa, onda $MB=2b$ vətərinin uzunluğu uc maksimumu $x=0$, $y=b$ olduqda alır. **1577.** $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$, $y=\frac{b}{\sqrt{2}}$; ab. **1578.** Səth minimumu $r=h=\sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$ olduqda alır, burada r – silindrin oturacağının radiusu və h – onun hündürlüyüdür. **1579.** $\varphi=60^0$. **1580.** Çevrə xaricinə çəkilmiş trapesiya. Yan tərəflər $AB=CD=a\sec^2\frac{\alpha}{2}$. **1581.** $\alpha=2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\approx\operatorname{arc}294^0$, burada α – qalan sektorun mərkəzi bucağıdır. **1582.** $\varphi=\arccos\frac{q}{p}$, $\arccos\frac{q}{p}\geq\operatorname{arctg}\frac{a}{b}$ olduqda; $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{a}{b}$, $\frac{q}{p}<\operatorname{arctg}\frac{a}{b}$ olduqda. **1583.** $\frac{|av\mp bu|\sin\theta}{\sqrt{u^2+v^2-2uv\cos\theta}}$. **1584.** $AM=a\left(1+\sqrt[3]{\frac{S_2}{S_1}}\right)^{-1}$. **1585.** $a\geq r+R\sqrt{\frac{R}{r}}$ olarsa, böyük kürənin mərkəzindən parlayan nöqtəyə qədər olan məsafə $x=\frac{a}{1+\left(\frac{r}{R}\right)^{3/2}}$; $r+R<a<r+R\sqrt{\frac{R}{r}}$ olarsa, $x=a-r$, burada a – kürələrin mərkəzləri arasındakı məsafədir. **1586.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **1587.** $(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$.

1588. $v=\sqrt[3]{\dfrac{a}{2k}}$, burada k – mütənasiblik əmsalıdır. **1589.** $\operatorname{arctg} k$.

1590. $l \le 4a$ olduqda milin maillik bucağı $\cos\alpha=\dfrac{l+\sqrt{l^2+128\,a^2}}{16a}$ düsturu ilə təyin olunur; $l>4a$ olduqda isə tarazlıq vəziyyəti yoxdur.

1591. $k=-3$; $b=3$; $y=3(1-x)$. **1592.** $a=\dfrac{1}{2}e^{x_0}$; $b=e^{x_0}(1-x_0)$; $c=e^{x_0}\left(1-x_0+\dfrac{x_0^2}{2}\right)$. **1593.** a) Birinci; b) ikinci; c) ikinci. **1595.** a) $\sqrt{2}$, (2,2); b) 500 000, (150, 500 000) (təqribən!). **1596.** $p\left(1+\dfrac{2x}{p}\right)^{\frac{3}{2}}$.

1597. $\dfrac{(a^2-\varepsilon^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}$, burada $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ - ellipsin ekssentrisitetidir.

1598. $\dfrac{(\varepsilon^2x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}$, burada $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ - hiperbolanın ekssentrisitetidir.

1599. $3|a\,xy|^{\frac{1}{3}}$. **1600.** $\dfrac{a^2}{b}(1-\varepsilon^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}$, burada ε – ellipsin ekssentrisitetidir. **1601.** $2\sqrt{2ay}$. **1602.** at. **1604.** $\dfrac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{|r^2+2r'^2-rr''|}$. **1605.** $\dfrac{(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^2+r^2}$.

1606. $r\sqrt{1+m^2}$. **1607.** $\dfrac{2}{3}\sqrt{2ar}$. **1608.** $\dfrac{a^2}{3r}$. **1609.** $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{\ln 2}{2}\right)$.

1610. $x_0\approx 680$ *m*. **1611.** $27p\eta^2=8(\xi-p)^3$ yarımkub parabolası. **1612.** $(a\xi)^{2/3}+(b\eta)^{2/3}=c^{4/3}$ astroidi, burada $c^2=a^2-b^2$.

1613. $(\xi+\eta)^{2/3}+(\xi-\eta)^{2/3}=2a^{2/3}$ astroidi. **1614.** $\eta=a\operatorname{ch}\dfrac{\xi}{a}$ zəncirvari əyri. **1615.** $\rho=mae^{m\left(\psi-\frac{\pi}{2}\right)}$ loqarifmik spiralı. **1616.** $\xi=\pi a+a(\tau-\sin\tau)$; $\eta=-2a+a(1-\cos\tau)$, $\tau=t-\pi$. **1617.** $x_1=-2{,}602$; $x_2=0{,}340$; $x_3=2{,}262$. **1618.** $x_1=-0{,}724$; $x_2=1{,}221$. **1619.** $x=2{,}087=\operatorname{arc}119^0 35'$. **1620.** $\pm\,0{,}824$. **1621.** $x_1=0{,}472$; $x_2=9{,}999$. **1622.** $x_1=2{,}5062$. **1623.** $x_1=4{,}730$; $x_2=7{,}853$. **1624.** $x=-0{,}56715$. **1625.** $x=\pm\,1{,}199678$. **1626.** $x_1=4{,}493$; $x_2=7{,}725$; $x_3=10{,}904$. **1627.** $x_1=2{,}081$; $x_2=5{,}940$.

III Bölmə

Bu bölmənin cavablarında qısa olmaq xatirinə ixtiyari additiv C sabiti göstərilməyib. **1628.** $27x-9x^3+\frac{9}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7$. **1629.** $\frac{625}{3}x^3-125x^4+30x^5-\frac{10}{3}x^6+\frac{1}{7}x^7$. **1630.** $x-3x^2+\frac{11}{3}x^3-\frac{3}{2}x^4$. **1631.** $x-\frac{1}{x}-2\ln|x|$. **1632.** $a\ln|x|-\frac{a^2}{x}-\frac{a^3}{2x^2}$. **1633.** $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}$.
1634. $\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}-\frac{24}{17}x\sqrt[12]{x^5}+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}$. **1635.** $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\left(1+\frac{3}{2}x-\frac{3}{5}x^2+\frac{1}{8}x^3\right)$.
1636. $\frac{4(x^2+7)}{7\sqrt[4]{x}}$. **1637.** $2x-\frac{12}{5}\sqrt[6]{72x^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{9x^2}$. **1638.** $\ln|x|-\frac{1}{4x^4}$.
1639. $x-\operatorname{arctg}x$. **1640.** $-x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$. **1641.** $x+2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$.
1642. $\arcsin x+\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. **1643.** $\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right|$. **1644.** $\frac{4^x}{\ln 4}+2\cdot\frac{6^x}{\ln 6}+\frac{9^x}{\ln 9}$. **1645.** $-\frac{2}{\ln 5}\left(\frac{1}{5}\right)^x+\frac{1}{5\ln 2}\left(\frac{1}{2}\right)^x$. **1646.** $\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x$.
1647. $x-\cos x+\sin x$. **1648.** $(\cos x+\sin x)\cdot\operatorname{sgn}(\cos x-\sin x)$.
1649. $-x-\operatorname{ctg}x$. **1650.** $-x+\operatorname{tg}x$. **1651.** $a\operatorname{ch}x+b\operatorname{sh}x$. **1652.** $x-\operatorname{th}x$.
1653. $x-\operatorname{cth}x$. **1655.** $\ln|x+a|$. **1656.** $\frac{1}{22}(2x-3)^{11}$. **1657.** $-\frac{1}{4}(1-3x)^{\frac{4}{3}}$.
1658. $-\frac{2}{5}\sqrt{2-5x}$. **1659.** $-\frac{2}{15(5x-2)^{\frac{3}{2}}}$. **1660.** $-\frac{5}{2}\sqrt[5]{(1-x)^2}$. **1661.** $\frac{1}{\sqrt{6}}\times\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$. **1662.** $\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x\sqrt{3}}{\sqrt{2}-x\sqrt{3}}\right|$. **1663.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.
1664. $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|x\sqrt{3}+\sqrt{3x^2-2}|$. **1665.** $-\left(e^{-x}+\frac{1}{2}e^{-2x}\right)$. **1666.** $-x\sin 5\alpha-\frac{1}{5}\cos 5x$.
1667. $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$. **1668.** $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. **1669.** $-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$. **1670.** $-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$.
1671. $\frac{1}{2}[\operatorname{ch}(2x+1)+\operatorname{sh}(2x-1)]$. **1672.** $2\operatorname{th}\frac{x}{2}$. **1673.** $-2\operatorname{cth}\frac{x}{2}$.
1674. $-\sqrt{1-x^2}$. **1675.** $\frac{1}{4}(1+x^3)^{\frac{4}{3}}$. **1676.** $-\frac{1}{4}\ln|3-2x^2|$.

1677. $-\frac{1}{2(1+x^2)}$. **1678.** $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2}$. **1679.** $\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right|$.

1680. $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}$. **1681.** $\cos\frac{1}{x}$. **1682.** $-\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|$. **1683.** $-\arcsin\frac{1}{|x|}$.

1684. $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. **1685.** $-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. **1686.** $\frac{1}{8}\sqrt[3]{8x^3+27}$.

1687. $2\operatorname{sgn}x\ln(\sqrt{|x|}+\sqrt{|1+x|})\quad(x(1+x)>0)$. **1688.** $2\arcsin\sqrt{x}$.

1689. $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$. **1690.** $\ln(2+e^x)$. **1691.** $\operatorname{arctg}e^x$. **1692.** $-\ln(e^{-x}+\sqrt{1+e^{-2x}})$.

1693. $\frac{1}{3}\ln^3x$. **1694.** $\ln|\ln(\ln x)|$. **1695.** $\frac{1}{6}\sin^6x$. **1696.** $\frac{2}{\sqrt{\cos x}}$.

1697. $-\ln|\cos x|$. **1698.** $\ln|\sin x|$. **1699.** $\frac{3}{2}\sqrt[3]{1-\sin 2x}$.

1700. $\frac{\sqrt{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}}{a^2-b^2}\quad(a^2\neq b^2)$. **1700.1.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\sqrt{2}\cos x+\sqrt{\cos 2x}|$.

1700.2. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin(\sqrt{2}\sin x)$. **1700.3.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}\operatorname{ch}x+\sqrt{\operatorname{ch}2x})$.

1701. $-\frac{4}{3}\sqrt[4]{\operatorname{ctg}^3x}$. **1702.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)$. **1703.** $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$.

1704. $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. **1705.** $\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|$. **1706.** $2\operatorname{arctg}e^x$.

1707. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\operatorname{ch}2x}{\sqrt{2}}+\sqrt{\operatorname{sh}^4x+\operatorname{ch}^4x}\right)$. **1708.** $3\sqrt[3]{\operatorname{th}x}$. **1709.** $\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2$.

1710. $-\frac{1}{\arcsin x}$. **1711.** $\frac{2}{3}\ln^{\frac{3}{2}}(x+\sqrt{1+x^2})$. **1712.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}$.

1713. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}$. **1714.** $-\frac{1}{15(x^5+1)^3}$. **1715.** $\frac{2}{n+2}\ln\left(x^{\frac{n+2}{2}}+\sqrt{1+x^{n+2}}\right)$,

$n\neq-2$ olduqda; $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|x|$, $n=-2$ olduqda. **1716.** $\frac{1}{4}\ln^2\frac{1+x}{1-x}$.

1717. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x\right)$. **1718.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2x)$. **1719.** $\frac{1}{2(\ln 3-\ln 2)}\times$

$\times \ln\left|\dfrac{3^x-2^x}{3^x+2^x}\right|$. **1720.** $2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$. **1721.** $\frac{4}{3}x^3-\frac{12}{5}x^5+\frac{9}{7}x^7$.

1721.1. $-\dfrac{(1-x)^{11}}{11}+\dfrac{(1-x)^{12}}{12}$. **1722.** $-x-2\ln|1-x|$. **1723.** $\frac{1}{2}(1-x)^2+$ $+\ln|1+x|$. **1724.** $9x-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-27\ln|3+x|$. **1725.** $x+\ln(1+x^2)$.

1726. $\dfrac{3}{\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}\right|+2\ln|2-x^2|-x$. **1727.** $\dfrac{1}{99(1-x)^{99}}-\dfrac{1}{49(1-x)^{98}}+$ $+\dfrac{1}{97(1-x)^{97}}$. **1728.** $\frac{x^4}{5}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln|x+1|$. **1729.** $\frac{1}{3}\left[(x+1)^{\frac{3}{2}}-\right.$ $\left.-(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]$. **1730.** $-\dfrac{8+30x}{375}(2-5x)^{\frac{3}{2}}$. **1731.** $-\dfrac{1+2x}{10}(1-3x)^{\frac{2}{3}}$.

1732. $\frac{3}{14}(1+x^2)^{\frac{7}{3}}-\frac{3}{8}(1+x^2)^{\frac{4}{3}}$. **1733.** $\frac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+3}\right|$. **1734.** $\frac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|$.

1735. $\operatorname{arctg}x-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}$. **1736.** $\dfrac{1}{10\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|-\dfrac{1}{5\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

1737. $\ln\dfrac{|x+3|^3}{(x+2)^2}$. **1738.** $\frac{1}{2}\ln\dfrac{x^2-1}{x^2+2}$. **1739.** $-\dfrac{2x+a+b}{(a-b)^2(x+a)(x+b)}+$ $+\dfrac{2}{(a-b)^3}\ln\left|\dfrac{x+a}{x+b}\right|$. **1740.** $\dfrac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{x}{b}-\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)$ $(|a|\neq|b|)$.

1741. $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x$. **1742.** $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x$. **1743.** $\frac{x}{2}\cos\alpha-\frac{1}{4}\sin(2x+\alpha)$.

1744. $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x$. **1745.** $3\sin\frac{x}{6}+\frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6}$. **1746.** $-\frac{1}{10}\cos\left(5x+\frac{\pi}{12}\right)+$ $+\frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)$. **1747.** $-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x$. **1748.** $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x$.

1749. $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x$. **1750.** $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x$.

1751. $-x-\operatorname{ctg}x$. **1752.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2x+\ln|\cos x|$. **1753.** $-\frac{3}{16}\cos 2x-\frac{3}{64}\cos 4x+$ $+\frac{1}{48}\cos 6x+\frac{3}{128}\cos 8x-\frac{1}{192}\cos 12x$. **1754.** $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x$. **1755.** $-\dfrac{1}{\sin x}+$ $+\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. **1756.** $\dfrac{1}{2\cos^2 x}+\ln|\operatorname{tg}x|$. **1757.** $\ln|\sin x|-\frac{1}{2}\sin^2 x$.

1758. $\operatorname{tg}x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x$. **1759.** $x-\ln(1+e^x)$. **1760.** $x+2\operatorname{arctg}e^x$. **1761.** $-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sh}2x$. **1762.** $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sh}2x$. **1763.** $\frac{2}{3}\operatorname{sh}^3 x$. **1764.** $\frac{1}{4}\operatorname{sh}2x+\frac{1}{8}\operatorname{sh}4x$.
1765. $-(\operatorname{th}x+\operatorname{cth}x)$. **1766.** $-\frac{3}{140}(9+12x+14x^2)(1-x)^{4/3}$.
1767. $-\frac{1+55x^2}{6\,600}(1-5x^2)^{11}$. **1768.** $-\frac{2}{15}(32+8x+3x^2)\sqrt{2-x}$.
1769. $-\frac{1}{15}(8+4x^2+3x^4)\sqrt{1-x^2}$. **1770.** $-\frac{6+25x^3}{1000}(2-5x^3)^{5/3}$.
1771. $\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{7}\sin^2 x+\frac{2}{11}\sin^4 x\right)\sqrt{\sin^3 x}$. **1772.** $-\frac{1}{2}\cos^2 x+\frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x)$.
1773. $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$. **1774.** $\frac{2}{3}(-2+\ln x)\sqrt{1+\ln x}$. **1775.** $-x-2e^{-\frac{x}{2}}+2\ln(1+e^{x/2})$. **1776.** $x-2\ln(1+\sqrt{1+e^x})$. **1777.** $(\operatorname{arctg}\sqrt{x})^2$.
1778. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. **1779.** $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}+\ln|x+\sqrt{x^2-2}|$. **1780.** $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$. **1781.** $\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$. **1782.** $-\sqrt{a^2-x^2}+a\arcsin\frac{x}{a}$.
1783. $-\frac{3a+x}{2}\sqrt{x(2a-x)}+3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}}$. **1784.** $2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}$.
1785. $\frac{2x-(a+b)}{4}\sqrt{(x-a)(b-x)}+\frac{(b-a)^2}{4}\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}$.
1786. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$. **1787.** $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$. **1788.** $\sqrt{x^2-a^2}-2a\ln(\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a})$, $x>a$ olduqda; $-\sqrt{x^2-a^2}+2a\ln(\sqrt{-x+a}+\sqrt{-x-a})$, $x<-a$ olduqda.
1789. $2\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})$, $x+a>0$ və $x+b>0$ olduqda; $-2\ln(\sqrt{-x-a}+\sqrt{-x-b})$, $x+a<0$ və $x+b<0$ olduqda.
1790. $\frac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)}-\frac{(b-a)^2}{4}\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})$, $x+a>0$ və $x+b>0$ olduqda. **1791.** $x(\ln x-1)$. **1792.** $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)$ $(n\neq-1)$. **1793.** $-\frac{1}{x}(\ln^2 x+2\ln x+2)$. **1794.** $\frac{2}{3}x^{3/2}\left(\ln^2 x-\frac{4}{3}\ln x+\frac{8}{9}\right)$.

1795. $-(x+1)\,e^{-x}$. **1796.** $-\frac{e^{-2x}}{2}\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)$. **1797.** $-\frac{x^2+1}{2}e^{-x^2}$.

1798. $x\sin x+\cos x$. **1799.** $-\frac{2x^2-1}{4}\cos 2x+\frac{x}{2}\sin 2x$. **1800.** $x\,\mathrm{ch}\,x-\mathrm{sh}\,x$.

1801. $\left(\frac{x^3}{3}+\frac{2x}{9}\right)\mathrm{sh}\,3x-\left(\frac{x^2}{3}+\frac{2}{27}\right)\mathrm{ch}\,3x$. **1802.** $x\,\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

1803. $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$. **1804.** $-\frac{x}{2}+\frac{1+x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x$. **1805.** $-\frac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2}+$ $+\frac{x^3}{3}\arccos x$. **1806.** $-\frac{\arcsin x}{x}-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|$. **1807.** $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-$ $-\sqrt{1+x^2}$. **1808.** $x-\frac{1-x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$. **1809.** $-\sqrt{x}+(1+x)\,\mathrm{arctg}\sqrt{x}$.

1810. $\ln\mathrm{tg}\frac{x}{2}-\cos x\cdot\ln\mathrm{tg}\,x$. **1811.** $\frac{1}{3}(x^3-1)\,e^{x^3}$. **1812.** $x(\arcsin x)^2+$ $+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x$. **1813.** $\frac{1+x^2}{2}(\mathrm{arctg}\,x)^2-x\,\mathrm{arctg}\,x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

1814. $-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}\ln|1-x^2|+\frac{x^3}{3}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$. **1815.** $\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-x$.

1816. $-\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x$. **1817.** $\frac{x}{2a^2(a^2+x^2)}+\frac{1}{2a^3}\mathrm{arctg}\frac{x}{a}\quad(a\neq 0)$.

1818. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{|a|}\quad(a\neq 0)$. **1819.** $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a}+\frac{a}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a}|$.

1820. $\frac{x(2x^2+a^2)}{8}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$. **1821.** $\frac{x^2}{4}-\frac{x}{4}\sin 2x-$ $-\frac{\cos 2x}{8}$. **1822.** $2(\sqrt{x}-1)\,e^{\sqrt{x}}$. **1823.** $2(6-x)\sqrt{x}\cos\sqrt{x}-6(2-x)\sin\sqrt{x}$.

1824. $-\frac{(1-x)\,e^{\mathrm{arctg}\,x}}{2\sqrt{1+x^2}}$. **1825.** $\frac{(1+x)\,e^{\mathrm{arctg}\,x}}{2\sqrt{1+x^2}}$. **1826.** $\frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]$.

1827. $\frac{x}{2}[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)]$. **1828.** $\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax}$.

1829. $\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}$. **1830.** $\frac{e^{2x}}{8}(2-\sin 2x-\cos 2x)$. **1831.** $\frac{x}{2}+$ $+\frac{1}{4}\sin 2x-e^x(\cos x+\sin x)+\frac{1}{2}e^{2x}$. **1832.** $-x+\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})-e^{-x}\,\mathrm{arctg}(e^x)$.

1833. $-[x+\mathrm{ctg}\,x\cdot\ln(e\sin x)]$. **1834.** $x\,\mathrm{tg}\,x+\ln|\cos x|$. **1835.** $\frac{e^x}{x+1}$.

1836. $\frac{1}{\sqrt{ab}}\mathrm{arctg}\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$, $ab>0$ olduqda; $\frac{\mathrm{sgn}\,a}{2\sqrt{-ab}}\ln\left|\frac{\sqrt{|a|}+x\sqrt{|b|}}{\sqrt{|a|}-x\sqrt{|b|}}\right|$,

$ab<0$ olduqda. **1837.** $\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{7}}$. **1838.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{3x+1}\right|$.

1839. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-(\sqrt{2}+1)}{x^2+(\sqrt{2}-1)}\right|$. **1840.** $\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

1841. $\frac{1}{2}\ln(x^2-2x\cos\alpha+1)+\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{arctg}\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $(\alpha\neq k\pi$, k – tamdır).

1842. $\frac{1}{4}\ln(x^4-x^2+2)+\frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2-1}{\sqrt{7}}$. **1843.** $\frac{1}{9}\ln\{|x^3+1|(x^3-2)^2\}$.

1844. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3\sin x-5\cos x}{\sin x-\cos x}\right|$. **1845.** $\operatorname{arctg}\frac{\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right)}{2}$. **1846.** $\frac{1}{\sqrt{b}}\ln(x\sqrt{b}+$ $+\sqrt{a+bx^2})$, $b>0$ olduqda; $\frac{1}{\sqrt{-b}}\arcsin\left(x\sqrt{-\frac{b}{a}}\right)$, $a>0$ və $b<0$ olduqda. **1847.** $\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}$. **1848.** $\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right|$. **1849.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(x-\frac{1}{4}+\right.$ $\left.+\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x+1}\right)$. **1851.** $-\sqrt{5+x-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{21}}$. **1852.** $\sqrt{x^2+x+1}+$ $+\frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)$. **1853.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x^2+3}{\sqrt{17}}$. **1853.1.** $\arcsin\frac{2\sin x-1}{3}$.

1854. $\frac{1}{2}\sqrt{x^4-2x^2-1}+\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1+\sqrt{x^4-2x^2-1}\right|$. **1855.** $-\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2-x^4}+$ $+\frac{3}{4}\arcsin\frac{2x^2-1}{\sqrt{5}}$. **1856.** $-\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right|$. **1857.** $\frac{\sqrt{x^2+x-1}}{x}+$ $+\frac{1}{2}\arcsin\frac{x-2}{|x|\sqrt{5}}$ $\left(\left|x+\frac{1}{2}\right|>\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$. **1858.** $\frac{-1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{2(1+x^2)}}{1+x}\right|$.

1859. $\arcsin\frac{x-2}{|x-1|\sqrt{2}}$ $(|x|>\sqrt{2})$. **1860.** $\frac{1}{5}\frac{\sqrt{x^2+2x-5}}{x+2}+$ $+\frac{1}{5\sqrt{5}}\arcsin\frac{x+7}{|x+2|\sqrt{6}}$ $(|x+1|>\sqrt{6})$. **1861.** $\frac{2x-1}{4}\sqrt{2+x-x^2}+$ $+\frac{9}{8}\arcsin\frac{2x-1}{3}$. **1862.** $\frac{2x+1}{4}\sqrt{2+x+x^2}+\frac{7}{8}\ln\left(\frac{1}{2}+x+\sqrt{2+x+x^2}\right)$.

1863. $\frac{x^2+1}{4}\sqrt{x^4+2x^2-1}-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1+\sqrt{x^4+2x^2-1}\right|$. **1864.** $-\sqrt{1+x-x^2}+$ $+\frac{1}{2}\arcsin\frac{1-2x}{\sqrt5}-\ln\left|\frac{2+x+2\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right|$ $\left(\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{\sqrt5}{2}\right)$.

1865. $\ln\left|\frac{x^2-1+\sqrt{x^4+1}}{x}\right|$. **1866.** $\ln|x-2|+\ln|x+5|$.

1867. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3}\right|$. **1868.** $\frac{x^9}{9}-\frac{x^8}{8}+\frac{3x^7}{7}-\frac{5x^6}{6}+\frac{11x^5}{5}-\frac{21x^4}{4}+$ $-\frac{43x^3}{3}-\frac{85x^2}{2}+171x+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{(x+2)^{1024}}\right|$. **1869.** $x+\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{9}{2}\ln|x-2|+$ $+\frac{28}{3}\ln|x-3|$. **1870.** $x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x-\frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$. **1871.** $-\frac{1}{3(x-1)}+$ $+\frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|$. **1872.** $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\ln|x^2-1|$. **1873.** $-\frac{5x-6}{x^2-3x+2}+4\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|$.

1874. $\frac{9x^2+50x+68}{4(x+2)(x+3)^2}+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{(x+1)(x+2)^{16}}{(x+3)^{17}}\right|$. **1875.** $-\frac{3x^2+3x-2}{8(x-1)(x+1)^2}+$ $+\frac{3}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$. **1876.** $\operatorname{arctg}x+\frac{5}{6}\ln\frac{x^2+1}{x^2+4}$. **1877.** $\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}x+\frac{1}{4}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$.

1878. $-\frac{1}{x-2}-\operatorname{arctg}(x-2)$. **1879.** $-\frac{1}{5(x-1)}+\frac{1}{50}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+2x+2}-$ $-\frac{8}{25}\operatorname{arctg}(x+1)$. **1880.** $\ln\left|\frac{x}{1+x}\right|-\frac{2}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{1+2x}{\sqrt3}$. **1881.** $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+$ $+\frac{1}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt3}$. **1882.** $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt3}$.

1883. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$. **1884.** $\frac{1}{4\sqrt2}\ln\frac{x^2+x\sqrt2+1}{x^2-x\sqrt2+1}+\frac{1}{2\sqrt2}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt2}{1-x^2}$.

1885. $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt3}$. **1886.** $\frac{1}{4\sqrt3}\ln\frac{1+x\sqrt3+x^2}{1-x\sqrt3+x^2}+$ $+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{6}\operatorname{arctg}x^3$. **1887.** $-\frac{1}{6(1+x)}+\frac{1}{6}\ln\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x-$ $-\frac{1}{3\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt3}$. **1888.** $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}-\frac{1}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt3}$.

1889. $\frac{2}{5}\ln\frac{x^2+2x+2}{x^2+x+\frac{1}{2}}+\frac{8}{5}\operatorname{arctg}(x+1)-\frac{2}{5}\operatorname{arctg}(2x+1)$. **1890.** $a+2b+3c=0$.

1891. $-\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2}+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$. **1892.** $\frac{x}{3(x^3+1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+$ $+\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. **1893.** $\frac{x(3x^2+5)}{8(x^2+1)^2}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}x$. **1894.** $\frac{1}{x^2+2x+2}+$ $+\operatorname{arctg}(x+1)$. **1895.** $\frac{x}{4(x^4+1)}+\frac{3}{16\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}-\frac{3}{8\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}$.

1896. $\frac{5x+2}{3(x^2+x+1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{8}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. **1897.** $\frac{7x^5-11x}{32(x^4-1)^2}+$ $+\frac{21}{128}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{21}{64}\operatorname{arctg}x$. **1898.** $\frac{x^3+2x}{6(x^4+x^2+1)}$. **1899.** $-\frac{8x^4+8x^2+4x-1}{28(x^3+x+1)^2}$.

1900. $-\frac{x}{x^5+x+1}$ (bütün inteqral!). **1901.** $\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

1902. $a\gamma+c\alpha=2b\beta$. **1903.** $-\frac{1}{96(x-1)^{96}}-\frac{3}{97(x-1)^{97}}-\frac{3}{98(x-1)^{98}}-$ $-\frac{1}{99(x-1)^{99}}$. **1904.** $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x^2$. **1905.** $\frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^4}{\sqrt{3}}$.

1906. $\frac{1}{12}\ln\frac{(x^2+1)^2}{x^4-x^2+1}+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x^3+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}$. **1907.** $\frac{5}{8}\ln\frac{x^4}{x^4+2}-$ $-\ln\frac{x^4}{x^4+1}$. **1908.** $-\frac{1}{100}\left(\frac{x^5}{x^{10}-10}+\frac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x^5-\sqrt{10}}{x^5+\sqrt{10}}\right|\right)$. **1909.** $\frac{x^4}{4}+$ $+\frac{1}{4}\ln\frac{x^4+1}{(x^4+2)^4}$. **1910.** $-\frac{x^5+2}{10(x^{10}+2x^5+2)}-\frac{1}{10}\operatorname{arctg}(x^5+1)$.

1911. $\frac{1}{n}(x^n-\ln|x^n+1|)$ $(n\neq 0)$. **1912.** $\frac{1}{2n}\left(\operatorname{arctg}x^n-\frac{x^n}{x^{2n}+1}\right)$ $(n\neq 0)$.

1913. $\frac{1}{20}\ln\frac{x^{10}}{x^{10}+2}$. **1914.** $\frac{1}{10(x^{10}+1)}+\frac{1}{10}\ln\frac{x^{10}}{x^{10}+1}$. **1915.** $\frac{1}{7}\ln\frac{|x^7|}{(1+x^7)^2}$.

1916. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x(x^4-5)}{x^5-5x+1}\right|$. **1917.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}$. **1918.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{2x^2+(1-\sqrt{5})x+2}{2x^2+(1+\sqrt{5})x+2}$.

1919. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^4-x^2\sqrt{2}+1}{x^4+x^2\sqrt{2}+1}$. **1920.** $\operatorname{arctg}x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x^3$.

1921. $I_n=\dfrac{2ax+b}{(n-1)\Delta(ax^2+bx+c)^{n-1}}+\dfrac{2n-3}{n-1}\cdot\dfrac{2a}{\Delta}I_{n-1}$, burada $\Delta=4ac-b^2$; $I_3=\dfrac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2}+\dfrac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\dfrac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$. **1922.** $I=\dfrac{1}{(b-a)^{m+n-1}}\times$ $\times\displaystyle\int\frac{(1-t)^{m+n-2}}{t^m}dt$; $\dfrac{1}{625}\left(-\dfrac{1}{t}+3t-\dfrac{t^2}{2}-3\ln|t|\right)$, burada $t=\dfrac{x-2}{x+3}$.

1923. $-\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{P_{kn}^{(k)}(a)}{k!(n-k)(x-a)^{n-k}}+\frac{P_n^{(n)}(a)}{n!}\ln|x-a|$. **1924.** $R(x)=P(x^2)+$ $+\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left[\frac{A_{ij}}{(a_i-x)^{\alpha_j}}+\frac{A_{ij}}{(a_i+x)^{\alpha_j}}\right]$, burada P – çoxhədli, $\pm a_i$ $(i=1,\dots,k)$ - məxrəcin kökləri və A_{ij} - sabit əmsallardır.

1925. $-\dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{\pi(2k-1)}{2n}\ln\left(1-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+x^2\right)+$ $+\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\{\sin\frac{\pi(2k-1)}{2n}\operatorname{arctg}\frac{x-\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{\sin\frac{2k-1}{2n}\pi}\right\}$. **1926.** $2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})$.

1927. $\dfrac{3}{4}\ln\dfrac{x\sqrt[3]{x}}{\left(1+\sqrt[6]{x}\right)^2\left(1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}\right)^3}-\dfrac{3}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\dfrac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}}$. **1928.** $\dfrac{3}{4}t^4-$ $-\dfrac{3}{2}t^2-\dfrac{3}{4}\ln|t-1|+\dfrac{15}{8}\ln(t^2+t+2)-\dfrac{27}{8\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\dfrac{2t+1}{\sqrt{7}}$, $t=\sqrt[3]{2+x}$.

1929. $6t-3t^2-2t^3+\dfrac{3}{2}t^4+\dfrac{6}{5}t^5-\dfrac{6}{7}t^7+3\ln(1+t^2)-6\operatorname{arctg}t$, burada $t=\sqrt[6]{x+1}$.

1930. $\dfrac{2}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2}-\dfrac{4}{1+\sqrt[4]{x}}$. **1931.** $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x\sqrt{x^2-1}}{2}+\dfrac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|$.

1932. $-\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$. **1933.** $-\dfrac{at^3}{1+t^4}+\dfrac{a}{4\sqrt{2}}\ln\dfrac{1+t\sqrt{2}+t^2}{1-t\sqrt{2}+t^2}+\dfrac{a}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{1-t^2}{t\sqrt{2}}$, burada $t=\sqrt[4]{\dfrac{a-x}{x}}$. **1934.** $-\dfrac{n}{a-b}\sqrt[n]{\dfrac{x-b}{x-a}}$. **1935.** $\dfrac{x}{2}+\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}\sqrt{x(1+x)}-$ $-\dfrac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right)$. **1937.** $-\dfrac{3-2x}{4}\sqrt{1+x+x^2}-\dfrac{1}{8}\ln\left(\dfrac{1}{2}+x+\sqrt{1+x+x^2}\right)$.

1938. $-\ln\left|\dfrac{2-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|$. **1939.** $\dfrac{2-x}{3(1-x)^2}\sqrt{1-x^2}$. **1940.** $R+\ln(x+1+R)-$

$-\sqrt{2}\ln\left|\dfrac{x+2+\sqrt{2}R}{x}\right|$, burada $R=\sqrt{x^2+2x+2}$. **1941.** $\arcsin\dfrac{1+2x}{\sqrt{5}}+$ $+\ln\left|\dfrac{3+x+2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x}\right|$. **1942.** $\dfrac{1-2x}{4}\sqrt{1+x-x^2}-\dfrac{11}{8}\arcsin\dfrac{1-2x}{\sqrt{5}}$. **1943.** $-\dfrac{19+5x+2x^2}{6}\sqrt{1+2x-x^2}-4\arcsin\dfrac{1-x}{\sqrt{2}}$. **1944.** $\left(\dfrac{63}{256}x-\dfrac{21}{128}x^3+\right.$ $\left.+\dfrac{21}{160}x^5-\dfrac{9}{80}x^7+\dfrac{x^9}{10}\right)\sqrt{1+x^2}-\dfrac{63}{256}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. **1945.** $\left(-\dfrac{a^4x}{16}-\right.$ $\left.\dfrac{a^2x^3}{24}+\dfrac{x^5}{6}\right)\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^6}{16}\arcsin\dfrac{x}{|a|}$. **1946.** $\left(\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{14x}{3}+37\right)\sqrt{x^2+4x+3}-$ $-66\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}|$. **1947.** $-\dfrac{1}{2x^2}\sqrt{x^2+1}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{|x|}$. **1948.** $\dfrac{2x^2+1}{3x^3}\sqrt{x^2-1}$. **1949.** $\dfrac{3x-5}{20(x-1)^2}\sqrt{x^2+3x+1}-\dfrac{11}{40\sqrt{5}}\times$ $\times\ln\left|\dfrac{(x+1)\sqrt{5}+2\sqrt{x^2+3x+1}}{x-1}\right|$. **1950.** $\dfrac{3x+5}{8(x+1)^2}\sqrt{x^2+2x}-\dfrac{3}{8}\arcsin\dfrac{1}{|x+1|}$, burada $x<-2$ və ya $x>0$. **1951.** $4a(ca_1+bb_1)=8a^2c_1+3b^2a_1$ $(a\neq 0)$. **1952.** $\dfrac{\sqrt{1+2x-x^2}}{2(1-x)}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{1+2x-x^2}}{1-x}\right|$. **1953.** $\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{x-3}{|x-1|\sqrt{5}}-$ $-\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{3x+1-2\sqrt{x^2-x-1}}{x+1}\right|$. **1954.** $-\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}+\ln\left(x+\dfrac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+$ $+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|$. **1955.** $-\dfrac{1+x}{2}\sqrt{1+2x-x^2}-2\arcsin\dfrac{1-x}{\sqrt{2}}-$ $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\dfrac{x\sqrt{2}}{|1+x|}$. **1956.** $-\dfrac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1}-2\arcsin\dfrac{1}{|x-2|}$ ($x<1$ və ya $x>3$). **1957.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}$. **1958.** $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{x\sqrt{2}+\sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{2}-\sqrt{x^2-1}}\right|$.

1959. $\frac{x}{2\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right|$. **1960.** $\ln(x+\sqrt{x^2+2})-$ $-\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}$. **1961.** $\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{(2x+1)\sqrt{2}+\sqrt{3(x^2+x-1)}}{(2x+1)\sqrt{2}-\sqrt{3(x^2+x-1)}}\right|$. **1962.** $\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{3}}-$ $-\frac{\sqrt{2}}{3}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2+2x-x^2}}{(1-x)\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2+2x-x^2}}$. **1963.** $\frac{2(x-1)}{3\sqrt{x^2+x+1}}$.

1964. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x-1)\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{(x+1)\sqrt{2}-\sqrt{3(x^2+x+1)}}{\sqrt{x^2-x+1}}\right|$, $x+1>0$ olduqda. **1965.** $\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-(x+1)}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+(x+1)}-\frac{1}{3}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{x+1}$.

1966. $\frac{3}{2(2z+1)}+\frac{1}{2}\ln\frac{z^4}{|2z+1|^3}$, burada $z=x+\sqrt{x^2+x+1}$.

1967. $\ln\left|\frac{z-1}{z}\right|-2\,\mathrm{arctg}\,z$, burada $z=\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$.

1968. $\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{3}[(z-1)^3+(z-1)^{-3}]+[(z-1)^2-(z-1)^{-2}]+[(z-1)+(z-1)^{-1}]\right\}+$ $+\frac{1}{2}\ln|z-1|$, burada $z=x+\sqrt{x^2-2x+2}$. **1969.** $-\frac{5}{18(z+1)}-\frac{1}{6(z+1)^2}+$ $+\frac{3}{4}\ln|z-1|-\frac{16}{27}\ln|z-2|-\frac{17}{108}\ln|z+1|$, burada $z=\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}$.

1970. $\frac{2(3-4z)}{5(1-z-z^2)}+\frac{2}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+1+2z}{\sqrt{5}-1-2z}\right|$, burada $z=-x+\sqrt{x(1+x)}$.

1971. $\frac{x}{4}(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right|$. **1972.** $\frac{1}{3}\sqrt{z}-\frac{1}{3\sqrt[4]{12}}\times$ $\times\left(\ln\frac{z\sqrt{3}+\sqrt[4]{12z^2}+1}{z\sqrt{3}-\sqrt[4]{12z^2}+1}-2\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt[4]{12z^2}}{z\sqrt{3}-1}\right)$, burada $z=\frac{1+x}{1-x}$. **1973.** $\sqrt{1+x}-$ $-\sqrt{1-x}-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin x$. **1974.** $\sqrt{1+x+x^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}}{(2+x+2\sqrt{1+x+x^2})^2}$.

1975. $\frac{2}{3}[(x+1)^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{3}{2}}]-\frac{2}{5}[(x+1)^{\frac{5}{2}}-x^{\frac{5}{2}}]$. **1976.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x\sqrt{2}}{x^2+1}$.

1977. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{x^4+1}}{x^2-1}\right|$. **1978.** $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2-1}{x^2\sqrt{2}}$ $(|x|>\sqrt{\sqrt{2}-1})$.

1979. $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2(2x^2+1+2\sqrt{x^4+x^2+1})}{x^2+2+2\sqrt{x^4+x^2+1}}$. **1981.** $\frac{1}{3}\sqrt{(x+x^2)^3}-\frac{1+2x}{8}\sqrt{x+x^2}+$ $+\frac{1}{8}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})$, $x>0$ olduqda. **1982.** $\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}-4x^{\frac{1}{2}}+18x^{\frac{1}{6}}+\frac{3x^{\frac{1}{6}}}{1+x^{\frac{1}{3}}}-$ $-21\operatorname{arctg}x^{\frac{1}{6}}$. **1983.** $\frac{3}{5}z^5-2z^3+3z$, burada $z=\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}$. **1984.** $-z+\frac{2}{3}z^3-$ $-\frac{z^5}{5}$, burada $z=\sqrt{1-x^2}$. **1985.** $\frac{1}{6}\ln\frac{z^2+z+1}{(z-1)^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}$, burada $z=\frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{x}$. **1986.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}z$, burada $z=\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$.

1987. $\frac{1}{6}\ln\frac{z-1}{z+1}+\frac{1}{12}\ln\frac{z^2+z+1}{z^2-z+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{z^2-1}{z\sqrt{3}}$, burada $z=\sqrt[6]{1+x^6}$.

1988. $\frac{5}{4}z^4-\frac{5}{9}z^9$, burada $z=\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}$. **1989.** $\frac{3z}{2(z^3+1)}-\frac{1}{4}\ln\frac{(z+1)^2}{z^2-z+1}-$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2z-1}{\sqrt{3}}$, burada $z=\frac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x}$. **1990.** $m=\frac{2}{k}$, burada $k=\pm1,\pm2,\dots$.

1991. $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3x+\frac{1}{5}\sin^5x$. **1992.** $\frac{5}{16}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x$.

1993. $\frac{5}{16}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x$. **1994.** $\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}$.

1995. $\frac{\sin^5x}{5}-\frac{2\sin^7x}{7}+\frac{\sin^9x}{9}$. **1996.** $-\frac{\cos 2x}{64}+\frac{\cos^3 2x}{96}-\frac{\cos^5 2x}{320}$.

1997. $\frac{1}{3\cos^3x}-\frac{1}{\cos x}$. **1998.** $-\frac{3}{2}\cos x-\frac{\cos^3x}{2\sin^2x}-\frac{3}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$.

1999. $-\frac{\cos x}{2\sin^2x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. **2000.** $\frac{\sin x}{2\cos^2x}+\frac{1}{2}\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

2001. $-8\operatorname{ctg}2x-\frac{8}{3}\operatorname{ctg}^3 2x$. **2002.** $\frac{\operatorname{tg}^4x}{4}+\frac{3\operatorname{tg}^2x}{2}-\frac{\operatorname{ctg}^2x}{2}+3\ln|\operatorname{tg}x|$.

2003. $\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{3\cos^3 x}+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. **2004.** $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}-\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}-\ln|\cos x|$.

2005. $-x-\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5}+\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}-\operatorname{ctg} x$. **2006.** $\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}$. **2007.** $-2\sqrt{\operatorname{ctg} x}+\frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}$.

2008. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{(1+t)^3(1+t^3)}{(1-t)^3(1-t^3)}\right|-\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{1-t^2}{t\sqrt{3}}$, burada $t=\sqrt[3]{\sin x}$.

2009. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{z^2+z\sqrt{2}+1}{z^2-z\sqrt{2}+1}-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{z\sqrt{2}}{z^2-1}$, burada $z=\sqrt{\operatorname{tg} x}$.

2010. $\frac{1}{4}\ln\frac{(z^2+1)^2}{z^4-z^2+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2z^2-1}{\sqrt{3}}$, burada $z=\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}$.

2011. $I_n=-\frac{\cos x\sin^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$; $K_n=\frac{\sin x\cos^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}K_{n-2}$;

$I_6=-\frac{1}{6}\cos x\sin^5 x-\frac{5}{24}\cos x\sin^3 x-\frac{5}{16}\cos x\sin x+\frac{5}{16}x$; $K_8=\frac{1}{8}\sin x\times$

$\times\cos^7 x+\frac{7}{48}\sin x\cos^5 x+\frac{35}{192}\sin x\cos^3 x+\frac{35}{128}\sin x\cos x+\frac{35}{128}x$.

2012. $I_n=-\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$; $K_n=\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}K_{n-2}$;

$I_5=-\frac{\cos x}{4\sin^4 x}-\frac{3\cos x}{8\sin^2 x}+\frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$; $K_7=\frac{\sin x}{6\cos^6 x}+\frac{5\sin x}{24\cos^4 x}+\frac{5\sin x}{16\cos^2 x}+$

$+\frac{5}{16}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$. **2013.** $-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{12}\cos 6x$. **2014.** $\frac{x}{4}+\frac{\sin 2x}{8}+$

$+\frac{\sin 4x}{16}+\frac{\sin 6x}{24}$. **2015.** $\frac{3}{2}\cos\frac{x}{6}-\frac{3}{10}\cos\frac{5x}{6}-\frac{3}{14}\cos\frac{7x}{6}+\frac{3}{22}\cos\frac{11x}{6}$.

2016. $-\frac{1}{2}\cos(a-b)\cos x-\frac{1}{4}\cos(x+a+b)+\frac{1}{12}\cos(3x+a+b)$.

2017. $\frac{x}{4}+\frac{\sin 2ax}{8a}+\frac{\sin 2bx}{8b}+\frac{\sin 2(a-b)x}{16(a-b)}+\frac{\sin 2(a+b)x}{16(a+b)}$.

2018. $-\frac{3}{16}\cos 2x+\frac{3}{64}\cos 4x+\frac{1}{48}\cos 6x-\frac{3}{128}\cos 8x+\frac{1}{192}\cos 12x$.

2019. $\frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)}\right|$, $\sin(a-b)\neq 0$ olduqda. **2020.** $\frac{1}{\cos(a-b)}\times$

$\times\ln\left|\frac{\sin(x+a)}{\cos(x+b)}\right|$, $\cos(a-b)\neq 0$ olduqda. **2021.** $\frac{2}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\cos(x+b)}{\cos(x+a)}\right|$,

$\sin(a-b)\neq 0$ olduqda. **2022.** $\dfrac{1}{\cos a}\ln\left|\dfrac{\sin\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right|$ $(\cos a\neq 0)$

2023. $\dfrac{1}{\sin a}\ln\left|\dfrac{\cos\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right|$ $(\sin a\neq 0)$. **2024.** $-x+\operatorname{ctg}a\cdot\ln\left|\dfrac{\cos x}{\cos(x+a)}\right|$

$(\sin a\neq 0)$. **2025.** $\dfrac{1}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\dfrac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt5}$. **2026.** $\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3}$

2027. $-\dfrac{1}{5}(2\sin x+\cos x)+\dfrac{4}{5\sqrt5}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\operatorname{arctg}2}{2}\right)\right|$. **2028.** a) $\dfrac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\times$

$\times\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)$, $0<\varepsilon<1$ olduqda; b) $\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\dfrac{\varepsilon+\cos x+\sqrt{\varepsilon^2-1}\sin x}{1+\varepsilon\cos x}$.

$\varepsilon>1$ olduqda. **2029.** $x-\dfrac{1}{\sqrt2}\operatorname{arctg}(\sqrt2\operatorname{tg}x)$. **2030.** $\dfrac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{a\operatorname{tg}x}{b}\right)$.

2031. $\dfrac{(2b^2)^{-1}z}{(a^2z^2+b^2)}+\dfrac{1}{2ab^3}\operatorname{arctg}\dfrac{az}{b}$ $(ab\neq 0)$, burada $z=\operatorname{tg}x$. **2032.** $\dfrac{1}{2}(\sin x-$

$-\cos x)-\dfrac{1}{2\sqrt2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{8}\right)\right|$. **2033.** $-\dfrac{\cos x}{a(a\sin x+b\cos x)}$. **2034.** $-\dfrac{1}{6}\times$

$\times\ln\dfrac{(\sin x+\cos x)^2}{1-\sin x\cos x}-\dfrac{1}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2\cos x-\sin x}{\sqrt3\sin x}\right)$. **2035.** $\dfrac{1}{\sqrt2}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\operatorname{tg}2x}{\sqrt2}\right)$.

2036. $\dfrac{1}{4}\left\{\sqrt{2+\sqrt2}\operatorname{arctg}\dfrac{u}{\sqrt{4+2\sqrt2}}-\sqrt{2-\sqrt2}\operatorname{arctg}\dfrac{u}{\sqrt{4-2\sqrt2}}\right\}$, burada $u=\operatorname{tg}2x$.

2037. $\dfrac{1}{2\sqrt2}\ln\dfrac{\sqrt2-\sin 2x}{\sqrt2+\sin 2x}$. **2038.** $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(\sin^2 x)$. **2039.** $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}2x\right)$.

2040. $-\dfrac{z}{4(z^2+2)}+\dfrac{3}{4\sqrt2}\operatorname{arctg}\dfrac{z}{\sqrt2}$, burada $z=\operatorname{tg}x$. **2041.** $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\times$

$\times\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\varphi}{2}\right)\right|$, burada $\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ və $\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

2043. $-\dfrac{x}{5}-\dfrac{3}{5}\ln|\sin x+2\cos x|$. **2043.1.** $0{,}1x+0{,}3\ln|\sin x-3\cos x|$.

2044. $\dfrac{3x}{34}+\dfrac{5}{34}\ln|5\sin x+3\cos x|$. **2045.** $-\dfrac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2}\cdot\dfrac{1}{a\sin x+b\cos x}+$

$+\dfrac{aa_1+bb_1}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\varphi}{2}\right)\right|$, burada $\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ və $\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

2047. $-\dfrac{3x}{5}+\dfrac{4}{5}\ln|\sin x-2\cos x+3|-\dfrac{6}{5}\operatorname{arctg}\dfrac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{2}$. **2048.** $\dfrac{x}{2}-$ $-\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{8}\right)-\dfrac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+\sin x+\cos x)$. **2049.** $\dfrac{2}{5}x-\dfrac{1}{5}\ln|3\sin x+4\cos x-2|+$ $+\dfrac{4}{5\sqrt{21}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)}{\sqrt{7}-\sqrt{3}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)}\right|$. **2051.** $-\sin x+3\cos x+2\sqrt{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{8}\right)\right|$.

2052. $\dfrac{1}{5}(\sin x+3\cos x)+\dfrac{8}{5\sqrt{5}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{5}-1+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{5}+1-2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|$. **2054.** $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\cos x}{\sqrt{3}}\right)-$ $-\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{2+\sin x}{2-\sin x}$. **2055.** $\dfrac{3}{5}\operatorname{arctg}(\sin x-2\cos x)+\dfrac{1}{10\sqrt{6}}\ln\dfrac{\sqrt{6}+2\sin x+\cos x}{\sqrt{6}-2\sin x-\cos x}$.

2056. $\dfrac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{2}(\sin x+\cos x)+1}{\sqrt{2}(\sin x+\cos x)-1}\right|-\dfrac{1}{4\sqrt{6}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}(\sin x-\cos x)}{\sqrt{3}-\sqrt{2}(\sin x-\cos x)}\right|$.

2058. $\dfrac{2\sin x-\cos x}{10(\sin x+2\cos x)^2}+\dfrac{1}{10\sqrt{5}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\operatorname{arctg}2}{2}\right)\right|$.

2059. $A=-\dfrac{b}{(n-1)(a^2-b^2)}$, $B=\dfrac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2-b^2)}$, $C=-\dfrac{n-2}{(n-1)(a^2-b^2)}$.

2060. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\sin^2 x}}{|\cos x|}$. **2061.** $2\sqrt{\operatorname{tg}x}-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\dfrac{\operatorname{tg}x+\sqrt{2\operatorname{tg}x}+1}{\operatorname{tg}x-\sqrt{2\operatorname{tg}x}+1}+$ $+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2\operatorname{tg}x}}{\operatorname{tg}x-1}$ $(\operatorname{tg}x>0)$. **2062.** $\dfrac{1}{2}\arcsin\left(\dfrac{\sin x-\cos x}{\sqrt{3}}\right)-\dfrac{1}{2}\ln(\sin x+$ $+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x})$. **2063.** $-\dfrac{\varepsilon\sin x}{(1-\varepsilon^2)(1+\varepsilon\cos x)}+\dfrac{2}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}\times$ $\times\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)$. **2064.** $-\dfrac{2}{n\cos a}\left(\cos\dfrac{x+a}{2}\right)^n\left(\sin\dfrac{x-a}{2}\right)^{-n}$ $(\cos a\neq 0)$.

2065. $I_n=2I_{n-1}\cos a-I_{n-2}+\dfrac{2\sin a}{n-1}t^{n-1}$, burada $n>2$ və $t=\sin\dfrac{x-a}{2}\times$

$\times\left(\sin\frac{x+a}{2}\right)^{-1}$. **2068.** $e^{3x}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{3}+\frac{2x}{9}-\frac{2}{27}\right)$. **2069.** $-e^{-x}(x^2+2)$.

2070. $-\left(\frac{x^5}{5}-\frac{4x^3}{25}+\frac{24x}{625}\right)\cos 5x+\left(\frac{x^4}{5}-\frac{12x^2}{125}+\frac{24}{3125}\right)\sin 5x$.

2071. $(21-10x^2+x^4)\sin x-(20x-4x^3)\cos x$. **2072.** $-\frac{e^{-x^2}}{2}(x^6+3x^4+6x^2+6)$.

2073. $2e^t(t^5-5t^4+20t^3-60t^2+120t-120)$, burada $t=\sqrt{x}$. **2074.** $e^{ax}\times\left[\frac{1}{2a}+\frac{a\cos 2bx+2b\sin 2bx}{2(a^2+4b^2)}\right]$. **2075.** $\frac{e^{ax}}{4}\left[\frac{3(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}-\frac{a\sin 3bx-3b\cos 3bx}{a^2+9b^2}\right]$. **2076.** $\frac{e^x}{2}[x(\sin x-\cos x)+\cos x]$.

2077. $\frac{e^x}{2}[x^2(\sin x+\cos x)-2x\sin x+(\sin x-\cos x)]$. **2078.** $e^x\left[\frac{x-1}{2}-\frac{x}{10}(2\sin 2x+\cos 2x)+\frac{1}{50}(4\sin 2x-3\cos 2x)\right]$. **2079.** $\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{4}x^2+3x^2\cos x-x\left(6\sin x+\frac{3}{4}\sin 2x\right)-\left(5\cos x+\frac{3}{8}\cos 2x\right)-\frac{1}{3}\cos^3 x$.

2080. $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{x}\sin(2\sqrt{x})+\frac{1}{4}\cos(2\sqrt{x})$. **2082.** $x+\frac{1}{1+e^x}-\ln(1+e^x)$.

2083. $e^x-\ln(1+e^x)$. **2084.** $-\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\ln|e^x-1|+\frac{1}{6}\ln(e^x+2)$. **2085.** $x-3\ln\left\{(1+e^{\frac{x}{6}})\sqrt{1+e^{\frac{x}{3}}}\right\}-3\,\mathrm{arctg}\,e^{\frac{x}{6}}$. **2086.** $x+\frac{8}{1+e^{\frac{x}{4}}}$. **2087.** $-2\arcsin\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)$.

2088. $\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}-1})+\arcsin(e^{-x})$. **2089.** $\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}+2\ln(e^x+2+\sqrt{e^{2x}+4e^x-1})-\arcsin\frac{2e^x-1}{e^x\sqrt{5}}$. **2090.** $-\frac{1}{2}e^{-x}(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x})+\frac{1}{4}\ln\frac{(\sqrt{1+e^x}-1)(1-\sqrt{1-e^x})}{(\sqrt{1+e^x}+1)(1+\sqrt{1-e^x})}$. **2092.** $a_1+\frac{a_2}{1!}+\frac{a_3}{2!}+\ldots+\frac{a_n}{(n-1)!}=0$.

2093. $e^x\left(1-\frac{4}{x}\right)$. **2094.** $-e^{-x}-\mathrm{li}(e^{-x})$. **2095.** $e^4\,\mathrm{li}(e^{2x-4})-e^2\,\mathrm{li}(e^{2x-2})$.

2096. $\frac{e^x}{x+1}$. **2097.** $\frac{e^{2x}}{2}\left(x^2+3x+\frac{21}{2}-\frac{32}{x-2}\right)+64e^4\,\mathrm{li}(e^{2x-4})$.

2098. $x[\ln^n x - n\ln^{n-1} x + n(n-1)\ln^{n-2} x + \ldots + (-1)^{n-1} n(n-1)\ldots 2\ln x + (-1)^n n!]$. **2099.** $\frac{x^4}{4}\left(\ln^3 x - \frac{3}{4}\ln^2 x + \frac{3}{8}\ln x - \frac{3}{32}\right)$. **2100.** $-\frac{1}{2x^2}\left(\ln^3 x + \frac{3}{2}\ln^2 x + \frac{3}{2}\ln x + \frac{3}{4}\right)$. **2101.** $\ln(x+a)\ln(x+b)$. **2102.** $x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + 2x$. **2103.** $-\frac{x}{2} + x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}) + \frac{1}{2}\arcsin x$.

2104. $\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln(x+\sqrt{1+x^2})$. **2105.** $-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+\frac{x^2}{2}\times \operatorname{arctg}(x+1)$. **2106.** $-\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\ln(1+x)+\frac{2x\sqrt{x}}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{x}$. **2107.** $-\frac{3+x}{4}\times\sqrt{2x-x^2}+\frac{2x^2-3}{4}\arcsin(1-x)$. **2108.** $\frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}+\left(x-\frac{1}{2}\right)\arcsin\sqrt{x}$.

2109. $-\frac{\operatorname{sgn} x}{2}\sqrt{x^2-1}+\frac{x^2}{2}\arccos\frac{1}{x}$. **2110.** $-2\operatorname{sgn}(1-x)\sqrt{x}+(1+x)\times \arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$. **2111.** $\frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} - \ln\sqrt{1-x^2}$. **2112.** $\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$.

2113. $x - \operatorname{arctg} x + \left(\frac{1+x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2}\right)[\ln(1+x^2)-1]$. **2114.** $x - \frac{1-x^2}{2}\times \ln\frac{1+x}{1-x}$. **2115.** $-\ln\sqrt{1+x^2}+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. **2116.** $-\frac{x}{8}+\frac{\operatorname{sh} 4x}{32}$.

2117. $\frac{3x}{8}+\frac{\operatorname{sh} 2x}{4}+\frac{\operatorname{sh} 4x}{32}$. **2118.** $\frac{\operatorname{ch}^3 x}{3} - \operatorname{ch} x$. **2119.** $\frac{\operatorname{ch} 6x}{24}-\frac{\operatorname{ch} 4x}{16}-\frac{\operatorname{ch} 2x}{8}$.
2120. $\ln\operatorname{ch} x$. **2121.** $x - \operatorname{cth} x$. **2122.** $0{,}5[\ln(e^{2x}+\sqrt{e^{4x}-1})+\arcsin(e^{-2x})]$.
2123. $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg} 3^{-1/2}\left(2\operatorname{th}\frac{x}{2}+1\right)$. **2123.1.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{th} x - 2}{\sqrt{5}}$.

2123.2. $\frac{20}{3\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\left(\frac{3\operatorname{th}\frac{x}{2}}{\sqrt{11}}\right)$. **2123.3.** $-\frac{4}{7}x-\frac{3}{7}\ln|3\operatorname{sh} x - 4\operatorname{ch} x|$.

2124. $\frac{a\operatorname{ch} ax\sin bx - b\operatorname{sh} ax\cos bx}{a^2+b^2}$. **2125.** $\frac{a\operatorname{ch} ax\cos bx + b\operatorname{sh} ax\sin bx}{a^2+b^2}$.

2126. $-\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}-\operatorname{arctg} x$. **2127.** $\frac{1}{8}\cdot\frac{x+x^3}{(1-x^2)^2}-\frac{1}{16}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$.

2128. $\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{1+x\sqrt{3}+x^2}{1-x\sqrt{3}+x^2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1-x^2}{x\sqrt{3}}$. **2129.** $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-$ $-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)\quad(x\geq 0)$. **2130.** $-\frac{1}{24}(15+10x+8x^2)\sqrt{x(1-x)}+\frac{5}{8}\arcsin\sqrt{x}$ $(0<x<1)$. **2131.** $-\frac{2}{x}\sqrt{1-x^2}-\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|}\quad(|x|<1)$. **2132.** $-\frac{4}{3}\sqrt{1-x\sqrt{x}}$ $(x>0)$. **2133.** $\frac{1}{15}(8-4x^2+3x^4)\sqrt{1+x^2}$. **2134.** $\frac{1}{2}\ln\frac{(1+z)^2}{1-z+z^2}-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2z-1}{\sqrt{3}}$, burada $z=\sqrt[3]{\frac{1-x}{x}}$. **2135.** $-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{2+x^3+2\sqrt{1+x^3+x^6}}{x^3}\right|$.

2136. $\frac{1}{2}\arccos\frac{x^2+1}{x^2\sqrt{2}}$. **2137.** $-\frac{2+x^2}{x}-\frac{2}{x}\sqrt{1-x^2}-2\arcsin x\quad(|x|<1)$.

2138. $-\frac{1}{2}(1+x)^2+\frac{5+2x}{4}\sqrt{x+x^2}+\frac{3}{8}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+x^2}\right|\quad(x>0;\quad x<-1)$.

2139. $-\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x}-\frac{1}{2}\ln\frac{(1+x)^2}{1+x+x^2}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{1+2x}{\sqrt{3}}$. **2140.** $-\frac{2x+21}{4}\times$ $\times\sqrt{-x^2+3x-2}+\left(x^2+3x-\frac{55}{8}\right)\arccos(2x-3)\quad(1<x<2)$. **2141.** $-x^2+$ $+\frac{x^2}{2}\ln(4+x^4)+2\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2}$. **2142.** $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2+\ln|x|$ $(0<|x|<1)$. **2143.** $(1+\sqrt{1+x^2})\ln(1+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$. **2144.** $-\frac{x^2+7}{9}\times$ $\times\sqrt{x^2+1}+\frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3}\ln\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\quad(|x|>1)$.

2145. $\left(\frac{3-x}{1-x}-\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}\right)\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}\arcsin x-\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\quad(0<x<1)$.

2146. $\frac{\cos x}{3(2+\sin x)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}$. **2147.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{7+4\sqrt{2}+\cos 4x}{7-4\sqrt{2}-\cos 4x}$.

2148. $\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}$. **2149.** $a\left[x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]-$ $-\frac{a-b}{2}(\operatorname{arctg}x)^2$. **2150.** $a\left(x\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\ln|x^2-1|\right)+\frac{a+b}{4}\ln^2\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$.

2151. $-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2}$ $(x>0)$. **2152.** $\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{arctg}\,x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

2153. $-\ln(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x})$. **2154.** $-\frac{6x+x^3}{9}-\frac{2+x^2}{3}\sqrt{1-x^2}\arccos x$ $(|x|<1)$. **2155.** $-\frac{x^2}{6}-\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{arctg}\,x+\frac{1}{2}(\mathrm{arctg}\,x)^2+\frac{2}{3}\ln(1+x^2)$.

2156. $-\frac{x}{4(1+x^2)}-\frac{1-x^2}{4(1+x^2)}\mathrm{arcctg}\,x$. **2157.** $\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2(1-x^2)}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\times$ $\times\ln\frac{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}$ $(|x|<1)$. **2158.** $-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}\arcsin x+\frac{1}{4}(\arcsin x)^2$ $(|x|<1)$. **2159.** $\frac{x}{4}+\frac{x^3}{12}+\frac{1}{4}(1+x^2)^2\,\mathrm{arcctg}\,x$. **2160.** x^x $(x>0)$.

2161. $x-e^{-x}\arcsin(e^x)-\ln(1+\sqrt{1-e^{2x}})$ $(x<0)$. **2162.** $x-\ln(1+e^x)-$ $-2e^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{arctg}\,e^{\frac{x}{2}}-\left(\mathrm{arctg}\;e^{\frac{x}{2}}\right)^2$. **2163.** $-\frac{\mathrm{cth}\,1}{4}[x-\ln(1+e^x\,\mathrm{ch}\,1)]-\frac{e^{-x}}{4\,\mathrm{sh}\,1}$.

2164. $-2\ln(\mathrm{th}\,x+\sqrt{1+\mathrm{th}^2 x})+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{1+\mathrm{th}^2 x}+\sqrt{2}\,\mathrm{th}\,x}{\sqrt{1+\mathrm{th}^2 x}-\sqrt{2}\,\mathrm{th}\,x}$. **2165.** $e^x\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$.

2166. $\frac{x|x|}{2}$. **2167.** $\frac{x^2|x|}{3}$. **2168.** $\frac{2x^2}{3}(x+|x|)$. **2169.** $\frac{(1+x)|1+x|}{2}+$ $+\frac{(1-x)|1-x|}{2}$. **2170.** $x<0$ olduqda e^x-1; $x\geq 0$ olduqda $1-e^{-x}$.

2171. $|x|\leq 1$ olduqda x; $|x|>1$ olduqda $\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}\,\mathrm{sgn}\,x$. **2172.** $\frac{x}{4}+$ $+\frac{1}{4}\left((x)-\frac{1}{2}\right)\left\{1-2\left|(x)-\frac{1}{2}\right|\right\}$, burada $(x)=x-[x]$. **2173.** $\frac{[x]}{\pi}\{[x]-$ $-(-1)^{[x]}\cos\pi x\}$. **2174.** $|x|\leq 1$ olduqda $x-\frac{x^3}{3}$; $|x|>1$ olduqda $x-\frac{x}{2}|x|+\frac{1}{6}\,\mathrm{sgn}\,x$. **2175.** $-\infty<x\leq 0$ olduqda x; $0\leq x\leq 1$ olduqda $\frac{x^2}{2}+x$; $x>1$ olduqda $x^2+\frac{1}{2}$. **2176.** $xf'(x)-f(x)$. **2177.** $\frac{1}{2}f(2x)$.

2178. $f(x)=2\sqrt{x}$. **2179.** $x-\frac{x^2}{2}$. **2180.** $-\infty<x\leq 0$ olduqda $f(x)=x$; $0<x<+\infty$ olduqda $f(x)=e^x-1$.

IV Bölmə

2181. $12\frac{1}{2}$. **2182.** a) $\underline{S}_n=16\frac{1}{4}-\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2}$, $\overline{S_n}=16\frac{1}{4}+\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2}$;

b) $\underline{S}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{\frac{i}{n}}$, $\overline{S_n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}$; c) $\underline{S}_n=\frac{10\,230}{n(2^{\frac{10}{n}}-1)}$, $\overline{S_n}=\frac{10\,230\cdot 2^{\frac{10}{n}}}{n(2^{\frac{10}{n}}-1)}$.

2183. $\underline{S}_n=31\cdot\frac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{32}-1}$; $\frac{31}{5}$. **2184.** $v_0T+\frac{1}{2}gT^2$. **2185.** 3. **2186.** $\frac{a-1}{\ln a}$.

2187. 1. **2188.** $\sin x$. **2189.** $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$. **2190.** $\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}$. **2191.** $\ln\frac{b}{a}$.

2192. a) 0, $|\alpha|<1$ olduqda; b) $\pi\ln\alpha^2$, $|\alpha|>1$ olduqda.

2193.4. $\frac{b-a}{2}[f(a)-f(b)]$. **2201.** Ümumiyyətlə desək, yox. **2203.** Ola da bilər, olmaya da bilər. **2206.** $11\frac{1}{4}$. **2207.** 2. **2208.** $\frac{\pi}{6}$. **2209.** $\frac{\pi}{3}$.

2210. 1. **2211.** 1. **2212.** $\frac{\pi}{2\sin\alpha}$. **2213.** $\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$. **2214.** $\frac{1}{\sqrt{ab}}\ln\frac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}$.

2215. $\frac{\pi}{2|ab|}$. **2216.** a) $\frac{1}{x}$ inteqralaltı funksiyası və onun $\ln|x|$ ibtidai funksiyası $[-1,1]$ inteqrasiya aralığında kəsiləndirlər; b) ibtidai funksiya rolunu oynayan $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)$ funksiyası $0\le x\le 2\pi$ olduqda kəsiləndir; c) $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ funksiyası $x=0$ olduqda kəsiləndir. **2217.** $\frac{2}{3}$.

2218. $200\sqrt{2}$. **2219.** $\frac{1}{2}$. **2220.** $\ln 2$. **2221.** $\frac{\pi}{4}$. **2222.** $\frac{2}{\pi}$. **2223.** $\frac{1}{p+1}$.

2224. $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$. **2225.** $\frac{1}{e}$. **2226.** $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$. **2227.** $\frac{5}{6}\pi$. **2228.** $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

2229. $x+\frac{1}{2}$. **2230.** $\frac{1}{\ln 2}$. **2231.** 0; $-\sin a^2$; $\sin b^2$. **2232.** a) $2x\sqrt{1+x^4}$; b) $\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}-\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$; c) $(\sin x-\cos x)\cdot\cos(\pi\sin^2 x)$. **2233.** a) 1; b) $\frac{\pi^2}{4}$; c) 0. **2233.1.** A. **2235.** 1. **2237.** a) $\frac{5}{6}$; b) $\frac{t}{2}$. **2238.** a) $\alpha<0$ olduqda $\frac{1}{3}-\frac{\alpha}{2}$; $0\le\alpha\le 1$ olduqda $\frac{1}{3}-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^3}{3}$; $\alpha>1$ olduqda $\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{3}$; b) $|\alpha|\le 1$ olduqda $\frac{\pi}{2}$; $|\alpha|>1$ olduqda $\frac{\pi}{2\alpha^2}$; c) $|\alpha|\le 1$ olduqda 2; $|\alpha|>1$ olduqda $\frac{2}{|\alpha|}$. **2239.** $\frac{1}{2}\ln\frac{e}{2}$. **2240.** π. **2241.** 4π. **2242.** $2\left(1-\frac{1}{e}\right)$.

2243. 1. **2244.** $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **2245.** $\frac{1}{6}$. **2246.** $\frac{\pi a^4}{16}$. **2247.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{9+4\sqrt{2}}{7}$.

2248. $2-\frac{\pi}{2}$. **2249.** $\frac{\pi^2}{4}$. **2250.** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. **2251.** a) $x=\pm t^{\frac{3}{2}}$ tərs funksiyası ikiqiymətlidir; b) $x=\frac{1}{t}$ funksiyası $t=0$ olduqda kəsiləndir; c) $x=\mathrm{Arctg}\,t$ funksiyasının sonlu seqmentdə təyin olunmuş və 0-dan π-yə qədər qiymətlər alan birqiymətli kəsilməz budağı yoxdur. **2252.** Yox. **2253.** Olar.

2256. $f(x+b)-f(x+a)$. **2260.** $\frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}$. **2261.** $\int\limits_0^1[f(\arcsin t)-f(\pi-\arcsin t)]\,dt+$
$+\int\limits_{-1}^0[f(2\pi+\arcsin t)-f(\pi-\arcsin t)]\,dt$. **2262.** $4n$. **2263.** $\frac{\pi^2}{4}$. **2264.** $\mathrm{arctg}\,\frac{32}{27}-$
-2π. **2268.** $315\frac{1}{26}$. **2269.** $\frac{1}{2}\ln 3-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$. **2270.** $\frac{5}{27}e^3-\frac{2}{27}$. **2271.** $-66\frac{6}{7}$.

2272. $-\frac{\pi}{3}$. **2273.** $\frac{29}{270}$. **2274.** $\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$. **2275.** $2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$.

2276. $2\pi\sqrt{2}$. **2277.** $\frac{1}{6}$. **2278.** $\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}$. **2279.** $\frac{3}{5}(e^{\pi}-1)$. **2280.** $\frac{3}{8}\ln 2-\frac{225}{1024}$.

2281. $I_n=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$, $n=2k$ olduqda; $I_n=\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$, $n=2k+1$ olduqda.

2282. Misal 2281-ə bax. **2283.** $(-1)^n\left[\frac{\pi}{4}-\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right)\right]$.

2284. $2^{2n}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$. **2285.** Misal 2281-ə bax. **2286.** $I_n=\frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$.

2287. $I_n=(-1)^n\left\{-\ln\sqrt{2}+\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right]\right\}$. **2290.** $\pi\,(2m)!\,(2n)!\times$
$\times\frac{1}{2^{2m+2n+1}\,m!\,n!\,(m+n)!}$. **2291.** Əgər n cüt olarsa, 0; əgər n tək olarsa, π.

2292. $(-1)^n\pi$. **2293.** $\frac{\pi}{2^n}$. **2294.** $\frac{\pi}{2^n}\sin\frac{n\pi}{2}$. **2295.** 0. **2296.** 0.

2297. $\frac{1}{2^{2n}a}(1-e^{-2a\pi})\left[C_{2n}^{n}+2\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n}^{k}\frac{a^2}{a^2+(2n-2k)^2}\right]$. **2298.** $\frac{\pi}{4n}(-1)^{n-1}$.

2299. $\frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!}$. **2302.** $f(x)$ funksiyasının kəsilmə nöqtələrində $F'(x)$ törəməsi ola da bilər, olmaya da bilər. **2303.** $|x|+C$. **2304.** $\arccos(\cos x)+C$. **2305.** $x[x]-\frac{[x]([x]+1)}{2}+C$. **2306.** $\frac{x^2[x]}{2}-\frac{[x]([x]+1)(2[x]+1)}{2}+C$. **2307.** $C+\frac{1}{\pi}\arccos(\cos\pi x)$. **2308.** $\frac{1}{2}(|l+x|-|l-x|)+C$. **2309.** -1. **2310.** $14-\ln 7!$. **2311.** $\frac{30}{\pi}$. **2312.** $-\frac{\pi^2}{4}$. **2313.** $\ln n!$. **2314.** $-\operatorname{th}\frac{\pi}{2}$. **2315.** $\frac{8}{3}$. **2316.** a) –; b) +; c) +; d) –. **2317.** a) İkinci; b) ikinci; c) birinci . **2318.** a) $\frac{1}{3}$; b) $6\frac{2}{3}$; c) 10; d) $\frac{1}{2}\cos\varphi$. **2319.** $\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}=b$ -ellipsin kiçik yarımoxu. **2320.** $v_{or}=\frac{1}{2}(v_0+v_1)$, burada v_1 - cismin son sürətidir. **2321.** $\frac{1}{2}i_0^2$. **2321.1.** A. **2322.** a) $\theta=\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}$; b) $\theta=\frac{1}{e}$; c) $\theta=\frac{1}{x}\ln\frac{e^x-1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\theta=\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta=1$. **2323.** $\frac{8\pi}{3}\pm\frac{4\pi}{3}\theta$ $(|\theta|<1)$. **2324.** $\frac{1}{10\sqrt{2}}$ və $\frac{1}{10}$ arasında yerləşir. **2325.** $0{,}01-0{,}005\theta$ $(0<\theta<1)$. **2326.1.** a) 1; b) $f(0)\ln\frac{b}{a}$. **2328.** $\frac{\theta}{50\pi}$ $(0<\theta<1)$. **2329.** $\frac{2}{a}\theta$ $(|\theta|<1)$. **2330.** $\frac{\theta}{a}$ $(|\theta|<1)$. **2334.** $\frac{1}{a}$. **2335.** -1. **2336.** π. **2337.** π. **2338.** $\frac{2}{3}\ln 2$. **2339.** $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$. **2340.** $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. **2341.** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. **2342.** $\frac{\pi}{2}$. **2343.** $\frac{1}{5}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$. **2344.** 0. **2345.** $\frac{\pi}{2}-1$. **2346.** $\frac{a}{a^2+b^2}$. **2347.** $\frac{b}{a^2+b^2}$. **2348.** $I_n=n!$. **2349.** $I_n=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi a^{n-1}\operatorname{sgn}a}{(ac-b^2)^{n+\frac{1}{2}}}$. **2350.** $I_n=\frac{1}{n!}\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}C_n^k\ln(k+1)$, burada C_n^k - n elementli çoxluğun k elementli altçoxluqlarının sayıdır. **2351.** $I_n=\frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}$, n - cüt olduqda; $I_n=\frac{(n-1)!!}{n!!}$, n - tək olduqda. **2352.** $I_n=\frac{(n-1)!!}{n!!}\pi$, n - cüt olduqda;

$I_n=\frac{(n-1)!!}{n!!}$, n -tək olduqda. **2353.** a) $-\frac{\pi}{2}\ln 2$; b) $-\frac{\pi}{2}\ln 2$

2354. $\frac{2\sqrt[4]{8e}^{\,-\frac{\pi}{8}}}{1-e^{-\pi}}$. **2356.** a) 1; b) $\frac{\pi}{2}$; c) 0. **2357.** a) 1; b) $\frac{1}{3}$; c) 1; d) $\frac{1}{\alpha}f(0)$.

2358. Yığılır. **2359.** Yığılır. **2360.** Dağılır. **2361.** $p>0$ olduqda yığılır. **2362.** $p>-1$ və $q>-1$ olduqda yığılır. **2363.** $m>-1$, $n-m>1$ olduqda yığılır. **2364.** $1<n<2$ olduqda yığılır. **2365.** $1<n<2$ olduqda yığılır. **2366.** $m>-2$, $n-m>1$ olduqda yığılır. **2367.** $n>0$ $(a\neq 0)$ olduqda yığılır. **2368.** Dağılır. **2369.** $p<1$, $q<1$ olduqda yığılır. **2370.** $n>-1$ olduqda yığılır. **2370.1.** Yığılır. **2371.** $\min(p,q)<1$, $\max(p,q)>1$ olduqda yığılır. **2372.** Yığılır. **2373.** Yığılır. **2374.** $p>1$, $q<1$ olduqda yığılır. **2375.** $p>1$, q - ixtiyari, $r<1$ olduqda və $p=1$, $q>1$, $r<1$ olduqda yığılır.

2376. $p_i<1$ $(i=1,2,\dots,n)$, $\sum_{i=1}^{n}p_i>1$ olduqda yığılır. **2376.1.** $\alpha>-1$, $\beta>-1, \alpha+\beta<-1$ olduqda yığılır. **2377.** $P_n(x)$ çoxhədlisinin $[0,+\infty)$ aralığında kökü yoxdursa və $n>m+1$ olarsa, yığılır. **2378.** Şərti yığılır. **2379.** Şərti yığılır. **2380.** $-1<\frac{p+1}{q}<0$ olduqda mütləq yığılır; $0\le\frac{p+1}{q}<1$ olduqda şərti yığılır. **2380.1.** Yığılır. **2380.2.** Yığılır. **2381.** $p>-2$, $q>p+1$ olduqda mütləq yığılır; $p>-2$, $p<q\le p+1$ olduqda şərti yığılır. **2382.** $0<n<2$ olduqda şərti yığılır. **2383.** $n>m+1$ olduqda mütləq yığılır; $m<n\le m+1$ olduqda şərti yığılır. **2385.** Yox.

2392. $\ln\frac{1}{2}$. **2393.** 0. **2394.** π. **2395.** 0. **2397.** $\frac{a^2}{3}$. **2398.** $4\frac{1}{2}$. **2399.** $4\frac{1}{2}$.

2400. $9{,}9-8{,}1\lg e\approx 6{,}38$. **2400.1.** $2-\frac{1}{\ln 2}\approx 0{,}56$. **2400.2.** $\frac{1}{3}+\frac{2}{\pi}\approx 0{,}97$.

2401. $\frac{\pi}{2}$. **2402.** πa^2. **2403.** πab. **2404.** $\frac{4}{3}a^3$. **2405.** $\frac{88}{15}\sqrt{2}p^2$.

2406. $\frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}$. **2407.** $3\pi a^2$. **2408.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **2409.** $\frac{2\pi}{n+2}$. **2410.** $\frac{1}{2}\operatorname{cth}\frac{\pi}{2}\approx 0{,}546$.

2411. $(3\pi+2):(9\pi-2)$. **2412.** $x=\operatorname{ch}S$, $y=\operatorname{sh}S$. **2413.** $3\pi a^2$. **2414.** $\frac{8}{15}$.

2415. $\frac{a^2}{3}(4\pi^3+3\pi)$. **2416.** $6\pi a^2$. **2417.** $\frac{3\pi}{8}\cdot\frac{c^4}{ab}$. **2417.1.** $\pi a^2\left(\frac{16}{\sqrt{3}}-9\right)$.

2418. a^2. **2419.** $\frac{3\pi a^2}{2}$. **2420.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **2421.** $\frac{p^2}{6}(3+4\sqrt{2})$. **2422.** $\frac{\pi p^2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}$.

2422.1. 11π. **2422.2.** $\frac{1}{\pi}$. **2423.** $(\pi-1)\frac{a^2}{4}$. **2424.** $\frac{1}{2}\left(1-\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$.

2424.1. $\frac{2}{3}$. **2424.2.** $\frac{1}{\pi}$. **2424.3.** $4\frac{4}{15}$. **2424.4.** $\pi\left(1+\frac{\pi^2}{6}\right)$. **2425.** $\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right)a^2$.

2426. $\frac{3}{2}a^2$. **2427.** $\pi a^2\sqrt{2}$. **2428.** a^2. **2429.** $\frac{3}{8}\pi a^2$. **2430.** $\frac{\pi a^2}{8\sqrt{2}}$.

2431. $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$. **2432.** $2\sqrt{x_0\left(x_0+\frac{p}{2}\right)}+p\ln\frac{1+\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0+\frac{p}{2}}}{\sqrt{\frac{p}{2}}}$.

2433. $\sqrt{h^2-a^2}$. **2434.** $x_0-\sqrt{2}+\sqrt{1+e^{2x_0}}-\ln\frac{1+\sqrt{1+e^{2x_0}}}{1+\sqrt{2}}$. **2435.** $\frac{e^2+1}{4}$.

2436. $a\ln\frac{a+b}{a-b}-b$. **2437.** $\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)$. **2438.** $a\ln\frac{a}{b}$.

2439. $4a\left(1+\sqrt{3}\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$. **2440.** $6a$. **2441.** $\frac{4(a^3-b^3)}{ab}$. **2442.** $1+\frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$.

2443. $8a$. **2444.** $2\pi^2 a$. **2445.** $2\left(\operatorname{ch}\frac{T}{2}\sqrt{\operatorname{ch}T}-1\right)-\sqrt{2}\ln\frac{\sqrt{2}\operatorname{ch}\frac{T}{2}+\sqrt{\operatorname{ch}T}}{1+\sqrt{2}}$.

2445.1. $\frac{1}{2}(\operatorname{ch}^{\frac{3}{2}}2T-1)$. **2446.** $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$.

2447. $\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}a$. **2448.** $8a$. **2449.** $p[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$. **2450.** $\frac{3\pi a}{2}$.

2451. $a(2\pi-\operatorname{th}\pi)$. **2452.** $2+\frac{1}{2}\ln 3$. **2452.1.** $6\frac{1}{3}$. **2452.2.** $\operatorname{sh} R$. **2452.3.** T.

2455. $\frac{2\pi}{5\sqrt{3}}\approx 0{,}73$. **2456.** $\frac{bh}{6}(2a+c)$. **2457.** $\frac{h}{6}[(2A+a)B+(A+2a)b]$.

2458. $\frac{\pi h}{6}[(2A+a)B+(A+2a)b]$. **2459.** $\frac{1}{2}SH$. **2462.** $\frac{2}{3}abc$.

2463. $\frac{4}{3}\pi abc$. **2464.** $\frac{8\pi\alpha bc}{3}$. **2465.** $\frac{16}{3}a^3$. **2466.** $\frac{2}{3}a^3\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$.

2467. $\frac{16}{15}a^2\sqrt{ab}$. **2468.** $\frac{\pi a^3}{2}$. **2469.** $\frac{4}{15}$. **2470.** $\frac{4\pi\sqrt{2}}{3}a^3$. **2472.** $\frac{3}{7}\pi ab^2$.

2473. a) $\frac{16\pi}{15}$; b) $\frac{8\pi}{3}$. **2474.** a) $\frac{\pi^2}{2}$; b) $2\pi^2$. **2475.** a) $\frac{4}{15}\pi ab^2$; b) $\frac{\pi a^2 b}{6}$.
2476. a) $\frac{\pi}{2}$; b) 2π. **2477.** $2\pi^2 a^2 b$. **2478.** $\frac{8\pi\alpha^3}{3}$. **2479.** $\frac{\pi}{5(1-e^{-2\pi})}$.
2480. a) $5\pi^2 a^3$; b) $6\pi^3 a^3$; c) $7\pi^2 a^3$. **2481.** a) $\frac{32}{105}\pi ab^2$; b) $\frac{32}{105}\pi a^2 b$.
2481.1. $V_x=\frac{64}{35}\pi$; $V_y=\frac{64}{105}\pi$. **2483.** a) $\frac{8}{3}\pi a^3$; b) $\frac{13}{4}\pi^2 a^3$.
2484. a) $\frac{\pi a^3}{4}\left[\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})-\frac{2}{3}\right]$; b) $\frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}$; c) $\frac{\pi^2 a^3}{4}$. **2484.1.** $\frac{2}{3}(\pi^4-6\pi^2)a^3$.
2484.2. $\frac{2}{3}\pi$. **2485.** $\frac{\pi^2\alpha^3}{2\sqrt{2}}$. **2486.** $\frac{4\pi a^2}{243}\left(21\sqrt{13}+2\ln\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$.
2487. $2a\sqrt{\pi^2a^2+4b^2}+\frac{8b^2}{\pi}\ln\frac{\pi a+\sqrt{\pi^2a^2+4b^2}}{2b}$. **2488.** $\pi\left[(\sqrt{5}-\sqrt{2})+\right.$
$\left.+\ln\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-1)}{2}\right]$. **2489.** a) $\frac{2\pi}{3}[(2x_0+p)\sqrt{2px_0+p^2}-p^2]$;
b) $\frac{\pi}{4}\left[(p+4x_0)\sqrt{2x_0(p+2x_0)}-p^2\ln\frac{\sqrt{2x_0}+\sqrt{p+2x_0}}{\sqrt{p}}\right]$. **2490.** a) $2\pi b^2+$
$+2\pi ab\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}$; b) $2\pi\alpha^2+\frac{2\pi b^2}{\varepsilon}\ln\left[\frac{a}{b}(1+\varepsilon)\right]$, burada $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ - ellipsin
ekssentrisitetidir. **2491.** $4\pi^2 ab$. **2492.** $\frac{12}{5}\pi a^2$. **2493.** a) $\pi a\left(2b+a\,\mathrm{sh}\frac{2b}{a}\right)$;
b) $2\pi a\left(a+b\,\mathrm{sh}\frac{b}{a}-a\,\mathrm{ch}\frac{b}{a}\right)$. **2494.** $4\pi a^2$. **2495.** a) $\frac{64}{3}\pi a^2$; b) $16\pi^2 a^2$;
c) $\frac{32}{3}\pi a^2$. **2496.** $\frac{3\pi}{5}a^2(4\sqrt{2}-1)$. **2497.** $\frac{32}{5}\pi a^2$. **2498.** a) $2\pi a^2(2-\sqrt{2})$;
b) $2\pi a^2\sqrt{2}$; c) $4\pi a^2$. **2499.** $\frac{5}{128\sqrt[3]{10}}[14\sqrt{5}+17\ln(2+\sqrt{5})]\approx 1{,}013$.
2500. $V=\frac{4\pi}{3}p^2$; $P=2\pi p^2[(2+\sqrt{2})+\ln(1+\sqrt{2})]$. **2501.** $M_1=2a^2$;
$M_2=\frac{\pi a^3}{2}$. **2501.1.** $\frac{p^2}{8}[\sqrt{2}+5\ln(1+\sqrt{2})]$. **2502.** $M_1=\frac{bh^2}{6}$; $M_2=\frac{bh^3}{12}$.
2502.1. $I_x=\frac{8}{35}a^4$, $I_y=\frac{8}{5}a^4$, $r_x=a\sqrt{\frac{6}{35}}$, $r_y=a\sqrt{\frac{6}{5}}$. **2503.** $M_2^{(x)}=\frac{\pi ab^3}{4}$;
$M_2^{(y)}=\frac{\pi a^3 b}{4}$. **2504.** $M_1=\frac{\pi r^2h^2}{12}$, $M_2=\frac{\pi}{30}r^2h^3$. **2504.1.** $I=\frac{2}{5}MR^2$.

2507. $x_0 = a\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$; $y_0 = 0$. **2508.** $\left(\dfrac{9}{20}a, \dfrac{9}{20}a\right)$. **2509.** $\left(\dfrac{4a}{3\pi}, \dfrac{4b}{3\pi}\right)$.

2510. $\left(0, 0, \dfrac{3}{8}a\right)$. **2511.** $\varphi_0 = \varphi - \alpha$, burada $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2m}$; $r_0 = \dfrac{mr}{\sqrt{1+4m^2}}$.

$r_0 = \dfrac{am}{\sqrt{1+4m^2}} e^{m(\varphi_0+\alpha)}$ loqarifmik spiralı. **2512.** $\varphi_0 = 0$, $r_0 = \dfrac{5}{6}a$.

2513. $x_0 = \pi a$, $y_0 = \dfrac{5}{6}a$. **2514.** $x_0 = \dfrac{2}{3}a$, $y_0 = 0$. **2515.** $\left(0, 0, \dfrac{a}{2}\right)$.

2516. 75 *kq*. **2517.** $A_h = mg\dfrac{Rh}{R+h}$, R – Yerin radiusudur; $A_\infty = mgR$.

2518. 0,5 *kQm*. **2519.** 1740 *kQm*. **2520.** $\dfrac{2}{3}a^3$. **2521.** $708\dfrac{1}{3}T$.

2522. $v_0T + \dfrac{a}{2}T^2$. **2523.** $\dfrac{4}{15}\pi\delta\omega^2R^5$. **2524.** Cazibə qüvvəsinin koordinat oxlarına proyeksiyaları: $X = 0$, $Y = -\dfrac{2km\mu_0}{a}$, burada k – cazibə sabitidir. **2525.** $2\pi km\delta_0\left(1 - \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$, burada k – cazibə sabitidir.

2526. Təxminən 3 saat. **2527.** Qab $y = Cx^4$ əyrisinin Oy oxu ətrafında fırlanmasından alınan səth ilə məhdudlanmalıdır. **2528.** $Q = Q_0 \cdot 2^{-\frac{t}{1600}}$.

2529. 99,92 %. **2530.** $\dfrac{\gamma H^2}{6E}$.

Cavablarda müəyyən inteqralların təqribi hesablanmasında cədvəl qiymətləri verilmişdir. **2531.** –6,2832. **2532.** 0,69315. **2533.** 0,83566. **2534.** 1,4675. **2535.** 17,333. **2536.** 5,4024. **2537.** 1,37039. **2538.** 0,2288. **2539.** 0,915966. **2540.** 3,14159. **2541.** 1,463. **2542.** 0,3179. **2543.** 0,8862. **2544.** 51,04.

2545.

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0,99	1,65	1,85	1,72	1,52	1,42

V Bölmə

2546. $\frac{2}{3}$. **2547.** $\frac{3}{2}$. **2548.** 3. **2549.** 1. **2550.** $\frac{1}{3}$. **2551.** a) $\frac{q\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2}$; b) $\frac{q\cos\alpha-q^2}{1-2q\cos\alpha+q^2}$. **2552.** $1-\sqrt{2}$. **2553.** Yalnız $x=k\pi$ olduqda yığılır (k - tamdır). **2556.** Dağılır. **2557.** Dağılır. **2558.** Yığılır. **2559.** Dağılır. **2560.** Dağılır. **2561.** Dağılır. **2562.** Yığılır. **2563.** Yığılır. **2564.** Dağılır. **2566.** Yığıla da bilər, dağıla da bilər. **2567.** a) Yığıla da bilər, dağıla da bilər; b) dağılır. **2578.** Yığılır. **2579.** Yığılır. **2580.** Yığılır. **2581.** a) Yığılır; b) dağılır. **2582.** Yığılır. **2583.** Yığılır. **2584.** Yığılır. **2585.** Yığılır. **2585.1.** Yığılır. **2585.2.** İstənilən α və x-də yığılır. **2586.** Yığılır. **2587.** Dağılır. **2588.** Dağılır. **2589.** Yığılır. **2589.1.** Yığılır. **2589.2.** Yığılır. **2590.** Yığılır. **2591.2.** $n\geq 13$. **2595.** Yığılır. **2596.** Yığılır. **2597.** Yığılır. **2597.1.** Yığılır. **2598.** $p>2$ olduqda yığılır. **2599.** $\frac{b-a}{d}>1$ olduqda yığılır. **2600.** $p>\frac{3}{2}$ olduqda yığılır. **2601.** Yığılır. **2602.** $p+q>1$ olduqda yığılır. **2603.** $q>p$ olduqda yığılır. **2604.** $\frac{p}{2}+q>1$ olduqda yığılır. **2605**(y). $\alpha(q-p)>1$ olduqda yığılır. **2607.** $q>p+1$ olduqda yığılır. **2608.** $p>0$ olduqda yığılır. **2609.** $p>0$ olduqda yığılır. **2610.** $p>\frac{1}{2}$ olduqda yığılır. **2611.** $b\neq 1$ olduqda yığılır. **2612.** $p>1$ olduqda yığılır. **2613.** Dağılır. **2614.** Dağılır. **2614.2.** $p+x>1$ olduqda yığılır. **2616.** $x<\frac{1}{e}$ olduqda yığılır. **2617.** Yığılır. **2618.** Dağılır. **2619.** $p>1$ olduqda yığılır. **2620.** $p>1$, q istənilən olduqda və $p=1$, $q>1$ olduqda yığılır. **2620.1.** Dağılır. **2620.2.** Yığılır. **2620.3.** Yığılır. **2621.** Dağılır. **2623.** 1,20. **2626.** $\alpha>\frac{1}{2}$ olduqda yığılır. **2627.** $a=\frac{1}{2}$ olduqda yığılır. **2628.** Dağılır. **2629.** Yığılır. **2630.** $\alpha>2$ olduqda yığılır. **2631.** Yığılır. **2632.** Yığılır. **2633.** Yığılır. **2634.** $c=0$, $\frac{a}{d}<-1$ olarsa, yığılır. **2635.** Dağılır. **2636.** $\alpha\neq 0$ olarsa, yığılır. **2637.** Yığılır. **2638.** Dağılır. **2639.** Yığılır. **2640.** $a=\sqrt{bc}$ olarsa, yığılır. **2641.** $\alpha<-1$ olarsa, yığılır. **2642.** $\alpha>\frac{1}{2}$ olarsa, yığılır. **2643.** $a^b>e$, $c=0$ olduqda və $a^c>1$ olduqda yığılır. **2644.** $a+b>1$ olduqda yığılır. **2645.** Yığılır. **2646.** Yığılır. **2647.** Yığılır. **2648.** Dağılır. **2649.** Yığılır. **2650.** Yığılır. **2651.** Yığılır.

2652. $\alpha>2$ olduqda yığılır. **2653.** Yığılır. **2654.** Yığılır. **2655.** a) $N>100\,000$; b) $N\geq 12$; c) $N>4$. **2659.** $\frac{2}{9}$. **2660.** $1\frac{3}{7}$. **2661.** $\ln 2$. **2662.** a) $\frac{3}{2}\ln 2$; b) $\frac{1}{2}\ln 2$. **2664.** Yığılır. **2665.** Yığılır. **2666.** Yığılır. **2666.1.** Alınmır. **2667.** Yığılır. **2668.** Yığılır. **2669.** Yığılır. **2670.** Dağılır. **2671.** Yığılır. **2672.** Yığılır. **2673.** Dağılır. **2673.1.** Yığılır. **2675.** $p>1$ olduqda mütləq yığılır; $0<p\leq 1$ olduqda şərti yığılır. **2676.** $p>1$ olduqda mütləq yığılır; $0<p\leq 1$ olduqda şərti yığılır. **2677.** $p>1$ olduqda mütləq yığılır; $\frac{1}{2}<p\leq 1$ olduqda şərti yığılır. **2678.** $|x-\pi k|<\frac{\pi}{4}$ (k – tamdır) olduqda mütləq yığılır; $x=\pi k\pm\frac{\pi}{4}$ olduqda şərti yığılır. **2679.** Tam mənfi ədədə bərabər olmayan istənilən x-də şərti yığılır. **2680.** $p>1$ olduqda mütləq yığılır; $0<p\leq 1$ olduqda şərti yığılır. **2681.** $p>2$ olduqda mütləq yığılır; $1<p\leq 2$ olduqda şərti yığılır. **2682.** $p>1$ olduqda mütləq yığılır; $\frac{1}{2}<p\leq 1$ olduqda şərti yığılır. **2683.** Şərti yığılır. **2684.** Mütləq yığılır. **2685.** Dağılır. **2686.** Şərti yığılır. **2687.** $p>1$ olduqda mütləq yığılır; $\frac{1}{2}<p\leq 1$ olduqda şərti yığılır. **2688.** Dağılır. **2689.** $p>2$ olduqda mütləq yığılır; $0<p\leq 2$ olduqda şərti yığılır. **2690.** Yığılır. **2691.** Dağılır **2692.** $q>p+1$ olduqda mütləq yığılır; $p<q\leq p+1$ olduqda şərti yığılır **2693.** $p>1$, $q>1$ olduqda mütləq yığılır; $0<p=q\leq 1$ olduqda şərti yığılır. **2694.** $p>1$ olduqda mütləq yığılır; $p=1$ olduqda şərti yığılır **2695.** $p>1$ olduqda mütləq yığılır; $p=1$ olduqda şərti yığılır. **2696.** $p>1$, $q>1$ olduqda mütləq yığılır; $0<p=q\leq 1$ olduqda şərti yığılır **2698.** a) $p>1$; b) $0<p\leq 1$. **2698.1.** a) Yığılır; b) yığılır; c) yığılır. **2699.** a) $q>p+1$; b) $p<q\leq p+1$. **2700.** $m\geq 0$ olduqda mütləq yığılır: $-1<m<0$ olduqda şərti yığılır. **2703.1.** a) $n\geq 1\,000\,000$; b) $n\geq 1{,}32\cdot 10^{16}$. **2706.** a) Dağılır; b) yığıla da bilər, dağıla da bilər. **2707.** $\frac{2}{3}$. **2708.** $\frac{3}{4}$. **2709.** $-\frac{2}{7}$. **2710.** $\frac{1+y}{1-xy}$. **2716.** $|x|>1$ olduqda mütləq yığılır. **2717.** $x>0$ olduqda mütləq yığılır; $x=0$ olduqda şərti yığılır. **2718.** $x>\frac{1}{3}$ olduqda və $x<-1$ olduqda mütləq yığılır. **2719.** $|x|\neq 1$ olduqda mütləq yığılır və $x=-1$ olduqda şərti yığılır. **2720.** $-\frac{\sqrt{17}-3}{6}<x<\frac{1}{3}$

və $\frac{2}{3}<x<\frac{\sqrt{17}+3}{6}$ olduqda mütləq yığılır. **2721.** $|x-\pi k|\leq\frac{\pi}{6}$ $(k=0,\pm1,\pm2,...)$ olduqda mütləq yığılır. **2722.** $p>1$ və $x\neq k$ $(k=-1,-2,...)$ olduqda mütləq yığılır və $0<p\leq1$, $x\neq k$ olduqda şərti yığılır. **2723.** $q>p+1$ olduqda mütləq yığılır və $p<q\leq p+1$ olduqda şərti yığılır. **2724.** $|x|<1$ olduqda mütləq yığılır. **2725.** $|x|<1$ olduqda mütləq yığılır. **2726.** $|x|\neq1$ olduqda mütləq yığılır. **2727.** $x\neq-1$ olduqda mütləq yığılır. **2728.** $x>0$ olduqda mütləq yığılır. **2729.** $|a|>1$ olarsa, $0<|x|<+\infty$ olduqda mütləq yığılır; $|a|\leq1$ və ya $x=0$ olarsa, dağılır. **2730.** $x=2$ olduqda və $x>e$ olduqda mütləq yığılır. **2731.** $x>1$ olduqda mütləq yığılır. **2732.** $0<\min(x,y)<1$ olarsa, yığılır. **2733.** $|x|<1$, $0\leq y<+\infty$ olduqda və $|x|>1, y>|x|$ olduqda mütləq yığılır; $x=-1$, $0\leq y\leq1$ olduqda şərti yığılır. **2734.** $\max(|x|,|y|)<1$ olduqda mütləq yığılır. **2735.** Mütləq yığılır: 1) $0\leq x<1$, $-\infty<y<+\infty$ olduqda; 2) $x=1$, $y>1$ olduqda və 3) $x>1$, $y>2$ olduqda. **2736.** $|x-\pi k|<\frac{\pi}{4}$ (k – tamdır) olduqda mütləq yığılır. **2738.** $\frac{1}{2}<|x|<2$; $\frac{6x(x^2-1)}{(2-x)^2(2x-1)^2}$. **2739.** a) $x\geq0$ olduqda mütləq yığılır, $-1<x<0$ olduqda şərti yığılır; b) $p+x>1$ olduqda və $x=0,1,2,...$ olduqda mütləq yığılır, $0<p+x\leq1$ olduqda şərti yığılır; c) mütləq yığılır: 1) $|x|<1$, y – istənilən olduqda ; 2) $x=\pm1$, $y>\frac{1}{2}$ olduqda; 3) x – istənilən, $y=0,1,2,...$ olduqda; $x=1$, $-\frac{1}{2}<y<\frac{1}{2}$ olduqda şərti yığılır. **2743.** $\varepsilon=0{,}001$ və $x=\sqrt[m]{0{,}1}$, $N\geq3m$ olduqda. Yox. **2744.** $n>\frac{1}{\varepsilon}$. **2745.** $n\geq26$. **2746.** a) Müntəzəm yığılır; b) müntəzəm yığılmır. **2747.** Müntəzəm yığılır. **2748.** Müntəzəm yığılmır. **2749.** Müntəzəm yığılır. **2750.** Müntəzəm yığılır. **2751.** a) Müntəzəm yığılır; b) müntəzəm yığılmır; c) müntəzəm yığılır. **2752.** a) Müntəzəm yığılmır; b) müntəzəm yığılır. **2753.** Müntəzəm yığılır. **2754.** Müntəzəm yığılmır. **2755.** a) Müntəzəm yığılır; b) müntəzəm yığılmır. **2756.** a) Müntəzəm yığılmır; b) müntəzəm yığılır. **2757.** Müntəzəm yığılmır. **2758.** a) Müntəzəm yığılır; b) müntəzəm yığılmır. **2759.** Müntəzəm yığılır. **2760.** a) Müntəzəm yığılır; b) müntəzəm yığılmır. **2761.** Müntəzəm yığılır. **2762.** Müntəzəm yığılır. **2763.** Müntəzəm yığılmır. **2767.** a) Müntəzəm yığılır; b) müntəzəm yığılmır. **2768.** Müntəzəm yığılır. **2768.1.** Müntəzəm yığılmır.

2769. Müntəzəm yığılmır. **2770.** Müntəzəm yığılır. **2771.** Müntəzəm yığılmır. **2772.** Müntəzəm yığılır. **2773.** a) Müntəzəm yığılmır; b) müntəzəm yığılır. **2775.** a) Müntəzəm yığılır; b) müntəzəm yığılmır. **2776.** Müntəzəm yığılmır. **2777.** Müntəzəm yığılır. **2778.** Müntəzəm yığılır. **2779.** Müntəzəm yığılır. **2780.** Müntəzəm yığılır. **2781.** Müntəzəm yığılır. **2782.** Müntəzəm yığılır. **2783.** Ola bilər. **2785.** Müntəzəm yığıla da bilər, yığılmaya da bilər. **2795.** a) $|x|<1$ olduqda var və kəsilməzdir; b) $|x|<+\infty$ olduqda var və kəsilməzdir; c) $|x|<+\infty$ olduqda var və $x=0$ olduqda kəsiləndir. **2799.** a) $x\neq -k$ $(k=1, 2, 3, ...)$ olduqda var və diferensiallanandır; b) $|x|<+\infty$ olduqda var və $x=0$ nöqtəsi istisna olmaqla hər yerdə diferensiallanandır. **2802.** a) α ixtiyaridir; b) $\alpha<1$; c) $\alpha<2$. **2805.** Yox. **2806.** $\frac{1}{2}\ln 2$. **2807.** 1. **2808.** 1. **2808.1.** $\frac{\pi^2}{6}$. **2809.** Olar. **2810.** Hə. **2812.** $R=1$; $(-1, 1)$. $x=-1$ olduqda $p>1$ olarsa, mütləq yığılır və $0<p\leq 1$ olarsa, şərti yığılır; $x=1$ olduqda $p>1$ olarsa, mütləq yığılır, $p\leq 1$ olarsa, dağılır. **2813.** $R=\frac{1}{3}$; $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. $x=-\frac{4}{3}$ olduqda şərti yığılır; $x=-\frac{2}{3}$ olduqda dağılır. **2814.** $R=4$; $(-4, 4)$. $x=\pm 4$ olduqda dağılır. **2815.** $R=+\infty$; $(-\infty, +\infty)$. **2816.** $R=\frac{1}{e}$; $\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$. $x=\pm\frac{1}{e}$ olduqda dağılır. **2817.** $R=+\infty$; $(-\infty, +\infty)$. **2818.** $R=2$; $(-1, 3)$. $x=-1$ olduqda $p>2$ olarsa, mütləq yığılır və $0<p\leq 2$ olarsa, şərti yığılır; $x=3$ olduqda $p>2$ olarsa, mütləq yığılır və $p\leq 2$ olarsa, dağılır. **2819.** $R=2^p$; $(-2^p, 2^p)$. $x=-2^p$ olduqda $p>2$ olarsa, mütləq yığılır və $p\leq 2$ olarsa, dağılır; $x=2^p$ olduqda $p>2$ olarsa, mütləq yığılır və $0<p\leq 2$ olarsa, şərti yığılır. **2820.** $R=1$; $(-1, 1)$. $x=-1$ olduqda $m\geq 0$ olarsa, mütləq yığılır və $m<0$ olarsa, dağılır; $x=1$ olduqda $m\geq 0$ olarsa, mütləq yığılır və $-1<m<0$ olarsa, şərti yığılır. **2821.** $R=\min\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$; $(-R, R)$. $x=-R$ olduqda $a\geq b$ olarsa, şərti və $a<b$ olarsa, mütləq yığılır; $x=R$ olduqda $a\geq b$ olarsa, dağılır və $a<b$ olarsa, mütləq yığılır. **2822.** $R=\max(a, b)$; $(-R, R)$. $x=\pm R$ olduqda dağılır. **2823.** $R=1$; $(-1, 1)$. $x=\mp 1$ olduqda $a>1$ olarsa, mütləq yığılır və $a\leq 1$ olarsa, dağılır. **2824.** $R=1$; $(-1, 1)$. $x=\pm 1$ olduqda mütləq yığılır. **2825.** $R=1$; $(-1, 1)$. $x=-1$ olduqda şərti yığılır; $x=1$ olduqda dağılır. **2826.** $R=1$; $(-1, 1)$. $x=-1$ olduqda dağılır; $x=1$ olduqda şərti yığılır. **2827.** $R=1$; $(-1, 1)$.

$x=\pm 1$ olduqda dağılır. **2828.** $R=\frac{1}{4}$; $\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$. $x=\pm\frac{1}{4}$ olduqda dağılır. **2829.** $R=\frac{1}{3}$; $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$. $x=\pm\frac{1}{3}$ olduqda dağılır. **2830.** $R=1$; $(-1,\ 1)$. $x=\pm 1$ olduqda mütləq yığılır. **2831.** $R=1$; $(-1,\ 1)$. $x=\pm 1$ olduqda şərti yığılır. **2831.1.** $0<x<2$ olduqda mütləq yığılır; $x=2$ olduqda şərti yığılır. **2831.2.** Yalnız $x=0$ olduqda yığılır. **2832.** $R=1$; $(-1,\ 1)$. $x=-1$ olduqda $\gamma-\alpha-\beta>0$ olarsa, mütləq və $-1<\gamma-\alpha-\beta\le 0$ olarsa, şərti yığılır; $x=1$ olduqda $\gamma-\alpha-\beta>0$ olarsa, mütləq yığılır və $\gamma-\alpha-\beta\le 0$ olarsa, dağılır. **2833.** $x>0$. **2834.** $|x|>\frac{1}{2}$. **2835.** $0<|x|<+\infty$. **2836.** $x>-1$. **2837.** $|x-\pi k|<\frac{\pi}{4}$ (k – tam ədəddir). **2838.** $-1+3(x+1)-3(x+1)^2+(x+1)^3$. **2839.** a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{a^{n+1}}$ $(|x|<|a|)$; b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-b)^n}{(a-b)^{n+1}}$ $(|x-b|<|a-b|)$; c) $-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{x^{n+1}}$ $(|x|>|a|)$. **2840.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}$ $(0<x\le 2)$; ln 2.

2841. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(|x|<+\infty)$. **2842.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ $(|x|<+\infty)$.

2843. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$ $(|x|<+\infty)$. **2844.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n a}{n!}x^n$ $(|x|<+\infty)$.

2845. $\mu x+\frac{\mu(1^2-\mu^2)}{3!}x^3+\frac{\mu(1^2-\mu^2)(3^2-\mu^2)}{5!}x^5+\ldots$ $(|x|<1)$.

2846. $1-\frac{\mu^2}{2!}x^2-\frac{\mu^2(2^2-\mu^2)}{4!}x^4-\ldots$ $(|x|<1)$. **2847.** $1+(x-1)+(x-1)^2+\frac{(x-1)^3}{2}+\ldots$ $(0<x<2)$. **2848.** $e\left(1-\frac{x}{2}+\frac{11}{24}x^2-\frac{7}{16}x^3+\ldots\right)$ $(|x|<1)$.

2849. $\sin(x+h)=\sin x+h\cos x-\frac{h^2}{2!}\sin x-\frac{h^3}{3!}\cos x+\ldots$ $(|h|<+\infty)$;

$\cos(x+h)=\cos x-h\sin x-\frac{h^2}{2!}\cos x+\frac{h^3}{3!}\sin x+\ldots$ $(|h|<+\infty)$.

2850. a) $(-2,\ 2)$; b) $(3,\ 7)$. **2850.1.** Yox. **2851.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$ $(|x|<+\infty)$.

2852. $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$ $(|x|<+\infty)$. **2853.** $\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^{2n}-1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

$(|x|<+\infty)$. **2854.** $\sum_{n=10}^{\infty} x^n \quad (|x|<1)$. **2855.** $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,x^n \quad (|x|<1)$.

2856. $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+1}\left(-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}\right)$. **2857.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x|<1)$.

2858. $\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}[1-(-2)^n]\,x^n \quad \left(|x|<\frac{1}{2}\right)$. **2859.** $\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{6^n}\right]x^n \quad (|x|<1)$.

2860. $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[n+\frac{1-(-1)^n}{2}\right]x^n \; (|x|<1)$. **2861.** $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$, burada $a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\times$ $\times\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1}+(-1)^n\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1}\right]$ (Fibonaççi ədədləri). **2862.** $\frac{2}{\sqrt{3}}\times$ $\times\sum_{n=0}^{\infty}x^n \sin\frac{2\pi(n+1)}{3} \quad (|x|<1)$. **2862.1.** $\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$, burada $n=4k$ olduqda $c_n=1$; $n=4k+1$ olduqda $c_n=-1$; $n=4k+2$ və ya $n=4k+3$ olduqda $c_n=0$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$. $f^{(1000)}(0)=1000!$. **2863.** $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\cos n\alpha \quad (|x|<1)$.

2864. $\sum_{n=0}^{\infty}x^n \sin na \quad (|x|<1)$. **2865.** $\sum_{n=0}^{\infty}x^n\,\mathrm{sh}\,na \quad (|x|<e^{-|a|})$. **2866.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}x^{2n} \quad (|x|<1)$. **2867.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}+[1+(-1)^n](-1)^{\frac{n}{2}+1}}{n}x^n$ $(-1<x\le1)$. **2868.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n!}x^n \quad (|x|<+\infty)$. **2869.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x|\le1)$; $\frac{\pi}{4}$. **2870.** $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x|\le1)$. **2871.** $x+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right\}$ $(|x|\le1)$. **2872.** $-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n}x^n \quad (|x|\le1)$. **2873.** a) $x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ $(-1\le x\le1)$; b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1} \quad (-1<x<1)$; c) $\mathrm{arctg}\,2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2^{2n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$ $\left(-\frac{1}{4}<x\le\frac{1}{2}\right)$; d) $\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{x^{2n+1}}{2^n(2n+1)}\right\} \quad (|x|<\sqrt{2})$; e) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$ $(|x|\le1)$; f) $0\le x\le1$ və $-1\le x\le0$ olduqda $2|x|\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\times\right.$

$\times\dfrac{x^{2n}}{2n+1}\Big\}$; g) $1+\dfrac{x^2}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left\{\dfrac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\dfrac{x^{2n+2}}{2n+1}\right\}$ $(|x|\le 1)$; h) $-1+\dfrac{x^2}{2}+$ $+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\dfrac{x^{2n+2}}{2n+1}$ $(|x|\le 1)$. **2874.** a) $e^{x^2}\left[(2x)^n+\dfrac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2}+\right.$ $\left.+\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4}+\ldots\right]$; b) $\dfrac{(-1)^n}{x^{2n}}e^{\frac{a}{x}}\left[a^n+\dfrac{n(n-1)}{1!}a^{n-1}x+\right.$ $\left.+\dfrac{n(n-1)(n-2)}{2!}a^{n-2}x^2+\ldots\right]$; c) $\dfrac{(-1)^{n-1}n!}{(1+x^2)^n}\left[x^{n-1}-\dfrac{(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}+\right.$ $\left.+\dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}x^{n-5}-\ldots\right]$. **2875.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}(x+1)^{2n}$ $(-2\le x\le 0)$.

2876. $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x^n}$ $(|x|>1)$. **2877.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2}{2n+1}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}$ $(x>0)$.

2878. $\dfrac{x}{1+x}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{n+1}$ $\left(x>-\dfrac{1}{2}\right)$. **2881.** $1-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{12}x^2-\dfrac{1}{24}x^3-\ldots$ $(|x|<1)$. **2882.** $1+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)}{n!}x^n$ $(|x|<+\infty)$. **2883.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[\dfrac{1}{(2n)!}-\right.$ $\left.-\dfrac{2}{(2n-2)!}+\dfrac{1}{(2n-4)!}\right]x^n$ $(|x|<+\infty)$, burada $0!=1$, $(-1)!=\infty$, $(-2)!=\infty$ və b.

2884. $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}\right)\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ $(-1\le x<1)$. **2885.** $x+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1}$ $(|x|\le 1)$. **2886.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^{\frac{n}{2}}\cos\dfrac{n\pi}{4}}{n!}x^n$ $(|x|<+\infty)$. **2887.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{\frac{n}{2}}\sin\dfrac{n\pi}{4}}{n!}x^n$ $(|x|<+\infty)$. **2888.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left\{(-1)^{n-1}\left(1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}\right)x^n\right\}$ $(-1<x<1)$.

2889. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{2n-1}\right)\dfrac{x^{2n}}{n}$ $(|x|\le 1)$. **2890.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)!}x^{2n}$ $(|x|\le 1)$. **2891.** $x+\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2}{15}x^5+\ldots$ $\left(|x|<\dfrac{\pi}{2}\right)$. **2892.** $x-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2}{15}x^5+\ldots$ $\left(|x|<\dfrac{\pi}{2}\right)$. **2893.** $-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{45}x^3-\dfrac{2}{945}x^5-\ldots$ $(|x|<\pi)$. **2894.** $E_0=1$, $\sum\limits_{k=0}^{n}\left\{(-1)^k\dfrac{E_{n-k}}{(2k)!(2n-2k)!}\right\}=0$. **2895.** $P_0(x)=1$; $P_n(t)=\dfrac{(2n-1)!!}{n!}\times$

$\times\left[x^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot4\cdot(2n-1)(2n-3)}x^{n-4}-...\right]$ $(n\geq1)$ (Lejandr çoxhədliləri). **2896.** $\sum_{n=0}^{\infty}s_n x^n$, $s_n=\sum_{k=0}^{n}a_k$. **2897.** a) $R\geq\min(R_1, R_2)$; b) $R\geq R_1R_2$. **2901.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$ $(|x|<+\infty)$. **2902.** $x+$ $+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ $(|x|\leq1)$. **2903.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$ $(|x|<+\infty)$. **2904.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$ $(|x|\leq1)$. **2905.** $x+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{36}+\frac{x^4}{96}-...$ $(|x|<1)$. **2906.** $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ $(|x|<1)$. **2907.** $\operatorname{arctg}x$ $(|x|\leq1)$. **2908.** $\operatorname{ch}x$ $(|x|<+\infty)$. **2909.** $1+\frac{1-x}{x}\ln(1-x)$ $(|x|\leq1)$. **2910.** $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ $(-1\leq x<1)$. **2911.** $\frac{x}{(1-x)^2}$ $(|x|<1)$. **2912.** $\frac{x(1-x)}{(1+x)^3}$ $(|x|<1)$. **2913.** $\frac{2x}{(1-x)^3}$ $(|x|<1)$. **2916.** $R=2$; $(x-1)^2+(y-1)^2<4$. **2917.** $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $x^2+y^2<\frac{1}{2}$. **2918.** $R=1$; $x^2+y^2<1$. **2919.** $R=1$; $x^2+y^2<1$. **2920.** $R=\left|2\sin\frac{\alpha}{2}\right|$; $(x-\cos\alpha)^2+(y-\sin\alpha)^2<$ $<4\sin^2\frac{\alpha}{2}$. **2921.** 2,080. **2922.** a) $0,87606=\text{arc}\,50^0 11' 40''$; b) 1,99527; c) 0,60653; d) 0,22314. **2923.** 0,30902. **2924.** 0,999848. **2925.** 0,158. **2926.** 2,718282. **2927.** 0,1823. **2928.** 3,1416. **2929.** 3,142. **2930.** 3,141592654. **2931.** $\ln 2=0,69315$; $\ln 3=1,09861$. **2932.** a) 0,747; b) 2,835; c) 1,605; d) 0,905; e) 1,057; f) 0,119; g) 0,337; h) 0,927; i) 8,041; j) 0,488; k) 0,507; l) 0,783. **2933.** 3,82. **2934.** 4,84. **2935.** 20,02 *m*. **2936.** $\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos2x+\frac{1}{8}\cos4x$. **2937.** Furye sırası $P_n(x)$ çoxhədlisi ilə üst-üstə düşür. **2938.** $\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$; $\frac{\pi}{4}$. **2939.** $\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)\frac{\pi x}{l}$.

2940. $2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$. **2941.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$. **2942.** $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$.

2943. $-\frac{(a-b)\pi}{4}+\frac{2(a-b)}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}+(a+b)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$.

2944. $\frac{2}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$. **2945.** $\frac{2\sin\pi a}{\pi}\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a\cos nx}{n^2-a^2}\right]$.

2946. $\frac{2\sin\pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\,n\sin nx}{n^2-a^2}$. **2947.** $\frac{2\,\mathrm{sh}\,\pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\,n\sin nx}{n^2+a^2}$.

2948. $2\,sh\,ah\left[\frac{1}{2ah}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{ah\cos\frac{nx}{h}-\pi n\sin\frac{nx}{h}}{(ah)^2+(\pi n)^2}\right]$. **2949.** $a+l+\frac{2l}{\pi}\times$ $\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}-\cos\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$ $(a<x<a+2l)$. **2950.** $1-\frac{1}{2}\cos x+$ $+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nx$. **2951.** $\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\,n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx$.

2952. $\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{(-1)^k\frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}\right\}$. **2953.** $\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin(2k+1)x$.

2954. $\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$. **2955.** $\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{n}$ ($x\neq$tam ədəd).

2956. $\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos 2\pi(2n+1)x}{(2n+1)^2}$. **2957.** $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}$.

2958. $\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}\cos 2kx$. **2959.** $\frac{\alpha}{1-\alpha^2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha^2}\cos nx$.

2960. $\frac{4}{\pi}\ln(1+\sqrt{2})+\sum_{k=0}^{\infty}\left\{(-1)^k\left[2+\frac{8}{\pi}\sum_{m=1}^{k}\frac{(-1)^m}{m}\sin\frac{m\pi}{2}\right]\cos(8k+4)x\right\}+$ $+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{(-1)^k\left[\frac{8}{\pi}\ln(1+\sqrt{2})+\frac{16}{\pi}\sum_{m=1}^{k}\frac{(-1)^m}{2m-1}\sin(2m-1)\frac{\pi}{4}\right]\cos 8kx\right\}$.

2961. a) $\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$ $(-\pi\le x\le\pi)$; b) $2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx-$ $-\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3}$ $(0\le x<\pi)$; c) $\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}-4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ $(0<x<2\pi)$; $\frac{\pi^2}{6}$, $\frac{\pi^2}{12}$, $\frac{\pi^2}{8}$. **2962.** $x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$;

$x^3=2\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}+12\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n^3}$; $x^4=\frac{1}{\pi}\pi^4+8\pi^2\times$

$\times\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}+48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}\cos nx$. **2963.** $\frac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}$; $\frac{\pi^2-3\pi\alpha+3\alpha^2}{6}$.

2964. $\frac{2}{3}-\frac{9}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{2\pi nx}{3}+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nx}{n^2}$ $(0\le x\le 3)$.

2965. $\frac{1}{2^m}C_{2m}^{m}+\frac{1}{2^{m-1}}\sum_{k=1}^{m}C_{2m}^{m-k}\cos 2kx$. **2966.** $\sum_{n=1}^{\infty}q^n\sin nx$ $(|q|<1)$.

2967. $1+2\sum_{n=1}^{\infty}q^n\cos nx$ $(|q|<1)$. **2968.** $\sum_{n=0}^{\infty}q^n\cos nx$. **2969.** $-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n}\cos nx$.

2970. $-\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$. **2971.** $-\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos nx}{n}$.

2972. $-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}$. **2973.** $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^2}$. **2974.** $x(s)=\frac{a}{2}-$
$-\frac{4a}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi s}{2a}+\frac{4a}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi s}{2a}$;

$y(s)=\frac{a}{2}-\frac{4a}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi s}{2a}+\frac{4a}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi s}{2a}$.

2975. $f(-x)=f(x)$; $f(\pi-x)=-f(x)$. **2976.** $f(-x)=-f(x)$; $f(\pi-x)=f(x)$.

2977. a) $-\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\left[\frac{2}{(2k+1)^2}-\frac{8}{\pi}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}\right]\cos(2k+1)x\right\}$ $\left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$;

b) $\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\left[\frac{2(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}+\frac{8}{\pi}\frac{1}{(2k+1)^3}\right]\sin(2k+1)x\right\}$ $\left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$. **2978.** $a_{2n}=b_{2n}=0$ $(n=0,1,2,\ldots)$. **2979.** $a_{2n-1}=b_{2n-1}=0$ $(n=1,2,3,\ldots)$. **2980.** a) $a_n=0$, $b_{2k-1}=0$; b) $a_n=0$, $b_{2k}=0$. **2981.** $\alpha_n=a_n$, $\beta_n=-b_n$. **2982.** $\alpha_n=-a_n$, $\beta_n=b_n$. **2983.** $\overline{a}_n=a_n\cos nh+b_n\sin nh$, $\overline{b}_n=b_n\cos nh-a_n\sin nh$.

2984. $A_0=a_0$, $A_n=a_n\frac{\sin nh}{nh}$, $B_n=b_n\frac{\sin nh}{nh}$ $(n=1,2,\ldots)$. **2985.** $A_0=a_0^2$, $A_n=a_n^2+b_n^2$; $B_n=0$ $(n=1,2,\ldots)$. **2986.** $\frac{1}{2}$. **2987.** $\frac{1}{4}$. **2988.** $2\ln 2-1$.

2989. $\frac{1}{4}$. **2990.** $\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}\right)$. **2991.** $\ln 2-\frac{1}{2}$. **2992.** $\frac{3}{4}$. **2993.** 1.

2994. $2(1-\ln 2)$. **2995.** $2e$. **2996.** $3e^2$. **2997.** $\frac{\pi^2}{3}-3$. **2998.** $\frac{\pi^2}{4}-\frac{39}{16}$.

2999. $\frac{1}{2}(\cos 1-\sin 1)$. **3000.** $\frac{1}{6}(4\ln 2-1)$. **3001.** $e^x(\alpha_m x^m+\alpha_{m-1}x^{m-1}+\ldots+$

$+\alpha_0)$, burada α_k $(k=0,1,\dots,m)$ əmsalları $P(n)=\alpha_m n(n-1)\times\times\dots\times(n-m+1)+\alpha_{m-1}n(n-1)\dots(n-m+2)+\dots+\alpha_1 n+\alpha_0$ bərabərliyindən təyin olunurlar. **3002.** $e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+1\right)$. **3003.** $\left(x^2+x+\frac{1}{x}\right)e^{-x}-\frac{1}{x}$. **3004.** $\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\cos x-\frac{x}{2}\sin x$. **3005.** $x\ge 0$ olduqda $\frac{1}{4}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\operatorname{sh}\sqrt{x}-\operatorname{ch}\sqrt{x}\right)$; $x<0$ olduqda $\frac{1}{4}\left(\frac{x+1}{\sqrt{|x|}}\sin\sqrt{|x|}-\cos\sqrt{|x|}\right)$. **3006.** $\ln\frac{1}{1-x}$. **3007.** $2x\operatorname{arctg}x-\ln(1+x^2)$ $(|x|\le 1)$. **3008.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}$ $(|x|<1)$. **3009.** $(1-x)^{-\frac{a}{d}}-1$ $(|x|<1)$. **3010.** $\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}-1$. **3011.** $\frac{1+x}{(1-x)^3}$ $(|x|<1)$. **3012.** $\frac{x(3-x)}{(1-x)^3}$ $(|x|<1)$. **3013.** $(1+2x^2)e^{x^2}$. **3014.** $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\ln 2$. **3015.** $\frac{\pi}{4}$. **3016.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **3017.** $\frac{\pi}{2}$. **3018.** $\frac{\pi-x}{2}$ $(0<x<2\pi)$. **3019.** $-\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right|$ $(0<x<2\pi)$. **3020.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin\frac{x+\alpha}{2}}{\sin\frac{x-\alpha}{2}}\right|$. **3021.** $0<x<2\alpha$ olduqda $\frac{\pi}{4}$; $2\alpha<x<2\pi-2\alpha$ olduqda 0; $2\pi-2\alpha<x<2\pi$ olduqda $-\frac{\pi}{4}$. **3022.** $\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}x$ $(|x|<\pi)$. **3023.** $\frac{1}{2}\left(1-\frac{\cos x}{2}\right)-\frac{x}{2}\sin x$ $(|x|<\pi)$. **3024.** $\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{4}|x|$ $(|x|\le\pi)$. **3025.** $\frac{x}{2}(1+\cos x)-$ $-\sin x\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)$ $(|x|<\pi)$. **3026.** $e^{\cos x}\cos(\sin x)$ $(|x|<+\infty)$. **3027.** $x=i\pi$, $y=j\pi$ $(i,j=0,\pm1,\pm2,\dots)$. **3028.** $2(\arcsin x)^2$ $(|x|\le 1)$. **3029.** $x\ge 0$ olduqda $\frac{4}{4-x}+\frac{4\sqrt{x}}{(4-x)^{\frac{3}{2}}}\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2}$; $x<0$ olduqda $\frac{4}{4-x}-\frac{4\sqrt{|x|}}{(4-x)^{\frac{3}{2}}}\ln\frac{\sqrt{|x|}+\sqrt{4-x}}{2}$. **3030.** $\frac{1}{x-1}$. **3031.** $\frac{a_1}{x}$. **3032.** a) $\frac{x}{1-x}$; b) $\frac{1}{x-1}$. **3033.** a) $\frac{x^2}{(1-x)^2}$; b) $\frac{x}{(x-1)^2}$. **3034.** 1.

3035. $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{(2n+1)^2}$. **3036.** $\frac{\pi^2}{12}$. **3037.** $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(p+nq)}$.

3038. $2-\frac{\pi^2}{6}$. **3039.** $\frac{1}{24}$. **3040.** $\frac{\pi^2}{12}$.

3041. $F(k)=\frac{\pi}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 k^{2n}\right\}$.

3042. $E(k)=\frac{\pi}{2}\left\{1-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 \frac{k^{2n}}{2n-1}\right\}$.

3043. $2\pi a\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\varepsilon^2-\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)\frac{\varepsilon^4}{3}-\ldots\right]$, burada ε – ellipsin ekssentrisitidir. **3047.** $\frac{2\pi a^n}{n!}$. **3048.** $\ln(1+\alpha)$, $|\alpha|<1$ olduqda və $\frac{1}{\alpha^2}\ln\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)$, $|\alpha|>1$ olduqda. **3049.** 0, $|\alpha|\le 1$ olduqda və $\pi\ln\alpha^2$, $|\alpha|>1$ olduqda. **3050.** $2\cdot 10^{-6}$. **3061.** $\frac{1}{4}$. **3062.** 2. **3063.** $\frac{3}{7}$. **3064.** $a^{-\ln 2}$. **3065.** a) Yox; b) hə; c) hə; d) hə. **3066.** Sıfra dağılır. **3067.** Yığılır. **3068.** $p>1$ olduqda yığılır. **3069.** Sıfra dağılır. **3070.** İstənilən p-də yığılır. **3071.** $a_1=a$ olduqda yığılır. **3072.** $\sum_{i=1}^{p}a_i=\sum_{i=1}^{p}b_i$ olduqda yığılır. **3073.** Sıfra dağılır. **3074.** Yığılır. **3075.** Yığılır. **3076.** Yığılır. **3077.** İstənilən x-də yığılır. **3078.** İstənilən x-də yığılır. **3079.** $|x|<1$ olduqda yığılır. **3080.** $|x|<2$ olduqda yığılır. **3081.** $|x|>e$ olduqda yığılır. **3082.** İstənilən x-də yığılır. **3083.** $|x|<1$, p, q ixtiyari olduqda və $x=\pm 1$, $p>1$, $q>\frac{1}{2}$ olduqda yığılır. **3084.** İstənilən x və p-də yığılır. **3085.** Dağılır. **3088.** Şərti yığılır. **3089.** Dağılır. **3090.** $p>1$ olduqda mütləq yığılır; $\frac{1}{2}<p\le 1$ olduqda şərti yığılır. **3091.** Dağılır. **3092.** Dağılır. **3093.** Dağılır. **3094.** Şərti yığılır. **3095.** Şərti yığılır. **3096.** Dağılır. **3097.** $\alpha>1$ olduqda mütləq yığılır; $\frac{1}{2}<\alpha\le 1$ olduqda şərti yığılır. **3109.** $F'(x)=F(x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n'(x)}{1+f_n(x)}$; $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|<+\infty$, $|f_n'(x)|<c_n$ $(n=1,2,\ldots)$, burada $\sum_{n=1}^{\infty}c_n<+\infty$.

3111. $157{,}970+\theta\cdot 0{,}0004$ $(0<\theta<1)$. **3112.** $10^{2866}\cdot 7{,}7\cdot\left(1+\frac{\theta}{12000}\right)$ $(|\theta|<1)$.

3113. $0{,}0798\cdot\left(1+\frac{\theta}{300}\right)$ $(|\theta|<1)$. **3114.** $10^{28}\cdot 1{,}378\cdot\left(1+\frac{\theta}{288}\right)$ $(|\theta|\le 1)$.

3115. $10^{42}\cdot 4{,}792\cdot\left(1+\frac{\theta}{120}\right)$ $(|\theta|\le 1)$. **3116.** $0{,}124\cdot\left(1+\frac{\theta}{300}\right)$ $(|\theta|<1)$.

3117. $0{,}355\cdot\left(1+\frac{\theta}{600}\right)$ $(|\theta|<1)$. **3118.** $(2n-1)!!=\sqrt{2}\,(2n)^n\,e^{-n+\frac{\theta_n}{12n}}$ $(|\theta_n|<1)$. **3119.** $\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}e^{\frac{\theta_n}{6n}}$ $(|\theta_n|<1)$. **3120.** a) 1; b) e; c) $\frac{e}{2}$; d) 1.

3121. $P_3(x)=1-\frac{55}{21}x-\frac{1}{14}x^2+\frac{5}{42}x^3$; $P_3(-1)\approx 3{,}43$; $P_3(1)=-1{,}57$; $P_3(6)\approx 8{,}43$. **3122.** $y=y_0+\frac{y_1-y_{-1}}{2h}(x-x_0)+\frac{y_1-2y_0+y_{-1}}{2h^2}(x-x_0)^2$.

3123. $y=0{,}808+0{,}193x-0{,}00101x^2$. **3124.** $\sin x^0\approx\frac{5x}{288}\left[1-\left(\frac{x}{150}\right)^2\right]$; $\sin 20^0\approx 0{,}341$; $\sin 40^0\approx 0{,}645$; $\sin 80^0\approx 0{,}994$. **3125.** $P(x)=\frac{1}{3}(7x^2-4x^4)$.

3126. $7\frac{1}{3}$. **3127.** $B_n(x)=x$; $B_n(x)=x^2+\frac{x(1-x)}{n}$; $B_n(x)=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)x^3+$ $+\frac{3}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2+\frac{1}{n^2}x$. **3128.** $B_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}f\left(a+\frac{i}{n}l\right)C_n^i\,\frac{(x-a)^i\,(b-x)^{n-i}}{l^n}$, burada $l=b-a$. **3129.** $B_n(x)=\frac{1}{8}(1-x)(1+x)^3+\frac{1}{16}(1+x)^4$.

3130. $B_{2n}(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{1-x^2}{4}\right)^n\sum\limits_{i=1}^{n}i\,C_{2n}^{n-i}\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^i+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^i\right]$.

3131. $B_n(x)=e^{ka}\left[1+(e^{\frac{kl}{n}}-1)\,\frac{x-a}{l}\right]^n$, burada $l=b-a$.

3132. $B_n(x)=\frac{1}{2}\left[\left(\cos\frac{\pi}{2n}+i\frac{2x}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\right)^n+\left(\cos\frac{\pi}{2n}-i\frac{2x}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\right)^n\right]$, burada $i=\sqrt{-1}$. **3135.** $\sigma_{2n-1}(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\times\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\,\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$.

VI Bölmə

3136. $y \geq 0$ yarımmüstəvisi. **3137.** $|x| \leq 1$; $|y| \geq 1$. **3138.** $x^2+y^2 \leq 1$ dairəsi. **3139.** $x^2+y^2>1$ dairəsinin xarici. **3140.** $1 \leq x^2+y^2 \leq 4$ halqası. **3141.** $x \leq x^2+y^2<2x$ ayparası. **3142.** $-1 \leq x^2+y \leq 1$. **3143.** $x+y<0$ yarımmüstəvisi. **3144.** $|y| \leq |x|$ $(x \neq 0)$ yarımşaquli bucaqlar cütü. **3145.** $O(0,0)$ ortaq təpəsi istisna olaraq sərhəd də daxil olmaqla $y=0$ və $y=-2x$ düz xətləri ilə məhdudlanan şaquli kor bucaqlar cütü. **3146.** $O(0,0)$ təpəsi istisna olmaqla $y^2=x$, $y^2=-x$ parabolaları və $y=2$ düz xətti ilə məhdudlanan əyrixətli üçbucaq. **3147.** $2\pi k \leq x^2+y^2 \leq \pi(2k+1)$ $(k=0,1,2,...)$ konsentrik halqalar ailəsi. **3148.** $x^2+y^2-z^2=0$ konusunun təpə nöqtəsidən başqa sərhəd də daxil olmaqla xarici. **3149.** Fəzanın dörd oktant çoxluğu. **3150.** $x^2+y^2-z^2=-1$ ikioyuqlu hiperboloidinin daxili. **3151.** Paralel düz xətlər. **3152.** Konsentrik çevrələr. **3153.** $y=\pm x$ ortaq asimptotlu bərabərtərəfli hiperbolalar ailəsi. **3154.** Paralel düz xətlər. **3155.** Təpə nöqtəsi istisna olmaqla təpəsi koordinat başlanğıcında yerləşən düz xətlər dəstəsi. **3156.** Oxşar ellipslər ailəsi. **3157.** Koordinat oxlarına asimptotik yaxınlaşan və I, III kvadrantlarda yerləşən bərabərtərəfli hiperbolalar çoxluğu. **3158.** Təpələri Oy oxu üzərində yerləşən ikitərəfli sınıq xətlər ailəsi. **3159.** $z=0$ olduqda I və III kvadrantlar; $z>0$ olduqda tərəfləri koordinat oxlarına paralel olan və təpələri $x+y=0$ düz xətti üzərində yerləşən ikitərəfli sınıq xətlər ailəsi. **3159.1.** Səviyyə xətləri - təpələri $y=x$ düz xətti üzərində yerləşən və tərəfləri Ox, Oy koordinat oxlarının müsbət istiqamətlərinə paralel olan bucaqların tərəfləridir. **3159.2.** $z>0$ olduqda tərəfləri Ox və Oy koordinat oxlarına paralel olan, $O(0,0)$ ortaq mərkəzli kvadratların konturları ailəsi; $z=0$ olduqda $O(0,0)$ nöqtəsi. **3159.3.** $z<0$ olduqda Ox oxuna paralel düz xətlər; $z>0$ olduqda təpələri $y=x^2$ parabolası üzərində yerləşən bucaqların Ox oxuna və Oy müsbət yarımoxuna paralel olan tərəfləri; $z=0$ olduqda Oy müsbət yarımoxu. **3160.** Ox oxuna ortoqonal olan və koordinat başlanğıcından keçən (başlanğıc istisna olmaqla) çevrələr dəstəsi. **3161.** $y=\dfrac{C}{\ln x}$ əyriləri. **3162.** $y=\dfrac{C+x}{\ln x}$ əyriləri. **3163.** Mərkəzləri Ox oxu üzərində yerləşən və $x^2+y^2=a^2$ çevrəsinə ortoqonal olan çevrələr ailəsi. **3164.** Oy oxuna ortoqonal olan və $(-a,0)$, $(a,0)$ nöqtələrindən keçən (bu nöqtələr istina olmaqla) çevrələr ailəsi. **3165.** $z=0$ olduqda $x=m\pi$ və $y=n\pi$ $(m,n=0,\pm 1,\pm 2,...)$ düz xətləri; $z=-1$ və ya $z=1$

olduqda $m\pi < x < (m+1)\pi$, $n\pi < y < (n+1)\pi$ kvadratlar sistemi, burada $(-1)^{m+n} = z$. **3166.** Paralel müstəvilər ailəsi. **3167.** Mərkəzi koordinat başlanğıcında yerləşən konsentrik sferalar ailəsi. **3168.** $u<0$ olduqda ikioyuqlu hiperboloidlər ailəsi; $u>0$ olduqda biroyuqlu hiperboloidlər ailəsi; $u=0$ olduqda konus. **3169.** Ortaq oxu $x+y=0$, $z=0$ düz xətti olan elliptik silindrlər çoxluğu. **3170.** $u=0$ olduqda $x^2+y^2+z^2=\pi n$ $(n=0,1,2,\ldots)$ konsentrik sferalar ailəsi; $u=-1$ və ya $u=1$ olduqda $\pi n < x^2+y^2+z^2 < \pi(n+1)$ sferik laylar ailəsi, burada $(-1)^n = u$. **3171.** Doğuranları $y=ax$, $z=0$ düz xəttinə paralel olan $z=f(y)$, $x=0$ istiqamətləndiricili silindrik səth. **3172.** $z=f(x)$, $y=0$ əyrisinin Oz oxu ətrafında fırlanmasından alınan səth. **3173.** Təpəsi koordinat başlanğıcında yerləşən və istiqamətləndiricisi $x=1$, $z=f(y)$ olan konik səth. **3174.** İstiqamətləndiricisi $x=1$, $z=f(y)$ və doğuranları Oxy müstəvisinə paralel olan konoid. **3176.** $f\left(1,\frac{y}{x}\right)=f(x,y)$. **3177.** $\sqrt{1+x^2}$. **3178.** $f(t)=2t+t^2$, $z=x-1+\sqrt{y}$ $(x>0)$. **3179.** $f(x)=x^2-x$, $z=2y+(x-y)^2$. **3180.** $f(x,y)=x^2\frac{1-y}{1+y}$. **3183.1.** Yox. **3183.2.** 0; yox. **3184.** *a*) 0, 1; *b*) $\frac{1}{2}$, 1; *c*) 0, 1; *d*) 0, 1; *e*) 1, ∞. **3185.** 0. **3186.** 0. **3187.** *a*. **3188.** 0. **3189.** 0. **3190.** 1. **3191.** *e*. **3192.** ln 2. **3193.** *a*) $\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}$; *b*) $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4}$ və $\frac{5\pi}{4} < \varphi < \frac{7\pi}{4}$. **3194.** Kəsilmə nöqtəsi: $x=0$, $y=0$. **3195.** $x+y=0$ düz xəttinin bütün nöqtələri. **3196.** $O(0,0)$ - sonsuz kəsilmə nöqtəsidir; $x+y=0$ $(x\neq 0)$ düz xəttinin nöqtələri - aradan qaldırıla bilən kəsilmə nöqtələridir. **3197.** Koordinat oxları üzərində yerləşən nöqtələr. **3198.** $x=m\pi$ və $y=n\pi$, $(m,n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ düz xətlərinin nöqtələr çoxluğu. **3199.** $x^2+y^2=1$ çevrəsinin nöqtələri. **3200.** $x=0$, $y=0$, $z=0$ koordinat müstəvilərinin nöqtələri. **3201.** (a,b,c). **3203.1.** Müntəzəm kəsilməzdir. **3203.2.** Müntəzəm kəsilməzdir. **3203.3.** Müntəzəm kəsilməz deyil. **3203.4.** Funksiya E-də kəsilməzdir, lakin müntəzəm kəsilməz deyil. **3212.** $f_x'(x,1)=1$. **3212.1.** $f_x'(0,0)=0$, $f_y'(0,0)=0$; funksiya O (0,0) nöqtəsində diferensiallanan deyil. **3212.2.** Funksiya $O(0,0)$ nöqtəsində diferensiallanan deyil. **3212.3.** Funksiya $O(0,0)$ nöqtəsində diferensiallanandır. **3213.** $\frac{\partial u}{\partial x}=4x^3-8xy^2$, $\frac{\partial u}{\partial y}=4y^3-8x^2y$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=12x^2-8y^2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-16xy$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=12y^2-8x^2$. **3214.** $\frac{\partial u}{\partial x}=y+\frac{1}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=x-\frac{x}{y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=1-\frac{1}{y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2x}{y^3}$. **3215.** $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2x}{y^3}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$. $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{2}{y^3}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{6x}{y^4}$. **3216.** $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{3xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^{5/2}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{y\left(2x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^{5/2}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{x\left(x^2-2y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^{5/2}}$.

3217. $\frac{\partial u}{\partial x}=\sin(x+y)+x\cos(x+y)$, $\frac{\partial u}{\partial y}=x\cos(x+y)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2\cos(x+y)-$ $-x\sin(x+y)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\cos(x+y)-x\sin(x+y)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-x\sin(x+y)$

3218. $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{2x\sin x^2}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\cos x^2}{y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2\sin x^2+4x^2\cos x^2}{y}$. $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{2x\sin x^2}{y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2\cos x^2}{y^3}$. **3219.** $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{y}\sec^2\frac{x^2}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x^2}{y^2}\times$ $\times\sec^2\frac{x^2}{y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2}{y}\sec^2\frac{x^2}{y}+\frac{8x^2}{y^2}\sin\frac{x^2}{y}\sec^3\frac{x^2}{y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=-\frac{2x}{y^2}\sec^2\frac{x^2}{y}-$ $-\frac{4x^3}{y^3}\sin\frac{x^2}{y}\sec^3\frac{x^2}{y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2x^2}{y^3}\sec^2\frac{x^2}{y}+\frac{2x^4}{y^4}\sin\frac{x^2}{y}\sec^3\frac{x^2}{y}$.

3220. $\frac{\partial u}{\partial x}=yx^{y-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=x^y\ln x$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y(y-1)x^{y-2}$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=x^{y-1}(1+y\ln x)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^y\ln^2 x$ $(x>0)$. **3221.** $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x+y^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x+y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{(x+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=-\frac{2y}{(x+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}$.

3222. $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$. **3223.** $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+x^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{1+y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{2y}{(1+y^2)^2}$ $(xy\neq 1)$.

3224. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{|y|}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x\operatorname{sgn} y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{(x^2-y^2)\operatorname{sgn} y}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2}$ $(y\neq 0)$. **3225.** $\frac{\partial u}{\partial x}=$ $=-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$.

3226. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{z}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z$, $\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\frac{x}{y}\right)^z\ln\frac{x}{y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{z(z-1)}{x^2}\left(\frac{x}{y}\right)^z$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{z(z+1)}{y^2}\left(\frac{x}{y}\right)^z$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\left(\frac{x}{y}\right)^z\ln^2\frac{x}{y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=-\frac{z^2}{xy}\left(\frac{x}{y}\right)^z$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=$ $=\frac{1}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z\left(1+z\ln\frac{x}{y}\right)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=-\frac{1}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z\left(1+z\ln\frac{x}{y}\right)$ $\left(\frac{x}{y}>0\right)$. **3227.** $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{yu}{xz}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u\ln x}{z}$, $\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{yu}{z^2}\ln x$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{y(y-z)u}{x^2z^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{u\ln^2 x}{z^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{yu\ln x}{z^4}\times$ $\times(2z+y\ln x)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{(z+y\ln x)\,u}{xz^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=-\frac{yu(z+y\ln x)}{xz^3}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=$ $=-\frac{u\ln x\,(z+y\ln x)}{z^3}$ $(xz\neq 0)$. **3228.** $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^z}{x}u$, $\frac{\partial u}{\partial y}=zy^{z-1}u\ln x$, $\frac{\partial u}{\partial z}=y^z u\ln x\ln y$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{y^z(y^z-1)}{x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=zy^{z-2}u(z-1+zy^z\ln x)\ln x$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=y^z u(1+y^z\ln x)\ln x\ln^2 y$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{zy^{z-1}u}{x}(1+y^z\ln x)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=\frac{y^z u\ln y}{x}\times$

$\times(1+y^z\ln x)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=y^{z-1}u\ln x\,[1+z\ln y\,(1+y^z\ln x)]\,(x>0,\ y>0)$.

3230.1. $f''_{xy}(0,0)$ törəməsi yoxdur. **3235.** $du=x^{m-1}y^{n-1}(my\,dx+nx\,dy)$, $d^2u=x^{m-2}y^{n-2}[\,m(m-1)\,y^2dx^2+2mn\,xy\,dx\,dy+n(n-1)\,x^2dy^2]$.

3236. $du=\dfrac{y\,dx-x\,dy}{y^2}$, $d^2u=-\dfrac{2}{y^3}dy(y\,dx-x\,dy)$. **3237.** $du=\dfrac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$d^2u=\dfrac{(y\,dx-x\,dy)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$. **3238.** $du=\dfrac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}$, $d^2u=\dfrac{(y^2-x^2)\times}{(x^2+y^2)^2}\ldots\to$

$\to\ldots\dfrac{\times(dx^2-dy^2)-4xy\,dx\,dy}{(x^2+y^2)^2}$. **3239.** $du=e^{xy}(y\,dx+x\,dy)$;

$d^2u=e^{xy}[y^2dx^2+2(1+xy)\,dx\,dy+x^2dy^2]$. **3240.** $du=(y+z)\,dx+(z+x)\,dy+$ $+(x+y)\,dz$, $d^2u=2(dx\,dy+dy\,dz+dz\,dx)$. **3241.** $du=\dfrac{(x^2+y^2)\,dz-}{(x^2+y^2)^2}\ldots\to$

$\to\ldots\dfrac{-2z\,(x\,dx+y\,dy)}{(x^2+y^2)^2}$, $d^2u=\dfrac{2z\,[\,(3x^2-y^2)\,dx^2+8xy\,dx\,dy+}{(x^2+y^2)^3}\ldots\to$

$\to\ldots\dfrac{+(3y^2-x^2)\,dy^2]-4\,(x^2+y^2)\,(x\,dx+y\,dy)\,dz}{(x^2+y^2)^3}$. **3242.** $dx-dy$, $-2\,(dx-dy)\,(dy+dz)$. **3244.** *a)* $1+mx+ny$; *b)* xy; *c)* $x+y$. **3245.** *a)* 108,972; *b)* 1,055; *c)* 2,95; *d)* 0,502; *e)* 0,97. **3246.** Diaqonal təqribən 33 *mm* azalır; sahə təqribən 140 *sm*^{2} azalır. **3247.** 1,7 *mm* azaltmaq. **3249.** $\Delta\approx10{,}2$ *m*^{3}; $\delta\approx13\,\%$. **3250.** $\Delta\approx7{,}6$ *m*. **3251.** $f'_x(x,y)$ və $f'_y(x,y)$ törəmələri (0,0) nöqtəsinin ətrafında məhdud deyildir.

3256. $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}=24$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^3\,\partial y}=0$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2}=-16$. **3257.** $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}=0$.

3258. $\dfrac{\partial^6 u}{\partial x^3\,\partial y^3}=-6(\cos x+\cos y)$. **3259.** $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=0$. **3260.** $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=e^{xyz}\times$ $\times(1+3xyz+x^2y^2z^2)$. **3261.** $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x\,\partial y\,\partial\xi\,\partial\eta}=-\dfrac{6}{r^4}+\dfrac{48(x-\xi)^2(y-\eta)^2}{r^8}$, burada $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$. **3262.** $\dfrac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p\,\partial x^q}=p!\,q!$. **3263.** $\dfrac{2(-1)^m(m+n-1)!\,(nx+my)}{(x-y)^{m+n+1}}$.

3264. $e^{x+y}[x^2+y^2+2(mx+ny)+m(m-1)+n(n-1)]$. **3265.** $(x+p)\,(y+q)\times$

$\times(z+r)\,e^{x+y+z}$. **3266.** $\sin\frac{n\pi}{2}$. **3267.** $F(t)=f'(t)+3t\,f''(t)+t^2 f'''(t)$.

3268. $d^4u=24\,(dx^4-2dx^3\,dy-2dx\,dy^3+dy^4)$; $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=24$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\,\partial y}=-12$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2}=0$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x\,\partial y^3}=-12$, $\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=24$. **3269.** $d^3u=6\,(dx^3-3dx^2dy+3dx\,dy^2+dy^3)$. **3270.** $d^3u=-8\,(x\,dx+y\,dy)^3\cos(x^2+y^2)-12\,(x\,dx+y\,dy)\times(dx^2+dy^2)\sin(x^2+y^2)$. **3271.** $d^{10}u=-\frac{9!\,(dx+dy)^{10}}{(x+y)^{10}}$. **3272.** $d^6u=-(dx^6-15dx^4dy^2+15dx^2dy^4-dy^6)\cos x\,\mathrm{ch}\,y-2dx\,dy\,(3dx^4-10dx^2dy^2+3dy^4)\sin x\,\mathrm{sh}\,y$.

3273. $d^3u=6\,dx\,dy\,dz$. **3274.** $d^4u=2\left(\frac{dx^4}{x^3}+\frac{dy^4}{y^3}+\frac{dz^4}{z^3}\right)$. **3275.** $d^nu=e^{ax+by}(a\,dx+b\,dy)^n$. **3276.** $d^nu=\sum_{k=0}^{n}C_n^k X^{(n-k)}(x)Y^{(k)}(y)\,dx^{n-k}\,dy^k$.

3277. $d^nu=f^{(n)}(x+y+z)\,(dx+dy+dz)^n$. **3278.** $d^nu=e^{ax+by+cz}\times(a\,dx+b\,dy+c\,dz)^n$. **3280.** *a)* $Au=-u$, $A^2u=u$; *b)* $Au=1$, $A^2u=0$.

3281. *a)* $\Delta u=0$; *b)* $\Delta u=0$. **3282.** a) $\Delta_1 u=9[(x^2-yz)^2+(y^2-xz)^2+(z^2-xy)^2]$, $\Delta_2 u=6\,(x+y+z)$; *b)* $\Delta_1 u=\frac{1}{r^4}$, burada $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\Delta_2 u=0$.

3283. $\frac{\partial u}{\partial x}=2x\,f'(x^2+y^2+z^2)$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2f'(x^2+y^2+z^2)+4x^2 f''(x^2+y^2+z^2)$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=4xy\,f''(x^2+y^2+z^2)$. **3284.** $\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'\left(x,\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{y}f_2'\left(x,\frac{x}{y}\right)$; $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}f_2'\left(x,\frac{x}{y}\right)$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f_{11}''\left(x,\frac{x}{y}\right)+\frac{2}{y}f_{12}''\left(x,\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{y^2}f_{22}''\left(x,\frac{x}{y}\right)$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=-\frac{x}{y^2}f_{12}''\left(x,\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y^3}f_{22}''\left(x,\frac{x}{y}\right)-\frac{1}{y^2}f_2'\left(x,\frac{x}{y}\right)$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{x^2}{y^4}f_{22}''\left(x,\frac{x}{y}\right)+\frac{2x}{y^3}f_2'\left(x,\frac{x}{y}\right)$. **3285.** $\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'+y\,f_2'+yz\,f_3'$; $\frac{\partial u}{\partial y}=x\,f_2'+xz\,f_3'$; $\frac{\partial u}{\partial z}=xy\,f_3''$;

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f_{11}''+y^2 f_{22}''+y^2z^2 f_{33}''+2y\,f_{12}''+2yz\,f_{13}''+2y^2z\,f_{23}''$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2 f_{22}''+$

$+2x^2z\,f_{23}''+x^2z^2\,f_{33}''$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=x^2y^2\,f_{33}''$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=xy\,f_{22}''+xyz^2\,f_{33}''+x\,f_{12}''+$ $+xz\,f_{13}''+2xyz\,f_{23}''+f_2'+z\,f_3'$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=xy\,f_{13}''+xy^2\,f_{23}''+xy^2z\,f_{33}''+y\,f_3'$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=x^2y\,f_{23}''+x^2yz\,f_{33}''+x\,f_3'$. **3286.** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=f_{11}''+(x+y)\,f_{12}''+xy\,f_{22}''+f_2'$. **3287.** $\Delta\,u=3f_{11}''+4(x+y+z)\,f_{12}''+4(x^2+y^2+z^2)\,f_{22}''+6f_2'$. **3288.** $du=$ $=f'(t)\,(dx+dy)$; $d^2u=f''(t)\,(dx+dy)^2$. **3289.** $du=f'(t)\,\dfrac{x\,dy-y\,dx}{x^2}$; $d^2u=f''(t)\dfrac{(x\,dy-y\,dx)^2}{x^4}-2f'(t)\dfrac{dx\,(x\,dy-y\,dx)}{x^3}$. **3290.** $du=f'\cdot\dfrac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $d^2u=f''\cdot\dfrac{(x\,dx+y\,dy)^2}{x^2+y^2}+f'\cdot\dfrac{(y\,dx-x\,dy)^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$. **3291.** $du=f'(t)\,dt$, $d^2u=f''(t)\,dt^2+f'(t)\,d^2t$, burada $dt=yz\,dx+zx\,dy+xy\,dz$ və $d^2t=2(z\,dx\,dy+y\,dx\,dz+x\,dy\,dz)$. **3292.** $du=2f'\cdot(x\,dx+y\,dy+z\,dz)$; $d^2u=4f''\cdot(x\,dx+y\,dy+z\,dz)^2+2f'\cdot(dx^2+dy^2+dz^2)$. **3293.** $du=a\,f_1'dx+$ $+b\,f_2'dy$; $d^2u=a^2\,f_{11}''dx^2+2ab\,f_{12}''\,dx\,dy+b^2\,f_{22}''\,dy^2$. **3294.** $du=$ $=f_1'\cdot(dx+dy)+f_2'\cdot(dx-dy)$; $d^2u=f_{11}''\cdot(dx+dy)^2+2f_{12}''\cdot(dx^2-dy^2)+$ $+f_{22}''\cdot(dx-dy)^2$. **3295.** $du=f_1'\cdot(y\,dx+x\,dy)+f_2'\cdot\dfrac{y\,dx-x\,dy}{y^2}$; $d^2u=f_{11}''\cdot(y\,dx+x\,dy)^2+2f_{12}''\cdot\dfrac{y^2\,dx^2-x^2\,dy^2}{y^2}+f_{22}''\cdot\dfrac{(y\,dx-x\,dy)^2}{y^4}+$ $+2f_1'\cdot dx\,dy-2f_2'\cdot\dfrac{(y\,dx-x\,dy)\,dy}{y^3}$. **3296.** $du=f_1'\cdot(dx+dy)+f_2'\cdot dz$; $d^2u=f_{11}''\cdot(dx+dy)^2+2f_{12}''\cdot(dx+dy)\,dz+f_{22}''\cdot dz^2$. **3297.** $du=f_1'\cdot(dx+$ $+dy+dz)+2f_2'\cdot(x\,dx+y\,dy+z\,dz)$; $d^2u=f_{11}''\cdot(dx+dy+dz)^2+4f_{12}''\cdot(dx+$ $+dy+dz)\,(x\,dx+y\,dy+z\,dz)+4f_{22}''\,(x\,dx+y\,dy+z\,dz)^2+2f_2'\cdot(dx^2+dy^2+$ $+dz^2)$. **3298.** $du=f_1'\cdot\dfrac{y\,dx-x\,dy}{y^2}+f_2'\cdot\dfrac{z\,dy-y\,dz}{z^2}$; $d^2u=f_{11}''\cdot\dfrac{(y\,dx-x\,dy)^2}{y^4}+$ $+2f_{12}''\cdot\dfrac{(y\,dx-x\,dy)\,(z\,dy-y\,dz)}{y^2z^2}+f_{22}''\cdot\dfrac{(z\,dy-y\,dz)^2}{z^4}-2f_1'\cdot\dfrac{(y\,dx-x\,dy)\,dy}{y^3}-$

$-2f_2'\cdot\frac{(z\ dy-y\ dz)\ dz}{z^3}$. **3299.** $du=(f_1'+2t\,f_2'+3t^2\,f_3')\,dt$; $d^2u=(f_{11}''+4t\,f_{12}''+4t^2\,f_{22}''+6t^2\,f_{13}''+12t^3\,f_{23}''+9t^4 f_{33}''+2f_2'+6t\,f_3')\,dt^2$. **3300.** $du=a\,f_1'dx+b\,f_2'\,dy+c\,f_3'\,dz$; $d^2u=a^2\,f_{11}''\,dx^2+b^2\,f_{22}''\,dy^2+c^2\,f_{33}''\,dz^2+2ab\,f_{12}''\,dx\,dy+2ac\,f_{13}''\,dx\,dz+2bc\,f_{23}''\,dy\,dz$. **3301.** $du=2f_1'\cdot(x\,dx+y\,dy)+2f_2'\cdot(x\,dx-y\,dy)+2f_3'\cdot(y\,dx+x\,dy)$; $d^2u=4f_{11}''\cdot(x\,dx+y\,dy)^2+4f_{22}''\cdot(x\,dx-y\,dy)^2+4f_{33}''\cdot(y\,dx+x\,dy)^2+8f_{12}''\cdot(x^2\,dx^2-y^2\,dy^2)+8f_{13}''\cdot(x\,dx+y\,dy)\,(y\,dx+x\,dy)+8f_{23}''\cdot(x\,dx-y\,dy)\,(y\,dx+x\,dy)+2f_1'\cdot(dx^2+dy^2)+2f_2'\cdot(dx^2-dy^2)+4f_3'\cdot dx\,dy$. **3302.** $d^nu=f^{(n)}(ax+by+cz)\,(a\,dx+b\,dy+c\,dz)^n$. **3303.** $d^nu=\left(a\,dx\frac{\partial}{\partial\xi}+b\,dy\frac{\partial}{\partial\eta}+c\,dz\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)^n f(\xi,\eta,\zeta)$, burada $\xi=ax$, $\eta=by$, $\zeta=cz$.

3304. $d^nu=\left[dx\left(a_1\frac{\partial}{\partial\xi}+a_2\frac{\partial}{\partial\eta}+a_3\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)+dy\left(b_1\frac{\partial}{\partial\xi}+b_2\frac{\partial}{\partial\eta}+b_3\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)+dz\left(c_1\frac{\partial}{\partial\xi}+c_2\frac{\partial}{\partial\eta}+c_3\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\right]^n f(\xi,\eta,\zeta)$. **3305.** $F(r)=f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)$.

3316. 1. **3319.** xyz. **3331.** $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=x$. **3332.** $2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2z$.

3333. $y\frac{\partial z}{\partial y}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$. **3334.** $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$. **3335.** $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0$.

3336. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=0$. **3337.** $z\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}$. **3338.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

3339. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$. **3340.** $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=0$. **3341.** $1-\sqrt{3}$.

3342. $\frac{\partial z}{\partial l}=\cos\alpha+\sin\alpha$; *a)* $\alpha=\frac{\pi}{4}$; *b)* $\alpha=\frac{5\pi}{4}$; *c)* $\alpha=\frac{3\pi}{4}$, $\alpha=\frac{7\pi}{4}$.

3343. $\frac{2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$. **3344.** $\frac{1}{ab}\sqrt{2(a^2+b^2)}$. **3345.** $\frac{\partial u}{\partial l}=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$; $|\mathrm{grad}\ u|=\sqrt{3}$. **3346.** $|\mathrm{grad}\ u|=\frac{1}{r_0^2}$; $\cos(\mathrm{grad}\ u,x)=-\frac{x_0}{r_0}$, $\cos(\mathrm{grad}\ u,y)=$

$=-\dfrac{y_0}{r_0}$, $\cos(\operatorname{grad} u, z)=-\dfrac{z_0}{r_0}$, burada $r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$. **3347.** $\dfrac{\pi}{2}$.

3348. ≈ 3142. **3350.** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial l^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\alpha+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\beta+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cos^2\gamma+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\times$

$\times\cos\alpha\cos\beta+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\cos\alpha\cos\gamma+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\cos\beta\cos\gamma$. **3352.** $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-0,5$.

3353. $u''_{xx}(x,2x)=u''_{yy}(x,2x)=-4/3x$, $u''_{xy}(x,2x)=5/3x$. **3354.** $z=x\varphi(y)+$ $+\psi(y)$. **3355.** $z=\varphi(x)+\psi(y)$. **3356.** $z=\varphi_0(x)+y\varphi_1(x)+\ldots+y^{n-1}\varphi_{n-1}(x)$.
3357. $u=\varphi(x,y)+\psi(x,z)+\chi(y,z)$. **3358.** $u=1+x^2y+y^2-2x^4$.
3359. $z=1+xy+y^2$. **3360.** $z=x+y^2+0{,}5xy(x+y)$. **3362.** $f(x)$ funksiyasının sıfırları çoxluğu (a,b) intervalında heç yerdə sıx olmamalıdır, yəni $f(x)$ funksiyasının sıfırları heç bir $(\alpha,\beta)\subset(a,b)$ intervalını tamamilə doldura bilməz. **3363.** $f(x)$ funksiyasının sıfırları çoxluğu (a,b) intervalında heç yerdə sıx olmamalıdır, belə ki, $f(x)$ funksiyasının hər bir ξ sıfırı eyni zamanda $g(x)$ funksiyasının da sıfırıdır və həmçinin $\lim\limits_{x\to\xi}[g(x)/f(x)]$ var. **3364.** 1) Sonsuz çoxluq; 2) iki; 3) *a*) bir; *b*) iki.
3365. 1) Sonsuz çoxluq; 2) dörd: $y=x$, $y=-x$, $y=|x|$ və $y=-|x|$; 3) iki; 4) *a*) iki: *b*) dörd; 5) bir. **3366.** 1) Heç yerdə; 2) $0<|x|<1$, $|x|=\sqrt{\dfrac{1+\sqrt2}{2}}$; 3) $x=0, |x|=1$; 4) $1<|x|<\sqrt{\dfrac{1+\sqrt2}{2}}$; birqiymətli budaqlar:
$y=\varepsilon\sqrt{\dfrac12+\sqrt{\dfrac14+x^2-x^4}}$ $\left(|x|\le\sqrt{\dfrac{1+\sqrt2}{2}}\right)$; $y=\varepsilon\sqrt{\dfrac12-\sqrt{\dfrac14+x^2-x^4}}$ $\left(1\le|x|\le\sqrt{\dfrac{1+\sqrt2}{2}}\right)$, burada $\varepsilon=-1,\ 1$. **3367.** Budaqlanma nöqtələri $(-1,0)$, $(0,0)$, $(1,0)$; $y=\varepsilon(x)\sqrt{\dfrac{\sqrt{8x^2+1}-(2x^2+1)}{2}}$ $(|x|\le1)$, burada $\varepsilon(x)=-1,\ 1$, sgn x və $-$sgn x. **3368.** $\varphi(y)$ funksiyasının qiymətlər çoxluğu ilə $f(x)$ funksiyasının qiymətlər çoxluğunun ortaq nöqtəsi olmalıdır.
3371. $y'=-\dfrac{x+y}{x-y}$; $y''=\dfrac{2a^2}{(x-y)^3}$. **3372.** $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$; $y''=\dfrac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$.
3373. $y'=\dfrac{1}{1-\varepsilon\cos y}$; $y''=\dfrac{-\varepsilon\sin y}{(1-\varepsilon\cos y)^3}$. **3374.** $y'=\dfrac{y^2(1-\ln x)}{x^2(1-\ln y)}$;

$y''=\dfrac{y^2[y(1-\ln x)^2-2(x-y)(1-\ln x)(1-\ln y)-x(1-\ln y)^2]}{x^4(1-\ln y)^3}$. **3375.** $y'=\dfrac{y}{x}$;

$y''=0$. **3378.** $y_1'(0)=-1$; $y_2'(0)=1$. **3379.** $y_1'(0)=0$; $y_2'(0)=-\sqrt{33}$; $y_3'(0)=\sqrt{3}$.

3380. $y'=-\dfrac{2x+y}{x+2y}$; $y''=-\dfrac{18}{(x+2y)^3}$; $y'''=-\dfrac{162x}{(x+2y)^5}$. **3381.** $y'=0$;

$y''=-\dfrac{2}{3}$; $y'''=-\dfrac{2}{3}$. **3383.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{x}{z}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{y}{z}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{x^2+z^2}{z^3}$;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\dfrac{xy}{z^3}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\dfrac{y^2+z^2}{z^3}$. **3384.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{yz}{z^2-xy}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{xz}{z^2-xy}$;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{2xy^3z}{(z^2-xy)^3}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\dfrac{2x^3yz}{(z^2-xy)^3}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{z(z^4-2xyz^2-x^2y^2)}{(z^2-xy)^3}$.

3385. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{x+y+z-1}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\dfrac{x+y+z}{(x+y+z-1)^3}$.

3386. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{xz}{x^2-y^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{yz}{x^2-y^2}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{y^2z}{(x^2-y^2)^2}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{xyz}{(x^2-y^2)^2}$;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\dfrac{x^2z}{(x^2-y^2)^2}$. **3387.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial y}=-1$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$. **3388.** *a)* -2;

b) -1. **3389.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{2}{5}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\dfrac{1}{5}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\dfrac{394}{125}$. **3390.** $dz=-\dfrac{c^2}{z}\left(\dfrac{x\,dx}{a^2}+\dfrac{y\,dy}{b^2}\right)$;

$d^2z=-\dfrac{c^4}{z^3}\left[\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)\dfrac{dx^2}{a^2}+\dfrac{2xy}{a^2b^2}\,dx\,dy+\left(\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)\dfrac{dy^2}{b^2}\right]$. **3391.** $dz=$

$=-\dfrac{(1-yz)\,dx+(1-xz)\,dy}{1-xy}$; $d^2z=-\dfrac{2\{y(1-yz)\,dx^2+[x+y-}{(1-xy)^2}\ldots\to$

$\to\ldots\dfrac{-z(1+xy)]\,dx\,dy+x(1-xz)\,dy^2\}}{(1-xy)^2}$. **3392.** $dz=\dfrac{z(y\,dx+z\,dy)}{y(x+z)}$;

$d^2z=-\dfrac{z^2(y\,dx-x\,dy)^2}{y^2(x+z)^3}$. **3393.** $dz=dx-\dfrac{(x-z)\,dy}{(x-z)^2+y(y+1)}$;

$d^2z=\dfrac{2(x-z)(y+1)[(x-z)^2+y^2]}{[(x-z)^2+y(y+1)]^3}dy^2$. **3394.** $du=-\dfrac{u^2(dx+dy)-z^2dz}{u[2(x+y)-u]}$.

3395. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\dfrac{4(x-z)(y-z)}{(F_1'+2zF_2')^3}[F_2'^2F_{11}''-2F_1'F_2'F_{12}''+F_1'^2F_{22}'']-$

$-\dfrac{2(F_1'+2xF_2')(F_1'+2yF_2')F_2'}{(F_1'+2zF_2')^3}$. **3396.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{F_1'-F_3'}{F_2'-F_3'}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{F_2'-F_1'}{F_2'-F_3'}$.

3397. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\left(1+\dfrac{F_1'+F_2'}{F_3'}\right)$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\left(1+\dfrac{F_2'}{F_3'}\right)$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-F_3'^{-3}[F_3'^2(F_{11}''+2F_{12}''+$ $+F_{22}'')-2(F_1'+F_2')F_3'(F_{13}''+F_{23}'')+(F_1'+F_2')^2F_{33}'']$. **3398.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-(xF_1'+$ $+yF_2')^{-3}[y^2z^2(F_2'^2F_{11}''-2F_1'F_2'F_{12}''+F_1'^2F_{22}'')-2z(xF_1'+yF_2')F_1'^2]$.

3399. *a)* $d^2z=\dfrac{F_2'^2F_{11}''-2F_1'F_2'F_{12}''+F_1'^2F_{22}''}{(F_1'+F_2')^3}(dx-dy)^2$; *b)* $d^2z=-\dfrac{1}{(xF_1'+yF_2')^3}\times$ $\times\left(F_2'^2F_{11}''-2F_1'F_2'F_{12}''+F_1'^2F_{22}''\right)(y\,dx-x\,dy)^2$. **3399.1.** $dz=\dfrac{1}{9}(2dx-dy)$; $d^2z=-\dfrac{2}{243}(2dx^2-5dx\,dy+2dy^2)$. **3401.** $\dfrac{dx}{dz}=\dfrac{y-z}{x-y}$; $\dfrac{dy}{dz}=\dfrac{z-x}{x-y}$.

3402. $\dfrac{dx}{dz}=0$, $\dfrac{dy}{dz}=-1$, $\dfrac{d^2x}{dz^2}=-\dfrac{d^2y}{dz^2}=-\dfrac{1}{4}$. **3403.** $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{xu-yv}{x^2+y^2}$; $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{yu-xv}{x^2+y^2}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{xv-yu}{x^2+y^2}$; $\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{xu+yv}{x^2+y^2}$, $(x^2+y^2>0)$. **3403.1.** $du=-\dfrac{1}{3}dy$, $dv=-dx+\dfrac{1}{3}dy$. **3404.** $du=\dfrac{(\sin v+x\cos v)\,dx-(\sin u-x\cos v)\,dy}{x\cos v+y\cos u}$;

$dv=\dfrac{-(\sin v-y\cos u)\,dx}{x\cos v+y\cos u}+\dfrac{(\sin u+y\cos u)\,dy}{x\cos v+y\cos u}$; $d^2u=-d^2v=$ $=\dfrac{(2\,dx\cos v-x\,dv\sin v)\,dv}{x\cos v+y\cos u}-\dfrac{(2\,dy\cos u-y\,du\sin u)\,du}{x\cos v+y\cos u}$. **3405.** $du=\dfrac{1}{2}(dx+dy)$; $dv=\dfrac{\pi}{4}dy-\dfrac{1}{2}(dx-dy)$; $d^2u=dx^2$; $d^2v=\dfrac{1}{2}(dx-dy)^2$. **3406.** $\dfrac{dy}{dx}=2\left(t+\dfrac{1}{t}\right)$; $\dfrac{dz}{dx}=3\left(t^2+\dfrac{1}{t^2}+1\right)$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}=2$; $\dfrac{d^2z}{dx^2}=6\left(t+\dfrac{1}{t}\right)$. **3407.** $y\geq\dfrac{x^2}{2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-3uv$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{3}{2}(u+v)$ $(u\neq v)$. **3407.1.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{3}{2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{1}{2}$. **3407.2.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{26}{121}$.

3408. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\cos^2\psi}{\sin^3\varphi}$. **3409.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\sin 2v}{u^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\dfrac{\cos 2v}{u^2}$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{\sin 2v}{u^2}$. **3410.** $dz=0$; $d^2z=\frac{1}{2}(dx^2-dy^2)$. **3411.** $\frac{dz}{dx}=\frac{2(x^2-y^2)}{x-2y}$;

$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{4x-2y}{x-2y}+\frac{6x}{(x-2y)^3}$. **3412.** $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y+z}+\frac{(x+1)(y-x)}{(z+1)(y+z)^2}e^{x-z}$;

$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x+z}{(y+z)^2}+\frac{(y+1)(y-x)}{(z+1)(y+z)^2}e^{y-z}$. **3413.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{I}\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\chi}{\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\chi}{\partial u}\right)$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{I}\left(\frac{\partial\chi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{\partial\chi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)$, burada $I=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}$. **3414.** $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{I}\frac{\partial\psi}{\partial v}$;

$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{I}\frac{\partial\varphi}{\partial v}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{I^3}\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2-\right.$

$\left.-2\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}\right)\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}+\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2\right\}$;

$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{I^3}\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}\right)\times\right.$

$\left.\times\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)+\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right\}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=$

$=-\frac{1}{I^3}\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2-2\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\right.$

$\left.+\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2\right\}$, burada $I=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}$.

3415. *a)* $\frac{\partial u}{\partial x}=\cos\frac{v}{u}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\sin\frac{v}{u}$; $\frac{\partial v}{\partial x}=-\left(\sin\frac{v}{u}-\frac{v}{u}\cos\frac{v}{u}\right)$; $\frac{\partial v}{\partial y}=\cos\frac{v}{u}+\frac{v}{u}\sin\frac{v}{u}$;

b) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\sin v}{e^u(\sin v-\cos v)+1}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-\cos v}{e^u(\sin v-\cos v)+1}$; $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-(e^u-\cos v)}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]}$;

$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{e^u+\sin v}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]}$. **3416.** $\frac{du}{dx}=\frac{I}{I_1}$; $\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{1}{I_1^3}\left\{\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,z)}\times\right.$

$\times\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f+\frac{\partial(h,f)}{\partial(y,z)}\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 g+\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}\times$

$\times\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 h\Bigg\}$, burada $I_1=\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,z)}$, $I_2=\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,x)}$, $I_3=\frac{\partial(g,h)}{\partial(x,y)}$ və $I=\frac{D(f,g,h)}{D(x,y,z)}$. **3417.** $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{I_2}{I_1}\frac{\partial g}{\partial y}$, burada $I_1=\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}$, $I_2=\frac{\partial(h,f)}{\partial(z,t)}$. **3418.** $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{I_1}{I}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{I_2}{I}$; $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{I_3}{I}$, burada $I_1=\frac{\partial(g,h)}{\partial(v,w)}$, $I_2=\frac{\partial(h,f)}{\partial(v,w)}$, $I_3=\frac{\partial(f,g)}{\partial(v,w)}$, $I=\frac{D(f,g,h)}{D(u,v,w)}$. **3419.** $dz=-\frac{I_1\,dx+I_2\,dy}{I_3}$, burada $I_1=\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,t)}$, $I_2=\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,t)}$, $I_3=\frac{\partial(f,g)}{\partial(z,t)}$. **3431.** $x'''+xx'^5=0$.

3432. $x^{\mathrm{IV}}=0$. **3433.** $\frac{d^2x}{dt^2}-t\left(\frac{dx}{dt}\right)^3=0$. **3434.** $\frac{d^2y}{dt^2}+y=0$.

3435. $\frac{d^3y}{dt^2}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}-6y=0$. **3436.** $\frac{d^2y}{dt^2}+n^2y=0$. **3437.** $\frac{d^2y}{dt^2}+m^2y=0$.

3438. $u''+\left[q(x)-\frac{1}{4}p^2(x)-\frac{1}{2}p'(x)\right]u=0$. **3439.** $\frac{d^2u}{dt^2}+(u+3)\frac{du}{dt}+2u=0$.

3440. $\frac{d^2u}{dt^2}=0$. **3441.** $\frac{d^2u}{dt^2}=0$. **3442.** $\frac{d^2u}{dt^2}+8u\left(\frac{du}{dt}\right)^3=0$. **3443.** $t^5\frac{d^3u}{dt^3}+$ $+(3t^4+1)\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{du}{dt}=0$. **3444.** $u''-u'=\frac{A}{(a-b)^2}u$. **3446.** $\Phi(1,u,u'+u^2)=0$.

3447. $F(xu'+u^2-u,u,1)=0$. **3450.** $\frac{dr}{d\varphi}=r$. **3451.** $r'^2=\frac{1-\sin 2\varphi}{\sin 2\varphi}r^2$.

3452. $r(r^2+2r'^2-rr'')=r'^3$. **3453.** $\frac{r'}{r}$. **3454.** $K=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}$.

3455. $\frac{dr}{dt}=kr^3$; $\frac{d\varphi}{dt}=-1$. **3456.** $w=\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)$. **3457.** $Y'=x$; $Y''=\frac{1}{y''}$; $Y'''=-\frac{y'''}{y''^3}$. **3458.** $z=\varphi(x+y)$, burada φ - istənilən diferensiallanan funksiyadır. **3459.** $z=\varphi(x^2+y^2)$. **3460.** $z=\frac{x}{a}+\varphi(y-bz)$.

3461. $z=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. **3462.** $\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=e^u\operatorname{sh}v$. **3463.** $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial v}$. **3464.** $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{1}{2}$.

3465. $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{z}{v}\cdot\frac{z^2+u}{z^2-u}$. **3466.** $(2u+v-z)\frac{\partial z}{\partial u}+(u+2v-z)\frac{\partial z}{\partial v}=u+v-z$.

3467. $\dfrac{e^{x+y}-z^2}{1-e^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi}-e^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta}}$. **3468.** $\dfrac{\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}{u^2+v^2}$. **3469.** $\frac{\partial u}{\partial \xi}=0$.

3470. $\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{x-z}{y}$. **3471.** $\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{u}{v}$. **3472.** $A=\dfrac{1}{x^4\left(u\frac{\partial x}{\partial u}+v\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2}\times$

$\times\left(x^2-2xu+u^2\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right]\right)$. **3473.** $\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{\partial u}{\partial \zeta}+3u+(e^{\xi}+e^{\eta}+e^{\zeta})=0$.

3474. $\frac{\partial w}{\partial v}=0$. **3475.** $\frac{\partial w}{\partial u}=0$. **3476.** $\frac{\partial w}{\partial v}=0$. **3477.** $u^2\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+v^2\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2=$

$=w^2\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}$. **3478.** $\dfrac{e^{2u}\left(1-\frac{\partial w}{\partial v}\cos^2 v\right)}{\frac{\partial w}{\partial u}}$. **3479.** $A=\frac{\partial w}{\partial u}:\frac{\partial w}{\partial v}$.

3480. $\frac{\partial w}{\partial \zeta}=\frac{\xi\eta}{\zeta}$. **3481.** $w=\frac{\partial u}{\partial \varphi}$. **3482.** $w=r\frac{\partial u}{\partial r}$. **3483.** $w=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2$.

3484. $w=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$. **3485.** $w=r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$. **3486.** $w=\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$.

3487. $I=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}-\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial v}{\partial r}\right)$. **3488.** $u=\varphi(x-at)+\psi(x+at)$, burada φ və ψ -istənilən funksiyalardır. **3489.** $3\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}=0$. **3490.** $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$.

3491. $a\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{\partial z}{\partial u}\right)+2b\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+b\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}-\frac{\partial z}{\partial v}\right)=0$. **3492.** $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$.

3493. $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+m^2e^{2u}z=0$. **3494.** $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$. **3495.** $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\frac{1}{2u}\frac{\partial z}{\partial v}$.

3496. $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\frac{2}{u(4-uv)}\frac{\partial z}{\partial v}$. **3497.** $(u^2-v^2)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=v\frac{\partial z}{\partial u}$. **3498.** $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=$

$=\frac{2u}{u^2+v^2}\frac{\partial z}{\partial u}$. **3499.** $\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+\frac{1}{u^2-v^2}\left(v\frac{\partial z}{\partial u}-u\frac{\partial z}{\partial v}\right)=0$. **3500.** $\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+$ $+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=1$. **3501.** $u=\varphi(x+\lambda_1 y)+\psi(x+\lambda_2 y)$, burada λ_1 və λ_2 - ədədləri $A+2B\lambda+C\lambda^2=0$ tənliyinin kökləridir. **3503.** *a*) $\Delta u=\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}$;

b) $\Delta(\Delta u)=\frac{d^4u}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3u}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\frac{du}{dr}$. **3504.** $u\frac{d^2w}{du^2}+\frac{dw}{du}+cw=0$.

3505. $A=X\frac{\partial^2u}{\partial X^2}-Y\frac{\partial^2u}{\partial X\,\partial Y}+\frac{\partial u}{\partial X}$. **3508.** $\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)+\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)+$ $+\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\zeta\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right)=2\left(\xi\eta\frac{\partial^2u}{\partial\xi\,\partial\eta}+\xi\zeta\frac{\partial^2u}{\partial\xi\,\partial\zeta}+\eta\zeta\frac{\partial^2u}{\partial\eta\,\partial\zeta}\right)$. **3509.** $\frac{\partial^2z}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2z}{\partial y_2^2}+\frac{\partial^2z}{\partial y_3^2}=0$.

3510. $\frac{\partial^2u}{\partial\zeta^2}=0$. **3511.** $\Delta_1 u=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2$;

$\Delta_2 u=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}\right]$.

3512. $w\left(\frac{\partial^2w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2w}{\partial y^2}\right)=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$. **3513.** $\frac{\partial^2w}{\partial u^2}=0$. **3514.** $\frac{\partial^2w}{\partial v^2}=0$.

3515. $\frac{\partial^2w}{\partial u^2}=\frac{1}{2}$. **3516.** $\frac{\partial^2w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2w}{\partial u\,\partial v}=2w$. **3517.** $\frac{\partial^2w}{\partial u^2}+\left(\frac{v}{u}-1\right)\frac{\partial^2w}{\partial v^2}=0$.

3515. $\frac{\partial^2w}{\partial u^2}=\frac{1}{2}$. **3516.** $\frac{\partial^2w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2w}{\partial u\,\partial v}=2w$. **3517.** $\frac{\partial^2w}{\partial u^2}+\left(\frac{v}{u}-1\right)\frac{\partial^2w}{\partial v^2}=0$.

3518. $\frac{\partial^2w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2w}{\partial v^2}+\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2=0$. **3519.** $\frac{\partial^2w}{\partial u\,\partial v}=\frac{w}{4\sin^2(u-v)}$.

3520. $\frac{\partial^2w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2w}{\partial v^2}=0$. **3523.** $\frac{\partial^2w}{\partial u\,\partial v}=0$. **3524.** $\frac{\partial^2w}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2w}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2w}{\partial\zeta^2}=\frac{\partial w}{\partial\xi}+$ $+\frac{\partial w}{\partial\eta}+\frac{\partial w}{\partial\zeta}+(e^w-1)\left[\left(\frac{\partial w}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial\zeta}\right)^2\right]$. **3526.** $x=y\varphi(z)+\psi(z)$.

3527. $A(X,Y)\frac{\partial^2Z}{\partial Y^2}-2B(X,Y)\frac{\partial^2Z}{\partial X\,\partial Y}+C(X,Y)\frac{\partial^2Z}{\partial X^2}=0$.

3528. $\frac{x-x_0}{-\cos\alpha\sin t_0}=\frac{y-y_0}{-\sin\alpha\sin t_0}=\frac{z-z_0}{\cos t_0}$; $z-z_0=(x-x_0)\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,t_0+$ $+(y-y_0)\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,t_0$, $x_0=a\cos\alpha\cos t_0$, $y_0=a\sin\alpha\cos t_0$, $z_0=a\sin t_0$.
3529. $\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1$, $y=\frac{b}{2}$; $ax-cz=\frac{1}{2}(a^2-c^2)$. **3530.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$; $x+y+2z=4$. **3531.** $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{-1}$; $3x+3y-z=3$. **3532.** $x+z=2$, $y+2=0$; $x-z=0$. **3533.** $M_1(-1,1,-1)$; $M_2\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27}\right)$. **3537.** $\mathrm{tg}\,\varphi=$ $=f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f'_y(x_0,y_0)\sin\alpha$. **3538.** $\frac{\partial u}{\partial l}=-\frac{16}{243}$. **3539.** $2x+4y-$ $-z-5=0$; $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-5}{-1}$. **3540.** $3x+4y+12z=169$; $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{12}$.
3541. $z=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}(x-y)$; $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-\frac{\pi}{4}}{2}$. **3542.** $ax_0x+by_0y+cz_0z=1$; $\frac{x-x_0}{ax_0}=\frac{y-y_0}{by_0}=\frac{z-z_0}{cz_0}$. **3543.** $x+y-2z=0$; $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}$.
3544. $x+y-4z=0$; $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-4}$. **3545.** $\frac{x}{a}\cos\psi_0\cos\varphi_0+\frac{y}{b}\cos\psi_0\sin\varphi_0+$ $+\frac{z}{c}\sin\psi_0=1$; $\frac{x\sec\psi_0\sec\varphi_0-a}{bc}=\frac{y\sec\psi_0\,\mathrm{cosec}\,\varphi_0-b}{ac}=\frac{z\,\mathrm{cosec}\,\psi_0-c}{ab}$.
3546. $x\cos\varphi_0+y\sin\varphi_0-z\,\mathrm{tg}\,\alpha=0$; $\frac{x-r_0\cos\varphi_0}{\cos\varphi_0}=\frac{y-r_0\sin\varphi_0}{\sin\varphi_0}=\frac{z-r_0\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{-\mathrm{tg}\,\alpha}$.
3547. $ax\sin v_0-ay\cos v_0+u_0z=au_0v_0$; $\frac{x-u_0\cos v_0}{a\sin v_0}=\frac{y-u_0\sin v_0}{-a\cos v_0}=\frac{z-av_0}{u_0}$.
3548. $\frac{3x}{u_0}-\frac{3y}{u_0^2}+\frac{z}{u_0^3}=2$. **3549.** $A(0,\pm2\sqrt{2},\mp2\sqrt{2})$; $B(\pm2,\mp4,\pm2)$; $C(\pm4,\mp2,0)$. **3550.** $x=\pm\frac{a^2}{d}$, $y=\pm\frac{b^2}{d}$, $z=\pm\frac{c^2}{d}$, burada $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.
3551. $x+4y+6z=\pm21$. **3556.** $x^2+y^2-xy=1$, $z=0$; $3y^2+4z^2=4$, $x=0$; $3x^2+4z^2=4$, $y=0$. **3557.** $\delta<0{,}003$. **3559.** $\cos\varphi=\frac{2bz_0}{a\sqrt{a^2+b^2}}$.
3563. $\frac{\partial u}{\partial n}=x_0+y_0+z_0$; *a)* $x_0=y_0=z_0=\frac{1}{\sqrt{3}}$; *b)* $x_0=y_0=z_0=-\frac{1}{\sqrt{3}}$;

$c)$ $x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=1$ çevrəsində. **3564.** $\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{2}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}}$.

3566. $x^2+y^2=p^2$. **3567.** $y=\pm x$. **3568.** $y^2=4ax$. **3569.** Qurşayanı yoxdur. **3570.** $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=l^{\frac{2}{3}}$. **3571.** $|xy|=\frac{S}{2\pi}$. **3572.** $y=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{gx^2}{2v_0^2}$.

3574. $a)$ $y=0$ - qurşayandır (əyilmə nöqtələrinin həndəsi yeridir); $b)$ $y=0$ - qurşayandır; $c)$ $y=0$ - məxsusi nöqtələrin (qayıtma nöqtələrinin) həndəsi yeridir; $d)$ $x=0$ - ikiqat nöqtələrin həndəsi yeridir, $x=a$ - qurşayandır.

3575. $(\sqrt{x^2+y^2}-R)^2+z^2=r^2$ toru. **3576.** $x^2\sin^2\alpha+y^2\sin^2\beta+z^2\sin^2\gamma-$ $-2xy\cos\alpha\cos\beta-2xz\cos\alpha\cos\gamma-2yz\cos\beta\cos\gamma=1$. **3577.** $|xyz|=\frac{V}{4\pi\sqrt{3}}$.

3578. $|z\pm\sqrt{x^2+y^2}|=\rho\sqrt{2}$. **3579.** $\begin{vmatrix} x & y \\ x_0 & y_0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} y & z \\ y_0 & z_0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z & x \\ z_0 & x_0\end{vmatrix}^2\le$ $\le R^2(x^2+y^2+z^2)$. **3580.** $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=(z-z_0)^2$. **3581.** $f(x,y)=$ $=5+2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2$. **3582.** $f(x,y,z)=3[(x-1)^2+(y-1)^2+$ $+(z-1)^2-(x-1)(y-1)-(x-1)(z-1)-(y-1)(z-1)]+(x-1)^3+(y-1)^3+(z-1)^3-$ $-3(x-1)(y-1)(z-1)$. **3583.** $\Delta f(1,-1)=h-3k+(-h^2-2hk+k^2)+(h^2k+hk^2)$.
3584. $f(x+h,y+k,z+l)=f(x,y,z)+2[h(Ax+Dy+E)+k(Dx+By+F)+$ $+l(Ex+Fy+Cz)]+f(h,k,l)$. **3585.** $x^y=1+(x-1)+(x-1)(y-1)+R_2(1+$ $+\theta(x-1),\ 1+\theta(y-1))$, $(0<\theta<1)$, burada $R_2(x,y)=\frac{1}{6}x^y\left[\left(\frac{y}{x}dx+\ln x\cdot dy\right)^3+\right.$ $\left.+3\left(\frac{y}{x}dx+\ln x\cdot dy\right)\left(-\frac{y}{x^2}dx^2+\frac{2}{x}dx\,dy\right)+\left(\frac{2y}{x^3}dx^3-\frac{3}{x^2}dx^2dy\right)\right]$ və $dx=x-1$, $dy=y-1$. **3586.** $1-\frac{1}{2}(x^2+y^2)-\frac{1}{8}(x^2+y^2)^2$. **3587.** $a)$ $1-\frac{1}{2}(x^2-y^2)$; $b)$ $\frac{\pi}{4}+x-xy$. **3588.** $-(xy+xz+yz)$. **3589.** $F(x,y)=\frac{h^2}{4}(f''_{xx}+f''_{yy})+$ $+\frac{h^4}{48}(f^{IV}_{xxxx}+f^{IV}_{yyyy})+\ldots$. **3590.** $F(\rho)=f(x,y)+\frac{\rho^2}{4}[(f''_{xx}(x,y)+f''_{yy}(x,y))]$.

3591. $\Delta_{xy}f(x,y)=hk\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+\sum_{n=3}^{\infty}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{h^{m-1}k^{n-m-1}}{m!(n-m)!}\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^m\partial y^{n-m}}\right]$.

3592. $F(\rho)=f(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2n}\Delta^n f(x,y)$, burada $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

3593. $1+mx+ny+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+mnxy+\frac{n(n-1)}{2!}y^2+\ldots\ (|x|<1, |y|<1)$.

3594. $\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n-1}(m+n-1)!}{m!n!}x^m y^n\ (|x|+|y|<1)$. **3595.** $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\times$ $\times\frac{x^m y^{2n+1}}{m!(2n+1)!}\ (|x|<+\infty, |y|<+\infty)$. **3596.** $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^m y^{2n}}{m!(2n)!}$ $(|x|<+\infty, |y|<+\infty)$. **3597.** $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{2m+1}y^{2n+1}}{(2m+1)!(2n+1)!}\ (|x|<+\infty, |y|<+\infty)$.

3598. $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{2m}y^{2n}}{(2m)!(2n)!}\ (|x|<+\infty, |y|<+\infty)$. **3599.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\times$ $\times\frac{(x^2+y^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}\ (x^2+y^2<+\infty)$. **3600.** $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{m+n}\frac{x^m y^n}{mn}\ (|x|<1, |y|<1)$.

3601. $f(x,y)=1+\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^2}{2}\right)y$. **3602.** $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^m(y+1)^n}{m!\,n!}$ $(|x|<+\infty, |y|<+\infty)$. **3603.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n[1+(x-1)](y-1)^n\ (-\infty<x<+\infty,$ $0<y<2)$. **3604.** $z=1+[2(x-1)-(y-1)]-[8(x-1)^2-10(x-1)(y-1)+$ $+3(y-1)^2]+\ldots$. **3605.** $a<0$ olduqda $(0,0)$ - izolə edilmiş nöqtədir; $a=0$ olduqda $(0,0)$ - qayıtma nöqtəsidir; $a>0$ olduqda $(0,0)$ - ikiqat nöqtədir. **3606.** $(0,0)$ - ikiqat nöqtədir. **3607.** $(0,0)$ - izolə edilmiş nöqtədir. **3608.** $(0,0)$ - izolə edilmiş nöqtədir. **3609.** $(0,0)$ - ikiqat nöqtədir. **3610.** $(0,0)$ - qayıtma nöqtəsidir (ikinci növ). **3611.** $(0,0)$ - ikiqat nöqtədir. **3612.** $a<b<c$ olduqda əyri ovaldan və sonsuz budaqdan ibarətdir; $a=b<c$ olduqda $A(a,0)$ - izolə edilmiş nöqtədir; $a<b=c$ olduqda $B(b,0)$ - ikiqat nöqtədir; $a=b=c$ olduqda $A(a,0)$ - qayıtma nöqtəsidir. **3613.** $(0,0)$ - ikiqat nöqtədir. **3614.** $(0,0)$ - qayıtma nöqtəsidir. **3615.** $(0,0)$ - qurtarma nöqtəsidir. **3616.** $(0,0)$ - bucaq nöqtəsidir. **3617.** $x=k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ - 1-ci növ kəsilmə nöqtələridir. **3618.** $x=0$ - 2-ci növ kəsilmə nöqtəsidir. **3619.** $x=0$ - ikiqat nöqtədir. **3620.** $x=k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ - qayıtma nöqtələridir. **3621.** $x=0$ və

$y=1$ olduqda $z_{min}=0$. **3622.** Ekstremum nöqtələri yoxdur. **3623.** $x-y+1=0$ düz xəttinin nöqtələrində $z=0$ qeyri-ciddi minimumdur. **3624.** $x=1$ və $y=0$ olduqda $z_{min}=-1$. **3625.** $x=2$, $y=3$ olduqda $z_{max}=108$; $x=0$, $0<y<6$ olduqda $z=0$ qeyri-ciddi minimumdur; $x=0$, $-\infty<y<0$ və $6<y<+\infty$ olduqda $z=0$ qeyri-ciddi minimumdur. **3626.** $x=1$ və $y=1$ olduqda $z_{min}=-1$. **3627.** $x_1=-1$, $y_1=-1$ və $x_2=1$, $y_2=1$ olduqda $z_{min}=-2$; $x=0$, $y=0$ olduqda ekstremum yoxdur. **3627.1.** $x=0$, $y=0$ olduqda $z=0$ maksimumdur; $x=\pm\frac{1}{2}$, $y=\pm1$ olduqda $z=-1\frac{1}{8}$ minimumdur; $x=0$, $y=\pm1$ olduqda $z=-1$ yəhəri və $x=\pm\frac{1}{2}$, $y=0$ olduqda $z=-\frac{1}{8}$ yəhəri. **3628.** $x=5$, $y=2$ olduqda $z=30$ minimumdur. **3629.** $\frac{x}{a}=-\frac{y}{b}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ olduqda $z_{min}=-\frac{ab}{3\sqrt{3}}$; $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ olduqda $z_{max}=\frac{ab}{3\sqrt{3}}$. **3630.** $c>0$ olarsa, $x=\frac{a}{c}$, $y=\frac{b}{c}$ olduqda $z_{max}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; $c<0$ olarsa, $x=\frac{a}{c}$, $y=\frac{b}{c}$ olduqda $z_{min}=-\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; $c=0$, $a^2+b^2\neq0$ olarsa, ekstremum yoxdur. **3631.** $x=0$, $y=0$ olduqda $z_{max}=1$. **3632.** $x=0$, $y=0$ olduqda $z=0$ minimumdur; $x=-\frac{1}{4}$, $y=-\frac{1}{2}$ olduqda $z=\frac{1}{2}e^{-2}$ yəhəri. **3633.** $x=1$, $y=-2$ olduqda $z=e^3$ yəhəri. **3634.** $x=1$, $y=3$ olduqda $z=e^{-13}\approx2,26\cdot10^{-6}$ maksimumdur; $x=-\frac{1}{26}$, $y=-\frac{3}{26}$ olduqda $z=-26\cdot e^{-\frac{1}{52}}\approx-25,51$ minimumdur. **3635.** $x=1$, $y=2$ olduqda $z=7-10\ln2\approx0,0685$ minimumdur. **3636.** $x=\frac{\pi}{3}$, $y=\frac{\pi}{6}$ olduqda $z_{max}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$. **3637.** $x=y=\frac{2\pi}{3}$ olduqda $z_{min}=-\frac{3\sqrt{3}}{8}$; $x=y=\frac{\pi}{3}$ olduqda $z_{max}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$. **3638.** $x=1$, $y=1$ olduqda $z=-1+\frac{1}{2}\ln2+\frac{3}{4}\pi\approx1,70$ yəhəri.

3639. $x=y=\pm\frac{1}{\sqrt{2e}}\approx\pm 0{,}43$ olduqda $z=-\frac{1}{2e}\approx -0{,}184$ minimumdur; $x=-y=\pm\frac{1}{\sqrt{2e}}$ olduqda $z=\frac{1}{2e}$ maksimumdur; $x=0$, $y=\pm 1$ və $x=\pm 1$, $y=0$ stasionar nöqtələrində ekstremum yoxdur. **3640.** Stasionar nöqtələr $x=\frac{\pi}{12}(-1)^{m+1}+(m+n)\frac{\pi}{2}$, $y=\frac{\pi}{12}(-1)^{m+1}+(m-n)\frac{\pi}{2}$, $(m,n=0,\pm 1,\ \pm 2,\ldots)$ kimidir. m və n müxtəlif cütlükdə olduqda $z=m\pi+\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)(-1)^{m+1}+$ $+2\cdot(-1)^{n}$ ekstremumdur (m tək və n cüt olduqda maksimum, m cüt və n tək olduqda isə minimumdur); m və n eyni cütlükdə olduqda ekstremum yoxdur. **3641.** $x=0$, $y=0$ olduqda $z_{\min}=0$; $x^2+y^2=1$ olduqda $z=e^{-1}$ qeyri-ciddi minimumdur. **3642.** $x=-1$, $y=-2$, $z=3$ olduqda $u_{\min}=-14$. **3643.** $x=24$, $y=-144$, $z=-1$ olduqda $u=-6913$ minimumdur. **3644.** $x=\frac{1}{2}$, $y=1$, $z=1$ olduqda $u=4$ minimumdur. **3645.** $x=y=z=\frac{a}{7}$ olduqda $u_{\max}=\frac{a^7}{7^7}$; $y=0$, $x\neq 0$, $z\neq 0$, $x+2y+3z\neq a$ olduqda $u=0$ qeyri-ciddi ekstremumdur. **3646.** $x=\frac{1}{2}\sqrt[15]{16a^{14}b}$, $y=\frac{1}{4}\sqrt[5]{16a^{4}b}$, $z=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^8b^7}{4}}$ olduqda $u=\frac{15a}{4}\sqrt[15]{\frac{a}{16b}}$ minimumdur. **3647.** $x=y=z=\frac{\pi}{2}$ olduqda $u=4$ maksimumdur; $x=y=z=0$ və $x=y=z=\pi$ olduqda $u=0$ sərhəd minimumdur. **3648.** $x_1=x_2=\ldots=x_n=\frac{2}{n^2+n+2}$ olduqda $u_{\max}=\left(\frac{2}{n^2+n+2}\right)^{\frac{n^2+n+2}{2}}$.
3649. $x_1=2^{\frac{1}{n+1}}$, $x_2=x_1^2,\ldots,x_n=x_1^n$ olduqda $u=(n+1)2^{\frac{1}{n+1}}$ minimumdur. **3650.** $a,x_1,x_2,\ldots,x_n,b$ ədədləri $q=\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$ vuruqlu həndəsi silsilə əmələ gətirirlər. **3651.** $x=1$, $y=-1$ olduqda $z_1=-2$ minimumdur və $z_2=6$ maksimumdur. **3652.** $x=y=-(3+\sqrt{6})$ olduqda $z_{\min}=-(4+2\sqrt{6})$; $x=y=-(3-\sqrt{6})$ olduqda $z_{\max}=2\sqrt{6}-4$.

3653. $x^2+y^2=\frac{3a^2}{8}$, $z<0$ olduqda $z=-\frac{a}{2\sqrt{2}}$ qeyri-ciddi minimumdur; $x^2+y^2=\frac{3a^2}{8}$, $z>0$ olduqda $z=\frac{a}{2\sqrt{2}}$ qeyri-ciddi maksimumdur. **3654.** $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$ olduqda $z_{\max}=\frac{1}{4}$. **3655.** $x=-\frac{b\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y=-\frac{a\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$ olduqda $z_{\min}=-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|}$; $x=\frac{b\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y=\frac{a\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$ olduqda $z_{\max}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|}$, burada $\varepsilon=\operatorname{sgn} ab\neq 0$. **3656.** $x=\frac{ab^2}{a^2+b^2}$, $y=\frac{a^2b}{a^2+b^2}$ olduqda $z_{\max}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$. **3657.** $z_{\min}=\lambda_1$, $z_{\max}=\lambda_2$, burada λ_1 və λ_2 ədədləri $(A-\lambda)(C-\lambda)-B^2=0$ tənliyinin kökləridir və $\lambda_1<\lambda_2$. **3657.1.** $x=\pm 1\frac{1}{2}$, $y=\pm 4$ olduqda $z=106\frac{1}{4}$ maksimumdur; $x=\pm 2$, $y=\mp 3$ olduqda $z=-50$ minimumdur. **3658.** $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, $y=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$ olduqda $z=1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{2}}$ ekstremumlardır (k cüt olduqda maksimum və k tək olduqda minimumdur). **3659.** $x=-\frac{1}{3}$, $y=\frac{2}{3}$, $z=-\frac{2}{3}$ olduqda $u_{\min}=-3$; $x=\frac{1}{3}$, $y=-\frac{2}{3}$, $z=\frac{2}{3}$ olduqda $u_{\max}=3$. **3660.** $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}=\frac{a}{m+n+p}$ olduqda $u_{\max}=\frac{a^{m+n+p}m^m n^n p^p}{(m+n+p)^{m+n+p}}$. **3661.** $x=0$, $y=0$, $z=\pm c$ olduqda $u_{\min}=c^2$; $x=\pm a$, $y=0$, $z=0$ olduqda $u_{\max}=a^2$. **3662.** $x=y=z=\frac{a}{6}$ olduqda $u_{\max}=\left(\frac{a}{6}\right)^6$. **3663.** $x=y=\frac{1}{\sqrt{6}}$ və $z=-\frac{2}{\sqrt{6}}$, $x=z=\frac{1}{\sqrt{6}}$ və $y=-\frac{2}{\sqrt{6}}$, $y=z=\frac{1}{\sqrt{6}}$ və $x=-\frac{2}{\sqrt{6}}$ olduqda $u_{\min}=-\frac{1}{3\sqrt{6}}$; $x=y=-\frac{1}{\sqrt{6}}$ və $z=\frac{2}{\sqrt{6}}$,

$x=z=-\frac{1}{\sqrt{6}}$ və $y=\frac{2}{\sqrt{6}}$, $y=z=-\frac{1}{\sqrt{6}}$ və $x=\frac{2}{\sqrt{6}}$ olduqda $u_{\max}=\frac{1}{3\sqrt{6}}$.
3663.1. $x=1$, $y=1$, $z=1$ olduqda $u=2$ şərti maksimumdur.
3664. $x=y=z=\frac{\pi}{6}$ olduqda $u_{\max}=\frac{1}{8}$. **3665.** $u_{\min}=\lambda_1$ və $u_{\max}=\lambda_2$, burada λ_1 və λ_2 ədədləri $\lambda^2-\left(\frac{\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\beta}{b^2}+\frac{\sin^2\gamma}{c^2}\right)\lambda+$ $+\left(\frac{\cos^2\alpha}{b^2c^2}+\frac{\cos^2\beta}{a^2c^2}+\frac{\cos^2\gamma}{a^2b^2}\right)=0$ tənliyinin kökləridir $(\lambda_1<\lambda_2)$.
3666. $u_{\min}=\frac{R^2(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)^2}{A^2+B^2+C^2}$; $u_{\max}=R^2$. **3667.** $x_i=\frac{1}{a_i}\times$ $\times\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}\right)^{-1}$ $(i=1,2,\dots,n)$ olduqda $u_{\min}=\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}\right)^{-1}$. **3668.** $x_i=\frac{a}{n}$ $(i=1,2,\dots,n)$ olduqda $u_{\min}=\frac{a^p}{n^{p-1}}$. **3669.** $x_i=\sqrt{\frac{\alpha_i}{\beta_i}}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\sqrt{\alpha_j\beta_j}\right)^{-1}$ $(i=1,2,\dots,n)$ olduqda $u_{\min}=\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\sqrt{\alpha_j\beta_j}\right)^{2}$. **3670.** $\frac{x_1}{\alpha_1}=\frac{x_2}{\alpha_2}=\dots=\frac{x_n}{\alpha_n}=$ $=\frac{a}{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}$ olduqda $u_{\max}=\left(\frac{a}{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}\right)^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}\times$ $\times\alpha_1^{\alpha_1}\alpha_2^{\alpha_2}\dots\alpha_n^{\alpha_n}$. **3671.** $u=\lambda$ ekstremumları $|a_{ij}-\lambda\delta_{ij}|=0$ tənliyindən təyin olunurlar, burada $i\neq j$ olduqda $\delta_{ij}=0$ və $\delta_{ii}=1$.
3675. Inf $z=-5$, sup $z=-2$. **3676.** Inf $z=-75$, sup $z=125$.
3677. Inf $z=0$, sup $z=1$. **3678.** Inf $u=0$; sup $u=300$. **3679.** Inf $u=-\frac{1}{2}$, sup $u=1+\sqrt{2}$. **3680.** Inf $u=0$, sup $u=e^{-1}\approx 0{,}37$. **3682.** Yox.
3683. Minimum $\frac{n}{\sqrt[n]{a}}$-ya bərabərdir. **3684.** Toplananlar bərabərdir.

3685. Vuruqlar aşağıdakı kimidir: $x_i=\dfrac{\left(a\alpha_1^{\frac{1}{\alpha_1}}\alpha_2^{\frac{1}{\alpha_2}}\dots\alpha_n^{\frac{1}{\alpha_n}}\right)^{\frac{\frac{1}{\alpha_i}}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\dots+\frac{1}{\alpha_n}}}}{(\alpha_i)^{\frac{1}{\alpha_i}}}$

$(i=1,2,\dots,n)$, burada α_i $(i=1,2,\dots,n)$ - qüvvətlərin uyğun dərəcələridir; cəmin ən kiçik qiyməti $\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\dots+\frac{1}{\alpha_n}\right)\times$ $\times\left(a\alpha_1^{\frac{1}{\alpha_1}}\alpha_2^{\frac{1}{\alpha_2}}\dots\alpha_n^{\frac{1}{\alpha_n}}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\dots+\frac{1}{\alpha_n}}}$ kimidir. **3686.** $x=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n}m_i x_i$, $y=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n}m_i y_i$, $M=\sum_{i=1}^{n}m_i$. **3687.** Vannanın ölçüləri $\sqrt[3]{2V}$, $\sqrt[3]{2V}$, $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$ kimidir. **3688.** $H=2R=2\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$, burada R - silindrik səthin radiusu və H - onun doğuranıdır. **3689.** $x=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}x_i$, $y=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}y_i$, $z=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}z_i$, burada $N=\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}z_i\right)^2}$. Məsafələrin kvadratlarının ən kiçik cəmi $n-2N+\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2+z_i^2)$ ifadəsinə bərabərdir. **3690.** Konusun doğuranının onun oturacağına meyl bucağı $\arcsin\frac{2}{3}$-yə bərabərdir. **3691.** Piramidaların yan üzlərinin oturacaqlarına meyl bucağı $\arcsin\frac{2}{3}$-yə bərabərdir. **3692.** Düzbucaqlının tərəfləri $\frac{2p}{3}$ və $\frac{p}{3}$-ə bərabərdir. **3693.** Üçbucağın tərəfləri $\frac{p}{2}$, $\frac{3p}{4}$ və $\frac{3p}{4}$ kimidir. **3694.** Paralelepipedin ölçüləri $\frac{2R}{\sqrt{3}}$, $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ və $\frac{R}{\sqrt{3}}$ kimidir. **3695.** Paralelepipedin hündürlüyü konusun hündürlüyünün $\frac{1}{3}$-nə bərabərdir. **3696.** Paralelepipedin ölçüləri $\frac{2a}{\sqrt{3}}$, $\frac{2b}{\sqrt{3}}$ və $\frac{2c}{\sqrt{3}}$ kimidir. **3697.** Paralelepipedin hündürlüyü: $\alpha\ge\operatorname{arctg}\sqrt{2}$ olduqda $h=l\sin\alpha\frac{\operatorname{tg}\alpha-\sqrt{2}}{2\operatorname{tg}\alpha-\sqrt{2}}$ və $0<\alpha<\operatorname{arctg}\sqrt{2}$ olduqda $h=0$ olar. **3698.** Paralelepipedin ölçüləri

a, b və $\frac{c}{2}$ kimidir. **3699.** $\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. **3700.** $d=\frac{1}{\pm\Delta}\times$

$\times\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}$, burada $\Delta=\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} p_1 & m_1 \\ p_2 & m_2 \end{vmatrix}^2}$.

3701. $\frac{7}{4\sqrt{2}}$. **3702.** $a^2=\lambda_1$ və $b^2=\lambda_2$ yarımoxlarının kvadratları $(1-\lambda A)(1-\lambda C)-\lambda^2B^2=0$ tənliyinin kökləridir. **3703.** $a^2=\lambda_1$, $b^2=\lambda_2$ və $c^2=\lambda_3$ yarımoxlarının kvadratları $\begin{vmatrix} A\lambda-1 & D\lambda & F\lambda \\ D\lambda & B\lambda-1 & E\lambda \\ F\lambda & E\lambda & C\lambda-1 \end{vmatrix}=0$ tənliyinin kökləridir.

3704. $\frac{\pi ab}{|C|}\sqrt{A^2+B^2+C^2}$. **3705.** $\frac{\pi abc}{\sqrt{a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\beta+c^2\cos^2\gamma}}$.

3707. Düşmə bucağı $\arcsin\left(n\sin\frac{\alpha}{2}\right)$-yə və şüanın meyli $2\arcsin\left(n\sin\frac{\alpha}{2}\right)-\alpha$-ya bərabərdir. **3708.** Axtarılan a və b əmsalları $a[xx]+b[x1]=[xy]$, $a[x1]+bn=[y1]$ tənliklər sistemindən təyin olunurlar, burada $[xy]=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$ və s. $\sum_{i\neq j}(x_i-x_j)^2\neq 0$ olduqda məsələnin müəyyən həlli var. **3709.** $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2(\overline{x}\cdot\overline{y}-\overline{xy})}{[\overline{x^2}-(\overline{x})^2]-[\overline{y^2}-(\overline{y})^2]}$, $p=\overline{x}\cos\alpha+\overline{y}\sin\alpha$, burada $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$, $\overline{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$ və s. orta qiymətlərdir. **3710.** $4x-\frac{7}{2}$, $\Delta_{\min}=\frac{1}{2}$.

VII Bölmə

3711. $-\infty < y < 0$ olduqda $F(y)=1$; $0 \le y \le 1$ olduqda $F(y)=1-2y$; $1 < y < +\infty$ olduqda $F(y)=-1$. **3712.** $y=0$ olduqda $F(y)$ kəsiləndir. **3713.** *a*) $\frac{\pi}{4}$; *b*) 1; *c*) $\frac{8}{3}$; *d*) $\ln\frac{2e}{1+e}$. **3713.1.** 0.

3715. Olmaz. **3716.** Olmaz. **3717.** $F'(x)=2xe^{-x^5}-e^{-x^3}-\int\limits_x^{x^2} y^2e^{-xy^2}dy$.

3718. *a*) $-(e^{\alpha|\sin\alpha|}\sin\alpha+e^{\alpha|\cos\alpha|}\cos\alpha)+\int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}dx$;

b) $\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b+\alpha}\right)\sin\alpha\,(b+\alpha)-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{a+\alpha}\right)\sin\alpha\,(a+\alpha)$; *c*) $\frac{2}{\alpha}\ln(1+\alpha^2)$;

d) $f(\alpha,-\alpha)+2\int\limits_0^{\alpha} f'_u(u,v)\,dx$, burada $u=x+\alpha$ və $v=x-\alpha$;

e) $2\alpha\int\limits_{\alpha^2-\alpha}^{\alpha^2+\alpha}\sin(y^2+\alpha^4-\alpha^2)\,dy+2\int\limits_0^{\alpha^2}\sin 2x^2\cdot\cos 2\alpha x\,dx-$

$-2\alpha\int\limits_0^{\alpha^2}dx\int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha}\cos(x^2+y^2-\alpha^2)\,dy$. **3719.** $F''(x)=3f(x)+2xf'(x)$.

3720. $x\in(a,b)$ olduqda $F''(x)=2f(x)$; $x\,\overline{\in}\,(a,b)$ olduqda $F''(x)=0$.

3721. $F''(x)=\frac{\Delta^2 f(x)}{h^2}$, burada $\Delta^2 f(x)=f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)$.

3722. $F^{(n)}(x)=(n-1)!\,f(x)$. **3723.** $4x-\frac{11}{3}$. **3724.** 0,934 + 0,428 x (təqribən). **3725.** $\frac{dE}{dk}=\frac{E-F}{k}$; $\frac{dF}{dk}=\frac{E}{k(1-k^2)}-\frac{F}{k}$. **3729.** $F''_{xy}(x,y)=$ $=x(2-3y^2)f(xy)+\frac{x}{y^2}f\left(\frac{x}{y}\right)+x^2y(1-y^2)f'(xy)$. **3732.** $\pi\ln\frac{|a|+|b|}{2}$.

3733. $|a|\le 1$ olduqda 0; $|a|>1$ olduqda $\pi\ln a^2$. **3734.** $\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}a\ln(1+|a|)$.

3735. $\pi\arcsin a$. **3736.** $\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2})$. **3737.** $\ln\frac{b+1}{a+1}$.

3738. *a*) $\operatorname{arctg}\frac{b-a}{1+(a+1)(b+1)}$; *b*) $\frac{1}{2}\ln\frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}$. **3741.** $a\ge 0$.

3742. $\mathrm{Max}(p,q)>1$. **3743.** $\left|\frac{p-1}{q}\right|<1$. **3744.** $p<1$. **3745.** $n<0$ və $n>\frac{1}{2}$. **3746.** $p>\frac{1}{2}$. **3747.** $a>0$ olduqda və $a=-\frac{2n-1}{2}\pi$ $(n=1,2,\ldots)$ olduqda yığılır. **3748.** $n>4$ olduqda yığılır. **3749.** $p>1$ olduqda yığılır. **3750.** $-1<n<2$ olduqda yığılır. **3755.1.** *a*) Müntəzəm yığılır; *b*) müntəzəm yığılmır. **3755.2.** Müntəzəm yığılmır. **3756.** Müntəzəm yığılır. **3757.** Müntəzəm yığılır. **3758.** Müntəzəm yığılır. **3759.** Müntəzəm yığılmır. **3760.** Müntəzəm yığılır. **3760.1.** Müntəzəm yığılır. **3761.** Müntəzəm yığılır. **3762.** Müntəzəm yığılmır. **3763.** *a*) Müntəzəm yığılır; *b*) müntəzəm yığılmır. **3764.** Müntəzəm yığılmır. **3765.** Müntəzəm yığılır. **3765.1.** $b\geq 10^{70}$. **3766.** *a*) Müntəzəm yığılır; b) müntəzəm yığılmır. **3767.** Müntəzəm yığılır. **3768.** Müntəzəm yığılmır. **3769.** Müntəzəm yığılır. **3770.** Müntəzəm yığılır. **3772.** Yox. **3776.** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. **3376.2.** 1. **3778.** $a=\pm 1$. **3779.** Kəsilməzdir. **3780.** Kəsilməzdir. **3781.** Kəsilməzdir. **3782.** Kəsilməzdir. **3783.** $\alpha=0$ olduqda kəsiləndir. **3784.** $\frac{(-1)^m m!}{n^{m+1}}$.

3785. $\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}a^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}$. **3788.** $\ln\frac{b}{a}$. **3790.** $\ln\frac{b}{a}$. **3791.** 0.

3792. $\frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}$. **3793.** $\frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}$. **3794.** $\ln\frac{(2\alpha)^{2\alpha}(2\beta)^{2\beta}}{(\alpha+\beta)^{2\alpha+2\beta}}$. **3795.** $\mathrm{arctg}\frac{\beta}{m}-$ $-\mathrm{arctg}\frac{\alpha}{m}$ $(m\neq 0)$. **3796.** $\frac{1}{2}\ln\frac{\beta^2+m^2}{\alpha^2+m^2}$. **3797.** $-\pi(1-\sqrt{1-a^2})$.

3798. $\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}$. **3799.** $\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}\,\alpha\cdot(1+|\alpha|-\sqrt{1+\alpha^2})$.

3800. $\frac{\pi}{|\beta|}\ln(|\alpha|+|\beta|)$ $(\beta\neq 0)$. **3801.** $\frac{\pi}{2}\ln\frac{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}{\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}}$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$.

3802. $\frac{2\pi}{3}[\alpha\beta(\alpha+\beta)+\alpha^3\ln\alpha+\beta^3\ln\beta-(\alpha^3+\beta^3)\ln(\alpha+\beta)]$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$.

3803. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. **3804.** $\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{ac-b^2}{a}}$. **3805.** $\frac{(a+2b^2)a_1-4abb_1+2a^2c_1}{2a^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{ac-b^2}{a}}$.

3806. $\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{4a}}$. **3807.** $\frac{\sqrt{\pi}}{a}e^{-2a}$. **3808.** $\sqrt{\pi}(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})$. **3809.** $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$.

3810. $\dfrac{b\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$. **3811.** $(-1)^n\dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}}\cdot\dfrac{d^{2n}}{db^{2n}}(e^{-b^2})$. **3812.** $\dfrac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\beta$.

3812.1. Funksiya təkdir. $x>0$ olduqda minimumları $2k\pi$ nöqtələrində və maksimumları $(2k-1)\pi$ nöqtələrindədir, burada $k=1, 2, 3, \dots$, Asimptotları: $x\to+\infty$ olduqda $y=\dfrac{\pi}{2}$, $x\to-\infty$ olduqda $y=-\dfrac{\pi}{2}$.

3813. $\pi\dfrac{|\beta|}{2}-\sqrt{\pi\alpha}$. **3814.** $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right|$. **3815.** $|\alpha|<|\beta|$ olduqda 0; $|\alpha|=|\beta|$ olduqda $\dfrac{\pi}{4}\operatorname{sgn}\alpha$; $|\alpha|>|\beta|$ olduqda $\dfrac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha$. **3816.** $\dfrac{\pi}{4}\operatorname{sgn}\alpha$.

3817. $\dfrac{\pi}{2}|\alpha|$. **3818.** $\dfrac{3\pi}{8}\alpha|\alpha|$. **3819.** $\dfrac{\pi}{4}$. **3820.** $\dfrac{3}{8}\ln\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|$. **3821.** $\dfrac{\pi}{4}$.

3822. $\dfrac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{\alpha+\beta}{k}-\dfrac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{\alpha-\beta}{k}+\dfrac{k}{4}\ln\dfrac{k^2+(\alpha-\beta)^2}{k^2+(\alpha+\beta)^2}$.

3823. $|x|<1$ olduqda $D(x)=1$; $x=\pm1$ olduqda $D(x)=\dfrac{1}{2}$; $|x|>1$ olduqda $D(x)=0$. **3824.** *a)* $\pi\operatorname{sgn}a\cos ab$; *b)* $\pi\operatorname{sgn}a\sin ab$.

3825. $\dfrac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}$. **3826.** $\dfrac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha\, e^{-|\alpha|}$. **3827.** $\dfrac{\pi}{4}(1-e^{-2})$. **3828.** $\dfrac{\pi(1+|\alpha|)}{4}e^{-|\alpha|}$.

3829. $\dfrac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}\cos\dfrac{b\alpha}{a}e^{-\frac{|\alpha|}{a}\sqrt{ac-b^2}}$. **3830.** $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$; $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$. **3831.** $\sqrt{\dfrac{\pi}{|\alpha|}}\times$ $\times\sin\left(\dfrac{ac-b^2}{a}+\dfrac{\pi}{4}\operatorname{sgn}a\right)$. **3832.** $\sqrt{\pi}\cos\left(a^2+\dfrac{\pi}{4}\right)$. **3833.** $\sqrt{\pi}\sin\left(a^2+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

3835. *a)* $\dfrac{n!}{p^{n+1}}$; *b)* $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}$; *c)* $p>\alpha$ olduqda $\dfrac{1}{p-\alpha}$; *d)* $\dfrac{1}{(p+\alpha)^2}$; *e)* $\dfrac{p}{p^2+1}$; *f)* $\ln\left(1+\dfrac{1}{p}\right)$; *g)* $\dfrac{\alpha\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}e^{-\frac{\alpha^2}{4p}}$. **3837.** *a)* 1; *b)* $x^2+\dfrac{1}{2}$; *c)* e^{2ax+a^2}; *d)* $\dfrac{1}{2}e^{-\frac{a^2}{4}}\cos ax$. **3839.** $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, burada $\sigma=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$.

3843. $\dfrac{\pi}{8}$. **3844.** $\dfrac{\pi a^4}{16}$. **3845.** $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$. **3846.** $\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. **3847.** $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$. **3848.** $\dfrac{3\pi}{512}$.

3849. $\dfrac{\pi}{n\sin\dfrac{\pi}{n}}$. **3850.** $\dfrac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}$. **3851.** $\dfrac{\pi}{n\sin\dfrac{m\pi}{n}}$ $(0<m<n)$.

3852. $\mathrm{B}(n-m,\,m)$ $(0<m<n)$. **3853.** $\dfrac{a^{-p}}{n}\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}\mathrm{B}\left(\dfrac{m+1}{n},\,p-\dfrac{m+1}{n}\right)$ $\left(0<\dfrac{m+1}{n}<p\right)$. **3854.** $\dfrac{(b-a)^{m+n+1}}{(a+c)^{n+1}(b+c)^{m+1}}\mathrm{B}(m+1,\,n+1)$ $(m>-1,\,n>-1)$.

3855. $\dfrac{1}{m}\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{m},\,1-\dfrac{1}{n}\right)$ $(n<0$ və ya $n>1)$. **3856.** $\dfrac{1}{2}\mathrm{B}\left(\dfrac{m+1}{2},\,\dfrac{n+1}{2}\right)$ $(m>-1,\,n>-1)$. **3857.** $\dfrac{\pi}{2\cos\dfrac{n\pi}{2}}$ $(|n|<1)$. **3858.** $\dfrac{2^{n-1}}{(1-k^2)^{\frac{n}{2}}}\mathrm{B}\left(\dfrac{n}{2},\,\dfrac{n}{2}\right)$ $(n>0)$. **3859.** $\dfrac{1}{n}\Gamma\left(\dfrac{1}{n}\right)$ $(n>0)$. **3860.** $\dfrac{1}{|n|}\Gamma\left(\dfrac{m+1}{n}\right)$ $\left(\dfrac{m+1}{n}>0\right)$.

3861. $\Gamma(p+1)$ $(p>-1)$. **3862.** $\dfrac{d}{dp}\left[\dfrac{\Gamma(p+1)}{a^{p+1}}\right]$ $(p>-1)$. **3863.** $-\dfrac{\pi^2\cos p\pi}{\sin^2 p\pi}$ $(0<p<1)$. **3864.** $\pi^3\cdot\dfrac{1+\cos^2 p\pi}{\sin^3 p\pi}$ $(0<p<1)$. **3864.1.** $\dfrac{2}{27}\pi^2$.

3864.2. $\dfrac{3\pi^3}{32\sqrt{2}}$. **3865.** $\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{p\pi}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{q\pi}{2}}\right|$ $(0<p<1,\,0<q<1)$. **3866.** $\pi\operatorname{ctg}\pi p$.

3867. $\dfrac{\pi}{2\beta}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha\pi}{2\beta}$. **3868.** $\ln\sqrt{2\pi}$. **3869.** $\ln\sqrt{2\pi}+a(\ln a-1)$.

3870. $\dfrac{1}{\pi}\left(1+\ln\dfrac{\pi}{2}\right)$. **3871.** $\dfrac{1}{4n}$. **3876.** $\dfrac{\pi a^{m-1}}{2\Gamma(m)\cos\dfrac{m\pi}{2}}$ $(a>0)$.

3877. $\dfrac{\pi a^{m-1}}{2\Gamma(m)\sin\dfrac{m\pi}{2}}$ $(a>0)$. **3879.** $a\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2},\,\dfrac{1}{2n}\right)$. **3880.** $\dfrac{2a^2}{n}\dfrac{\Gamma^2\left(\dfrac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{2}{n}\right)}$.

3881. $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda$. **3882.** $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{1-\cos\lambda}{\lambda}\sin\lambda x\,d\lambda$.

3883. $f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda(x-a)-\sin\lambda(x-b)}{\lambda}d\lambda$. **3884.** $f(x)=$ $=\frac{2h}{\pi a}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1-\cos a\lambda}{\lambda^2}\cos\lambda x\,d\lambda$. **3885.** $\frac{1}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\int\limits_0^{+\infty}e^{-a\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda$.

3886. $\frac{x}{a^2+x^2}=\int\limits_0^{+\infty}e^{-a\lambda}\sin\lambda x\,d\lambda$. **3887.** $f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda\pi}{1-\lambda^2}\sin\lambda x\,d\lambda$.

3888. $f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos\frac{\lambda\pi}{2}}{1-\lambda^2}\cos\lambda x\,d\lambda$. **3889.** $f(t)=\frac{2A\omega}{\pi}\times$ $\times\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\frac{2\pi n\lambda}{\omega}}{\lambda^2-\omega^2}\sin\lambda t\,d\lambda$. **3890.** $f(x)=\frac{2\alpha}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda x}{\lambda^2+\alpha^2}d\lambda$.

3891. $f(x)=\frac{\alpha}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left[\frac{1}{(\lambda-\beta)^2+\alpha^2}+\frac{1}{(\lambda+\beta)^2+\alpha^2}\right]\cos\lambda x\,d\lambda$.

3892. $f(x)=\frac{4\alpha\beta}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\lambda\sin\lambda x}{[(\lambda-\beta)^2+\alpha^2][(\lambda+\beta)^2+\alpha^2]}d\lambda$.

3893. $e^{-x^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\frac{\lambda^2}{4}}\cos\lambda x\,d\lambda$. **3894.** $xe^{-x^2}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\lambda e^{-\frac{\lambda^2}{4}}\sin\lambda x\,d\lambda$.

3895. *a)* $e^{-x}=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda x}{1+\lambda^2}d\lambda$ $(0\le x<+\infty)$; *b)* $e^{-x}=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\lambda\sin\lambda x}{1+\lambda^2}d\lambda$ $(0<x<+\infty)$. **3896.** $F(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}$. **3897.** $F(x)=-i\sqrt{\frac{8}{\pi}}\frac{\alpha x}{(x^2+\alpha^2)^2}$.

3898. $F(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$. **3899.** $F(x)=e^{-\frac{x^2+\alpha^2}{2}}\operatorname{ch}\alpha x$. **3900.** *a)* $\varphi(y)=e^{-y}$ $(y\ge 0)$; *b)* $\psi(y)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{y}{1+y^2}$ $(y\ge 0)$.

VIII Bölmə

3901. $\frac{1}{4}$. **3902.** $\underline{S}=\frac{40}{3}-\frac{11}{n}+\frac{5}{3n^2}$; $\overline{S}=\frac{40}{3}+\frac{11}{n}+\frac{5}{3n^2}$; $13\frac{1}{3}$. **3903.** 9,88. Dəqiq qiyməti: $2\pi(7-\sqrt{24})\approx 13,20$. **3904.** 0,402. Dəqiq qiyməti: 0,4. **3905.** $\delta<0,00022$. **3906.** 1. **3907.** $\frac{1}{40}$. **3908.** $\frac{\pi a^3}{3}$. **3910.** $I=F(A,B)-F(A,b)-F(a,B)+F(a,b)$. **3912.** *a*) Mənfi; *b*) mənfi; *c*) müsbət. **3913.** $\frac{1}{4}$. **3914.** $1,96<I<2$. **3915.** $a^2+b^2+\frac{R^2}{2}$.

3916. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x f(x,y)\,dy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^1 f(x,y)\,dx$. **3917.** $\int\limits_{-2}^{2} dx\int\limits_{\frac{|x|}{2}}^{1} f(x,y)\,dy=$

$=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-2y}^{2y} f(x,y)\,dx$. **3918.** $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x+1} f(x,y)\,dy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 f(x,y)\,dx+$

$+\int\limits_1^2 dy\int\limits_{y-1}^{1} f(x,y)\,dx$. **3919.** $\int\limits_{-1}^{1} dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy=\int\limits_{-1}^{1} dy\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$.

3920. $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx\int\limits_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} f(x,y)\,dy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)\,dx$.

3921. $\int\limits_{-1}^{1} dx\int\limits_{x^2}^{1} f(x,y)\,dy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$. **3922.** $\int\limits_{-2}^{-1} dx\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy+$

$+\int\limits_{-1}^{1} dx\left\{\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy+\int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\right\}+\int\limits_1^2 dx\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy$.

3924. $\int\limits_0^2 dy\int\limits_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)\,dx+\int\limits_2^4 dy\int\limits_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)\,dx$. **3925.** $\int\limits_{-1}^{0} dy\int\limits_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}} f(x,y)dx+$

$+\int\limits_0^8 dy\int\limits_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y} f(x,y)\,dx$. **3926.** $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\,dx$. **3927.** $\int\limits_{-1}^{0} dy\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx+$

$+\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\,dx$. **3928.** $\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$.

3929. $\int_0^a dy \left\{ \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx + \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)\,dx \right\} + \int_a^{2a} dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)\,dx$.

3930. $\int_0^1 dy \int_{e^y}^{e} f(x,y)\,dx$. **3931.** $\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)\,dx - \int_{-1}^{0} dy \int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} f(x,y)\,dx$.

3932. $\frac{p^5}{21}$. **3933.** $\left(2\sqrt{2}-\frac{8}{3}\right)a\sqrt{a}$. **3934.** $\frac{a^4}{2}$. **3935.** $14a^4$. **3936.** $\frac{35\pi a^4}{12}$

3937. $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr$. **3938.** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} r f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr$.

3939. $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{|a|}^{|b|} r f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr$.

3940. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{cosec}\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)} r f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr$.

3941. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} r f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{a}{\sin\varphi}} r f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr +$

$+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\varphi \int_0^{\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} r f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr$. **3942.** İnteqrasiya oblastı mərkəzi koordinat başlanğıcında olan iki konsentrik çevrə və koordinat başlanğıcından çıxan iki şüa ilə məhdudlandığı halda.

3943. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} r f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} r f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr =$

$$=\int_0^1 r\,dr\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,d\varphi+\int_1^{\sqrt{2}} r\,dr\int_{\arccos\frac{1}{r}}^{\arcsin\frac{1}{r}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,d\varphi\,.$$

3944. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{cosec}\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}^{1} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} r\,dr\int_{\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi\,.$

3945. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi\int_0^{\frac{2}{\cos\varphi}} rf(r)\,dr=\frac{\pi}{12}\int_0^{2\sqrt{2}} rf(r)\,dr+\int_{2\sqrt{2}}^{4}\left(\frac{\pi}{3}-\arccos\frac{2}{r}\right) rf(r)\,dr\,.$

3946. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\int_{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}}^{\frac{1}{\cos\varphi}} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr=\int_0^1 r\,dr\int_0^{\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi+$

$+\int_1^{\sqrt{2}} r\,dr\int_{\arccos\frac{1}{r}}^{\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi\,.$

3947. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr=\int_0^a r\,dr\int_{-\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}}^{\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi\,.$

3948. $\int_0^a dr\int_{-\arccos\frac{r}{a}}^{\arccos\frac{r}{a}} f(\varphi, r)\,d\varphi\,.$ **3949.** $\int_0^a dr\int_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}} f(\varphi, r)\,d\varphi\,.$

3950. $\int_0^a dr\int_r^a f(\varphi, r)\,d\varphi$. **3951.** $2\pi\int_0^1 r f(r)\,dr$. **3952.** $\pi\int_0^1 r f(r)\,dr+$
$+\int_1^{\sqrt{2}}\left(\pi-4\arccos\frac{1}{r}\right) r f(r)\,dr$. **3953.** $\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{tg}\varphi)\cos^2\varphi\,d\varphi$. **3954.** $\frac{2\pi a^3}{3}$.

3955. $-6\pi^2$. **3956.** $\frac{6}{5}\cdot\frac{b^2+b(b+h)+(b+h)^2+(2b+h)\sqrt{b(b+h)}}{\sqrt{a(a+h)}\,(\sqrt{a}+\sqrt{a+h})\,(\sqrt{b}+\sqrt{b+h})}$; $\frac{3}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}}$.

3957. $\int\limits_a^b u\,du\int\limits_\alpha^\beta f(u,uv)\,dv$. **3958.** $\frac{1}{2}\int\limits_1^2 du\int\limits_{-u}^{4-u} f\left(\frac{u+v}{2},\ \frac{u-v}{2}\right)dv$.

3959. $4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 v\cos^3 v\,dv\int\limits_0^a u f(u\cos^4 v,\ u\sin^4 v)\,du$. **3961.** $u=xy$, $v=x-y$. **3962.** $\int\limits_{-1}^1 f(u)\,du$. **3963.** $2\int\limits_{-1}^1\sqrt{1-u^2}\,f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)\,du$.

3964. $\ln 2\int\limits_1^2 f(u)\,du$. **3965.** $\frac{\pi}{2}$. **3966.** $\frac{4}{3}$. **3967.** $\frac{2}{3}\pi ab$. **3968.** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

3969. $543\frac{11}{15}$. **3970.** $1\frac{37}{128}-\ln 2$. **3971.** 2π. **3972.** $\frac{9}{16}\pi$. **3973.** $\frac{5}{3}+\frac{\pi}{4}$.

3974. $\frac{4}{3}\pi+8\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. **3975.** 6. **3976.** $\frac{4}{3}(4-3\sqrt{2}+4\sqrt{3})$. **3978.** $f(0,0)$.

3979. $t>0$ olduqda $\frac{2}{t}F(t)$. **3980.** $2\iint\limits_{(x-t)^2+(y-t)^2\le 1}\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$.

3981. $F'(t)=\int\limits_0^{2\pi} t f(t\cos\varphi,\ t\sin\varphi)\,d\varphi$. **3984.** $\left(\frac{15}{8}-2\ln 2\right)a^2$.

3985. $\frac{2}{3}(p+q)\sqrt{pq}$. **3986.** πa^2. **3987.** $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}a^2$.

3988. $\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{2}}{3}\ln(1+\sqrt{2})$. **3989.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **3990.** $a^2\left(\frac{\sqrt{7}}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{14}}{8}\right)$.

3991. $\frac{\pi ab}{4}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$. **3992.** $\frac{ab}{3}\left[\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\left(\frac{a^4}{h^4}+\frac{b^4}{k^4}\right)+\frac{a^2b^2}{h^2k^2}\right]$.

3993. $\frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$. **3994.** $\frac{a^4bk\,(ak+2bh)}{6h^2(ak+bh)^2}$. **3994.1.** $\frac{1}{1260}\frac{(ab)^5}{c^8}$.

3995. $\frac{ab}{70}$. **3996.** $\frac{(\beta-\alpha)(b^2-a^2)}{2(\alpha+1)(\beta+1)}$. **3997.** $\frac{a^2}{2}\ln 2$. **3998.** $\frac{4}{3}(q-p)(s-r)$.

3998.1. $\frac{1}{15}\cdot(b^5-a^5)(c^{-3}-d^{-3})$. **3998.2.** $\frac{q-p}{(p+1)(q+1)}\left(b^{\frac{q+1}{q-p}}-a^{\frac{q+1}{q-p}}\right)\times$ $\times\left(c^{\frac{p+1}{q-1}}-d^{\frac{p+1}{q-1}}\right)$. **3999.** $\frac{65}{108}ab$. **3999.1.** $\frac{189}{16}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\frac{12}{25}\right)ab$.

4000. $\frac{c^2}{6}(\sqrt{10}-2)\arcsin\frac{1}{3}$. **4001.** $\frac{\pi}{|\delta|}$. **4002.** $\frac{c^2}{4}[(v_2-v_1)(\operatorname{sh}2u_2-\operatorname{sh}2u_1)-$ $-(u_2-u_1)(\sin 2v_2-\sin 2v_1)]$. **4003.** $\frac{2}{3}\pi a^2$. **4004.** $\frac{6\pi}{7\sqrt{7}}$. **4007.** $\frac{5}{6}$.

4008. $\frac{\pi R^2 a}{4}-\frac{2}{3}R^3$. **4009.** $\frac{88}{105}$. **4010.** π. **4011.** π. **4012.** $\frac{17}{12}-2\ln 2$.

4013. $\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)a^3$. **4014.** $\frac{\pi}{8}$. **4015.** $\frac{45}{32}\pi$. **4016.** $\frac{16}{9}a^3$. **4017.** $\frac{\pi a^3}{8}$.

4018. $\pi(1-e^{-R^2})$. **4019.** $2a^2c\cdot\frac{(\beta-\alpha)(\pi-2)}{\pi^2}$. **4020.** $\frac{\pi}{8}$. **4021.** $\frac{1}{3}\pi abc(2-\sqrt{2})$.

4022. $\frac{4}{3}\pi abc(2\sqrt{2}-1)$. **4023.** $\frac{3\pi abc}{8}$. **4024.** $\frac{2}{3}\pi abc$. **4025.** $\frac{abc}{3}$.

4026. $\frac{2}{9}abc(3\pi+20-16\sqrt{2})$. **4027.** $\frac{\pi(b^3-a^3)}{12}$. **4028.** $\frac{9}{2}a^4$. **4029.** $\frac{3}{4}$.

4030. $\frac{a^2c}{\pi}\ln\frac{\beta}{\alpha}$. **4031.** $\frac{8}{35}$. **4032.** $\frac{75}{256}\pi abc$. **4033.** $\frac{\pi^4a^2c}{128}$.

4033.1. $(n-m)(e^{-1}-e^{-2})a^2$. **4034.** $\frac{abc}{3n^2}\cdot\frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}$. **4035.** $\frac{abc}{2m+n}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{n}\right)}$.

4036. $\frac{2}{3}\pi a^2(2\sqrt{2}-1)$. **4037.** $16a^2$. **4038.** $8a^2\arcsin\frac{b}{a}$. **4039.** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

4040. $8a^2$. **4041.** $\pi\sqrt{2}$. **4042.** $\frac{\pi a^2}{2}$. **4043.** $-\frac{2\pi}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(1+\frac{7}{4}\ln 3\right)+$ $+\frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$. **4044.** $\frac{a^2}{9}(20-3\pi)$. **4045.** $2a^2$. **4045.1.** $\frac{\pi}{6}[3\sqrt{10}+\ln(3+\sqrt{10})]$.

4045.2. $\frac{1}{3}abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^{-1}\left[\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{c^3}\right]$. **4045.3.** $\frac{4}{3}ab(2\sqrt{2}-1)\times$ $\times\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{b}}$. **4045.4.** $\frac{\pi}{2}\ln(e+e^{-1})$. **4046.** $S=4\pi(3+2\sqrt{3})a^2$; $V=\frac{8\pi}{\sqrt{3}}a^3$.

4047. $(\varphi_2-\varphi_1)(\sin\psi_2-\sin\psi_1)R^2$, burada φ_1, φ_2 - meridianların

coğrafi uzunluqları, ψ_1, ψ_2 - paralellərin coğrafi enlikləri, R - sferanın radiusudur. **4048.** $\pi\left\{a\sqrt{a^2+h^2}+h^2\ln\frac{a+\sqrt{a^2+h^2}}{h}\right\}$.

4049. $S=a(\varphi_2-\varphi_1)[b(\psi_2-\psi_1)+a(\sin\psi_2-\sin\psi_1)]$; $4\pi^2 ab$.

4050. $\omega=\arcsin\frac{bc}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}$; $\omega\approx\frac{bc}{a^2}$. **4051.** $\frac{\rho_0 a^2}{3}[2+\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})]$.

4052. $x_0=-\frac{a}{2}$; $y_0=\frac{8}{5}a$. **4053.** $x_0=y_0=\frac{a}{5}$. **4054.** $x_0=y_0=\frac{256}{315\pi}a$.

4055. $x_0=\frac{a^2b}{14c^2}$; $y_0=\frac{ab^2}{14c^2}$. **4056.** $x_0=y_0=\frac{\pi a}{8}$. **4057.** $x_0=\frac{5}{6}a$; $y_0=\frac{16}{9\pi}a$. **4058.** $x_0=\pi a$; $y_0=\frac{5}{6}a$. **4059.** $x_0=-\frac{a}{5}$; $y_0=0$.

4060. $y_0=\frac{1}{8}\sqrt{30px_0}$ parabolası. **4061.** $I_x=\frac{bh^3}{12}$; $I_y=\frac{h|b_1^3-b_2^3|}{12}$ $(b=|b_1-b_2|)$. **4062.** $I_x=I_y=\frac{a^4}{16}(16-5\pi)$. **4063.** $I_x=\frac{21\pi a^4}{32}$; $I_y=\frac{49\pi a^4}{32}$.

4064. $I_x=I_y=\frac{3\pi a^4}{4\sqrt{2}}$. **4065.** $I_x=I_y=\frac{9}{8}a^4$. **4066.** $I_0=\frac{\pi a^4}{8}$. **4066.1.** $\frac{a^4}{12}$.

4069. $I_\alpha=\frac{a^4}{32\sqrt{3}}$. **4070.** $X=ah^2$; $Y=0$, burada X, Y - təzyiq qüvvəsinin Ox və Oy koordinat oxlarına proyeksiyalarıdır.

4071. $P_1=\pi a^2\delta\left(h-\frac{2}{3}a\right)$; $P_2=\pi a^2\delta\left(h+\frac{2}{3}a\right)$. **4072.** Təzyiq qüvvəsinin Ox və Oz oxlarına proyeksiyaları silindrin oxundan keçən şaquli müstəvidə yerləşir (onlardan Ox - üfüqi, Oz - isə şaquliddir) və uyğun olaraq $X_1=-\pi a^2\delta\left(h-\frac{b}{2}\cos\alpha\right)\sin\alpha$, $Z_1=-\pi a^2\delta\left(h-\frac{b}{2}\cos\alpha\right)\cos\alpha$;

$X_2=\pi a^2\delta\left(h+\frac{b}{2}\cos\alpha\right)\sin\alpha$, $Z_2=\pi a^2\delta\left(h+\frac{b}{2}\cos\alpha\right)\cos\alpha$ kimidir.

4073. Cazibə qüvvəsinin Ox, Oy və Oz oxlarına proyeksiyaları uyğun olaraq $X=0$, $Y=0$, $Z=-\frac{2kmM}{a^2h}\{|b|-|b-h|+\sqrt{a^2+(b-h)^2}-\sqrt{a^2+b^2}\}$

kimidir, burada k - cazibə sabitidir **4074.** $p_{or}=\frac{1}{2}p_0$.

4075. $A=\frac{kp}{12}\left\{2ab\sqrt{a^2+b^2}++a^3\ln\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a}+b^3\ln\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}\right\}$.

4076. $\frac{1}{364}$. **4077.** $\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}$. **4078.** $\frac{1}{48}$. **4079.** $\frac{4}{5}\pi abc$. **4080.** $\frac{\pi}{6}$.

4081. $\int_0^1 dx\left\{\int_0^x dz\int_0^{1-x} f(x,y,z)\,dy+\int_x^1 dz\int_{z-x}^{1-x} f(x,y,z)\,dy\right\}=$

$$=\int_0^1 dz\left\{\int_0^z dy\int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)\,dx+\int_x^1 dy\int_0^{1-y} f(x,y,z)\,dx\right\}.$$

4082. $\int_{-1}^1 dx\int_{|x|}^1 dz\int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x,y,z)\,dy=\int_0^1 dz\int_{-z}^z dy\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z)\,dx$.

4083. $\int_0^1 dx\left\{\int_0^{x^2} dz\int_0^1 f(x,y,z)\,dy+\int_{x^2}^{x^2+1} dz\int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)\,dy\right\}=$

$=\int_0^1 dz\left\{\int_0^{\sqrt{z}} dy\int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)\,dx+\int_{\sqrt{z}}^1 dy\int_0^1 f(x,y,z)\,dx\right\}+$

$+\int_1^2 dz\int_{\sqrt{z-1}}^1 dy\int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)\,dx$. **4084.** $\frac{1}{2}\int_0^x (x-\zeta)^2 f(\zeta)\,d\zeta$.

4085. $\frac{1}{2}\int_0^1 (2-z^2)\,f(z)\,dz+\frac{1}{2}\int_1^2 (2-z)^2 f(z)\,dz$. **4086.** $F(A,B,C)-F(A,B,c)-$
$-F(A,b,C)-F(a,B,C)+F(A,b,c)+F(a,B,c)+F(a,b,C)-F(a,b,c)$.

4087. $\frac{\pi}{10}$. **4088.** $\frac{\pi}{15}(2\sqrt{2}-1)$. **4089.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\int_0^{\operatorname{arctg}\frac{1}{\cos\varphi}}\cos\psi\,d\psi\int_{\frac{\sin\psi}{\cos^2\psi}}^{\frac{1}{\cos\varphi\cos\psi}} r^2 f(r)\,dr$.

4090. $\frac{\pi^2 abc}{4}$. **4091.** $\frac{16\pi}{3}$. **4092.** $\frac{2}{27}\left(\frac{1}{\alpha^3}-\frac{1}{\beta^3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)h^4\sqrt{h}$.

4093. $\frac{1}{32}\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)(b^8-a^8)\left[(\beta^2-\alpha^2)\left(1+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}\right)+4\ln\frac{\beta}{\alpha}\right]$. **4094.** $\frac{6}{5}$.

4095. $3(e-2)$. **4096.** $u=\frac{4\pi}{3}\frac{R^3}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}+\theta R}$, $|\theta|<1$.

4098. a) $F'(t)=4\pi t^2 f(t^2)$; b) $F'(t)=\frac{3}{t}\left[F(t)+\iiint\limits_V xyz\,f'(xyz)\,dx\,dy\,dz\right]$.

burada $t>0$ və $V=\{0\le x\le t,\ 0\le y\le t,\ 0\le z\le t\}$. **4099.** m, n və p ədədlərindən biri tək olduqda 0; m, n və p ədədləri cüt olduqda $\frac{4\pi}{m+n+p+3}\cdot\frac{(m-1)!!\,(n-1)!!\,(p-1)!!}{(m+n+p+1)!!}$.

4100. $\frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1)\,\Gamma(r+1)\,\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}$. **4101.** $\frac{3}{35}$. **4102.** $\frac{7}{24}$. **4103.** $\frac{2}{3}a^3(3\pi-4)$.

4104. $\frac{\pi a^3}{6}$. **4105.** $\frac{a^3}{24}(3\pi-4)$. **4106.** $\frac{32}{3}\pi$. **4107.** πa^3. **4108.** $\frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}$.

4109. $\frac{1}{2}$. **4110.** $\frac{\pi}{3}(2-\sqrt{2})(b^3-a^3)$. **4111.** $\frac{\pi}{3}\cdot\frac{a^2bc}{h}$. **4112.** $\frac{\pi^2}{4}abc$.

4112.1. $\frac{\pi^2 abc}{4\sqrt{2}}$. **4113.** $\frac{5\pi abc}{12}(3-\sqrt{5})$. **4114.** $\frac{8\pi}{5}abc$. **4115.** $\frac{abc}{3}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)$.

4116. $\frac{abc}{60}\left(\frac{a}{h}+\frac{b}{k}\right)\cdot\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$. **4116.1.** $\frac{abc}{60}\cdot\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^4}{\frac{a}{h}+\frac{b}{k}}$. **4117.** $\frac{abc}{554\,400}$.

4118. $\frac{abc}{3}$. **4118.1.** $\frac{abc}{90}$. **4118.2.** $\frac{abc}{1680}$. **4118.3.** $\frac{4\pi}{35}abc$. **4119.** $\frac{9}{4}a^2$.

4120. $\frac{1}{3}(b^3-a^3)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)$. **4121.** $\frac{4\pi}{3}a^3$. **4122.** $\frac{\pi abc^2}{3h}(1-e^{-1})$.

4123. $\frac{3}{2}abc$. **4124.** $5abc\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{3}\right)$. **4125.** 37 : 27. **4126.** $V=\frac{5\pi a^3}{6}$;

$S=\frac{\pi a^2}{6}(6\sqrt{2}+5\sqrt{5}-1)$. **4127.** $\frac{8\,h_1\,h_2\,h_3}{|\Delta|}$. **4128.** $\frac{4\pi h^3}{3|\Delta|}$.

4129. $\frac{\pi^2}{3n\sin\frac{\pi}{n}}\cdot\frac{abc^2}{h}$. **4130.** $\frac{abc}{mn+mp+np}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)}$. **4131.** $\frac{3}{2}$.

4132. $4\pi\rho_0\left(\frac{1}{k}+\frac{2}{k^2}+\frac{2}{k^3}\right)e^{-k}$. **4133.** $\left(0,0,\frac{3}{4}c\right)$. **4134.** $x_0=y_0=\frac{2}{5}a$; $z_0=\frac{7}{30}a^2$. **4135.** $x_0=\frac{7}{18}p$; $y_0=0$; $z_0=\frac{7}{176}p$. **4136.** $x_0=\frac{3}{8}a$; $y_0=\frac{3}{8}b$; $z_0=\frac{3}{8}c$. **4137.** $x_0=y_0=0$; $z_0=\frac{3a}{8}$. **4138.** $x_0=y_0=1$; $z_0=\frac{5}{3}$. **4139.** $x_0=\frac{9\pi}{448}a$; $y_0=\frac{9\pi}{448}b$; $z_0=\frac{9\pi}{448}c$. **4140.** $x_0=y_0=0$; $z_0=\frac{7}{20}$. **4141.** $\frac{x_0}{a}=\frac{y_0}{b}=\frac{z_0}{c}=\frac{3}{4}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)}$. **4142.** $x_0=\alpha$; $y_0=\beta$; $z_0=\gamma$. **4143.** $I_{xy}=\frac{abc^3}{60}$; $I_{yz}=\frac{a^3bc}{60}$; $I_{zx}=\frac{ab^3c}{60}$. **4144.** $I_{xy}=\frac{4}{15}\pi abc^3$; $I_{yz}=\frac{4}{15}\pi a^3bc$; $I_{zx}=\frac{4}{15}\pi ab^3c$. **4145.** $I_{xy}=\frac{\pi abc^3}{5}$; $I_{yz}=\frac{\pi a^3bc}{20}$; $I_{xz}=\frac{\pi ab^3c}{20}$. **4146.** $I_{xy}=\frac{2abc^3}{225}(15\pi-16)$; $I_{xz}=\frac{2ab^3c}{1575}(105\pi-272)$; $I_{yz}=\frac{2a^3bc}{1575}(105\pi-92)$. **4147.** $I_{xy}=\frac{7}{2}\pi abc^3$; $I_{xz}=\frac{4}{3}\pi ab^3c$; $I_{yz}=\frac{4}{3}\pi a^3bc$.

4147.1. $I_{yz}=\frac{15\pi^2}{256\sqrt{2}}a^3bc$; $I_{zx}=\frac{15\pi^2}{256\sqrt{2}}ab^3c$; $I_{xy}=\frac{\pi^2}{128\sqrt{2}}abc^3$.

4147.2. $I_{yz}=\frac{1}{5n^2}\cdot\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{n}\right)}\cdot a^3bc$; $I_{zx}=\frac{1}{5n^2}\cdot\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{n}\right)}\cdot ab^3c$; $I_{xy}=\frac{1}{5n^2}\cdot\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{n}\right)}\cdot abc^3$. **4148.** $I_z=\frac{14}{15}$. **4149.** $I_z=\frac{4\pi}{15}(4\sqrt{2}-5)$.

4149.1. $\frac{\pi}{5}a^5$. **4150.** $\frac{4}{9}MR^2$. **4153.** $I=\frac{M}{3}\left(a^2+\frac{2}{3}h^2\right)$, burada

$M=2\pi\rho_0 a^2 h$ - silindrin kütləsidir. **4154.** $I_0=\frac{\pi^2 a^5 \rho_0}{8}$. **4155.** $r\le R$ olduqda $u=2\pi\rho_0\left(R^2-\frac{r^2}{3}\right)$; $r>R$ olduqda $u=\frac{4\pi R^3\rho_0}{3r}$, burada $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. **4156.** $u=4\pi\int_{R_1}^{R_2} f(\rho)\min\left(\frac{\rho^2}{r},\rho\right)d\rho$, burada $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

4157. $u=\pi\rho_0\left\{(h-z)\sqrt{a^2+(h-z)^2}+z\sqrt{a^2+z^2}-[(h-z)|h-z|+z|z|]+ +a^2\ln\left|\frac{h-z+\sqrt{a^2+(h-z)^2}}{\sqrt{a^2+z^2}-z}\right|\right\}$. **4158.** $X=0$; $Y=0$; $|a|\ge R$ olduqda $Z=-\frac{kMm}{a|a|}$; $|a|<R$ olduqda $Z=-\frac{kMm}{R^3}a$. **4159.** $X=0$; $Y=0$; $Z=-2\pi\rho_0 k\left\{\sqrt{a^2+z^2}-\sqrt{a^2+(h-z)^2}-(|z|-|h-z|)\right\}$. **4160.** $X=0$; $Y=0$; $Z=-\pi k\rho_0 R\sin^2\alpha$. **4161.** $p>1$ olduqda yığılır. **4162.** $p>1$ və $q>1$ olduqda yığılır. **4163.** $p>\frac{1}{2}$ olduqda yığılır. **4164.** $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<1$ olduqda yığılır. **4165.** Dağılır. **4169.** $\frac{1}{(p-q)(q-1)}$ $(p>q>1)$. **4170.** $\frac{1}{p-1}$ $(p>1)$. **4171.** 2π. **4172.** $\frac{\pi}{p-1}$ $(p>1)$. **4173.** $\pi\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$. **4174.** $\frac{1}{2}$.

4175. π. **4176.** $\frac{\pi}{2}$. **4177.** $\frac{\pi}{2}$. **4178.** $\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}e^{\frac{\Delta}{\delta}}$, burada $\delta=\begin{vmatrix} a & b \\ b & c\end{vmatrix}$ və $\Delta=\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f\end{vmatrix}$. **4179.** $\frac{\pi}{e}ab$. **4180.** $-\frac{\pi\varepsilon a^2 b^2}{2(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}$. **4181.** Yığılır. **4182.** $p<1$ olduqda yığılır. **4183.** $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>1$ olduqda yığılır. **4184.** $p<1$ olduqda yığılır. **4185.** $p<1$ olduqda yığılır. **4187.** $\frac{\pi}{2}$. **4188.** πa. **4189.** $-\frac{\pi^2}{2}\ln 2$.

4190. 2. **4191.** $p>\frac{3}{2}$ olduqda yığılır. **4192.** $p<\frac{3}{2}$ olduqda yığılır.

4193. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<1$ olduqda yığılır. **4194.** $p<1$ olduqda yığılır. **4195.** $p<1$ olduqda yığılır. **4196.** $(1-p)^{-1}(1-q)^{-1}(1-r)^{-1}$ $(p<1,\ q<1,\ r<1)$. **4197.** $\frac{4\pi}{3}$. **4198.** $2\pi\,\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},1-p\right)$ $(p<1)$. **4199.** $\pi^{\frac{3}{2}}$.

4200. $\sqrt{\frac{\pi^3}{\Delta}}$, burada $\Delta=|a_{ij}|$. **4204.** a) $\frac{n}{3}$; b) $\frac{n(3n+1)}{12}$. **4205.** $\frac{a^n}{n!}$.

4206. $\frac{1}{2^n n!}$. **4207.** $\frac{2}{(n-1)!(2n+1)}$. **4208.** $\frac{2^n h_1 h_2\dots h_n}{|\Delta|}$. **4209.** $\frac{a_1 a_2\dots a_n}{n!}$.

4210. $\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}a_1 a_2\dots a_n$. **4211.** $\frac{\pi^{\frac{n}{2}}a^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$. **4212.** $\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}a^{n-1}h^3}{12\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$.

4213. $\frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$. **4218.** $R^n\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^1 f(\sqrt{u})\,u^{\frac{n}{2}-1}\,du$. **4219.** $u=\frac{16}{15}\pi^2\rho_0^2 R^5$.

4220. $\sqrt{\frac{\pi^n}{\delta}}\,e^{-\frac{\Delta}{\delta}}$, burada $\delta=|a_{ij}|$ və $\Delta=\begin{vmatrix} a_{ij} & b_j \\ b_j & c\end{vmatrix}$ - haşiyələnmiş determinantdır. **4221.** $1+\sqrt{2}$. **4222.** $\frac{256}{15}a^3$. **4223.** $2\pi^2a^3(1+2\pi^2)$.

4224. $\frac{a^3}{6}(\mathrm{ch}^{\frac{3}{2}}2t_0-1)$. **4225.** $4a^{\frac{7}{3}}$. **4226.** $2(e^a-1)+\frac{\pi}{4}ae^a$.

4227. $2a^2(2-\sqrt{2})$. **4228.** $\frac{2ka^2\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}$. **4229.** $2a^2$. **4230.** $\frac{\pi}{a}$.

4231. 5. **4232.** $\sqrt{3}$. **4233.** $|x_0|+|z_0|$, burada $|x_0|<a$. **4234.** $\frac{3}{4\sqrt{2}}\times$ $\times\left(\sqrt[3]{\frac{3z_0^4}{a}}+2\sqrt[3]{\frac{az_0^2}{3}}\right)$. **4235.** $\left(1+\frac{2z_0}{3c}\right)\sqrt{cz_0}$. **4236.** $a\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\frac{|z|}{\sqrt{a^2-z^2}}$.

4237. $\frac{2\pi}{3}(3a^2+4\pi^2b^2)\sqrt{a^2+b^2}$. **4238.** $\frac{2}{3}\pi a^3$. **4239.** $\frac{1}{3}\left[(2+t_0^2)^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}}\right]$.

4240. $\dfrac{a^2}{256\sqrt{2}}\left[100\sqrt{38}-72-17\ln\dfrac{25+4\sqrt{38}}{17}\right]$. **4241.** $2b\left(b+a\dfrac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}\right)$, burada $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ - ellipsin ekssentrisitetidir. **4241.1.** $\dfrac{2}{3}p^2(2\sqrt{2}-1)$. **4242.** $\dfrac{a}{8}\left[(3\sqrt{3}-1)+\dfrac{3}{2}\ln\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}\right]$. **4243.** $x_0=b-a\sqrt{\dfrac{h-a}{h+a}}$; $y_0=\dfrac{h}{2}+$ $+\dfrac{ab}{2\sqrt{h^2-a^2}}$. **4244.** $x_0=y_0=\dfrac{4}{3}a$. **4244.1.** $S_x=S_y=\dfrac{3}{5}a^2$. **4244.2.** πa^3. **4244.3.** a) $\dfrac{32}{3}a^3$; b) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^3$. **4244.4.** $r_0=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. **4245.** $x_0=y_0=z_0=\dfrac{4a}{3\pi}$. **4246.** $x_0=\dfrac{2}{5}$; $y_0=-\dfrac{1}{5}$; $z_0=\dfrac{1}{2}$. **4247.** $I_x=I_y=\left(\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{h^2}{3}\right)\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}$; $I_z=a^2\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}$. **4248.** a) 0; b) $\dfrac{2}{3}$; c) 2. **4249.** a) 2; b) 2; c) 2. **4250.** $-\dfrac{14}{15}$. **4251.** $\dfrac{4}{3}$. **4252.** 0. **4253.** $-2\pi a^2$. **4254.** -2π. **4255.** 0. **4256.** 0. **4257.** $\dfrac{\pi}{4}-1$. **4258.** 8. **4259.** 12. **4260.** 4. **4261.** –2. **4262.** $\int\limits_0^{a+b}f(u)\,du$. **4263.** $-\dfrac{3}{2}$. **4264.** 9. **4265.** $\int\limits_{x_1}^{x_2}\varphi(x)\,dx+\int\limits_{y_1}^{y_2}\psi(y)\,dy$. **4266.** 62. **4267.** 1, **4268.** $\pi+1$. **4269.** $e^a\cos b-1$. **4271.** $z=\dfrac{x^3}{3}+x^2y-$ $-xy^2-\dfrac{y^3}{3}+C$. **4272.** $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{3x-y}{2y\sqrt{2}}+C$. **4273.** $z=-\dfrac{2y^2}{(x+y)^2}+$ $+\ln|x+y|+C$. **4274.** $z=e^{x+y}(x-y+1)+ye^x+C$. **4275.** $z=\dfrac{\partial^{n+m}u}{\partial x^n\,\partial y^m}+C$. **4276.** $z=\dfrac{\partial^{n+m}}{\partial x^n\,\partial y^m}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}\right)+C$. **4278.** $|I_R|\le\dfrac{8\pi}{R^2}$. **4279.** $\dfrac{1}{35}$. **4280.** $-\pi a^2$. **4281.** $2\pi\sqrt{2a^2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$. **4282.** $-\dfrac{\pi a^3}{4}$. **4283.** –4.

4284. $-53\frac{7}{12}$. **4285.** 0. **4286.** $b-a$. **4287.** $\int_{x_1}^{x_2}\varphi(x)\,dx+\int_{y_1}^{y_2}\psi(y)\,dy+\int_{z_1}^{z_2}\chi(z)\,dz$.

4288. $\int_{x_1+y_1+z_1}^{x_2+y_2+z_2} f(u)\,du$. **4289.** $\int_{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}^{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} u\,f(u)\,du$. **4290.** $u=\frac{1}{3}(x^3+y^3+$ $+z^3)-2xyz+C$. **4291.** $u=x-\frac{x}{y}+\frac{xy}{z}+C$. **4292.** $u=\ln\sqrt{(x+y)^2+z^2}+$ $+\operatorname{arctg}\frac{z}{x+y}+C$. **4293.** $A=-mg(z_2-z_1)$. **4294.** $A=-\frac{k}{2}(a^2-b^2)$.

4295. $A=k\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$, burada $r_i=\sqrt{x_i^2+y_i^2+z_i^2}$ $(i=1,\,2)$.

4296. $I=\iint\limits_S y^2\,dx\,dy$. **4297.** $-46\frac{2}{3}$. **4298.** $\frac{\pi a^4}{2}$. **4299.** $-2\pi ab$.

4300. $-\frac{1}{5}(e^{\pi}-1)$. **4301.** 0. **4302.** $I_1-I_2=2$. **4303.** $\frac{\pi m a^2}{8}$.

4304. $mS+e^{x_2}\varphi(y_2)-e^{x_1}\varphi(y_1)-m(y_2-y_1)-\frac{m}{2}(x_2-x_1)(y_2+y_1)$.

4305. $P=\frac{\partial u}{\partial x}$, $Q=kx+\frac{\partial u}{\partial y}$, burada u - iki dəfə diferensiallanan funksiya, k isə sabit kəmiyyətdir. **4306.** $\frac{\partial}{\partial x}[xF(x,y)]=\frac{\partial}{\partial y}[yF(x,y)]$.

4307. 1) $I=0$; 2) $I=2\pi$. **4308.** πab. **4309.** $\frac{3}{8}\pi ab$. **4310.** $\frac{a^2}{6}$.

4311. $\frac{3}{2}a^2$. **4312.** a^2. **4313.** $\frac{1}{3}+\frac{4\pi}{9\sqrt{3}}$. **4314.** $\frac{a^2}{2}\mathrm{B}(2m+1,\,2n+1)$.

4315. $\frac{ab}{2n}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}$. **4316.** $\frac{ab}{n}\left[1+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}\right]$. **4317.** $\frac{abc^2}{2(2n+1)}$.

4318. $\pi(n+1)(n+2)r^2$; $6\pi r^2$. **4319.** $\pi(n-1)(n-2)r^2$, $6\pi r^2$.

4320. $4a^2$. **4321.** $\operatorname{sgn}(ad-bc)$. **4322.** $I=\sum\operatorname{sgn}\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)}$, burada cəmləmə $\varphi(x, y)=0$ və $\psi(x, y)=0$ əyrilərinin C konturu daxilində yerləşən bütün kəsişmə nöqtələri üzrə götürülür. **4324.** $I=2S$, burada S - C konturu ilə məhdudlanan sahədir. **4325.** $X'_x(x_0, y_0)+Y'_y(x_0, y_0)$. **4326.** Qüvvənin koordinat oxlarına proyeksiyaları $X=0$; $Y=\dfrac{2kmM}{\pi a^2}$ kimidir, burada k - cazibə sabitidir. **4327.** $\rho=\sqrt{x^2+y^2}\le R$ olduqda $u=2\pi\aleph R\ln\dfrac{1}{R}$; $\rho>R$ olduqda $u=2\pi\aleph R\ln\dfrac{1}{\rho}$. **4328.** $0\le\rho\le 1$ olduqda $I_1=\dfrac{\pi}{m}\rho^m\cos m\varphi$, $I_2=\dfrac{\pi}{m}\rho^m\sin m\varphi$; $\rho>1$ olduqda $I_1=\dfrac{\pi}{m}\rho^{-m}\cos m\varphi$, $I_2=\dfrac{\pi}{m}\rho^{-m}\sin m\varphi$. **4329.** $A(x, y)$ nöqtəsi C konturunun daxilində yerləşdikdə $u=2\pi$; $A(x, y)$ nöqtəsi C konturu üzərində yerləşdikdə $u=\pi$; $A(x, y)$ nöqtəsi C konturundan kənarda yerləşdikdə $u=0$. **4330.** $0\le\rho<1$ olduqda $K_1=\pi\rho^m\cos m\varphi$, $K_2=\pi\rho^m\sin m\varphi$; $\rho=1$ olduqda $K_1=0$, $K_2=0$; $\rho>1$ olduqda $K_1=-\dfrac{\pi}{\rho^m}\cos m\varphi$, $K_2=-\dfrac{\pi}{\rho^m}\sin m\varphi$.

4339. $Q=\iint\limits_S\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy$; $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$. **4340.** $H_x=ki\oint\limits_C\dfrac{1}{r^3}\left[(\eta-y)\,dz-(\zeta-z)\,dy\right]$; $H_y=ki\oint\limits_C\dfrac{1}{r^3}\left[(\zeta-z)\,dx-(\xi-x)\,dz\right]$; $H_z=ki\oint\limits_C\dfrac{1}{r^3}\left[(\xi-x)\,dy-(\eta-y)\,dx\right]$. **4341.** $I_1-I_2=(4\pi-2\sqrt{3})\,a^4$. **4342.** $\dfrac{7}{2}\pi\sqrt{2}\,a^3$. **4343.** πa^3.

4344. $\dfrac{\pi}{2}(1+\sqrt{2})$. **4345.** $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-1)\ln 2$. **4346.** $\dfrac{125\sqrt{5}-1}{420}$.

4347. $\dfrac{4\pi}{3}abc\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)$. **4348.** $\pi^2\left[a\sqrt{1+a^2}+\ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\right]$.

4349. $\dfrac{\pi a^4}{2}\sin\alpha\cos^2\alpha\ \left(0\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}\right)$. **4350.** $\dfrac{64}{15}\sqrt{2}a^4$. **4352.** $\dfrac{2\pi(1+6\sqrt{3})}{15}$.

4352.1. πa^2. **4352.2.** $\dfrac{a^3}{2\sqrt{3}}$. **4353.** $\dfrac{4}{3}\pi\rho_0 a^4$. **4354.** $\dfrac{\pi\rho_0 a(3a^2+2b^2)\sqrt{a^2+b^2}}{12}$.

4355. $x_0=\dfrac{a}{2}$; $y_0=0$; $z_0=\dfrac{16}{9\pi}a$. **4356.** $x_0=y_0=\dfrac{a}{2\sqrt{2}}$; $z_0=\dfrac{a}{\pi}(\sqrt{2}+1)$.

4356.1. a) $40a^4$; b) $\pi R\left[R(R+H)^2+\frac{2}{3}H^3\right]$. **4356.2.** $\frac{\sqrt{3}}{12}$. **4357.** Cazibə qüvvəsinin koordinat oxlarına proyeksiyaları $X=0$; $Y=0$ kimidir; $Z=\pi k m p_0 \ln\frac{a}{b}$. **4358.** $u=4\pi\rho_0 \min\left(a, \frac{a^2}{r_0}\right)$, burada $r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$.

4359. $|t|\le\sqrt{3}$ olduqda $F(t)=\frac{\pi}{18}(3-t^2)^2$; $|t|>\sqrt{3}$ olduqda $F(t)=0$.

4360. $F(t)=\frac{\pi(8-5\sqrt{2})}{6}t^4$. **4361.** $t\le r-a$ olduqda $F=0$; $r-a<t<r+a$ olduqda $F=\frac{\pi t}{r}[a^2-(r-t)^2]$; $t>r+a$ $(t\ge 0)$ olduqda $F=0$.

4362. $4\pi a^3$. **4363.** $\left[\frac{f(a)-f(0)}{a}+\frac{g(b)-g(0)}{b}+\frac{h(c)-h(0)}{c}\right]abc$.

4364. 0. **4365.** $\frac{4\pi}{abc}(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$. **4366.** $\frac{8\pi}{3}(a+b+c)R^3$.

4367. $-\pi a^2\sqrt{3}$. **4368.** $\frac{h^3}{3}$. **4369.** $2S$. **4370.** 0. **4371.** $-2\pi a(a+h)$.

4372. $2\pi R r^2$. **4373.** $-\frac{9}{2}a^3$. **4374.** 0. **4376.** $3\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$.

4377. 0. **4378.** $2\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. **4379.** $\iiint\limits_V \Delta u\,dx\,dy\,dz$, $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. **4380.** 0. **4384.** $\frac{4\pi}{3}\left(a^2+\frac{b^2}{2}\right)|c|$. **4385.** $\frac{2}{9}a^3$.

4385.1. $2\pi^2a^2b$. **4387.** $3a^4$. **4388.** $\frac{12}{5}\pi a^5$. **4389.** 1. **4390.** $-\frac{\pi h^4}{2}$.
4392. a) $I=0$; b) $I=4\pi$. **4401.** a) $\operatorname{grad} u(0)=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}$, $|\operatorname{grad} u(0)|=7$, $\cos\alpha=\frac{3}{7}$, $\cos\beta=-\frac{2}{7}$, $\cos\gamma=-\frac{6}{7}$; b) $\operatorname{grad} u(A)=6\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$, $|\operatorname{grad} u(A)|=3\sqrt{5}$, $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\gamma=0$; c) $\operatorname{grad} u(B)=7\boldsymbol{i}$, $|\operatorname{grad} u(B)|=7$, $\cos\alpha=1$, $\cos\beta=0$, $\cos\gamma=0$; $M(-2, 1, 1)$ nöqtəsində $\operatorname{grad} u=0$. **4401.1.** $\operatorname{grad} u(M)=12\boldsymbol{i}-9\boldsymbol{j}-20\boldsymbol{k}$, $|\operatorname{grad} u(M)|=25$,

$\cos\alpha=\frac{12}{25}$, $\cos\beta=-\frac{9}{25}$, $\cos\gamma=-\frac{4}{5}$; $\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{3}{\sqrt{2}}$. **4402.** a) $xy=z^2$; b) $x=y=0$, $x=y=z$; c) $x=y=z$. **4403.** $r=1$. **4404.** $\frac{4(x^2+y^2)}{u^2-256}+\frac{4z^2}{u^2}=1$ $(u\geq 16)$; $\frac{x^2+y^2}{960}+\frac{z^2}{1024}=1$; $\max u=20$. **4405.** $\cos\varphi=-\frac{8}{9}$. **4406.** Səviyyə səthləri - konusların oyuqları; eyni modullu qradiyent səthlər - torlardır; $\inf u=0$, $\sup u=1$; $\inf|\mathrm{grad}\, u|=0$, $\sup|\mathrm{grad}\, u|=\frac{1}{2}$.

4407. $\frac{|\Delta c|}{|\mathrm{grad}\, u(x_0, y_0, z_0)|}$. **4409.** a) $\frac{\boldsymbol{r}}{r}$; b) $2\boldsymbol{r}$; c) $-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$. **4410.** $f'(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}$.

4411. $\boldsymbol{c}$. **4412.** $2\boldsymbol{r}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c})-2\boldsymbol{c}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})$. **4415.1.** a) $\mathrm{grad}\, u=\frac{\partial u}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$, burada $\boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{i}\cos\varphi+\boldsymbol{j}\sin\varphi$, $\boldsymbol{e}_\varphi=-\boldsymbol{i}\sin\varphi+\boldsymbol{j}\cos\varphi$, $\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{k}$ - uyğun koordinat xətlərinə toxunan ortlardır; b) $\mathrm{grad}\, u=\frac{\partial u}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$, burada $\boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{i}\cos\varphi\sin\theta+\boldsymbol{j}\sin\varphi\sin\theta+\boldsymbol{k}\cos\theta$, $\boldsymbol{e}_\theta=\boldsymbol{i}\cos\varphi\cos\theta+\boldsymbol{j}\sin\varphi\cos\theta-\boldsymbol{k}\sin\theta$, $\boldsymbol{e}_\varphi=-\boldsymbol{i}\sin\varphi+\boldsymbol{j}\cos\varphi$ - uyğun koordinat oxlarına toxunan ortlardır. **4416.** $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{2u}{r}$, burada $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; $a=b=c$ olduqda $\frac{\partial u}{\partial r}=|\mathrm{grad}\, u|$. **4417.** $\frac{\partial u}{\partial l}=-\frac{\cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{r})}{r^2}$; $\boldsymbol{l}\perp\boldsymbol{r}$ olduqda $\frac{\partial u}{\partial l}=0$. **4418.** $\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\mathrm{grad}\, u\,\mathrm{grad}\, v}{|\mathrm{grad}\, v|}$; $\mathrm{grad}\, u\perp\mathrm{grad}\, v$ olduqda $\frac{\partial u}{\partial l}=0$. **4419.** $\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{i}(\sqrt{x^2+y^2}+yz)-\boldsymbol{j}(\sqrt{x^2+y^2}+xz)+\boldsymbol{k}(x-y)z}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}$.

4420. $y=c_1x$, $z=c_2x^2$. **4422.1.** $\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}(M)=\frac{18}{125}$; $\Pi=\frac{24}{125}\pi\varepsilon^3$. **4423.** 0.

4425. $\mathrm{div}(\mathrm{grad}\, u)=\Delta u$, burada $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. **4426.** $f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)$;

$f(r)=c+\frac{c_1}{r}$, burada c və c_1 - sabitlərdir. **4427.** a) 3; b) $\frac{2}{r}$.

4428. $\frac{f'(r)}{r}(c\cdot r)$. **4429.** $3f(r)+rf'(r)$; $(fr)=\frac{c}{r^3}$, burada c - sabitdir.

4430. a) $u\Delta u+(\text{grad}\,u)^2$; b) $u\,\Delta v+\text{grad}\,u\cdot\text{grad}\,v$, burada Δu - Laplas operatorudur. **4431.** $\text{div}\,v=0$; $\text{div}\,w=-2\omega^2$. **4432.** Cəzb edən mərkəzlərdən kənarda sıfırdır. **4433.** $\text{div}\,a=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_r)+\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\right]$, burada a_r və a_φ - a vektorunun $\varphi=\text{const}$ və $r=\text{const}$ koordinat xətlərinə proyeksiyalarıdır. **4434.** $\text{div}\,a=\frac{1}{LMN}\left[\frac{\partial}{\partial u}(MNa_u)+\frac{\partial}{\partial v}(NLa_v)+\frac{\partial}{\partial w}(LMa_w)\right]$, burada a_u, a_v, a_w - a vektorunun uyğun koordinat xətlərinə proyeksiyalarıdır və $L=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2}$, $M=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2}$,

$N=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial w}\right)^2}$. r, φ və z silindrik koordinatlar olduqda

$\text{div}\,a=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_r)+\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}+r\frac{\partial a_z}{\partial z}\right]$; r, θ və φ sferik koordinatlar olduqda

$\text{div}\,a=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2a_r\sin\theta)+r\frac{\partial}{\partial\theta}(a_\theta\sin\theta)+r\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\right]$. **4436.** a) 0; b) 0.

4436.1. $\text{rot}\,a\,(M)=-\frac{5}{4}i-j+\frac{5}{2}k$, $|\text{rot}\,a\,(M)|=\frac{1}{4}\sqrt{141}$, $\cos\alpha=\frac{-5}{\sqrt{141}}$, $\cos\beta=\frac{-4}{\sqrt{141}}$, $\cos\gamma=\frac{10}{\sqrt{141}}$. **4437.** a) $\frac{f'(r)}{r}[r\times c]$; b) $2f(r)\,c+\frac{f'(r)}{r}\times$ $\times[c\,(r\cdot r)-r\,(c\cdot r)]$. **4439.** a) 0; b) 0. **4440.** $\text{rot}\,v=2\omega$.

4440.1. $\text{rot}\,a=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_\varphi)-\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}\right]k$, burada a_r və a_φ - a vektorunun uyğun olaraq $\varphi=\text{const}$ və $r=\text{const}$ koordinat xətlərinə proyeksiyalarıdır.

4440.2. a) $\text{rot}\,a=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right)e_r+\left(\frac{\partial a_r}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial r}\right)e_\varphi+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_\varphi)-\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}\right]e_z$, burada $a_r = a_x \cos\varphi + a_y \sin\varphi$, $a_\varphi = -a_x \sin\varphi + a_y \cos\varphi$, $a_z = a_z$;

b) $\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \dfrac{1}{r\sin\theta}\left[\dfrac{\partial}{\partial\theta}(a_\varphi \sin\theta) - \dfrac{\partial a_\theta}{\partial\varphi}\right]\boldsymbol{e}_r + \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{1}{\sin\theta}\cdot\dfrac{\partial a_r}{\partial\varphi} - \dfrac{\partial}{\partial r}(r a_\varphi)\right]\boldsymbol{e}_\theta +$

$+\dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial}{\partial r}(r a_\theta) - \dfrac{\partial a_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{e}_\varphi$, burada $a_r = a_x \cos\varphi \sin\theta + a_y \sin\varphi \sin\theta + a_z \cos\theta$,

$a_\theta = a_x \cos\varphi \cos\theta + a_y \sin\varphi \cos\theta - a_z \sin\theta$, $a_\varphi = -a_x \sin\varphi + a_y \cos\varphi$.

4441. a) 0; b) πh^3. **4442.** a) 0; b) 0. **4443.** π. **4444.** $\dfrac{3\pi}{8}$. **4445.** 0.

4445.1. $\dfrac{\pi}{5}$. **4447.** $4\pi m$. **4448.** $\sum_{i=1}^{n} e_i$. **4450.** $c\rho\dfrac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)$,

burada c - xüsusi istilik tutumu və ρ - cismin sıxlığıdır. **4452.** $2\pi^2 b^2$.

4452.1. $8\dfrac{20}{21}\cdot\ln 2$. **4452.2.** $\dfrac{3}{4}(3+e^4-12e^{-2})$. **4453.** $\int_{r_A}^{r_B} f(r)\, r\, dr$.

4454. a) 2π; b) 2π. **4455.** a) $\Gamma = 0$; b) $\Gamma = 2\pi n$, burada n - C konturunun Oz oxu ətrafı boyunca dövrlərinin sayıdır.

4455.1. $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}(M) = -\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$, $\Gamma = -\pi(\cos\beta + 2\cos\gamma)\,\varepsilon^2$.

4456. $Q = \iint_S \left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) dx\, dy$; $\Gamma = \iint_S \left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) dx\, dy$; $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{\partial v}{\partial y}$,

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x}$. **4457.** $u = xyz(x+y+z) + C$. **4457.1.** $\dfrac{1}{3}$. **4458.** $u = \dfrac{m}{r}$.

4459. $u(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{m_i}{r_i}$, burada r_i - dəyişən M (x, y, z) nöqtəsi ilə M_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ nöqtəsi arasındakı məsafədir.

4460. $u(x, y, z) = \int_{r_0}^{r} t\, f(t)\, dt$, burada $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

ƏLAVƏLƏR

I. ƏSAS SABİTLƏR

$\pi = 3{,}1415926536$ $\quad E = 2{,}7182818285$ $\quad M = \lg e = 0{,}4342944819$

$\frac{1}{\pi} = 0{,}3183098862$ $\quad \frac{1}{e} = 0{,}3678794412$ $\quad \frac{1}{M} = \ln 10 = 2{,}3025850930$

$\pi^2 = 9{,}8696044011$ $\quad e^2 = 7{,}3890560989$ $\quad 1 \text{ radian} = 57^{0}17'44{,}806''$

$\sqrt{\pi} = 1{,}7724538509$ $\quad \sqrt{e} = 1{,}6487212707$ $\quad \text{arc } 1^{0} = 0{,}0174532925$

II. CƏDVƏLLƏR

1. Tərs kəmiyyətlər. Kvadrat və kub köklər. Üstlü funksiya

n	$\frac{1}{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$	e^n	$e^{\frac{n}{10}}$	$e^{-\frac{n}{10}}$	e^{-n}
1	1,000	1,00	3,16	1,00	2,15	4,64	2,718	1,105	0,905	0,368
2	0,500	1,41	4,47	1,26	2,71	5,85	7,389	1,221	0,819	0,135
3	0,333	1,73	5,48	1,44	3,11	6,69	20,09	1,350	0,741	0,0498
4	0,250	2,00	6,32	1,59	3,42	7,37	54,60	1,492	0,670	0,0183
5	0,200	2,24	7,07	1,71	3,68	7,94	148,41	1,649	0,607	0,00674
6	0,167	2,45	7,75	1,82	3,91	8,43	403,4	1,822	0,549	$2{,}48 \cdot 10^{-3}$
7	0,143	2,65	8,37	1,91	4,12	8,88	1096,6	2,014	0,497	$9{,}12 \cdot 10^{-4}$
8	0,125	2,83	8,94	2,00	4,31	9,28	2981	2,226	0,449	$3{,}35 \cdot 10^{-4}$
9	0,111	3,00	9,49	2,08	4,48	9,65	8103	2,460	0,407	$1{,}23 \cdot 10^{-4}$
10	0,100	3,16	10,00	2,15	4,64	10,00	22026	2,718	0,368	$4{,}54 \cdot 10^{-5}$

2. Onluq loqarifmaların mantissası

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	$-\infty$	000	301	477	602	699	778	845	903	954
10	000	041	079	114	146	176	204	230	255	279
20	301	322	342	362	380	398	415	431	447	462
30	477	491	505	519	531	544	556	568	580	591
40	602	613	623	633	643	653	663	672	681	690
50	699	708	716	724	732	740	748	756	763	771
60	778	785	792	799	806	813	820	826	833	839
70	845	851	857	863	869	875	881	886	892	898
80	903	908	914	919	924	929	934	940	944	949
90	954	959	964	968	973	978	982	987	991	996

3. Natural loqarifmlər

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	$-\infty$	0,000	0,693	1,099	1,386	1,609	1,792	1,946	2,079	2,197
10	2,303	2,398	2,485	2,565	2,639	2,708	2,773	2,833	2,890	2,944
20	2,996	3,045	3,091	3,135	3,178	3,219	3,258	3,296	3,332	3,367
30	3,401	3,434	3,466	3,497	3,526	3,555	3,584	3,611	3,638	3,664
40	3,689	3,714	3,738	3,761	3,784	3,807	3,829	3,850	3,871	3,892
50	3,912	3,932	3,951	3,970	3,989	4,007	4,025	4,043	4,060	4,078
60	4,094	4,111	4,127	4,143	4,159	4,174	4,190	4,205	4,220	4,234
70	4,248	4,263	4,277	4,290	4,304	4,318	4,331	4,344	4,357	4,369
80	4,382	4,394	4,407	4,419	4,431	4,443	4,454	4,466	4,477	4,489
90	4,500	4,511	4,522	4,533	4,543	4,554	4,564	4,575	4,585	4,595
100	4.605	4,615	4,625	4,635	4,644	4,654	4,663	4,673	4,682	4,691

$10^{\pm n}$-dən natural loqarifmlər

n	+	−	n	+	−	n	+	−
1	2,3026	$\bar{3},6974$	3	6,9078	$\bar{7},0922$	5	11,5129	$\overline{12},4871$
2	4,6052	$\bar{5},3948$	4	9,2103	$\overline{10},7897$	6	13,8155	$\overline{14},1845$

4. Hiperbolik funksiyalar.

x	sh$x$	ch$x$	th$x$	x	sh$x$	ch$x$	th$x$
0	0	1	0				
0,1	0,100	1,005	0,100	1,6	2,376	2,578	0,922
0,2	0,201	1,020	0,197	1,7	2,646	2,828	0,935
0,3	0,305	1,045	0,291	1,8	2,942	3,107	0,947
0,4	0,411	1,081	0,380	1,9	3,268	3,418	0,956
0,5	0,521	1,128	0,462	2,0	3,627	3,762	0,964
0,6	0,637	1,185	0,537	2,1	4,022	4,144	0,970
0,7	0,759	1,255	0,604	2,2	4,457	4,568	0,976
0,8	0,888	1,337	0,664	2,3	4,937	5,037	0,980
0,9	1,027	1,433	0,716	2,4	5,466	5,557	0,984
1,0	1,175	1,543	0,762	2,5	6,050	6,132	0,987
1,1	1,336	1,669	0,801	2,6	6,695	6,769	0,989
1,2	1,509	1,811	0,834	2,7	7,406	7,473	0,991
1,3	1,698	1,971	0,862	2,8	8,192	8,253	0,993
1,4	1,904	2,151	0,885	2,9	9,060	9,115	0,994
1,5	2,129	2,352	0,905	3,0	10,018	10,068	0,995

$x>3$ olduqda 0,05-dən kiçik xəta ilə alırıq: $\operatorname{sh} x \approx \operatorname{ch} x \approx \frac{1}{2} e^x$

5. Faktorial və onunla bağlı funksiyalar

n	$n!$	$(2n-1)!!$	$(2n)!!$	$1/n!$	$1/(2n-1)!!$	$1/(2n)!!$
1	1	1	2	1	1	0,5
2	2	3	8	0,5	0,333333333	0,125
3	6	15	48	0,166666667	0,66666667	0,020833333
4	24	105	384	0,041666667	0,009523810	0,002604167
5	120	945	3840	0,008333333	0,001058201	0,000260417
6	720	10395	46080	0,001388889	0,000096200	0,000021701
7	5 040	135135	645120	0,000198413	0,000007400	0,000001550
8	40 320	2027025	10321920	0,000024802	0,000000493	0,000000097
9	362 880	34459425	185794560	0,000002756	0,000000029	0,000000005
10	3 628 800	654729075	715891200	0,000000276	0,000000002	0,000000000

6. Triqonometrik funksiyalar

α^0	α (radianla)	sin α	tg α	ctg α	cos α		
0	0	0	0	∞	1	1,571	90
1	0,017	0,017	0,017	57,29	1,000	1,553	89
2	0,035	0,035	0,035	28,64	0,999	1,556	88
3	0,052	0,052	0,052	19,08	0,999	1,518	87
4	0,070	0,070	0,070	14,30	0,998	1,501	86
5	0,087	0,087	0,087	11,43	0,996	1,484	85
6	0,105	0,105	0,105	9,514	0,995	1,466	84
7	0,122	0,122	0,123	8,144	0,993	1,449	83
8	0,140	0,139	0,141	7,115	0,990	1,431	82
9	0,157	0,156	0,158	6,314	0,988	1,414	81
10	0,175	0,174	0,176	5,671	0,985	1,396	80
11	0,192	0,191	0,194	5,145	0,982	1,379	79
12	0,209	0,208	0,213	4,705	0,978	1,361	78
13	0,227	0,225	0,231	4,331	0,974	1,344	77
14	0,244	0,242	0,249	4,011	0,970	1,326	76
15	0,262	0,259	0,268	3,732	0,966	1,309	75
16	0,279	0,276	0,287	3,487	0,961	1,292	74
17	0,297	0,292	0,306	3,271	0,956	1,274	73
18	0,314	0,309	0,325	3,078	0,951	1,257	72
19	0,332	0,326	0,344	2,904	0,946	1,239	71
20	0,349	0,342	0,364	2,747	0,940	1,222	70
21	0,367	0,358	0,384	2,605	0,934	1,204	69
22	0,384	0,375	0,404	2,475	0,927	1,187	68
23	0,401	0,391	0,424	2,356	0,921	1,169	67
24	0,419	0,407	0,445	2,246	0,914	1,152	66
25	0,436	0,423	0,466	2,145	0,906	1,134	65
26	0,454	0,438	0,488	2,050	0,899	1,117	64
27	0,471	0,454	0,510	1,963	0,891	1,100	63
28	0,489	0,469	0,532	1,881	0,883	1,082	62
29	0,506	0,485	0,554	1,804	0,875	1,065	61
30	0,524	0,500	0,577	1,732	0,866	1,047	60
31	0,541	0,515	0,601	1,664	0,857	1,030	59
32	0,559	0,530	0,625	1,600	0,848	1,012	58
33	0,576	0,545	0,649	1,540	0,839	0,995	57
34	0,593	0,559	0,675	1,483	0,829	0,977	56
35	0,611	0,574	0,700	1,428	0,819	0,960	55
36	0,628	0,588	0,727	1,376	0,809	0,942	54
37	0,646	0,602	0,754	1,327	0,799	0,925	53
38	0,663	0,616	0,781	1,280	0,788	0,908	52
39	0,681	0,629	0,810	1,235	0,777	0,890	51
40	0,698	0,643	0,839	1,192	0,766	0,873	50
41	0,716	0,656	0,869	1,150	0,755	0,855	49
42	0,733	0,669	0,900	1,111	0,743	0,838	48
43	0,750	0,682	0,933	1,072	0,731	0,820	47
44	0,768	0,695	0,966	1,036	0,719	0,803	46
45	0,785	0,707	1,000	1,000	0,707	0,785	45
		cos α	ctg α	tg α	sin α	α (radianla)	α^0

7. Qamma-funksiya

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$\Gamma(x)$	1,000	0,951	0,918	0,897	0,887	0,886	0,894	0,909	0,931	0,962	1,000

$x > 0$ olduqda $\min \Gamma(x) = \Gamma(1{,}4616) = 0{,}8856$.

RİYAZİ ANALİZDƏN MƏSƏLƏ VƏ MİSALLAR

Tərcümə edənlər:

Əliyev Araz Rafiq oğlu
Xəlilov Elnur Həsən oğlu
Məmmədov Xanlar Rəşid oğlu
Məmmədova Ülviyyə Məmmədəli qızı

Yığılmağa verilib: 04,07.2003. Çapa imzalanıb: 25.07.2003. Formatı: 61x86. Ofset kağızı. Ofset çap üsulu. Şərti çap vərəqi: 35. Tirajı 5000 nüsxə. Sifariş № 171. Qiyməti müqavilə ilə, «MBM» MMC nəşriyyat-poliqrafiya birliyində çap edilmişdir.

Boris Pavloviç Demidoviç
(1906-1977)