Azadxan Adıgözəlov
Xalidə Həsənov

HƏNDƏSİ QURMALAR

Ali pedaqoji məktəb tələbələri üçün

DƏRS VƏSAİTİ

Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyi Elmi-Metodik Şurasının «Riyaziyyat» bölməsinin 2 iyun 2010-cu il tarixli iclasının qərarına əsasən dərs vəsaiti kimi çap olunur (protokol 10).

Bakı – "Elm və təhsil" – 2011

Rəyçilər:

Nəcəf Əliyev
BDU-nun Cəbr və həndəsə kafedrasının dosenti, fizika-riyaziyyat elmləri namizədi

Yafəs Baxşəliyev
ADPU-nun Cəbr və həndəsə kafedrasının müdiri, pedaqoji elmlər doktoru, dosent

A.S.Adıgözəlov, X.S.Həsənova. Həndəsi qurmalar.
Ali pedaqoji məktəb tələbələri üçün dərs vəsaiti. Bakı, "Elm və təhsil", 2011, - 200 səh.

Pedaqoji Universitetlərin bakalavr və magistr pilləsində "Həndəsi qurmalar" mövzusu öyrənilən "Elementar riyaziyyat" kursunun əsas bölməsidir. Onun öyrənilməsi üçün Azərbaycan dilində vəsaitin kifayət qədər olmadığını nəzərə alaraq tələbələrə kömək məqsədi ilə bu kitabı hazırlamağı lazım bildik.

Kitab Ali pedaqoji məktəb tələbələri, orta məktəb müəllimləri, bu sahədə tədqiqat aparan gənc tədqiqatçılar üçün də faydalı ola bilər.

© A.Adıgözəlov, 2011
© X.Həsənova, 2011
© "Elm və təhsil", 2011

GİRİŞ

Pedaqoji Universitetlərin və ali pedaqoji məktəblərin müasir tədris planı və proqramlarında gələcək müəllimlərin səmərəli fəaliyyət göstərə bilməsi üçün təlimin praktik istiqamətinin gücləndirilməsinə diqqət artırılmışdır.

Pedaqoji Universitetlərin "Elementar riyaziyyat" və "Həndəsədən məsələ həlli üzrə praktikum" fənlərinin proqramlarına uyğun yazılan bu vəsaitin əsas məqsədi tələbələrə həndəsi qurmalara dair bilikləri daha dərindən öyrətmək və məktəb həndəsə məsələlərini müstəqil həll edə bilmək üçün onlarda zəruri bacarıq və vərdişlər formalaşdırmaqdır.

Məlumdur ki, məsələ həlli nəzəri materialın möhkəmləndirilməsi və tətbiqi üçün yalnız köməkçi deyil, həm də bu prosesdə riyazi mühakimə üsulları aşılamaqla öyrədici rol oynayır. Həndəsi qurmalar həndəsə fənninin əsas bölmələrindən biridir. Həndəsənin bu bölməsini çox vaxt konstruktiv həndəsə adlandırırlar.

Konstruktiv həndəsənin bəzi sadə məsələləri orta məktəbdə həndəsi qurmalar vasitəsilə öyrənilir. Həndəsə təlimi prosesində tələbələrin fəza təsəvvürlərinin inkişaf etdirilməsi ölçmə, hesablama, qurma vərdişləri və bacarıqlarının təkmilləşdirilməsini tələb edir. Elementar həndəsənin təlimi prosesində tələbələri nəzəri materialların izahında və məsələlərin həllində müxtəlif çertyojlar çəkməyə alışdırmaq tələb olunur. Çertyojlar fəza fiqurlarının modelləri ilə onlara aid təsəvvürlər arasındakı boşluğu dolduran vasitədir. Həndəsi fiqurun müxtəlif çertyojlarının heç də hamısı bu fiqurun təsəvvür edilməsi üçün eyni dərəcədə alverişli deyildir. Həndəsədə faza təsəvvürlərinin inkişafına kömək edən çertyojlardan ən faydalısı paralel proyeksiya əsasında qurulan çertyojlardır. Həmin çertyojların əsas xüsusiyyəti belə çertyojlarda axtarılan elementlər fəzanın özündə icra edildiyi kimi faktik qurmanın yerinə yetirilməsindən ibarətdir. Modellər üzərində həndəsi qurmaları yerinə yetirmək olmur. Lakin modellərsiz fikri qurmalar da səmərəli deyildir. Yalnız proyeksiya çertyoju faktiki qurmaların yerinə yetirilməsinə imkan verir. Buna görə də elementar həndəsənin tədrisi prosesində tələbə-

lərin, eləcə də orta məktəb şagirdlərinin fəza təsəvvürlərinin inkişaf etdirilməsi ən vacib pedaqoji məsələdir. Fəza təsəvvürlərinin zəif olması səbəbindən tələbələr bir çox hallarda cismin təsvirini qurmaqda çətinlik çəkir, çarpaz düz xətləri kəsişən hesab edirlər. Fəza təsəvvürlərinin zəif inkişaf etməsi tələbələrin bir sıra fənləri (riyazi analiz, analitik həndəsə, tərsimi həndəsə və s. kimi) şüurlu mənimsəməsinə mane olur. Həndəsədən hesablama məsələləri həll etdikdə, tələbələr çox vaxt ya hesablama, ya da cəbri çevirmələrlə məşğul olaraq məsələnin həndəsi tərəfini nəzərdən qaçırırlar. Həndəsi qurmalar tələbələrdən müstəqillik tələb edərək onlarda məntiqi təfəkkürün inkişafına kömək edir; bu baxımdan qurma məsələsinin həllindəki dörd mərhələdən (analiz, qurma, isbat və araşdırma) analiz və araşdırma böyük əhəmiyyətə malikdir. Ümumiyyətlə, həndəsi qurmalara tələbələrin fəza təsəvvürləri və məntiqi təfəkkürünü inkişaf etdirən qüvvətli bir vasitə kimi baxılmalıdır.

Müəlliflərdən

I Fəsil

MÜSTƏVİ ÜZƏRİNDƏ HƏNDƏSİ QURMALAR

1.1. Konstruktiv həndəsənin aksiomlar sistemi

Konstruktiv həndəsənin əsas anlayışları həndəsi fiqurların qurulması anlayışıdır. Bu anlayış tərifsiz qəbul edilir.

Hansı verilənlərə görə, hansı alətlərlə və müəyyən şərtləri ödəyən hansı həndəsi obrazın (nöqtə, parça, düz xətt, üçbucaq və s.) tapılması tələbini göstərən (çəkin, qurun, yer üzərində qeyd edin və i.a.) təklifə **qurma məsələsi** deyilir.

Qurma məsələlərinin həllindəki qurmalar, ümumiyyətlə **həndəsi qurmalar** adlanır.

Məsələnin şərtini ödəyən hər bir fiqura bu məsələnin həlli deyilir.

Hər hansı fiqur verilmişdir dedikdə, bu fiqurun təsvir olunduğu, yəni qurulduğu başa düşülür.

Əvvəlcə konstruktiv həndəsənin əsas anlayışlarını göstərək.

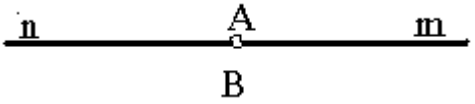
Bir fiqurun hər bir nöqtəsi digər fiqurun nöqtəsi olarsa, onda ona **ikinci fiqurun hissəsi** deyilir.

İki və ya bir neçə fiqurlardan heç olmazsa birinə daxil olan bütün nöqtələr çoxluğuna bu **fiqurların birləşməsi** deyilir.

F_1 və F_2 fiqurlarının birləşməsi belə işarə olunur:

$$F_1 + F_2 \text{ və ya } F_1 \cup F_2$$

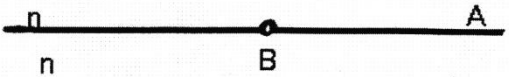
Məsələn, tutaq ki, bir düz xəttin A*m* və B*n* şüaları verilmişdir; onların birləşməsi bütün düz xətt (şəkil 1) və ya həmin düz xəttin şüası (şəkil 2) ola bilər.



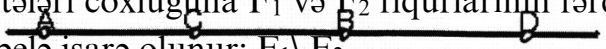
Şəkil 1.

İki və ya bir neçə fiqur üçün ortaq olan bütün nöqtələr çoxluğuna, həmin **fiqurların kəsişməsi** deyilir. F_1 və F_2 fiqurlarının kəsişməsi belə işarə olunur: $F_1 \cdot F_2$ və ya $F_1 \cap F_2$.

Məsələn, AB və CD parçalarının kəsişməsi CB parçalarından ibarətdir (şəkil 3).



Şəkil 2.

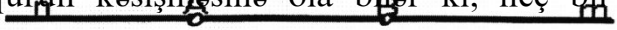


F_1 fiqurunun F_2 fiquruna daxil olmayan bütün nöqtələri coxluğuna F_1 və F_2 fiqurlarının fərqi deyilir və belə işarə olunur: $F_1 \setminus F_2$.

Şəkil 3.

Məsələn, AB və CD parçalarının fərqi AC parçası, CD və AB parçalarının fərqi isə BD parçası olar (şəkil 3).

İki fiqurun kəsişməsinə ola bilər ki, heç bir nöqtə daxil olmasın. Bu halla həmin fiqurların kəsişmə nöqtələri ***boş çoxluqdur*** deyilir.



Şəkil 4.

Aydındır ki, F_1 fiquru F_2 fiqurunun hissəsi olarsa, onda $F_1 \setminus F_2$ fərqi boş çoxluqdur və tərsinə.

Beləliklə, konstruktiv həndəsənin əsas tələbləri aşağıdakılardır.

I. Verilmiş hər bir fiqur qurulmuşdur.

Burada "verilmiş fiqur" anlayışı ilə "hər hansı verilmiş elementləri ilə verilmiş (və ya təyin olunmuş) fiqur" anlayışını qarışdırmaq olmaz.

Bu sonuncu anlayışda fiqurun özü deyil, onun bəzi elementləri verilmiş ki, bu elementlər fiqurun vəziyyətini təyin edir. Məsələn, düz xəttin iki nöqtəsi

verilmişsə, onda bu nöqtələrdən keçən yeganə düz xətt vardır, yəni bu düz xətt iki nöqtə ilə təyin olunur. Lakin bu o demək deyildir ki, həmin düz xətt qurulub (çəkilib).

II. İki (və ya bir neçə) fiqur qurulmuşsa, onda bu fiqurların birləşməsi də qurulmuşdur.

Məsələn, hər hansı düz xəttin AM şüası və sonra həmin düz xəttin BN şüası qurulmuşsa, onda həmin düz xətt qurulmuş hesab olunur (şəkil 4).

III. İki fiqur qurulmuşsa, onda onların fərqinin boş çoxluq olub-olmadığını müəyyən etmək olar.

Məsələn, tutaq ki, bir düz xəttin AB və CD parçaları qurulmuşdur (şəkil 5). Bu parçaların fərqi, şəkildən göründüyü kimi, boş çoxluqdur.

Şəkil 5.

IV. İki qurulmuş fiqurun fərqi boş çoxluq deyilsə, onda həmin fərq qurulmuşdur.

Məsələn, tutaq ki, AC və BD parçaları qurulmuşdur (şəkil 5). Onda AC və BD parçalarının fərqi olan AB parçası da quruluş olar.

V. İki fiqur qurulmuşsa, onda onların kəsişməsinin boş çoxluq olub-olmadığını təyin etmək olar.

Doğurdan da iki düz xətti qurduqda, onların kəsişib-kəsişmədiyini deyə bilərik.

VI. İki qurulmuş fiqurun kəsişməsi boş çoxluq deyilsə, onda o qurulmuşdur.

Doğrudan da, tutaq ki, AC və BD parçaları qurulmuşdur (şəkil 5). Onda bu iki parçanın kəsişməsi olan BC parçası da qurulmuş olacaq. Sonra, kəsişən iki çevrə çəkilmişsə, onda onların kəsişmə nöqtələri cütü də qurulmuş hesab edilir.

VII. İki qurulmuş fiqurun ixtiyari sonlu sayda ortaq nöqtəsi varsa, onda onları qurmaq olar.

VIII. Qurulmuş fiqura aid olduğunu bilərək, nöqtəni qurmaq olar.

VII və VIII aksiomlar, artıq qurulmuş fiqura mənsub olan nöqtələrin qurulmasına imkan verir.

IX. Qurulmuş fiqura aid olmadığını bilərək, nöqtəni qurmaq olar.

Bu aksiom da hər hansı yeni nöqtələrin qurulmasına imkan verir.

Burada qeyd etdiyimiz tələblərə **konstruktiv həndəsənin ümumi aksiomları** deyilir.

Hər bir yeni nöqtənin və eləcə də düz xəttin qurulması üçün həndəsi qurmaların müxtəlif alətlərindən istifadə olunur.

Həndəsi qurmalarda ən çox işlədilən alətlər (birtərəfli) xətkeş, pərgar, iki tərəfli xətkeş və başqalarından ibarətdir.

Pərgar və xətkeş vasitəsilə həndəsi qurmaların yerinə yetirilməsi üçün zəruri və kafi olan aşağıdakı **postulatlar sistemi** müəyyən edilmişdir:

1. Düz xətt və düz xətt parçası uyğun olaraq ancaq o zaman qurulmuş hesab olunur ki, düz xəttin iki nöqtəsi və parçanın ucları verilmiş və ya qurulmuş olsun.
2. Çevrə ancaq o zaman qurulmuş hesab olunur ki, onun mərkəzi və radiusuna konqruent parça verilmiş və ya qurulmuş olsun. Çevrə qövsü o zaman qurulmuş hesab olunur ki, onun mərkəzi və ucları verilmiş və ya qurulmuş olsun.
3. Nöqtə, verilmiş və ya qurulmuş iki düz xəttin kəsişmə nöqtəsi olduqda, qurulmuş hesab olunur.
4. Nöqtə, verilmiş və ya qurulmuş düz xətt ilə verilmiş və ya qurulmuş çevrənin ortaq nöqtəsi olduqda qurulmuş hesab olunur.
5. Nöqtə, verilmiş və ya qurulmuş iki çevrənin ortaq nöqtəsi olduqda, qurulmuş hesab olunur.
6. Hər hansı başqa fiqur, onu əmələ gətirən və ya hüdudlayan əsas fiqurlar verilmiş və ya qurulmuş olduqda qurulmuş hesab olunur.

Konstruktiv həndəsə üçün bu və ya digər alətin tam təsvirini vermək lazımdır. Bu təsvirlər aksiom şəklində veriləcək. Həmin aksiomlar bunlardır:

A. Xətkeş aksiomu. Xətkeşlə aşağıdakı həndəsi qurmalar yerinə yetirilə bilər:

a) verilmiş iki nöqtədən keçən düz xətti qurmaq;

b) verilmiş iki nöqtəni birləşdirən parçanı qurmaq;

c) başlanğıcı və bir nöqtəsi verilmiş olan şüa qurmaq;

d) verilmiş iki düz xəttin kəsişmə nöqtəsini qurmaq.

B. Pərgar aksiomu. Pərgarla aşağıdakı həndəsi qurmalar yerinə yetirilə bilər:

1) verilmiş mərkəzinə və radiusuna konqruent olan verilmiş parçaya görə çevrə qurmaq;

2) mərkəzi və uc nöqtələri verilmiş olan qövs qurmaq;

3) mərkəzləri və radiuslarına konqruent parçaların uc nöqtələri verilmiş olan iki çevrənin kəsişmə nöqtələrini (əgər varsa) qurmaq.

C. **İkitərəfli xətkeş aksiomu.** İkitərəfli xətkeşlə aşağıdakı qurmalar yerinə yetirilə bilər:

1) xətkeş aksiomunda göstərilən bütün qurmalar;

2) verilən düz xətlə təyin olunmuş iki yarımmüstəvi üzərində bu düz xəttin müxtəlif tərəflərində və ondan müəyyən h məsafəsində (h – xətkeşin eninə bərabər məsafədir) olub, həmin düz xəttə paralel olan düz xətlər qurmaq.

3) verilmiş A və B nöqtələri üçün AB parçasının xətkeşin enindən böyük olub-olmadığını müəyyən etmək; AB parçası xətkeşin enindən böyük olduqda, uyğun olaraq A və B nöqtələrindən keçib, bir-birindən h məsafədə olan iki cüt paralel düz xətt qurmaq.

D. **Çertyoj üçbucağı (günyə) aksiomu.** Çertyoj üçbucağı ilə aşağıdakı qurmalar yerinə yetirilə bilər:

a) birtərəfli xətkeş vasitəsilə yerinə yetirilən bütün qurmalar;
b) verilən nöqtədən verilmiş düz xəttə perpendikulyar düz x xətt qurmaq (iki hal).

Qeyd edək ki, həndəsi qurmalarda istifadə olunan əsas alətlər pərgar və xətkeşdir. İkitərəfli xətkeş və çertyoj üçbucağı köməkçi alət olun, yalnız qurmaların yerinə yetirilməsini sürətləndirir.

Mümkünlüyü yuxarıda qeyd etdiyimiz postulatlar və aksiomlarda göstərilən qurmalara **əsas qurmalar** deyilir. Xüsusi halda xətkeş və pərgarla aşağıdakı əsas qurmalar yerinə yetirilə bilər:

1. İki qurulmuş nöqtəni birləşdirən parçanın qurulması (aksiom A, a).
2. İki qurulmuş nöqtədən keçən düz xəttin qurulması (aksiom A, b).
3. Qurulmuş nöqtədən çıxan və qurulmuş digər nöqtədən keçən şüanın qurulması (aksiom A, b).
4. Çevrənin mərkəzi və onun radiusuna konqruent olan parçanın uc nöqtələri qurulduqda, çevrənin qurulması (aksiom B, a).
5. Çevrənin mərkəzi və onun bir-birini tamamlayan iki qövsdən birinin uc nöqtələri qurulduqda, qövslərdən ixtiyari birisinin qurulması (aksiom B, b).
6. İki qurulmuş fiqurun sonlu sayda kəsişmə nöqtələrinin qurulması, əgər belə nöqtələr varsa (aksiom VII).
7. Hər hansı qurulmuş fiqura aid olan nöqtənin qurulması (aksiom VIII).
8. Hər hansı qurulmuş fiqura aid olmayan nöqtənin qurulması (aksiom IX).

Qurmaya aid bir nümunəni nəzərdən keçirək.

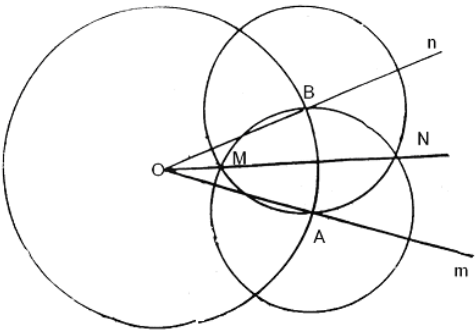
Qeyd etdiyimiz kimi, qurmaya aid məsələ, hər hansı fiqur verildikdə, axtarılan və verilən fiqurun elementləri arasında müəyyən münasibət

göstərildikdə, əvvəlcədən göstərilən alətlərlə axtarılan fiquru qurmaqdan ibarətdir.

Qurma məsələsinin həllini tapmaq – onu sonlu sayda əsas qurmalara gətirmək deməkdir, yəni əsas qurmaları ardıcıl yerinə yetirməklə axtarılan fiqur qurulmuş olur. Deyilənləri aydınlaşdırmaq üçün bir misal göstərək.

Məsələ. 0 təpə nöqtəsi və *m, n* tərəfləri ilə verilən bucağın tənbölənini qurun.

Bu məsələnin həllini pərgar və xətkeşlə icra edək. Ardıcıl olaraq aşağıdakı əsas qurmaları yerinə yetirək (şəkil 6).



Şəkil 6.

1) ω_1 (0, r) çevrəsini quruluq (burada r ixtiyari parçadır) (əsas qurma, 4).
2) ω_1 çevrəsi ilə *m* şüasının ortaq A nöqtəsini qururuq (əsas qurma, 6).
3) ω_1 çevrəsi ilə *n* şüasının ortaq B nöqtəsini qururuq.
4) ω_2 (A, AB) çevrəsini qururuq.
5) ω_3 (B, BA) çevrəsini qururuq.

6) ω_2 və ω_3 çevrələrinin M və N ortaq nöqtələrini qururuq.
7) OM şüasını qururuq (əsas qurma, 3).

Asanlıqla göstərmək olar ki, $\angle AOM \cong \angle BOM$, yəni OM şüası axtarılan tənböləndir.

Ola bilər ki, qurma məsələsinin bir neçə müxtəlif həlli olsun, yəni bir neçə müxtəlif fiqur alınsın ki, məsələnin bütün şərtlərini ödəsin. Məsələn, bir-birinin xaricində yerləşib, ortaq nöqtəsi olmayan iki çevrəyə müxtəlif ortaq toxunanlar çəkmək olar.

Qurmaya aid məsələni həll etmək – onun bütün həllərini tapmaq deməkdir.

Elə məsələlərə rast gələ bilərik ki, onların sonsuz sayda həlli olsun. Məsələn, 1) verilmiş düz xəttə toxunan verilmiş radiuslu çevrə çəkmək; 2) verilmiş çevrəyə toxunan düz xətt qurmaq; 3) verilmiş iki nöqtədən keçən çevrə qurmaq. Belə məsələlərə qeyri-müəyyən məsələlər deyilir. Aydındır ki, qeyri-müəyyən məsələnin bütün həllərini tapmaq olmaz.

Qeyri-müəyyən məsələni nə vaxt həll olunmuş hesab etmək olar?

Məsələnin şərtinin ödəyən fiqurun qurulması göstərilir. Belə ki, bu fiqur bir neçə verilmiş və ya qurulmuş fiqurun bir və ya bir neçə ixtiyari nöqtəsi

ilə müəyyənləşir. Bu nöqtələr "həndəsi parametrlər" adlanır. Bu nöqtələrin ixtiyari vəziyyətində alınan fiqurlar məsələnin şərtini ödəyirsə, məsələ həll olunmuş hesab olunur.

Belə bir məsələyə baxaq.

Məsələ. Verilmiş düz xəttə toxunan verilmiş çevrəni qurun.

Verilmiş düz xətt üzərində ixtiyari P nöqtəsi seçib, verilmiş radiuslu və düz xəttə P nöqtəsində toxunan çevrələri qururuq. İki belə çevrə olacaqdır. P-nin düz xətt üzərindəki ixtiyari vəziyyətində məsələnin şərtini ödəyən bütün sonsuz sayda çevrələri alarıq.

1.2. Məktəb həndəsə kursunda əsas qurma məsələləri

Qurmaya aid bir sıra sadə məsələlər vardır ki, onlar daha mürəkkəb məsələlərin həllinə tərkib hissəsi kimi daxil olur. Deməli, bir sıra mürəkkəb qurma məsələlərinin həlli sadə qurma məsələlərinin həllinə gətirilir. Belə sadə məsələlərə isə orta məktəb həndəsəsində baxılır. Onlara **elementar** həndəsi qurma məsələləri deyilir. Belə məsələlərə praktikada çox rast gəlirik. Bu məsələlərin həcmi müəyyən olmadığından müxtəlif kitablarda onların sayı və

məzmunu müxtəlifdir. Bununla belə elementar həndəsə məsələlərinə adətən aşağıdakılar daxil edilir.

1. Verilən düz xətt üzərində verilmiş parçaya, konqruent parçanın qurulması;
2. Verilmiş parçanın yarı bölünməsi;
3. Verilmiş bucağın yarı bölünməsi;
4. Verilən bucağa konqruent olan bucağın qurulması;
5. Verilən nöqtədən keçib, verilmiş düz xəttə paralel olan düz xəttin qurulması;
6. Verilən nöqtədən keçib, verilmiş düz xəttə perpendikulyar olan düz xəttin qurulması;
7. Verilən parçanın verilmiş nisbətdə bölünməsi;
8. Verilmiş üç tərəfinə görə üçbucağın qurulması;
9. Hipotenuzuna və bir katetinə görə düzbucaqlı üçbucağın qurulması;
10. İki tərəfinə və onlar arasındakı bucağına görə üçbucağın qurulması;
11. Bir tərəfi və ona yanaşı iki bucağına görə üçbucağın qurulması;
12. Verilmiş nöqtədən keçən və verilmiş çevrəyə toxuna düz xəttin qurulması;
13. Verilmiş iki çevrəyə çəkilmiş ortaq toxunanın qurulması;
14. Verilən parça üzərində verilmiş bucağın yerləşdiyi seqmentin qurulması.

Qeyd edək ki, mürəkkəb qurma məsələlərini həll etməyi bacarmaq üçün yuxarıda göstərdiyimiz elementar qurma məsələlərinin həllini yaxşı bilmək və onları cəld yerinə yetirməyi öyrənmək lazımdır.

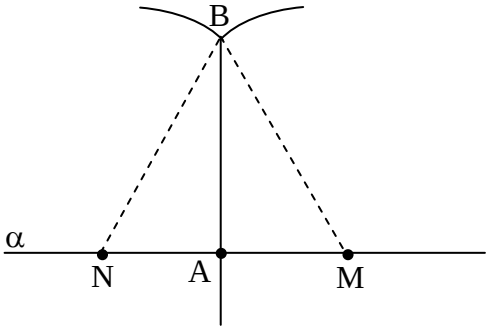
Verdiyimiz elementar məsələlərdən birinin həllini göstərək.

Məsələ. Verilən nöqtədən keçib, verilmiş düz xəttə perpendikulyar olan düz xəttin qurulması.

Həlli. Burada iki müxtəlif hala baxmaq lazımdır.

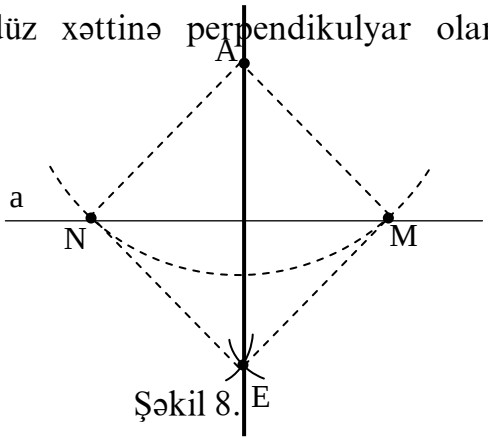
I hal. Tutaq ki, α düz xətti və onun üzərində A nöqtəsi verilmişdir (şəkil 7). α düz xətti üzərində ixtiyari M nöqtəsi götürüb və $AM \cong AN$ parçasını quraq. Sonra, ω_1 (M, MN) və ω_2 (N, NM) çevrələrini quraq (burada çevrələrin radiuslarını ixtiyari, lakin MA parçasından böyük götürmək olar). Bu çevrələrin, α düz xəttindən bir tərəfdə olan kəsişmə nöqtəsini B ilə işarə edək. Onda AB düz xətti α düz xəttinə perpendikulyar düz xətt olar.

İsbatı: $MB \cong NB$ olduğundan, MBN üçbucağı bərabəryanlıdır. AB isə onun medianıdır. Ona görə $AB \perp \alpha$ olar.



Şəkil 7.

II hal. Tutaq ki, verilən A nöqtəsi α düz xəttinin xaricindədir (şəkil 8). A nöqtəsi mərkəz olmaqla elə çevrə keçirək ki, α düz xəttini hər hansı iki müxtəlif nöqtədə kəssin. Həmin nöqtələri M və N ilə işarə edək. ω_1 (M, ME`) və $\omega_2$ (N, NE`) çevrələrini qurub, onların α düz xəttindən verilmiş A nöqtəsinin olmadığı tərəfdə kəsişməsi nöqtəsini E ilə işarə edək. Onda AE düz xətti A nöqtəsindən keçib, verilmiş α düz xəttinə perpendikulyar olan düz xətdir.



Şəkil 8.

İsbatı: E` və E nöqtələrini M və N nöqtələri ilə birləşdirək (şəkil 8). Qurmaya görə ME` ≅ NE`, ME ≅ NE və E`E ortaqdır. Onda ΔE`Me ≅ $\Delta$E`NE. Buradan alırıq ki, $\angle$NE`E ≅ $\angle$ME`E. Deməli, AE

düz xətti ME`N bərabəryanlı üçbucağında tənbölən-dir. Ona görə də α düz xəttinə perpendikulyardır.

Ən sadə həndəsi qurmalar:

1. Verilmiş iki α və β parçalarının cəminə (fərqinə) bərabər parça qurun;
2. a, b, c, d və e parçaları verildikdə a+b-c+d-e parçasını qurun;
3. Verilmiş AB parçasını 2, 4, 8, 16, ..., 2^n bərabər hissələrə bölün;
4. Verilmiş A, B, C və D bucaqlarının cəminə bərabər bucaq qurun;
5. A və B bucaqlarının fərqinə bərabər bucaq qurun;
6. Verilmiş bucağı 2, 4, 8, 16, ..., 2^n bərabər hissələrə bölün;
7. Tərəfinə və ona bitişik iki bucağına görə ABC üçbucağını qurun;
8. İki tərəfinə və onlar arasındakı bucağına görə ABC üçbucağını qurun;
9. Düz bucağı üç bərabər hissəyə bölün;
10. Verilmiş iki nöqtədən bu nöqtələri birləşdirən parçaya bərabər məsafədə olan nöqtəni tapın;
11. Bucağın daxilində (xaricində) verilmiş nöqtədən onun tərəflərindən bərabər parçalar ayıran düz xətt çəkin;

12. MN düz xəttinin bir tərəfində A və B nöqtələri verilmişdir. Düz xətt üzərində X nöqtəsini harada seçmək lazımdır ki, AXB məsafəsi ən kiçik olsun?
13. Oturacağına və ona bitişik bucağına görə bərabəryanlı üçbucaq qurun;
14. Yan tərəfinə və təpə bucağına görə bərabəryanlı üçbucaq qurun;
15. Katetinə və hipotenuzuna görə düzbucaqlı üçbucaq qurun;
16. Hipotenuzuna və iti bucağına görə düzbucaqlı üçbucaq qurun;
17. Yan tərəfinə və hündürlüyünə görə bərabəryanlı üçbucaq qurun;
18. Hündürlüyünə və təpə bucağına görə bərabəryanlı üçbucaq qurun;
19. Oturacağına və oturacağın uc nöqtəsindən yan tərəfə çəkilən perpendikulyara görə bərabəryanlı üçbucaq qurun;
20. Katetinə və bu katetə çəkilən mediana görə düzbucaqlı üçbucaq qurun;
21. Katetinə və digər katet çəkilən mediana görə düzbucaqlı üçbucaq qurun;
22. İti bucağına və onun tənböləninə görə düzbucaqlı üçbucaq qurun;
23. Katetinə və hipotenuza çəkilən hündürlüyünə görə düzbucaqlı üçbucaq qurun;

24. Oturacağına və oturacağa çəkilən hündürlüyünə görə bərabəryanlı üçbucaq qurun.

1.3. Qurma məsələlərinin həlli alqoritmi

Hər bir az-çox mürəkkəb qurma məsələsinin həlli zamanı belə bir sual meydana çıxır; necə mühakimə aparmaq lazımdır ki, məsələnin həll qaydasını müəyyən etmək, bütün həlləri tapmaq, həll olunma şərtini araşdırmaq mümkün olsun?

Müəyyən mühakimə ardıcıllığı gözlənilərsə, onda məsələnin həlli sadələşər.

Mühakimə ardıcıllığı müxtəlif qaydada ola bilər. Dörd addımdan ibarət olan həll alqoritmi aşağıdakından ibarətdir:

1. Analiz; 2. Qurma; 3. İsbat; 4. Araşdırma.

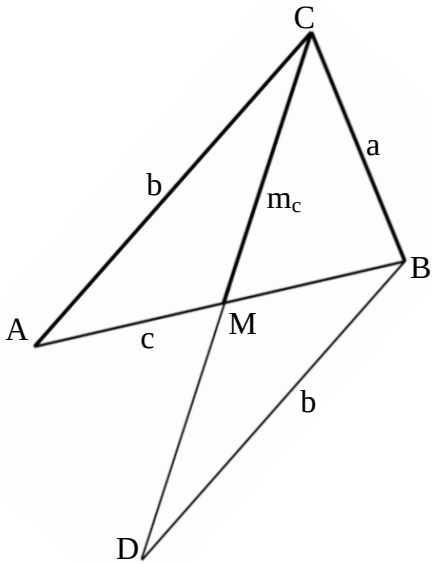
1. Analiz. Bu, məsələ həllinin hazırlıq və eyni zamanda əhəmiyyətli mərhələsidir. Analiz, qurma məsələlərin həlli yolunu tapmağa imkan verir.

Analizdə məqsəd, verilən fiqurun elementləri ilə axtarılan fiqurun elementləri arasında elə münasibət yaratmaqdan ibarətdir ki, bununla axtarılan fiquru qurmaq mümkün olsun. Ona görə də əvvəlcə məsələni həll olunmuş və tələb olunan fiquru qurulmuş hesab edib, onu təqribi çəkirlər. Sonra,

çəkilən köməkçi çertyoj üzərində verilənləri və tələb olunanları qeyd edirlər. Verilənlərlə tələb olunanlar arasındakı asılılıqları müəyyən edərək, tələb olunan fiqurun qurulma yolunu müəyyənləşdirirlər.

Qeyd edək ki, köməkçi çertyojda verilən elementləri və axtarılan əsas elementləri ayırmaq lazımdır.

Məsələn, iki a, b tərəfi və üçüncü tərəfə çəkilmiş m_c medianına görə üçbucaq qurmaq lazımdırsa, onda əvvəlcə ixtiyari üçbucaq çəkib, sonra məsələdə verilənləri qeyd edərək, CM medianını çəkirik. CM şüası üzərində $CM \cong MD$ parçası ayırsaq, köməkçi şəkildən görünür ki, tələb olunan üçbucağı qurmaq üçün BCD üçbucağını qurmaq lazımdır (şəkil 9), $BD \cong b$ olduğundan, BCD üçbucağı a, b, $2m_c$ tərəflərinə görə (yəni üç tərəfinə görə) asanlıqla qurulur. Sonra BM medianını çəkib. BM şüası üzərində $BM \cong MA$ parçasını ayırsaq, onda ABC üçbucağı tələb olunan üçbucaq olar.



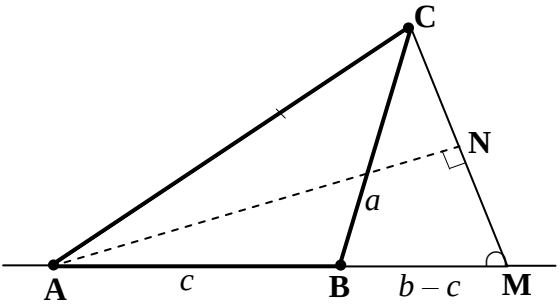
Şəkil 9.

Məsələnin analiz mərhələsində aşağıdakıları nəzərə almaq lazımdır:

1. Köməkçi çertyojda, verilən və axtarılanlar arasında lazımı əlaqə yaratmaq mümkün olursa, onda çertyoja köməkçi fiqurlar daxil etmək məqsədəuyğundur.
2. Məsələnin şərtində parça və ya bucaqların cəmi və ya fərqi verilmişsə, onda bu kəmiyyəti köməkçi çertyoja daxil etmək lazımdır.

Məsələn, tutaq ki, bir bucağı ($\angle$A), bir tərəfi (a) və qalan iki tərəfinin $b - c$ fərqinə görə üçbucaq qurmaq tələb olunur.

İxtiyari ABC üçbucağı götürək. Buraya $\boldsymbol{b - c}$ fərqi daxil deyildir. Ona görə həmin fərqi çertyoja daxil edək. AB tərəfi üzərində AM $\cong$ b parçası ayırırıq (şəkil 10). Onda BM $\cong$ b – c olar.



Şəkil 10.

Bu halda alınan AMC üçbucağı bərabəryanlı üçbucaq olacaqdır, $\angle BMC \cong d - \frac{1}{2}A$ olar. Ona görə əvvəlcə BMC üçbucağını BMC bucağına, a və b-c tərəflərinə görə qururuq. Sonra, onun MC tərəfinin orta nöqtəsindən perpendikulyar düz xətt qaldırıb, onun MB düz xətti ilə A kəsişmə nöqtəsini tapırıq. Onda alınan ABC üçbucağı tələb olunan üçbucaq olar.

Düzgün aparılmış analiz, məsələnin həlləri sayı çox olduqda onların hamısını tapmağa imkan

verir; tərsinə, analizdə səhvə yol verilərsə, həllərdən bəzisi itə bilər.

2. Qurma. Həllin bu mərhələsi analiz nəticəsində məsələnin həlli üsulu müəyyən olduqdan sonra, həmin bu üsulla tələb olunan fiqurun qurulmasından ibarətdir.

Qurma, məsələnin şərtində qeyd olunmuş alətlər vasitəsilə yerinə yetirilir; əgər məsələnin şərtində belə qeyd olmazsa, onda qurma üçün daha çox əlverişli olan alətlər götürülür.

3. İsbat. İsbatın məqsədi qurma nəticəsində alınan fiqurun məsələnin şərtində verilən bütün tələbləri ödədiyini göstərməkdən ibarətdir.

4. Araşdırma. Həllin bu mərhələsi a) məsələdəki verilənlərin hər bir qiymətində məsələnin həllinin olub-olmadığını, əks halda verilənlərin hansı qiymətlərində məsələ həllinin olduğunu, hansı qiymətlərində isə məsələ həllinin olmadığını müəyyən etməkdən; b) hansı şərt daxilində məsələnin bu və ya digər sayda müxtəlif həllinin olduğunu göstərməkdən ibarətdir.

Bəzi məsələlərdə araşdırmanın nəticəsi əvvəllərdə həll olunmuş və araşdırılmış uyğun məsələyə istinad edilmiş şəkildə verilə bilər.

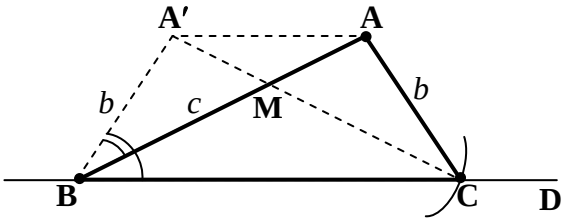
Qeyd edək ki, məsələ həllinin ciddi araşdırılması, bütün xüsusi halları nəzərdən keçirməyi tələb edir.

Qurma məsələsi həllinin mərhələlərindən hər birinin mahiyyətini daha yaxşı aydınlaşdırmaq üçün aşağıdakı məsələnin həllini nəzərdən keçirək.

Məsələ. b,c tərəfləri və bu tərəflər qarşısındakı bucaqların $\angle C - \angle B$ fərqinə görə üçbucaq qurun.

Analiz. Tutaq ki, ABC axtarılan üçbucaqdır (şəkil 11). $AC \cong b$, $AB \cong c$ olsun. BC tərəfi üzərində, ABC üçbucağının yerləşdiyi tərəfdə bu üçbucağa konqruent olan $A'BC$ üçbucağı quraq. Onda

$A'C \cong c$, $A'B \cong b$ və $\angle C - \angle B \cong \angle ABA'$ olar.



Şəkil 11.

Deməli, ABC üçbucağının qurulması, BAA' üçbucağının qurulmasına gətirilir. Axtarılan üçbucağın AB tərəfi ABC və BAA' üçbucaqları üçün ortaq, BC tərəfi isə BAA' üçbucağının $A'A$ tərəfinə paraleldir. BAA' üçbucağının $BA' \cong b$, $BA \cong c$

tərəfləri və onlar arasında qalan $\angle C$ - $\angle B$ bucağı məlumdur. Ona görə də onu iki tərəfi və onlar arasında qalan bucağına görə qurmaq olar.

Qurma. Qurma aşağıdakı ardıcıllıqla aparılır.

1. Verilmiş $\angle C$ - $\angle B$ bucağına konqruent olan bucaq qururuq.
2. Qurduğumuz bucağın tərəfləri üzərində b və c parçalarına konqruent olan parçalar qurub, BAA' üçbucağını alırıq.
3. B nöqtəsindən keçib, $A'A$ tərəfinə paralel və onunla eyni istiqamətli olan BD şüasını qururuq.
4. ω (A', C) çevrəsi ilə BD şüasının C kəsişmə nöqtəsini tapırıq.

Alınan ABC üçbucağı axtarılan üçbucaqdır.

İsbat. Aldığımız $BCA'A$ dördbucaqlısının, qurmaya görə diaqonalları konqruent və oturacaqları paraleldir. Deməli, bu dördbucaqlı bərabəryanlı trapesiyadır, ona görə yan tərəfləri konqruentdir, yəni ABC üçbucağında $AB \cong c$, $AC \cong b$ olar.

Trapesiyanın diaqonallarının kəsişmə nöqtəsini M ilə işarə etsək və trapesiya bərabəryanlı olduğundan,

$$\Delta BMA' \cong \Delta CMA$$

və BMC üçbucağı bərabəryanlı olar.

$$\angle ABC \cong \angle BCA' \text{ və } \angle AB'A \cong \angle ACA'$$

olduğundan,

$$\angle ACB - \angle ABC \cong \angle ACA' - \angle BCA' - \angle ABC \cong \angle C - \angle B$$

Deməli, doğrudan da aldığımız ABC üçbucağının AB və BC tərəfləri uyğun olaraq b və c parçalarına, $\angle C - \angle B$ bucağı isə ACB və ABC bucaqlarının fərqinə konqruentdir.

Araşdırma. $b \cong c$ olduqda, $\angle C - \angle B = 0$ olur, deməli, bu halda axtarılan üçbucaq bərabəryanlı üçbucaq olar. Bu halda məsələnin həlli qeyri-müəyyəndir. $b \neq c$ olduqda, yuxarıda göstərdiyimiz bütün qurmalar mümkündür və yeganə qaydada qurulur. Beləliklə, $b \neq c$ olduqda məsələnin həlli var və özü də yeganədir.

1. Qurma məsələləri həllində analiz mərhələsi.

Analiz – tamı əmələ gətirənlərin tərkib hissələrinə ayrılmasından ibarət tədqiqat üsuludur.

Analiz apardıqda ya araşdırılan əşyaların özləri faktik hissələrinə ayrılmalı olur, ya da öyrənilən məsələlər təfəkkürə xas olan mücərrədləşmənin məntiqi qabiliyyətinin köməyi ilə fikrən hissələrinə ayrılır.

Qurma məsələləri həllinin analiz mərhələsində şagirdlərin rast gəldiyi çətinliklərin çoxu onlarda bütün məntiqi mühakimələrin qurulmasına kömək

edən ümumi və aydın ideyanın olmaması ilə izah edilir.

Analizin belə ideyasına həndəsi yerlər metodu ideyasını aid etmək olar. Analizin təlimi metodikasının işlənilməsi üçün onun məqsədini, prinsipini ifadə etmək və bu mərhələnin əsas məqamlarını qeyd etmək lazımdır.

Analizin məqsədi – məsələ həlli yollarının axtarılması və qurma planının aydınlaşdırılmasıdır.

Analizin əsas prinsipi onun ideyasından alınır və həndəsi xassələrinə görə fiqurun elementlərinin müəyyən edilməsi və axtarıb tapılmasından ibarətdir.

Analizin həndəsi xassələrinə görə fiqurun elementlərinin axtarılıb tapılması prinsipini qəbul edərək məsələnin şərtindən alınan müəyyən xassələrə malik olan bütün elementlərin tapılmasını nəzərdə tuturuq.

Bununla da məsələnin bir neçə həlli olduqda bütün həllərin axtarılıb tapılmasına təminat verən düzgün aparılan analizin "tamlıq prinsipi" yerinə yetirilmiş olur.

Analizin məqsədinə nail olmaq üçün onun aşağıdakı əsas məqamlarının həyata keçirilməsi yolu ilə qəbul edilən prinsipi yerinə yetirmək zəruridir:

1. **Məsələ həll edilmişdir fərziyyəsi. Eskiz-çertyojun yerinə yetirilməsi.** Formal olaraq məsələnin həll edildiyi fərz olunur və fiqurun ümumi halda eskiz-çertyoju əl ilə səliqəli çəkilir. Eskiz-çertyoja məsələnin verilənlərinin hamısı daxil edilir və fərqləndirilir.
2. **Tələb olunan fiqurları müəyyən edən elementlərin göstərilməsi və onların arasından axtarılanın müəyyən edilməsi.** Eskiz-çertyoju nəzərdən keçirərək fiquru təyin edən elementlər müəyyən edilir. Eskiz-çertyojda məlum təyinedici elementlər şərti işarələrlə (parçaların üstünü getməklə, nöqtələri kiçik dairəciklərlə göstərməklə) göstərilir və məchul təyinedici elementlər axtarılanlardır.
3. **Axtarılan elementlərin həndəsi xassələrinin təyin edilməsi.** Axtarılan elementləri göstərərək bu axtarılanın həndəsi xassələrini bilmək lazım olduğu təsdiq olunur. Axtarılan elementlərin xassələri eskiz-çertyojun köməyi ilə müəyyən edilir, axtarılanların verilənlərlə əlaqələrinə diqqət yetirilir.
4. **Axtarılan elementin bu və ya digər həndəsi obraza aid edilməsi.** Axtarılan nöqtənin ardıcıl iki xassəsini müəyyən edərək, o obrazları şagirdlərə məlum olan iki həndəsi yerə aid edilir. Axtarılan

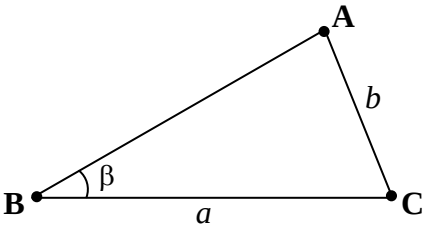
nöqtə eyni zamanda iki həndəsi yerə daxil olduğundan, onun bu həndəsi obrazların kəsişməsinə daxil olması nəticəsi çıxarılır.

5. **Qurma planının tərtibi.** Analizin sonuncu məqamı onun nəticələrinin qurma planının tərtib olunmasına gətirilməsidir. Göstərilən prinsip həyata keçirilməsində qurma planı həmişə aşkardır, ona görə analiz qısa formada müəyyən edilmişdirsə, qurma planı yazılmır.

Şərh olunan məqamların tətbiqinə aid bir neçə məsələ nümunələri göstərək.

Məsələ. a, b tərəflərinə və oturacaqdakı $\angle B = \beta$ bucağına görə üçbucaq qurun.

Analiz. Tutaq ki, məsələ həll edilmişdir və ABC axtarılan üçbucaqdır (şəkil 12). Bu üçbucağın üç təpə nöqtəsinin vəziyyətini bilsək onu qurmaq olar. B və C təpə nöqtələrinin vəziyyətini məlum hesab etmək olar. Onda A təpə nöqtəsinin vəziyyətini tapmaq qalır.



Şəkil 12.

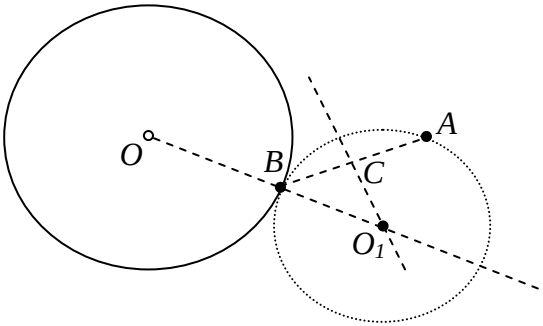
Deməli, A – axtarılan nöqtədir. Axtarılan nöqtəni tapmaq üçün onun məsələ şərtindən alınan xassələrini bilmək lazımdır. Bu xassələr aşağıdakılardır:

1. A nöqtəsi oturacağı BC = a və oturacaqdakı bucağı $\angle B = \beta$ olan üçbucağın təpə nöqtəsidir. Aydındır ki, A nöqtəsi BA şüasının üzərindədir.Lakin verilmiş B və C nöqtələrinə nəzərən A nöqtəsinin vəziyyətini yalnız bu xassəyə əsasən təyin etmək mümkün deyildir.
2. A nöqtəsi C təpə nöqtəsindən verilmiş b məsafədə, yəni C nöqtəsində və radiusu b-yə bərabər çevrə üzərindədir.

Nəticə: Əgər A nöqtəsi varsa, onda bu nöqtəBA şüası ilə (C, b) çevrəsinin kəsişməsidir.

Məsələ. Verilmiş A nöqtəsindən keçən və verilmiş O çevrəsinə onun verilmiş B nöqtəsində toxunan çevrə qurun.

Analiz. Tutaq ki, məsələ həll edilmişdir və O_1 axtarılan çevrədir (şəkil 13). O_1 çevrəsini təyin edən nöqtə bu çevrənin O_1 mərkəzidir. O_1 nöqtəsinin xassələrindən biri məlumdur: O_1 nöqtəsi verilmiş O çevrəsinə verilmiş B nöqtəsində toxunan çevrənin mərkəzidir. Ona görə O_1 nöqtəsi OB şüasının üzərindədir: $O_1 \in OB$.



Şəkil 13.

O_1 nöqtəsinin ikinci xassəsi: O_1 nöqtəsi verilmiş A və B nöqtələrindən keçən çevrənin mərkəzidir. Ona görə O_1 nöqtəsi AB parçasının orta perpendikulyarı üzərindədir.

Nəticə: Əgər O_1 nöqtəsi varsa, onda bu nöqtə OB şüası ilə AB parçasının orta perpendikulyarının kəsişmə nöqtəsidir: $O_1=OB\cap CO_1$.

Məsələ. b, m_c, R verilənlərə görə üçbucaq qurun.

Analiz. Fərz edək ki, məsələ həll olunmuşdur və ABC axtarılan üçbucaqdır. Eskiz-çertyoju yerinə yetirək, məsələdə verilənlərin hamısını çertyoja daxil edək və onları çertyojda qeyd edək.

Eskiz-çertyoj üzrə fiquru təyin edən elementləri müəyyən edək. Bunlar üçbucağın A, B, C təpələridir. Onlardan A və C məlumdur. Axtarılan element B təpə nöqtəsidir.

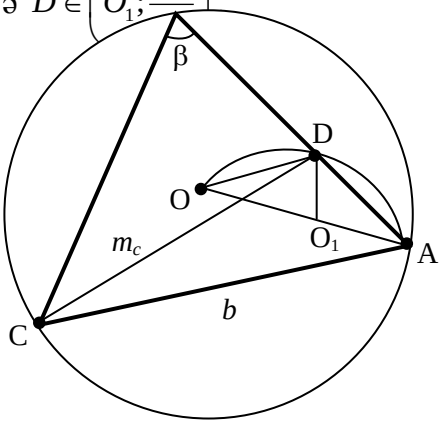
Axtarılanı tapmaq üçün onun xassəsini bilmək

lazımdır. B nöqtəsinin həndəsi xassəsi, birincisi onun verilmiş (O; R) çevrəsinə aid olmasıdır: $B \in (O;R)$.

B nöqtəsinin ikinci xassəsi aşkar deyildir. Göründüyü kimi, B nöqtəsi AD şüasına aiddir. Lakin AD düz xəttinin vəziyyəti məlum deyildir. D nöqtəsi tapılarsa, onda AD-nin vəziyyəti məlum olar. Məsələdə yeni axtarılan element (D nöqtəsi) meydana çıxır.

D nöqtəsinin birinci xassəsi aşkardır: o, verilmiş C nöqtəsindən verilmiş m_c məsafədədir: DC (C; m_c).

D nöqtəsinin ikinci xassəsi aşkar deyildir. Yalnız məlumdur ki, D nöqtəsi AB parçasının orta nöqtəsidir. Bu xassənin nə demək olduğu hələ aydın deyildir. AB – çevrənin A nöqtəsindən keçən vətəri, D nöqtəsi isə bu vətərin otra nöqtəsidir. OD parçasını quraraq görürük ki, $\angle$ ADO = 90º-dir. Yəni, D nöqtəsindən AO parçası düz bucaq altında görünür. Ona görə $D \in \left(O_1; \frac{OA}{2}\right)$



Şəkil 14.

Nəticə 1. D nöqtəsi varsa, onda bu nöqtə $(C; m_c)$ və $\left(O_1; \frac{R}{2}\right)$ çevrələrinin kəsişmə nöqtəsidir.

Nəticə 2. D nöqtəsi varsa, onda AD düz xətti

təyin olunar və B nöqtəsi (O;R) çevrəsi və AD düz xəttinin kəsişməsi kimi tapıla bilər.

Beləliklə, qurmanın planı aşağıdakı kimi olar.

1) $(O;R)$ çevrəsi daxilinə AC=b vətəri çəkmək;
2) $\left(O_1;\frac{OA}{2}\right)$çevrəsi qurmaq;
3) $(C;m_c)$ çevrəsi qurmaq və $\left(O_1;\frac{OA}{2}\right)$ və $(C;m_c)$ çevrələrinin D kəsişmə nöqtəsini axtarmaq;
4) Əgər D nöqtəsi varsa, onda AD düz xəttini qurur və onun (O; R) çevrəsi ilə B nöqtəsində kəsişməsini və nəhayət BC və AB parçalarını qururuq.

2. Qurma mərhələsinin zəruriliyi prinsipcə aydındır; qurma məsələnin tələbini yerinə yetirməyə imkan verir. Qurmanın faktiki yerinə yetirilməsinin əhəmiyyəti aşağıdakılardan ibarətdir:

- şagirdlərin öyrəndikləri həndəsi obrazların təsəvvür edilməsinə nisbətən yalnız həndəsi qurmanın gedişində istifadə olunan mücərrəd həndəsi obrazlar daha çox faydalıdır;
- qurma mərhələsini yerinə yetirməklə müəllim müəyyən dərəcədə həndəsənin tətbiqlərini də həyata keçirməli olur.

Məktəbdə həndəsi qurmaların öyrənilməsi həndəsənin rəsmxətlə daha sıx əlaqələrini həyata keçirməyə imkan verir. Yerinə yetirilən müəyyən çertyoj işlərinin nəzəri əsasları həndəsədən məlum olmalıdır. Həndəsi qurmaların əyani, dəqiq və düzgün səliqəli yerinə yetirilməsi şagirdlərdə yüksək qrafik mədəniyyətin və estetik zövqün formalaşmasına kömək edir.

3. Qurma məsələsinin həllində **isbat** qurulmuş fiqurun həqiqətən axtarılan fiqur olduğunu təsdiq etməyə məntiqi əsas verən mərhələdir. Analiz prosesində belə bir təklifin doğruluğunu müəyyən edirik: əgər axtarılan fiqur məsələdə qoyulan şərtləri ödəyirsə, onda o, hansı yolla olsa qurula bilər. Qurma analizin mühakimələrinə müraciət edir, yəni, biz nəticəsi qurulmuş fiqur olacaq sintez aparırıq. Lakin qurmanın planı analizin variantından asılıdır (bu variant bir neçə ola bilər). Ona görə qurulmuş fiqurun axtarılan fiqur olması sualı yaranır, yəni aşağıdakı təklifin isbat edilməsi zərurəti yaranır: əgər müəyyən bir fiqur verilmiş elementlərlə hansı yolla isə qurulmasından alınmışdırsa, onda o, həqiqətən qoyulan şərtləri ödəyir. Bu təklifin doğruluğunun isbatı qurma məsələsi həllinin **isbat mərhələsinin** məntiqi məzmununu təşkil edir.

Qurma məsələsinin həlli aşağıdakı üç məsələ

həll edildikdə bitmiş hesab etmək olar:

1. Verilmiş elementlərin hər bir seçimində məsələnin həlli varmı;
2. Verilənlərin hansı seçimində məsələnin həlli yoxdur;
3. Verilənlərin hansı seçimində məsələnin həlli vardır və həllərin sayı neçədir.

Bu üç suala məsələnin araşdırılması cavab verməlidir.

Buradan araşdırmanın məqsədi alınır.

1.4. Həndəsi qurma üsulları

Həndəsi qurmaların həllində aşağıdakı üsullardan istifadə olunur:

1. Fiqurların kəsişmə üsulu;
2. Həndəsi çevirmələr üsulu;
3. Cəbri üsul

Bunların hər birini ayrıca nəzərdən keçirək.

1.4.1. Həndəsi yerlər (fiqurların kəsişməsi) üsulu

Həndəsi yer anlayışı həndəsədə ən mühüm anlayışlardan biridir. Nöqtələrin həndəsi yerinə aşağıdakı kimi tərif vermək olar.

Bütün nöqtələr çoxluğunun malik olduğu xassələrə həmin xassələrə malik **nöqtələrin həndəsi yeri (n.h.y)** deyilir.

Bu tərif müstəvi üçün onu bildirir ki, birinci, nöqtələrin xassəsini verməklə biz müstəvinin müəyyən nöqtələr çoxluğunu ayırıb fərqləndiririk, ikincisi, tərsinə, müstəvi nöqtələrinin xassələrini öyrənərək bu nöqtələrin ümumi xassələrinə əsasən onların müəyyən çoxluğunu ayırırıq (bu halda çoxluqda heç olmasa bir element olur).

Həndəsi yerlər üsulu kimi tanınan bu üsulun mahiyyəti aşağıdakından ibarətdir. Qurma məsələsinin həlli bir-birindən asılı olmayan iki şərtə tabe olan hər hansı nöqtələrin axtarılmasına gətirilir. Bu şərtlərdən birini kənara qoyub ikinci şərti ödəyən bütün nöqtələr çoxluğunu axtarırıq. Tutaq ki, ikinci şərti ödəyən bütüb nöqtələr çoxluğu F_2 fiqurudur. Sonra ikinci şərti kənara qoyub, birinci şərti ödəyən nöqtələr çoxluğunu axtarırıq. Tutaq ki, o da F_1 fiqurudur. Aydındır ki, F_1 və F_2 fiqurlarının kəsişməsinin hər bir nöqtəsi hər iki şərti ödəyər, bu fiqurların kəsişməsinə daxil olmayan nöqtələr isə həmin şərtlərdən heç olmazsa birini ödəməyəcəkdir. $F_1 \cap F_2$ fiqurunun hər bir nöqtəsi məsələnin hər hansı həllinin tapılmasına imkan verir.

Qeyd edək ki, bəzi hallarda F_1 və F_2 həndəsi yerlərin biri məsələnin şərtində verilmiş olur. Onda ikinci həndəsi yeri tapmaq lazımdır.

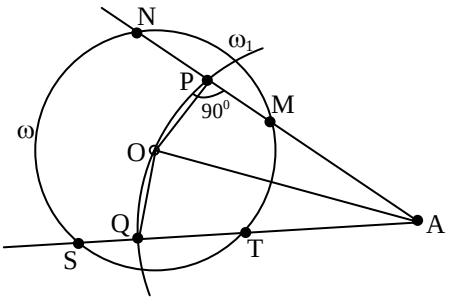
Həndəsi fiqur müxtəlif qaydada verilə bilər. Məsələn verilmiş iki fiqurun kəsişməsi və ya birləşməsi kimi, müəyyən xassəyə malik nöqtələr çoxluğu kimi və s.

Nöqtələr çoxluğunun (fiqurun) bütün nöqtələrində (ancaq bu nöqtələrdə) eyni bir xassə olarsa, belə nöqtələr çoxluğuna həmin xassəyə malik olan nöqtələrin həndəsi yeri deyilir. Məsələn, çevrə müstəvi üzərində bir nöqtədən bərabər məsafədə olan bütün nöqtələrin həndəsi yeri kimi təyin oluna bilər.

Həndəsi yerlərin tapılmasına aid bir məsələ göstərək.

Məsələ 1. Verilmiş nöqtədən keçən bütün düz xətlərdən çevrənin ayırdığı vətərlərin orta nöqtələrinin həndəsi yerini tapın.

Analiz. Tutaq ki, ω - verilmiş çevrə, O – onun mərkəzi, A isə verilmiş nöqtədir (şəkil 15).



Şəkil 15.

Fərz edək ki, P nəzərdən keçirdiyimiz hər hansı vətərin, yəni MN vətərinin orta nöqtəsidir.

P ilə O nöqtəsini birləşdirək. Aydındır ki, PO $\perp$ MN olar. Beləliklə, OA parçası P nöqtələrində düz bucaq altında görünür. Deməli, P nöqtəsi diametri OA parçası olmaqla qurulmuş çevrənin üzərində olmalıdır.

Bundan əlavə, P nöqtəsi verilmiş çevrənin daxilində yerləşməlidir. Beləliklə, belə bir nəticəyə gəlirik: nöqtələrin axtarılan həndəsi yeri – verilmiş çevrənin daxilində olub, diametri OA parçası olmaqla qurulmuş ω_1 çevrəsinin hissəsindən ibarətdir.

Qurma. 1. Verilmiş ω çevrəsini qurub, ixtiyari A nöqtəsi götürürük.

2. OA parçasını qururuq

3. OA diametr olmaqla ω_1 çevrəsi qururuq

4. ω_1 çevrəsinin ω çevrəsi daxilində qalan hissəsi tələb olunan həndəsi yer olar.

İsbatı. İsbatı etmək lazımdır ki, əvvəla, baxdığımız hər bir vətərin orta nöqtəsi göstərilən fiqura mənsubdur, ikincisi, ω_1 çevrəsinin ω çevrəsi

daxilində qalan hissəsi üzərindəki hər bir Q nöqtəsi baxılan vətərlərdən birinin orta nöqtəsidir. Birinci təklif analiz zamanı isbat olundu. İkinci təklifi isbat etmək üçün ω_1 çevrəsinin baxılan hissəsi üzərində olan Q nöqtəsi ilə A nöqtəsindən düz xətt keçirək. Q nöqtəsi ω çevrəsinin daxilində olduğundan, AQ düz xətti ω çevrəsini iki nöqtədə kəsir. Onları S və T ilə işarə edək. $\angle OQA = 90^\circ$ olar, çünki təpəsi çevrə üzərində olub, diametrə söykənən bucaqdır, yəni $OQ \perp AQ$. Deməli, Q nöqtəsi ST vətərinin orta nöqtəsidir, çünki vətərə perpendikulyar olan radius, bu vətəri yarı bölür.

Araşdırma. A nöqtəsi ω çevrəsindən xaricdə olarsa, baxılan həndəsi yer, ucları verilən çevrə üzərində olub, bu çevrə daxilində yerləşən çevrə qövsündən ibarətdir. A nöqtəsi verilən çevrə üzərində və ya onun daxilində olub, mərkəzi üzərində düşməzsə, onda axtarılan həndəsi yer çevrə olar. Nəhayət, A nöqtəsi verilən çevrənin mərkəzinə düşərsə, həndəsi yer A nöqtəsinin özü olar.

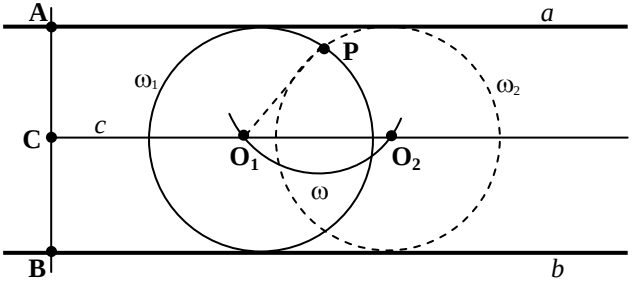
İndi də fiqurların kəsişməsi üsulu ilə aşağıdakı qurma məsələsini həll edək.

Məsələ 2. Verilmiş iki paralel a və b düz xəttinə toxunan və verilmiş P nöqtəsindən keçən çevrə qurun.

Analiz. Verilmiş düz xətlər arasındakı məsafəni d ilə işarə edək. Onda axtarılan çevrənin radiusu $\frac{d}{2}$ - yə bərabərdir. Məsələ, iki şərti ödəyən çevrənin mərkəzinin qurulmasına gətirilir: 1) çevrənin mərkəzi a və b düz xətlərindən bərabər məsafədə, 2) çevrənin mərkəzi P nöqtəsindən $\frac{d}{2}$ məsafədə olmalıdır. Buradan qurma qaydası alınır.

Qurma. a düz xəttinin ixtiyari A nöqtəsindən b düz xətti üzərində AB perpendikulyarı endiririk (şəkil 16). AB parçasının C orta nöqtəsini qururuq.

a və b düz xətlərindən bərabər məsafədə olan, yəni 1) şərtini ödəyən nöqtələrin həndəsi yerini qururuq; bu həndəsi yer C nöqtəsindən keçib a və b düz xətlərinə paralel olan c düz xətti olar. Sonra 2) şərtini ödəyən nöqtələrin həndəsi yerini qururuq. Bu həndəsi yer $\omega\left(P, \frac{d}{2}\right)$ çevrəsi olar. ω çevrəsinin c düz xətti ilə kəsişmə nöqtəsini O_1 ilə işarə edək. Nəhayət, ω_1 (O_1, O_1P) çevrəsini qururuq. Bu çevrə tələb olunan çevrə olar.



Şəkil 16.

İsbat. ω_1 çevrəsinin O_1 mərkəzindən a və b düz xətlərinə qədər olan məsafə $\frac{1}{2}d$-yə bərabərdir, ona görə bu çevrə həmin düz xətlərə toxunar. Sonra, qurmaya görə ω_1 çevrəsi P nöqtəsindən keçir.

Araşdırma. Üç hal mümkündür.

1. P nöqtəsi verilmiş a və b düz xətləri arasındadır. Göstərilən qurma iki həll verir. ω_1 (O_1, O_1P) və ω_2 (O_2, O_2P). Bunlardan başqa həll yoxdur. Doğrudan da, məsələninşərtini ödəyən üç çevrə olsaydı, onda onların O_1, O_2, O_3 mərkəzləri c düz xətti üzərində olmalıydı. Digər tərəfdən $O_1P \cong O_2P \cong O_3P \cong AC$ olar. Bu isə göstərir ki, O_1, O_2, O_3 nöqtələri bir (P, AC) çevrəsi üzərində olmalıdır. Beləliklə, ziddiyyət alınır. Deməli, bu halda məsələnin yalnız iki həlli vardır.
2. P nöqtəsi a və b düz xətlərindən birinin üzərindədir. Bu halda məsələnin bir həlli vardır.
3. P nöqtəsi a və b düz xətlərinin əmələ gətirdikləri zolağın xaricindədir. Bu halda məsələnin həlli yoxdur.

Həndəsi fiqurun verilməsi üsullarından biri onun hər bir nöqtəsinə aid olan xassənin göstərilməsidir.

Fiqurun bütün nöqtələrinə və yalnız bu nöqtələrə aid olan xassə göstərilməklə verilmişdirsə, onda həmin fiqura bu xassəyə malik nöqtələrin həndəsi yeri deyilir.

Tərifdən göründüyü kimi hər bir fiqurun verilmiş eyni xassəyə malik nöqtələrin həndəsi yeri olduğunu göstərmək üçün aşağıdakı iki qarşılıqlı tərs təklifi isbat etmək lazımdır:

1. Nöqtə fiqurun üzərindədirsə, onda həmin nöqtə verilmiş xassəyə malikdir;

2. Nöqtə verilmiş xassəyə malikdirsə, onda həmin nöqtə fiqurun üzərindədir.

Məlum olduğu kimi, hər hansı təklifin tərsi ilə əksi ekvivalentdir. Ona görə də bəzən həndəsi yerlərin axtarılmasına aid məsələlər həllində əlverişli olmaq üçün ikinci təklif birincinin əksi olan təklif ilə əvəz olunaraq aşağıdakı kimi ifadə olunur: nöqtə fiqurun üzərində deyilsə, onda həmin nöqtə verilən xassəyə malik deyildir.

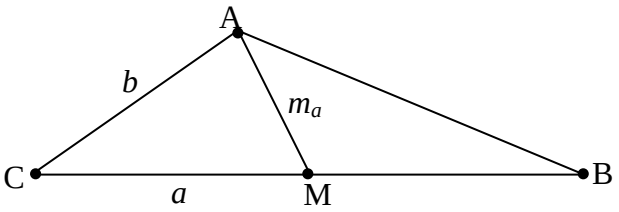
Məsələn, çevrəyə müstəvinin bir nöqtəsindən bərabər məsafədə olan bu müstəvinin bütün nöqtələri çoxluğu kimi tərif verilə bilər.

Doğrudan da, çevrənin istənilən nöqtəsi müstəvinin bir nöqtəsindən bərabər məsafədə olmaq xassəsinə malikdir və bu nöqtədən bərabər məsafədə olan müstəvinin bütün nöqtələri çevrəyə aiddir.

Həndəsi yerlər üsulunun tətbiqi ilə aşağıdakı qurma məsələsinin həllini nəzərdən keçirək.

Məsələ. Oturacağına (a), yan tərəflərdən birinə (b) və oturacağına çəkilən mediana (m_a) görə üçbucaq qurun.

Həlli. Analiz. Tutaq ki, ABC axtarılan üçbucaq, CA=b, CB=a. MA=m_a və CM=MB-dir. (Şəkil 17).

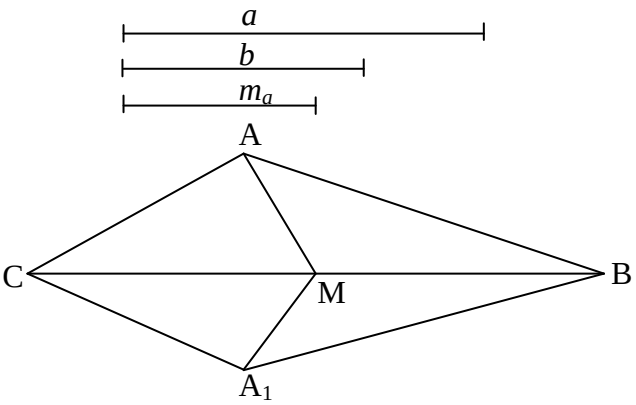


Şəkil 17.

MA=m_a medianının verilməsi şərtini atsaq, üçbucağın üçüncü təpə nöqtəsi müəyyən bir həndəsi yerə, yəni (C, b) çevrəsinə aid olar. Digər tərəfdən, məsələnin CA=b şərtini atsaq, onda üçbucağın A təpə nöqtəsi yeni bir həndəsi yerə aid olar. Yəni, A təpə nöqtəsi (M, m_a) çevrəsi üzərindədir.

Bu ikiçevrənin kəsişmə nöqtəsi məsələnin axtarılan həllini verər.

Qurma. Tutaq ki, a, b və m parçaları verilmişdir (şəkil 18).



Şəkil 18.

a parçasına bərabər parça qurub onu M nöqtəsində yarı bölürük. CB=a parçasının C ucundan b radiuslu çevrə çəkirik. CB-nin M orta nöqtəsindən m radiuslu çevrə çəkirik. Qurulan çevrələrin A və A_1 kəsişmə nöqtələri üçbucağın üçüncü təpə nöqtəsini verir.

İsbat qurmadan aşkardır.

Araşdırma. Məsələnin həlli iki çevrənin kəsişməsindən alındığı üçün həllərin sayı ikidir. $(b+m)>\frac{a}{2}$ olduqda bu aydındır, $(b+m)\le\frac{a}{2}$ olduqda isə məsələnin həlli yoxdur.

Həndəsi yerlər üsulunun mahiyyəti aşağıdakından ibarətdir. Qurma məsələsi adətən

müstəvi üzərində məsələ şərtlərini ödəyən bir və ya bir neçə nöqtənin vəziyyətinin təyin edilməsinə gətirilir. Məsələ şərtlərindən birini atsaq, onda məsələ qeyri-müəyyən olar və qalan şərtləri **müəyyən həndəsi yer** əmələ gətirən sonsuz nöqtələr çoxluğu ödəyəcəkdir. Sonra atılan şərti məsələyə daxil edib onun hər hansı başqa bir şərtini atsaq, onda yenə də qalan şərtləri **yeni həndəsi yer** əmələ gətirən sonsuz nöqtələr çoxluğu ödəyəcəkdir. Axtarılan nöqtə məsələnin bütün şərtlərini ödəməlidir, deməli, hər iki həndəsi yerə daxil olmalıdır. Tapılan həndəsi yerlərdən hər birini qursaq, onda onların kəsişməsi axtarılan nöqtə olacaqdır. Məsələnin həlləri sayı bu həndəsi yerlərin ortaq nöqtələrinin sayı qədər olacaqdır.

Həndəsi yerlər üsulunu elə məsələlərə tətbiq etmək faydalıdır ki, bu məsələlər bir-birindən asılı olmayan iki məsələyə ayrılır və ayrılıqda onların hər birinin qurulması məlum olan müəyyən həndəsi yerlər əmələ gətirir.

Müxtəlif həndəsi yerləri bilməyin vacibliyi buradan aşkar olur. Nöqtələrin həndəsi yerlərini bilmək bəzən axtarılan nöqtənin harada yerləşdiyini dərhal görməyə imkan verir. Ona görə ən sadə həndəsi yerləri qeyd etmək faydalı olar.

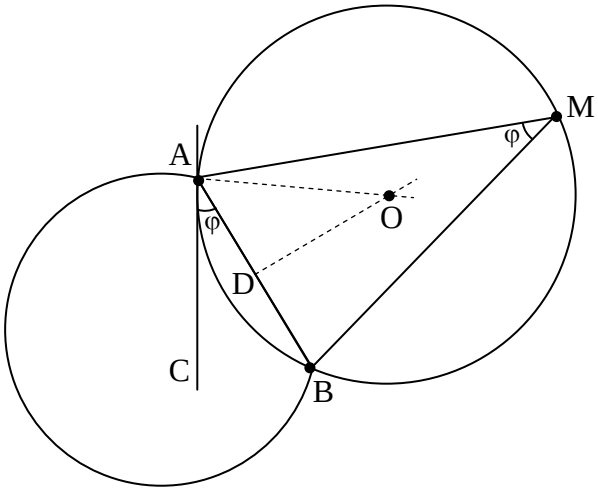
1. Verilmiş O nöqtəsindən R məsafədə olan müstəvi nöqtələrinin həndəsi yeri) mərkəzi R radiuslu çevrədir.
2. Verilmiş iki A və B nöqtələrindən bərabər məsafədə olan nöqtələrin həndəsi yeri AB parçasının ortasından ona qaldırılan perpendikulyardır.
3. Verilmiş düz xətdən verilmiş a məsafədə olan nöqtələrin həndəsi yeri verilmiş düz xəttə paralel və ondan a məsafədə olan bir cüt düz xətdir.
4. Verilmiş iki düz xətdən bərabər məsafədə olan nöqtələrin həndəsi yeri:
   a. *düz xətlər kəsişdikdə onların əmələ gətirdiyi bucaqların qarşılıqlı perpendikulyar tənbölənləridir;*
   b. *düz xətlər paralel olduqda onlar arasındakı məsafəni yarıya bölən və bu düz xətlərə paralel olan düz xətdir. Yəni, onların simmetriya oxudur.*

      Buradan alınır ki, verilmiş bucağın tərəflərinə toxunan çevrələrin mərkəzlərinin və ya bucağın tərəflərindən bərabər məsafədə olan nöqtələrin həndəsi yeri bu bucağın tənbölənidir.
5. Verilmiş parçanın verilmiş bucaq altında görünən müstəvi nöqtələrinin həndəsi yeri, bu parçanın uc nöqtələrindən keçən və həmin parçaya nəzərən

simmetrik yerləşən iki bərabər çevrə qövslərindən ibarətdir.

Bu çevrə qövsü mərkəzinin qurulmasını göstərək.

Tutaq ki, AB parçası φ bucağı altında görünür. A nöqtəsindən AB parçası ilə φ bucağı əmələ gətirən AC düz xəttini çəkək (şəkil 19). Sonra A nöqtəsindən AO⊥AC və AB-nin D orta nöqtəsindən DO⊥AB çəkib AO və DO düz xətlərinin O kəsişmə nöqtəsini quraq. O nöqtəsi AMB çevrə qövsünün axtarılan mərkəzidir. Doğrudan da, AMB qövsünün istənilən M nöqtəsindən AB parçası φ bucağı altında görünür.



Şəkil 19.

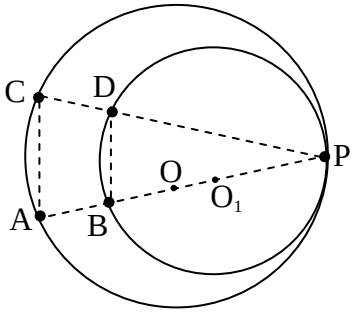
$$\angle AMB = \frac{1}{2}\overset{\cup}{AB} = \angle BAC = \varphi$$

BAC bucağı AC toxunanı ilə AB vətərinin əmələ gətirdiyi bucaq olduğu üçün yuxarıdakı bərabərlik doğrudur.

Xüsusi halda verilmiş parçanın düz bucaq altında göründüyü nöqtələrin həndəsi yeri bu parça diametr olmaqla qurulmuş çevrədir.

6. Verilmiş çevrənin verilmiş P nöqtəsindən keçən vətərləri m:n nisbətində bölən nöqtələrin həndəsi yeri verilmiş çevrəyə P nöqtəsində toxunan çevrədir.

Doğrudan da, verilmiş çevrənin POA diametrini çəkib onun üzərində AB:BP=m:n şərtini ödəyən B nöqtəsini tapaq (şəkil 20). Sonra ixtiyari PC vətərini çəkib onun üzərində CD:DP=m:n şərtini ödəyən D nöqtəsini tapaq. Onda AB:BP=CD:DP=m:n olar. Aşkardır ki, onda AC||BD və $\angle ACP=\angle BDP=90^{o}$ olarş Beləliklə, axtarılan nöqtələrin həndəsi yeri diametri BP parçası olan çevrədir.



Şəkil 20.

Xüsusi halda, verilmiş O çevrəsinin verilmiş P nöqtəsindən keçən vətərlərin orta nöqtələrinin həndəsi yeri OP parçası diametr olmaqla qurulmuş çevrədir.

7. Verilmiş iki paralel düz xəttə toxunan çevrələrin mərkəz nöqtələrinin həndəsi yeri verilmiş düz xətlərə paralel və onlar arasındakı məsafənin ortasından keçən düz xətdir.

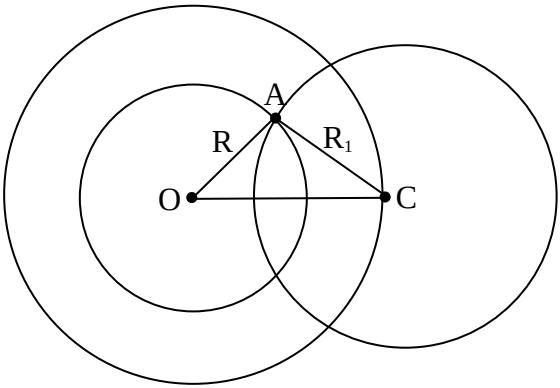
Bu 4 nömrəli həndəsi yerdən alınır.

8. Verilmiş iki A və B nöqtələrindən keçən çevrələrin mərkəz nöqtələrinin həndəsi yeri AB parçasının orta perpendikulyarıdır.

Bu 2 nömrəli həndəsi yerdə alınır.

9. Verilmiş çevrəni düz bucaq altında kəsən verilmiş radiuslu çevrələrin mərkəz nöqtələrinin həndəsi yeri verilmiş çevrə ilə eyni mərkəzli çevrədir.

Kəsişən iki çevrə arasındakı bucaq dedikdə bu çevrələrin kəsişmə nöqtəsindən onlara çəkilən toxunanların əmələ gətirdiyi bucaq başa düşülür. Həmin bucaq 90° olduqda çevrələr düz bucaq altında kəsişir deyirlər.

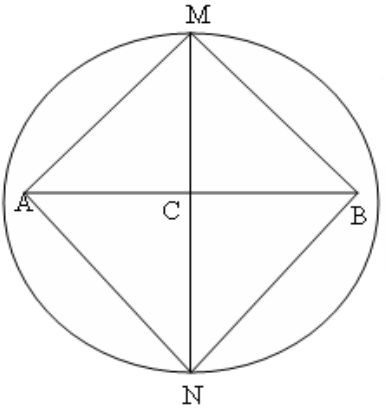


Şəkil 21.

Tutaq ki, (O, R) və (C, R_1) çevrələri düz bucaq altında kəsişirlər (şəkil 21). Onda onların toxunanları çevrələrin radiusları ilə üst-üstə düşər. AOC üçbucağında OA=R və AC=R_1 katetləri verilmişdir. Onda aydındır ki, OC sabit kəmiyyətdir. Deməli, axtarılan nöqtələrin həndəsi yeri O nöqtəsindən OC məsafədə olan nöqtələr çoxluğundan ibarət olar. Həmin həndəsi yer verilmiş O çevrəsi ikə eyni mərkəzli (O, OC) çevrəsi olar. Onun qurulması isə aşkardır.

10. Verilmiş iki A və B nöqtələrinə qədər məsafələrin kvadratları cəmi a^2-na bərabər olan nöqtələrin həndəsi yeri müəyyən mərkəzli və radiuslu çevrədir.

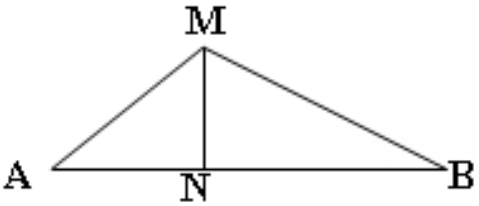
Tutaq ki, M axtarılan nöqtələrin həndəsi yerinə daxildir. Yəni, $MA^2+MB^2=a^2$ doğrudur. AMB AMB üçbucağını paraleloqrama tamamlayaq (şəkil 22). Onda paraleloqramın diaqonallarının xassəsinə görə $2(MA^2+MB^2)=AB^2+MN^2$ yazmaq olar. AB=b və paraleloqramın diaqonallarının kəsişmə nöqtəsini C ilə işarə etsək $CM=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2-b^2}$ (I) olar. a və v sabit olduğundan CM-sabit kəmiyyət olar. Deməli, M nöqtəsi C mərkəzindən çəkilən CM radiuslu çevrədir.



Şəkil 22.

Qurma. (I) münasibətindən axtarılan çevrənin radiusunu qururuq.

11. Verilmiş iki A və B nöqtələrindən məsafələrinin kvadratları fərqli sabit kəmiyyət (m^2) olan



Şəkil 23.

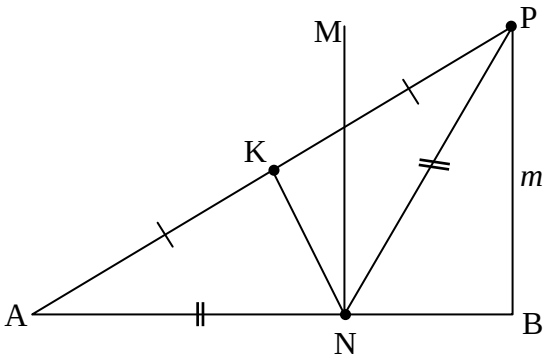
nöqtələrin həndəsi yerini tapın.

Tutaq ki, M bu həndəsi yerin nöqtələrindən biridir. Onda şərtə görə, $MA^2-MB^2=m^2$. A təpəsindəki (şəkil 23) bucaq iti olduğundan **Şəkil 23.** AB düz xəttinə endirilən perpendikı ;l və B nöqtəsi A-dan bir tərəfdədir.

ΔAMN və ΔBMN-dən

$$\left.\begin{aligned} MA^2 &= MN^2 + AN^2 \\ MB^2 &= MN^2 + BN^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow MA^2 - MB^2 = AN^2 - BN^2 = m^2$$

alarıq.



Şəkil 24.

Deməli, N nöqtəsi də bu həndəsi yerə aiddir. Beləliklə, axtarılan nöqtələrin həndəsi yeri $MN\perp AB$ düz xəttidir. Onun qurulması üçün N nöqtəsini tapmaq kifayətdir (Şəkil 24). AB düz xəttinin B nöqtəsindən $BP\perp AB$ çəkib $BP=m$ ayıraq. A ilə P-ni birləşdirib AP parçasının K orta nöqtəsindən

$KN \perp AP$ çəkək. Onda $N=KN \cap AB$ olar. $NP=AN$ və $NP^2 - BN^2=m^2$ olduğundan N nöqtəsi axtarılan nöqtədir. N nöqtəsindən $MN \perp AB$ çəksək MN axtarılan nöqtələrin həndəsi yeri olar.

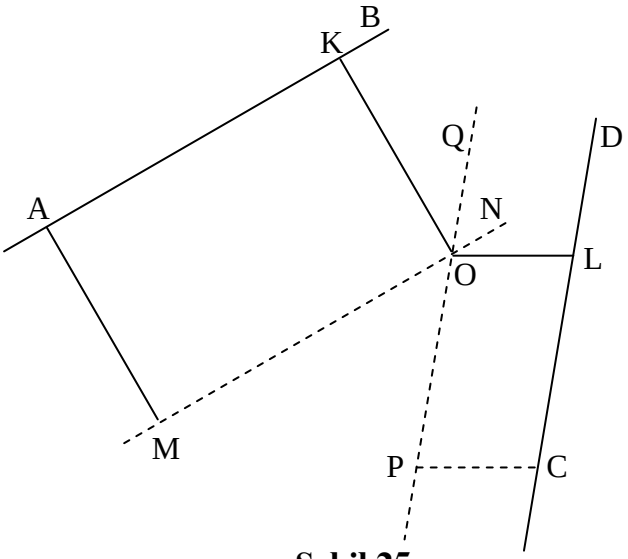
Həndəsi yerlər üsulunun tətbiqi ilə bir sıra məsələlərin həlli nümunələrini nəzərdən keçirək.

Məsələ. AB düz xəttindən a məsafədə və CD düz xəttindən b məsafədə olan nöqtni tapın.

Analiz. Axtarılan nöqtə AB düz xəttindən a məsafədədirsə, onda o, AB düz xəttindən a məsafədə çəkilən MN || AB düz xətti üzərindədir. (3 nömrəli h.y.). həmin qayda ilə, axtarılan nöqtəni SD düz xəttindən b məsafədə çəkilən PQ || CD düz xətti üzərində axtarmaq lazımdır (şəkil 25). Deməli, axtarılan nöqtə həm MN, həm də PQ düz xətti üzərindədir, yəni, bu düz xətlərin kəsişmə nöqtəsidir.

Qurma.

1. $\rho(AB;MN)=Q$ olmaqla
   MN || AB qururuq;
2. $\rho(CD;PQ)=b$ olmaqla
   PQ || CD qururuq;
3. $O=MN \cap PQ$ qururuq.



Şəkil 25.

İsbatı. OK=AM=a və OL=PC=b olduğundan O – axtarılan nöqtədir.

Araşdırma. Aydındır ki, AB və CD düz xətləri paralel və onlararasındakı məsafələr (a≠b) fərqli olan halda başqa bütün hallarda məsələnin həlli var. Ümumiyyətlə, məsələnin dörd həlli vardır.

Məsələ. *a* düz xətti və onun üzərində olmayan A nöqtəsi verilmişdir. *a* düz xəttindən və A nöqtəsindən *d* məsafədə olan X nöqtəsini tapın.

Analiz. Məsələnin şərtini aşağıdakı kimi iki hissəyə bölmək olar:

1. X nöqtəsi A nöqtəsindən *d* məsafədədir.

2. X nöqtəsi *a* düz xəttindən *d* məsafədədir.

Bu zaman aşkardır ki, həmin şərtləri ödəyən nöqtələrin həndəsi yeri uyğun olaraq:

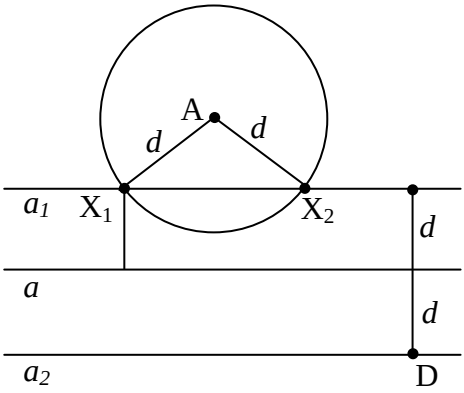
1) birinci şərti ödəyən nöqtələrin həndəsi yeri (A; d) çevrədir;

2) ikinci şərti ödəyən nöqtələrin həndəsi yeri *a* düz xəttindən müxtəlif tərəflərdə və ondan *d* məsafədə olan *a* düz xəttinə paralel a_1 və a_2 düz xətləridir.

Lakin X nöqtəsi həm birinci, həm də ikinci şərti ödəməlidir. Yəni, X nöqtəsi həm birinci şərti ödəyən həndəsi yerə, həm də ikinci şərti ödəyən həndəsi yerə aid olmalıdır. Başqa sözlə, bu iki həndəsi yerin kəsişməsi X nöqtəsidir.

Ona görə məsələnin həlli planı aşağıdakı kimi ola bilər:

1. (A; d) çevrəsini qurmaq (şəkil 26).



Şəkil 26.

2. a düz xəttindən d məsafədə olan və a düz xəttinə paralel olan a_1 və a_2 düz xətlərini çəkmək;

3. (A; d) çevrəsi ilə a_1 və a_2 düz xətlərinin X_1 və X_2 kəsişmə nöqtələrini qeyd etmək.

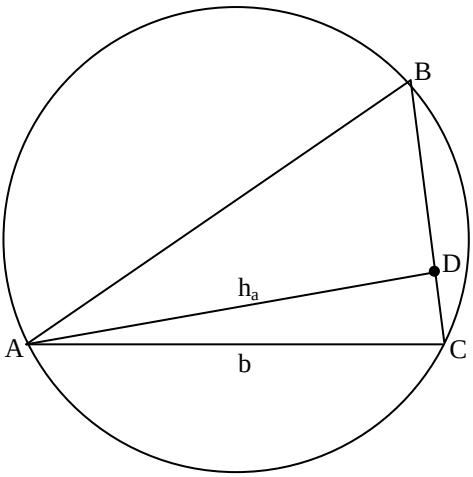
Qurmanı planda göstərilən ardıcıllıqla icra etmək olar.

İsbatı. X_1 və X_2 nöqtələri məsələnin hər iki şərtini ödəyir. Yəni: 1) (A; d) çevrəsi üzərindədirlər, aydındır ki, A nöqtəsindən d məsafədədir; 2) a_1 düz xətti üzərindədirlər, deməli, a düz xəttindən d məsafədə yerləşmişlər.

Araşdırma. A nöqtəsindən a düz xəttinə qədər qədər məsafəni h ilə işarə etsək, d<h olduqda iki həlli, h=2d olduqda bir həlli var. 2d>h olduqda məsələnin həlli yoxdur.

Məsələ. b tərəfinə, B bucağına və h_a hündürlüyünə görə ABC üçbucağını qurun.

Analiz. Tutaq ki, axtarılan ABC üçbucağı qurulmuşdur (şəkil 27), Onun A və C təpə nöqtələri AC=a parçasının uc nöqtələri kimi təyin edilə bilər. Məsələ



Şəkil 27.

üçbucağın üçüncü təpə nöqtəsinin qurulmasına gətirilir. Bu təpə AC=a parçasının B bucağı altında göründüyü qövsün üzərində olmalıdır (5 nömrəli h.y.) B nöqtəsinin qövsün harasında yerləşdiyini bilmək üçün AD hündürlüyünün D oturacağının vəziyyətini müəyyən edək. AD=h_a olduğu üçün D nöqtəsi bir tərəfdən (A; h_a) çevrəsi üzərində (2 nömrəli h.y.), $\angle ADC=90°$ olduğu üçün digər tərəfdən AC parçası diametri olmaqla qurulan yarımçevrə üzərindədir (5 nömrəli h.y. çıxan nəticəyə görə). Deməli, D nöqtəsi iki məlum çevrənin kəsişməsidir.

Qurma. 1. AC-b parçasını qururuq.

2. AC=b parçasının B bucağı altında göründüyü qövsü çəkirik (5 nömrəli h.y.);

3. (A; h_a) çevrəsini qururuq;

4. C nöqtəsindən (A; h_a) çevrəsinə toxunan çəkitik;

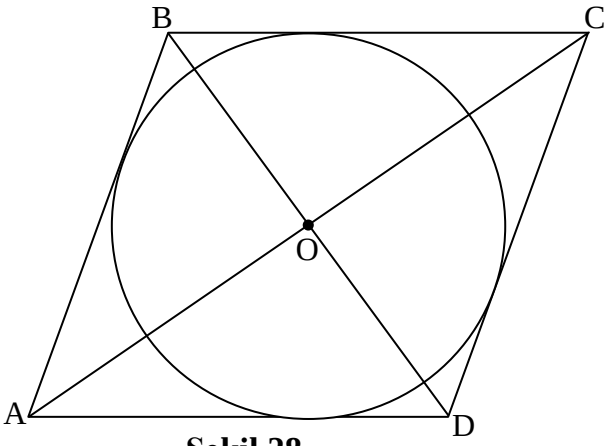
5. Bu toxunanla AC parçasının B bucağı altında göründüyü qövsün kəsişmə nöqtəsi kimi B nöqtəsini qurur.

6. ΔABC-ni qururuq.

İsbatı. Qurmadan aşkardır.

Araşdırma. $h_a \leq b$ olduqda məsələnin həlli vardır.

Məsələ. a tərəfinə və daxilə çəkilmiş çevrənin r radiusuna görə romb qurun.

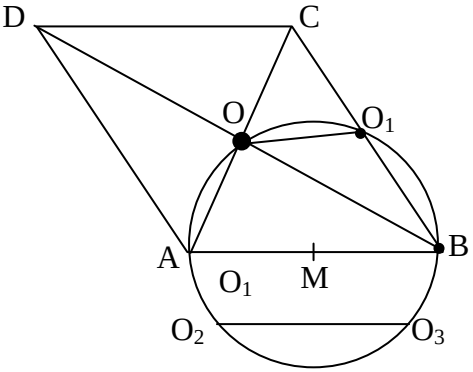


Şəkil 28.

Analiz. Tutaq ki, axtarılan romb qurulmuşdur (şəkil 28). Rombun diaqonalları onu dörd bərabər üçbucağa bölür. Məsələnin şərtinə görə bu üçbucaqların hər birinin (məsələn, ΔAOB) qurulması nöqtələrin həndəsi yeri olan (M; 0,5a) çevrəsi (burada M-AB tərəfinin orta nöqtəsidir) və AB düz xəttindən r məsafədə və AB-yə paralel olan düz xəttin kəsişməsinə gətirilir.

Qurma.

1. AB=a parçasını (şəkil 29);



Şəkil 29.

2. (M; 0,5a) çevrəsini;

3. AB düz xəttindən r məsafədə olan b||AB düz xəttini;

4. O=(M; 0,5a)∩b nöqtəsini qururuq.

İsbatı. AOB üçbucağı, aydındır ki, həm də onun əsasında qurulmuş romb axtarılandır. Belə ki, iki həndəsi yerin kəsişməsi kimi (M;0,5a) çevrəsi, b düz xəttinin qurulması və O kəsişmə nöqtəsinin xassələri hər iki həndəsi yerin xassələrini ödəyir.

Araşdırma. İstənilən verilən a üçün (M;0,5a) çevrəsini qurmaq olar. AB düz xəttindən r məsafədə olub ona paralel iki düz xətt qurmaq olar.

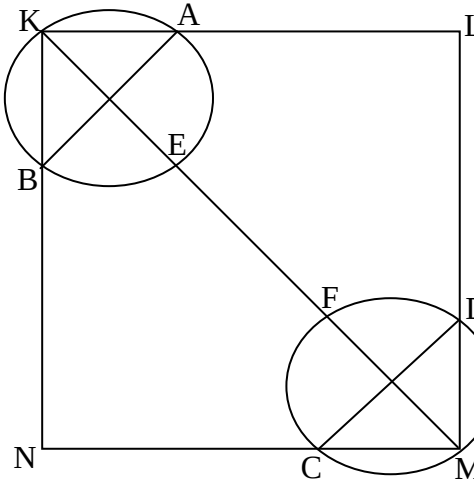
r=0,5a olarsa, onda düz xətt və (M;0,5a) çevrəsinin bir ortaq nöqtəsi – toxunma nöqtəsi

vardır. Bu halda məsələnin yalnız müstəvidəki vəziyyəti ilə fərqlənən iki bərabər həlli vardır. Bu həlldən kvadrat alınır;

r<0,5a olarsa, bu halda yalnız müstəvidəki vəziyyəti ilə fərqlənən dörd bərabər həll alınır;

r>0,5a olarsa, b düz xətti və (M;0,5a) çevrəsi kəsişmir və məsələnin həlli yoxdur.

Məsələ. Tərəfləri verilmiş dörd A, B, C və D nöqtələrindən keçən kvadrat qurun.



Şəkil 30.

Analiz. Tutaq ki, KLMN tərəfləri verilmiş A,B,C və D nöqtələrindən keçən kvadratlardan biridir (şəkil 30). Tərəfləri A və B nöqtəsindən keçən tərəflərin əmələ gətirdiyi kvadratın təpə nöqtəsini K buna uyğun olaraq C və D nöqtələrindən keçən tərəflərin əmələ gətirdiyi kvadratın təpə nöqtəsini M ilə işarə edək. AB və CD parçaları diametr olmaqla qurulan çevrələr K və M nöqtələrindən keçəcəkdir.

Kvadratın KM diaqonalı $\overset{\smile}{BEA}$ qövsünü E nöqtəsində, $\overset{\smile}{CFD}$ qövsünü isə F nöqtəsində yarıya

bölür. Beləliklə, AB və CD qövslərinin E və F orta nöqtələri KM diaqonalı üzərində yerləşir.

Qurma. 1.AB və CD parçaları diametr olmaqla yarımçevrələr çəkək və onları E və F nöqtələri ilə yarıya bölək;

2. E və F nöqtələrindən keçən kvadratın diaqonalı olan EF düz xəttini çəkək;

3. A nöqtəsindən EF düz xətti ilə 45° bucaq əmələ gətirən AK düz xəttini çəkib $K=EF\cap AK$ qururuq. Beləliklə, KN düz xəttinin istiqaməti müəyyən edilmiş olur;

4. Analoji qayda ilə M nöqtəsini qururuq;

5. $N=KB\cap MC$ və $L=KA\cap MD$ nöqtələrini qurub KLMN kvadratını alırıq.

İsbat. $\angle K=\angle M=90°\Rightarrow\angle N=\angle L=90°$ və $\angle K$, $\angle M$-in tənbölənləri KM olduğundan KLMN kvadratdır.

Araşdırma. Müxtəlif kvadratların qurulması variantlarının mümkünlüyünü araşdırmadan məsələnin nə zaman qeyri-müəyyən ola biləcəyi halı nəzərdən keçirək. Aydındır ki, bu E və F nöqtələrinin üst-üstə düşdüyü halda mümkündür. Bu halda kvadratın diaqonalının istiqaməti qeyri-müəyyən qalır və məsələnin sonsuz sayda həlli olur.

Həndəsi yerlərə aid qurma məsələləri.

1. Üç tərəfinə görə üçbucaq qurun.

2. Oturacağına və yan tərəfinə görə bərabəryanlı üçbucaq qurun.
3. Tərəfinə görə bərabərtərəfli üçbucaq qurun.
4. Verilmiş iki nöqtədən keçən verilmiş radiuslu çevrə qurun.
5. Verilmiş nöqtədən keçib verilmiş çevrəyə toxunan verilmiş radiuslu çevrə qurun.
6. Verilmiş iki çevrəyə toxunan verilmiş radiuslu çevrə qurun.
7. Oturacağı verilmiş AB parçası, C təpəsi isə verilmiş nöqtədən verilmiş məsafədə olan bərabəryanlı üçbucaq qurun.
8. Verilmiş üç nöqtədən bərabər məsafədə olan nöqtəni tapın.
9. Verilmiş üç nöqtədən keçən çevrə qurun.
10. Üç bərabər çevrəyə toxunan çevrə qurun.
11. Verilmiş nöqtədən keçən və verilmiş kəsişən iki düz xətdən bərabər vətərlər ayıran verilmiş radiuslu çevrə qurun.
12. Verilmiş çevrəyə toxunan və verilmiş kəsişən iki düz xətdən bərabər vətərlər ayıran verilmiş radiuslu çevrə qurun.
13. Verilmiş üç düz xəttə toxunan çevrə qurun.
14. Verilmiş oturacağına, yan tərəfinə və oturacağa çəkilmiş hündürlüyünə görə üçbucaq qurun.

15. Verilmiş oturacağına, oturacağa çəkilmiş median və hündürlüyə görə üçbucaq qurun.
16. Verilmiş nöqtədən keçən və verilmiş düz xəttə toxunan verilmiş radiuslu çevrə qurun.
17. Verilmiş çevrəyə və düz xəttə toxunan verilmiş radiuslu çevrə qurun.
18. Verilmiş nöqtədən keçən və verilmiş düz xətdən verilmiş uzunluqda vətər ayıran verilmiş radiuslu çevrə qurun.
19. Verilmiş çevrəyə toxunan və verilmiş düz xətdən verilmiş uzunluqda vətər ayıran verilmiş radiuslu çevrə qurun.
20. Bucağına və bu bucağın tərəflərinə çəkilən iki henderleyenə görə üçbucaq qurun.
21. Verilmiş iki kəsişən düz xətlərə toxunan verilmiş radiuslu çevrə qurun.
22. Verilmiş kəsişən iki düz xətdən birinə toxunan və digər düz xətdən verilmiş uzunluqda vətər ayıran verilmiş radiuslu çevrə qurun.
23. İki kəsişən düz xətt və iki parça verilmişdir. Verilmiş düz xətlərdən birincisindən verilmiş birinci parçaya bərabər vətər ayıran, ikinci düz xətdən digər verilmiş parçaya bərabər vətər ayıran verilmiş radiuslu çevrə qurun.
24. Verilmiş iki paralel düz xəttə toxunan və verilmiş nöqtədən keçən çevrə qurun.

25. Verilmiş düz xəttə toxunan və verilmiş iki düz xətdən bərabər vətərlər ayıran verilmiş radiuslu çevrə qurun.
26. Verilmiş iki paralel düz xəttə və onları kəsən üçüncü düz xəttə toxunan çevrə qurun.
27. Verilmiş nöqtədən keçən və verilmiş çevrəyə toxunan verilmiş radiuslu çevrə qurun.
28. Verilmiş iki çevrəyə toxunan verilmiş radiuslu çevrə qurun.
29. Verilmiş nöqtədən keçən və verilmiş düz xəttə toxunan verilmiş radiuslu çevrə qurun.
30. Verilmiş düz xəttə və verilmiş çevrəyə toxunan verilmiş radiuslu çevrə qurun.
31. Verilmiş A nöqtəsindən keçən və verilmiş a düz xəttinə verilmiş B nöqtəsində toxunan çevrə qurun.
32. Verilmiş A nöqtəsindən keçən və verilmiş O çevrəsinə verilmiş B nöqtəsində toxunan çevrə qurun.
33. Verilmiş iki parçanın verilmiş bucaq altında göründüyü nöqtəni tapın.
34. Çevrə və bu çevrə daxilinə çəkilən üçbucağın bir təpəsindən çəkilən hündürlük, tənbölən və medianın uzantılarının çevrə ilə M, N və P kəsişmə nöqtələri verilmişdir. Bu üçbucağı qurun.
35. Aşağıda verilənlərə görə üçbucaq qurun.

1) a, h_a, $\angle B$;
2) c, h_c, $\angle A$;
3) a, h_b, m_b;
4) a, h_a, $\angle A$;
5) a, m_a, $\angle A$;

Həndəsi yerlər üsulu

36. Verilmiş B və C nöqtələri arasında yerləşən A nöqtəsindən elə düz xətt keçirin ki, onun bu nöqtələrdən məsafələri bərabər olsun.
37. İki tərəfinə və onlardan birinə çəkilən hündürlüyünə görə üçbucaq qurun.
38. İki tərəfinə və üçüncü tərəfinə çəkilən hündürlüyünə görə üçbucaq qurun.
39. a tərəfinə, h_b hündürlüyünə və C bucağının tənbölənə görə üçbucaq qurun.
40. c tərəfinə, m_a medianına və B bucağına görə üçbucaq qurun.
41. Hipotenuzuna və katetləri cəminə (fərqinə) görə düzbucaqlı üçbucaq qurun.
42. Katetlərin cəminə (fərqinə) və iti bucağına görə düzbucaqlı üçbucaq qurun.
43. Katetinə və hipotenuz ilə digər katetin fərqinə görə düzbucaqlı üçbucaq qurun.
44. Tərəfinə, ona bitişik bucağına və digər iki tərəfin cəminə görə üçbucaq qurun.

45. Katetlə hipotenuzun b+c cəminə və A iti bucağına görə düzbucaqlı üçbucaq qurun.
46. Perimetrinə və iti bucağına görə düzbucaqlı üçbucaq qurun.
47. a və b tərəflərinin cəminə, c tərəfinə və A bucağına görə üçbucaq qurun.
48. a və b tərəflərini fərqinə, c tərəfinə və B bucağına görə üçbucaq qurun.
49. İki verilən A və B bucaqlarına və iki a və b tərəflərinin cəminə (fərqinə) görə üçbucaq qurun.
50. Verilmiş perimetrinə və iki A və B bucaqlarına görə üçbucaq qurun.
51. Ümumi oturacağı AB və AC yan tərəfi verilmiş parçaya bərabər olan üçbucaqların C təpə nöqtələrinin həndəsi yerini tapın.
52. Verilmiş nöqtədən keçən verilmiş radiuslu çevrələrin mərkəzlərinin həndəsi yerini tapın.
53. Verilmiş çevrənin verilmiş parçaya bərabər vətərinin orta nöqtələrinin həndəsi yerini tapın.
54. Verilmiş iki nöqtədən keçən çevrələrin mərkəzlərinin həndəsi yerini tapın.
55. Verilmiş düz xəttə onun üzərindəki verilmiş nöqtədə toxunan çevrələrin mərkəzlərinin həndəsi yerini tapın.

56. Ucları qarşılıqlı perpendikulyar düz xətlər üzrə hərəkət edən verilmiş parçanın orta nöqtəsinin əmələ gətirdiyi həndəsi yeri tapın.

1.4.2. Həndəsi çevirmələr üsulu

Təklif edilən məsələnin həllinə tətbiq ediləcək həndəsi çevirmənin seçilməsi tələbələr üçün xüsusi çətinlik əmələ gətirir. Həndəsi çevirməni düzgün seçə bilmək üçün birincisi onun xassələrini yaxşı bilmək, ikincisi isə məsələnin şərtini düzgün təhlil etməyi bacarmaq lazımdır. Məsələdə bucağın tənböləni verilmişdirsə, onda ox simmetriyasından istifadə etmək fikri baş qaldırır; əvvəlcə məsələnin bir şərtindən başqa bütün şərtlərini ödəyən axtarılan fiqura oxşar fiqur qurmaq mümkün olarsa, onda məsələnin həllinə homotetiyanın "tətbiq"i haqqında fikir yaranır, məsələ şərtində çevirmənin uyğun düz xətləri kimi hesab edilən paralel düz xətlər verilmişdirsə, onda mərkəzi simmetriya, paralel köçürmə, homotetiyanın xassələrini xatırlayıb onlardan hansının uyğun olması haqqında düşünmək lazımdır.

Məsələyə hansı çevirmənin tətbiq edilməsindən asılı olaraq paralel köçürmə, simmetriya, homotetiya və s. həll üsulları vardır. Ayrılıqda onları nəzərdən keçirək.

1.4.2.1. Paralel köçürmə

Müstəvinin hər bir X nöqtəsinə inikasında:

a) XX' şüası verilmiş istiqamətdə;

b) XX' parçası verilmiş uzunluqda olarsa, müstəvinin özünə belə inikasına paralel köçürmə deyilir. XX' şüasının istiqaməti paralel köçürmənin istiqaməti adlanır.

Paralel köçürmənin aşağıdakı xassələrini qeyd edək.

1. Paralel köçürmə yerdəyişmədir. Bu xassədən alınır ki, bu çevrilmədə hər bir fiqur özünə bərabər fiqura inikas edir.
2. Paralel köçürmədə düz xəttin obrazı ona paralel olan düz xətt, şüanın obrazı onunla eyni istiqamətli şüadır.

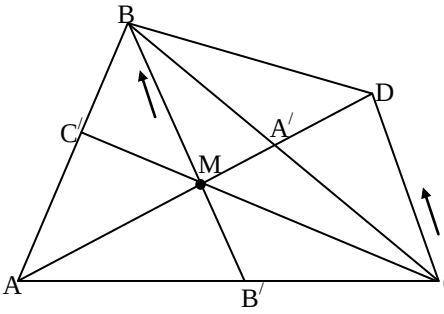
Paralel köçürmənin qurma məsələləri həllinə tətbiqinin mahiyyəti aşağıdakı kimidir: bəzən fiqurun verilmiş elementləri bir-birindən aralı olduğu üçün onları çertyoja daxil etmək çətin olur. Belə hallarda axtarılan fiqurun müəyyən hissəsini ya özünə paralel və ya başqa qayda ilə elə məsafəyə köçürürlər ki, bu zaman yeni alınmış fiquru bilavasitə qurmaq mümkün olur və ya alınan fiqurun qurulması axtarılan fiqurun qurulmasından asan

olur. Köçürmənin istiqaməti məsələnin şərtindən asılıdır və bu istiqamət elə seçilməlidir ki, yeni alınan fiqura mümkün qədər çox verilən daxil ola bilsin. Paralel köçürmədən alınan fiquru qurduqdan sonra əks köçürmə aparmaqla axtarılan fiqur qurulur. Paralel köçürməni oxları paralel olan iki ox simmetriyasının köməyi ilə də icra etmək olar.

Bu metodun tətbiqi məsələ həllinin analiz mərhələsini asanlaşdırır. Ondan əsasən çoxbucaqlıların qurulmasında, həmçinin, ən qısa məsafəyə aid məsələlərin həllində istifadə olunur.

Bir neçə məsələni nəzərdən keçirək.

Məsələ. m_a, m_b, m_c medianlarına görə üçbucaq qurun.



Şəkil 31

Analiz. Tutaq ki, ABC axtarılan üçbucaq, M isə medianların kəsişmə nöqtəsidir. AA`=$m_a$, BB`=m_b, CC`=m_c (şəkil 31).

$\vec{MB}$ vektoru ilə müəyyən olan paralel köçürməni nəzərdən keçirək. Bu köçürmədə CC` median`ının MC parçası BD parçasına, C nöqtəsi D nöqtəsinə inikas edir. Bu zaman MBD üçbucağının tərəfləri axtarılan ABC

üçbucağının medianları ilə $MB=\frac{2}{3}m_b, MD=\frac{2}{3}m_a, BD=\frac{2}{3}m_c$ kimi ifadə olunur.

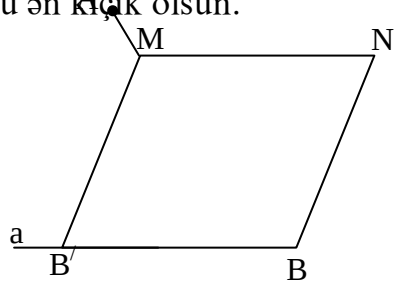
Qurma. m_a, m_b, m_c medianları verildiyi üçün üç tərəfinə görə MBD üçbucağını qururuq. Sonra bu üçbucağın BD tərəfini $\vec{BM}$ vektoru ilə paralel köçürüb C nöqtəsini qururuq. BM və CM parçaları üzərində uyğun medianları ayıraraq B` və C` nöqtələrini qururuq. BC` və CB` düz xətlərinin kəsişməsindən axtarılan üçbucağın A təpə nöqtəsini qururuq.

İsbatı. MBD üçbucağından istifadə edib qurduğumuz ABC üçbucağında BA`=A`C olduğu üçün AA` parçası mediandır. BB` və CC` parçaları da M nöqtəsində kəsişib 2:1 nisbətində bölündüyü üçün mediandır (qurmaya görə). BB` və CC` medianlarının uzunluqları uyğun olaraq $m_b$ və $m_c$-yə bərabərdir. AA` medianına gəldikdə:

$\frac{1}{3}AA'=MA'=\frac{1}{3}m_a$ olur. Ona görə AA`=m_a alırıq.

Araşdırma. Yalnız $\frac{2}{3}m_a, \frac{2}{3}m_b, \frac{2}{3}m_c$ parçalarından üçbucaq qurmaq mümkün olduqda məsələnin həlli vardır. Göstərmək olar ki, bu həll yeganədir.

Məsələ. a düz xətti və onun müxtəlif tərəflərində A və B nöqtələri verilmişdir. a düz xətti üzərində verilmiş L parçasına bərabər MN parçasını elə ayırın ki, AMNB sınıq xəttinin uzunluğu ən kiçik olsun.



Şəkil 32.

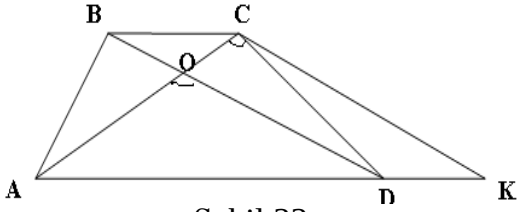
Analiz. MN parçasının uzunluğu sabit olduğu üçün məsələnin şərti ilə AM və BN parçaları cəminin ən kiçik olması tələbi eynigüclüdür. Məsələ a düz xətti üzərində M (və ya N) nöqtəsinin tapılmasından ibarətdir. AM və BN parçalarının üçün BN parçasını $\vec{NM}$ vektoru ilə köçürmək (şəkil 32). Onda N nöqtəsi M-ə, B nöqtəsi isə B`-ə inikas olunar. BN=B`M olduğundan M nöqtəsinin elə vəziyyətini tapmaq lazımdır ki, uc nöqtələri verilmiş nöqtələrdə olan B`MA sınıq xəttinin uzunluğu ən kiçik olsun. Aydındır ki, bu o zaman ola bilər ki, B`, M və A` nöqtələri bir düz xətt üzərində yerləşsin.

Qurma. a düz xəttinə paralel olan BC düz xəttini çəkək və onun üzərində verilmiş L parçasına bərabər olan BB` parçasını ayıraq. AB` düz xəttini qururuq. AB` düz xətti a düz xəttini axtarılan M nöqtəsində kəsir.

İsbat. AMB` sınıq xəttinin uzunluğu qurmaya görə ən kiçikdir. MN=B`B=L olduğundan AMNB sınıq xəttinin uzunluğu ən kiçikdir.

Araşdırma. Məsələnin həmişə, həmçinin, yeganə həlli vardır.

Məsələ. d_1, d_2 diaqonalları, onlar arasındakı α bucağı və a yan tərəflərdən birinə görə trapesiya qurun.



Şəkil 33.

Analiz. Tutaq ki, ABCD axtarılan trapesiya və $AC=d_1$, $BD=d_2$, $\angle AOD=\alpha$, $CD=a$-dır (Şəkil 33). BD parçasını BC vektoru ilə köçürək. Onda B nöqtəsi C-yə, D nöqtəsi isə K-ya inikas edər. Onda ACK üçbucağında $AC=d_1$, $CK=d_2$, $\angle ACK=\alpha$ olar. beləliklə, məsələ ΔACK-nın qurulmasına gətirilir.

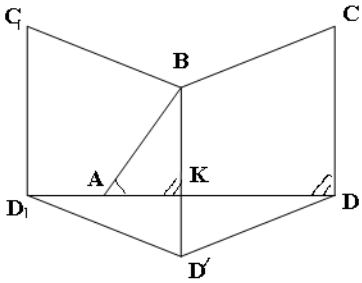
Qurma. ΔACK-nı qururuq. Sonra trapesiyanın D təpəsini AK düz xətti ilə (c; a) çevrəsinin kəsişməsi kimi qururuq. Nəhayət, CK parçasını KD vektoru ilə köçürərək trapesiyanın dördüncü təpə nöqtəsi olan B-ni qururuq.

İsbat. Qurmaya görə $AC=d_1$, $BD=CK=d_2$, $CD=a$-dır. $BD\|CK$ olduğu üçün $\angle AOD =$

$\angle ACK=\alpha$ və qurmaya görə $BC \| AK$ olduğu üçün ABCD axtarılan trapesiyadır.

Araşdırma. AK düz xətti ilə (c;a) çevrəsinin kəsişmə nöqtəsindən asılı olaraq məsələnin iki və ya bir həlli var. Bu düz xətlə çevrə kəsişmədikdə məsələnin həlli yoxdur.

Məsələ. Üç tərəfinə və dördüncü tərəfə bitişik bucaqlarına görə dördbucaqlı qurun.



Şəkil 34

Analiz. Tutaq ki, ABCD axtarılan dördbucaqlı, AB, BC və CD verilən tərəflər, A və D isə verilən bucaqlardır (şəkil 34). CD parçasını $\vec{CB}$ vektoru ilə köçürsək o, BD` vəziyyətini alar. Həmçinin BD` düz xətti AD parçasına $\angle D=\angle BKA$ bucağı altında meyl edir. Deməli, ABD sınıq xətti, onun əsasında isə axtarılan ABCD dördbucaqlısı qurula bilər.

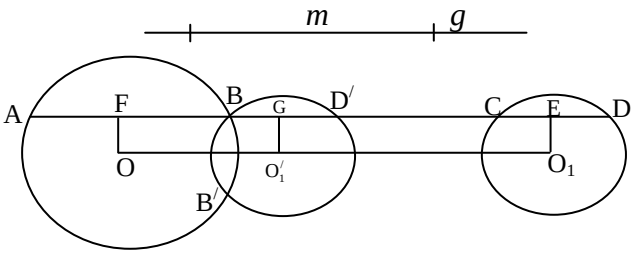
Qurma. ΔABK-nı qururuq. Sonra BK düz xətti üzərində BD`=CD ayırıb D nöqtəsini qururuq. DD`=BC olduğundan D nöqtəsini təyin etmək üçün (D`;BC) çevrəsini çəkirik. C təpəsini təyin etmək üçün D`B parçasını DC vəziyyətinə gətirən köçürmə aparaq. ABCD dördbucaqlısı qurulmuş olur.

İsbat. Qurmadan alınır ki, ABCD dördbucaqlısında AB, BC və CD tərəfləri verilmiş uzunluqda, A və D bucaqları isə verilmiş bucaqlara bərabərdir.

Araşdırma. D nöqtəsinin AD düz xəttindən məsafəsi verilmiş BC tərəfindən kiçik olduqda həll mümkündür. Çünki yalnız bu halda (D; BC) çevrəsi AD düz xəttini kəsir. Onda ümumiyyətlə desək, iki D və D_1 kəsişmə nöqtələrini alırıq. Bu dördbucaqlılarda A və D bucaqları verilmiş bucaqlara bərabər olduqda həmin dördbucaqlılar məsələnin həlli olur. Qonşu bucaqlara bərabər olduqda isə həll olmur. D nöqtəsi məsələnin həlli üçün ABCD dördbucaqlısını verir. D_1 nöqtəsi isə həll vermir. Belə ki, D_1 nöqtəsinə uyğun ABC_1D_1 dördbucaqlısında A və D_1 bucaqları verilmiş bucaqlara bərabər olmayıb onları 180°-yə tamamlayan bucaqlardır.

Məsələ. (O; R), (O_1; r) çevrələri, g düz xətti və m parçası verilmişdir. g düz xəttinə paralel elə kəsən çəkin ki, onun verilmiş çevrələrlə kəsişməsindən alınan vətərlərin uzunluqları cəmi m parçasına bərabər olsun.

Analiz. Tutaq ki, AD-axtarılan kəsəndir (Şəkil 35).



Şəkil 35

Yəni AD||g və AB+CD=m-dir. (O; r) çevrəsini $\vec{CB}$ vektoru ilə köçürək. Fərz edək ki, bu zaman D nöqtəsi D-ə,O_1 mərkəzi O_1`-ə, CD vətəri isə ($O_1$`;r) çevrəsinin BD` vətərinə inikas olunacaqdır. Aydındır ki, AB+BD`=AD`=m olar. O və O` mərkəzlərindən AD kəsəninə uyğun olaraq OF və O_1`G perpendikulyarları endirsək, şəkildən göründüyü kimi,

$$FG = FB + BG = \frac{1}{2}AD' = \frac{1}{2}m = EO_1'$$

olar. Bu da paralel köçürmə vektorunun uzunluğunu müəyyən etməyə imkan verir. Döğurdan da, O_1O_1` düz xətti verilmiş g düz xəttinə paralel olduğundan onu qurmaq olar. E nöqtəsi də $O_1$E perpendikulyarının oturacağı olduğundan onu da qurmaq olar. E nöqtəsindən başlayaraq $O_1O_1$` düz xətti üzərində $EO_1' = \frac{1}{2}m$ parçasını ayıraraq O_1` nöqtəsini alarıq. Beləliklə, köçürmə vektoru məlum olur. O və $O_1$` çevrələrinin B və B` kəsişmə nöqtələri məsələnin həllini müəyyən edir.

Qurma. O_1 nöqtəsindən O_1O_1`||g çəkib OE⊥$O_1O_1$` qurur və onun üzərində $EO_1' = \frac{1}{2}m$ ayırırıq. Bununla köçürülmüş çevrənin O_1` mərkəzini qururuq. $O_1$` nöqtəsindən r radiuslu çəkərək (O;R)

və (O_1`;r) çevrələrinin B və B` kəsişmə nöqtələrini qururuq. B və B` nöqtələrindən g düz xəttinə paralel çəkilən kəsənlər axtarılan düz xətdir.

İsbat. AB+BD`=AD` olduğundan

$$FG = \frac{AB + BD`}{2} = EO_1' = \frac{m}{2}$$ alırıq.

Aydındır ki, AB+BD`=m=AB+CD (b.i.t.o)

Araşdırma. (O;R) və (O_1`;r) çevrələrinin kəsişmə nöqtələri məsələnin həllidir. Ona görə bu çevrələrin hansı şərtlər daxilində kəsişdiyimi araşdıraq.

Məlum olduğu kimi, bu şərtləri

$$R + r \geq OO_1` \text{ və } R - r \leq OO_1`$$

kimi ifadə etmək olar. OE=P işarə edərək $\Delta OO_1`E$-dən

$$OO_1' = \sqrt{P^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2}$$ tapa bilərik.

Onda çevrələrin kəsişmə şərtləri

$$R + r \geq \sqrt{P^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2} \quad \text{və} \quad R - r \leq \sqrt{P^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2}$$

şəklində olar. Burada bərabərlik işarəsi çevrələrin toxunduğu hala uyğundur. Bu halda məsələnin yeganə həlli vardır.

Paralel köçürməyə aid qurma məsələləri

1. Bütün tərəflərinə görə trapesiya qurun.
2. Diaqonallarına və paralel olmayan tərəflərinə və onlar arasındakı bucağına görə trapesiya qurun.
3. Diaqonallarına və oturacaqlarına görə trapesiya qurun.
4. Tərəflərinə və iki qarşı tərəf arasındakı bucağına görə dördbucaqlı qurun.
5. AC və BD diaqonallarına, AB və CD qarşı tərəflərinə və bu tərəflər arasındakı bucağa görə ABCD dördbucaqlısını qurun. CD tərəfini CB vektoru ilə paralel köçürün. Onda C nöqtəsi B-yə, D nöqtəsi isə K-ya inikas edər. Məsələ AB və BK=CD tərəflərinə, ABK=α bucağına görə ABK üçbucağının qurulmasına gətirilir.
6. Diaqonallarına, onlar arasındakı bucağına və hər hansı iki tərəfinə görə dördbucaqlı qurun.
7. Üç bucağına və iki qarşı tərəfinə görə dördbucaqlı qurun. ABCD dördbucaqlısında AD=a, CB=b, $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, $\angle D=\gamma$ olsun. BC tərəfini BA vektoru ilə köçürün. Bu zaman BC parçasının yeni vəziqqəti AE olsun. Məsələ ΔAED-nin qurulmasına gətirilir.
8. Diaqonallarına, onlar arasındakı bucağına və tərəflərdən birinə görə trapesiya qurun.
9. A bucağına, m_a medianına və h_b hündürlüyünə görə üçbucaq qurun.

10. h_a, h_b, m_a verilənlərinə görə üçbucaq qurun.
11. B bucağı və m_a, m_c medianlarına görə üçbucaq qurun.
12. (O;R) və (O_1;r) çevrələri arasında elə XY parçası çəkin ki, o, verilmiş A nöqtəsində yarıya bölünsün. (O;R) çevrəsini $O_2A=AO$ olmaqla O_2 nöqtəsinə paralel köçürün. (O_2;R) çevrəsini çəkin. (O_2;R) və (O_2; r) çevrələrinin kəsişmə nöqtələrini A ilə birləşdirin.
13. Verilmiş istiqamətdə iki çevrə arasında verilmiş uzunluqda parça çəkin.
14. a və b paralel düz xətləri və onlar arasında P nöqtəsi verilmişdir. a və b düz xətlərinə toxunan və P nöqtəsindən keçən çevrə qurun. Axtarılan çevrənin O mərkəzi aşağıdakı iki şərti ödəyir: 1) bu nöqtə a və b paralel düz xətlərindən bərabər məsafədədir; 2) P nöqtəsindən $\frac{1}{2}d$ məsafədədir. Burada a və b düz xətləri arasındakı məsafə d ilə işarə olunmuşdur.
15. Verilmiş A nöqtəsindən (O;R) və (O_1;r) çevrələrinə elə kəsən çəkin ki, bu kəsənin çevrələrlə ayrılan vətərləri bərabər olsun. Bərabər vətərlər üst-üstə düşməklə O_1 nöqtəsini O_2-yə köçürün. $\angle OO_2O_1=90^o$ və AO_2-nin məlum olmasına əsasən O_2 nöqtəsini qurmaq olar.

Doğrudan da, AB və AC parçaları O və O_2 çevrələrinə toxunan olduğundan AB=AC olar və ΔACD_2 qurula bilər.

16. A və B məntəqələri kanalın müxtəlif tərəflərindədir. Kanal üzərindəki körpü üçün yeri necə seçmək lazımdır ki, A və B arasındakı məsafə ən kiçik olsun. Kanalın sahili a və b paralel düz xətləri, körpü isə bu düz xətlərə perpendikulyar MN parçası kimi təsəvvür olunur. Məsələ a düz xətti üzərində M nöqtəsinin elə vəziyyətini seçməkdən ibarətdir ki, AMNB sınıq xətti ən kiçik olsun.

1.4.2.2. Ox simmetriyası

Müstəvinin hər bir nöqtəsi L düz xəttinə nəzərən ona simmetrik nöqtəyə inikas edirsə, müstəvinin özünə belə inikasına oxu L olan simmetriya deyilir. Ox simmetriyasının aşağıdakı xassələrini qeyd edək:

1. Ox simmetriyası yerdəyişmədir. Yəni, müstəvinin məsafələri saxlayan özünə inikaslarından biridir;
2. Ox simmetriyasının tərs inikası da ox simmetriyasıdır;
3. Oxu L olan simmetriyada: a) simmetriya oxuna perpendikulyar olan hər bir düz xətt özünə inikas

edir; b) sərhədləri L olan yarımmüstəvilər bir-birinə inikas edir.

4. Oxa nəzərən simmetrik iki düz xəttin kəsişmə nöqtəsi ox üzərindədir və simmetriya oxu bu düz xətlər arasındakı bucağın tənbölənidir.

Həndəsədə qurma məsələlərinin oxa nəzərən simmetriya vasitəsi ilə həllinə simmetriya metodu deyilir. Həmin metodun mahiyyətini qısaca şərh edək.

Ox simmetriyasının tətbiqi ilə məsələ həll etdikdə məsələnin verilənləri və axtarılanlar arasında əlaqəni müəyyən etmək üçün hər hansı bir oxa nəzərən verilmiş fiqura (və ya onun bir hissəsinə) simmetrik fiqur qurulur. Alınan simmetrik fiqura əvvəlki fiqurun ödəməli olduğu tələblər verilir və yeni məsələ alınır. Bu məsələ məlum üsullarla həll olunur. Yeni məsələnin həlli, adətən, təklif olunan məsələnin həlli üçün açar olur. Simmetriya metodunun tətbiqindən alınan yeni məsələ məlum olmalıdır və ya təklif olunan məsələdən sadə olmalıdır. Metodun səmərəli olması simmetriya oxunun düzgün seçilməsindən asılıdır.

Verilmiş cəminə və ya fərqinə görə sınıq xətt parçalarının düzləndirilməsinə, müəyyən kəmiyyətin maksimum və ya minimum qiymət almasına, bucaqların, parçaların fərqinin tapılmasına aid

məsələlərin həllində simmetriya metodunun tətbiq edilməsi əlverişlidir.

Bir neçə məsələni nəzərdən keçirək.

Məsələ. MN düz xətti və onun bir tərəfində A və B nöqtələri verilmişdir. MN düz xətti üzərində elə X nöqtəsi tapın ki, AXB sınıq xəttinin uzunluğu ən kiçik olsun.

Analiz. MN düz xəttinə nəzərən B nöqtəsinə simmetrik nöqtə B` olarsa, MN düz xətti üzərində X nöqtəsinin istənilən vəziyyəti üçün XB=XB` doğru olar. AXB sınıq xəttinin uzunluğu AXB` sınıq xəttinin uzunluğuna bərabər olar. Ona görə burada B nöqtəsini B` nöqtəsi ilə əvəz etmək olar. X nöqtəsinin MN üzərində elə vəziyyətini tapmaq lazımdır ki, AXB sınıq xəttinin uzunluğu ən kiçik olsun. Aydındır ki, bu o zaman olar ki, AXB` sınıq xətti düz xətt olsun.

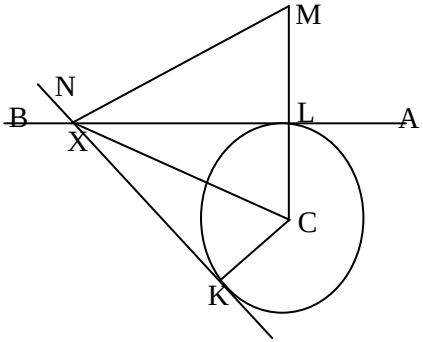
Qurma. MN düz xəttinə nəzərən B nöqtəsinə simmetrik B` nöqtəsini qurub AB` düz xəttini çəkək. AB` düz xəttinin MN ilə X kəsişmə nöqtəsi məsələnin həllidir.

İsbat. Ona əsaslanır ki, X nöqtəsinin tapılmış vəziyyətində AXB` sınıq xəttinin, həmçinin AXB xəttinin uzunluğu minimum olur.

Araşdırma. A və B` nöqtələri MN düz xəttinə nəzərən müxtəlif tərəflərdə yerləşdiyi üçün məsələnin

həmişə həlli vardır. AB` düz xətti MN ilə həmişəkəsişəcəkdir. Ona görə məsələnin yeganə həlli vardır.

Məsələ. AB düz xətti üzərində elə X nöqtəsi tapın ki, onu verilmiş M və N nöqtələri ilə birləş-dirdikdə alınan NXB bucağı MXA bucağından iki dəfə böyük olsun (şəkil 36).



Şəkil 36.

Analiz. Tutaq ki, X nöqtəsi elə qurulmuşdur ki, ∠NXB=2∠MXA və C nöqtəsi B düz xəttinə nəzərən M nöqtəsinə simmetrik nöqtədir. Onda ∠MXL=∠CXL olar və verilmiş məsələ aşağıdakı məsələyə gətirilər: "AB düz xətti və N, C nöqtələri verilmişdir. AB düz xətti üzərində elə X nöqtəsi tapın ki, ∠NXB=2∠CXA olsun". Bu yeni məsələni həll etmək üçün NX düz xəttini uazadaq. Onda ∠KXL=∠NXB olduğundan ∠KXC=∠CXL alınar. Bu isə XC düz xəttinin KXL bucağının tənböləni olması deməkdir. Beləliklə, axtarılan NX düz xətti (C;LC) çevrəsinin toxunanıdır.

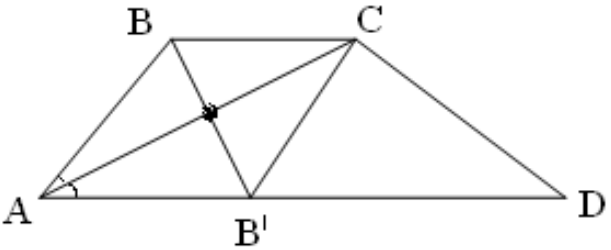
Qurma. AB düz xəttinə nəzərən verilmiş M nöqtəsinə simmetrik C nöqtəsini quraq və (C; LC) çevrəsini çəkək. Sonra N nöqtəsindən bu çevrəyə toxunan quraq. Həmin toxunan AB düz xəttini axtarılan nöqtədə kəsəcəkdir.

İsbat. $\Delta LXC=\Delta CXK$ olduğundan $\angle CXL=\angle CXK$ olur. $\angle NXB=\angle KXL$ və $\angle CXL=\angle MXA$ olmasından $\angle NXB=2\angle MXA$ olduğunu alırıq.

Araşdırma. M və N nöqtələri AB düz xətti üzərində olmadıqda məsələnin həmişə həlli vardır. Verilmiş nöqtədən çevrəyə iki toxunan çəkmək mümkün olduğu üçün məsələnin dörd həlli vardır. M və N nöqtələri AB düz xəttinin müxtəlif tərəflərində olarsa, məsələn, M nöqtəsi C ilə üst-üstə düşərsə, onda qurma aşkardır.

Məsələ. AC diaqonalı A bucağının tənböləni olan və dörd tərəfi verilən ABCD dördbucaqlısını qurun.

Analiz. Tutaq ki, axtarılan ABCD dördbucaqlısı qurulmuşdur. AC düz xəttinə nəzərən B nöqtəsinə simmetrik nöqtə B olsun (şəkil 37). $\angle BAC=\angle DAC$ olduğu üçün B` nöqtəsi AD düz xətti üzərində yerləşəcəkdir. $\Delta B`DC$-də bütün tərəflər məlumdur. Belə ki, DC verilmişdir; B`C=BC; DB`=AD-AB`= =AD-AB

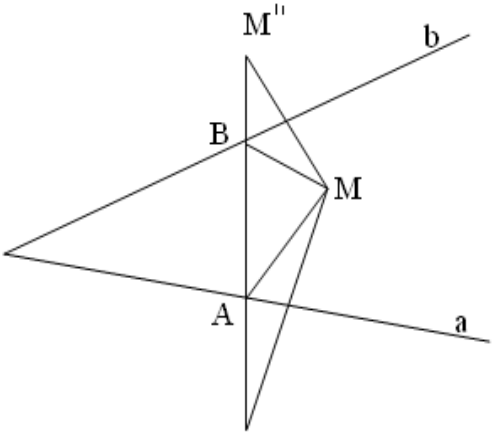


Şəkil 37

Qurma. B`CD üçbucağını qururuq. DB`şüası üzərində DA-ya bərabər parça qururuq. Sonra A ilə C-ni birləşdirib ona nəzərən B`-ə simmetrik B nöqtəsini qururuq.

İsbat. Qurmadan aşkardır.

Araşdırma. AD≠AB olduqda məsələnin yeganə həlli vardır. CD≠CB, AD=AB olduqda həlli yoxdur; CD=CB və AD=AB olduqda sonsuz sayda həlli vardır.



Məsələ. a və b düz xətlərinin əmələ gətirdiyi bucağın daxilində M nöqtəsi verilmişdir. Bucağın tərəfləri üzərində

elə A və B nöqtələri tapın ki, MAB üçbucağının perimetri ən kiçik olsun (şəkil 38).

Analiz. Verilmiş a və b düz xətlərinə nəzərən M nöqtəsinə simmetrik nöqtələr uyğun olaraq M` və M`` olarsa, onda bu bucağın tərəfləri üzərində A və B nöqtələrinin istənilən vəziyyətləri üçün M`A=MA və BM`=BM olar. Onda MAB üçbucağının perimetri M`ABM`` sınıq xəttinin uzunluğuna bərabər olar. Yəni,

$$M'ABM'' = M'A + AB + BM'' = MA + AB + BM$$

Beləliklə, məsələ A və B nöqtələrinin elə vəziyyətinin tapılmasına gətirilir ki, bu halda M`ABM`` sınıq xəttinin uzunluğu ən kiçik olsun. Aydındır ki, onlar M`M`` düz xətti üzərində olduqda mümkündür.

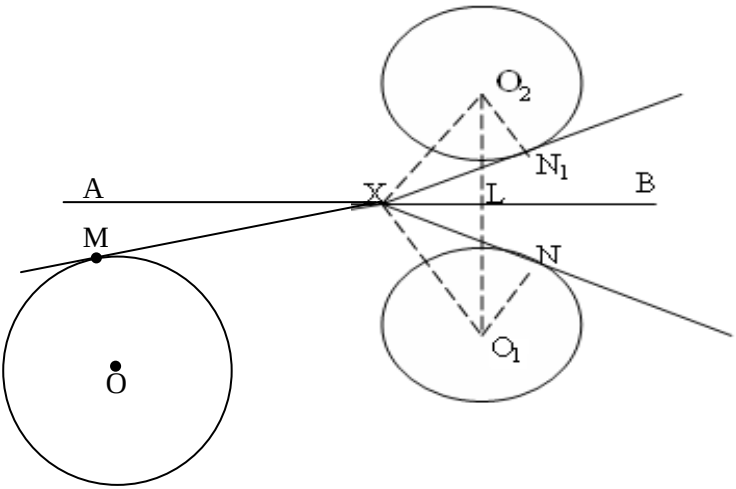
Qurma. a və b düz xətlərinə nəzərən M nöqtəsinə simmetrik uyğun olaraq M` və M`` nöqtələrini qururuq. M`M`` düz xəttini çəkib onun a və b düz xətləri ilə kəsişməsi olan A və B nöqtələrini qururuq. Məsələnin yeganə həlli vardır.

Məsələ. Verilmiş AB düz xətti üzərində elə X nöqtəsi tapın ki, bu nöqtədən verilmiş (O; R) və (O_1; r) çevrələrinə çəkilən toxunanlar AB ilə bərabər bucaqlar əmələ gətirsin (şəkil 39).

Analiz. Tutaq ki, X – axtarılan nöqtə, XM və XN axtarılan toxunanlardır. AB düz xəttinə nəzərən

(O_1; r) çevrəsinə simmetrik (O_2; r) çevrəsini qurub XN_1 toxunanını çəkək. XO_1N və XO_2N_1 üçbucaqlarını nəzərdən keçirək. Bu üçbucaqlar bərabərdir. Onda $XN=XN_1$ və $\angle O_2XN_1=\angle O_1XN$ olur.

$\angle O_1XL=\angle O_2XL$ olduğundan $\angle N_1XL=\angle NXL$ olar. Beləliklə, $\angle AXM=\angle NXL$ alırıq.



Şəkil 39

Qurma. AB düz xəttinə nəzərən (O_1; r) çevrəsinə simmetrik (O_2; r) çevrəsini qururuq. Sonra bu iki çevrənin ortaq toxunanını qururuq. Ortaq toxunanların AB düz xətti ilə kəsişməsi axtarılan X nöqtəsidir.

Yuxarıda həll etdiyimiz məsələlərin həllinə diqqət yetirdikdə orada sınıq xətlərin düz xətlərlə

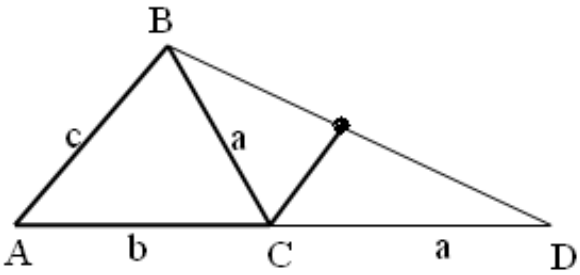
əvəz edildiyini görərik. Başqa sözlə, simmetriya üsulu sınıq xətlərin düz xətlərlə əvəz edilməsinə gətirir. Buna bəzən düzləndirmə üsulu da deyirlər. Bu üsul, xüsusilə, şərtində müəyyən sınıq xətlərin cəmi və ya fərqi verilən məsələlərin həllinə tətbiq edildikdə daha faydalıdır.

Sınıq xətlərin düzləndirilməsi üsulunun tətbiqi ilə bir neçə məsələnin həllini nəzərdən keçirək.

Məsələ. $\angle A=\alpha, c, a+b$ verilənlərinə görə üçbucaq qurun.

Analiz. Tutaq ki, ABC axtarılan üçbucaqdır (şəkil 40). Məsələdə $BC+AC=a+b$ sınıq xətti (BCA) iştirak edir. Onu şəklə daxil etməyə çalışaq. Bunun üçün AC parçasının uzantısı üzərində $CD=BC$ ayırıb B və D nöqtələrinin birləşdirsək BCD üçbucağını alarıq. Bu üçbucaq bərabəryanlı olduğu üçün onun C təpə nöqtəsi BD-nin orta perpendikulyarı üzərində olar.

Qurma. ABD üçbucağında $AB=c$, $AD=a+b$ və $\angle A=\alpha$ məlum olduğu üçün onu qururuq. BD tərəfinin orta nöqtəsindən ona perpendikulyar



qaldıraq. Bu perpendikulyar AD parçasını C nöqtəsində kəsəcəkdir. ABC axtarılan üçbucaqdır.

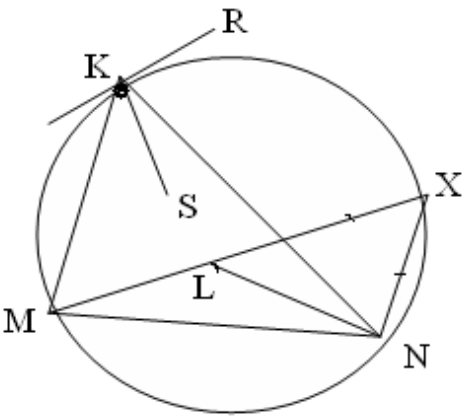
İsbat. Qurmaya görə ∠BAC=α və AB=c-dir. Daha sonra BC+AC=CD+AC=a+b olması aşkardır.

Araşdırma. a+b>c olduqda məsələnin yeganə həlli vardır.

Məsələ. Çevrə və onun üzərində M,N nöqtələri verilmişdir. Bu çevrənin üzərində /MX-NX/=a şərtini ödəyən X nöqtəsini tapın.

Şəkil 40

Analiz. Tutaq ki, X axtarılan nöqtədir (şəkil 41), MXN sınıq xəttini elə düzləndirək ki, məsələnin şərtini ödəsin. Bunun üçün XL=XN ayıraq. L nöqtəsinin vəziyyətini təyin edək. ML=a olduğundan L nöqtəsi (M; a) çevrəsi üzərindədir. Verilmiş çevrəyə MN parçasının MXN=2α bucağı altında görünən nöqtələrin həndəsi yeri kimi baxsaq



Şəkil 41

$\angle LXN = \frac{180^0 - 2\alpha}{2} = 90^0 - \alpha$ və MLN bucağı LNX üçbucağının xarici bucağı olduğundan

$$\angle MLN=\angle LNX+\angle X=90^0-\alpha+2\alpha=90^0+\alpha$$

olar.

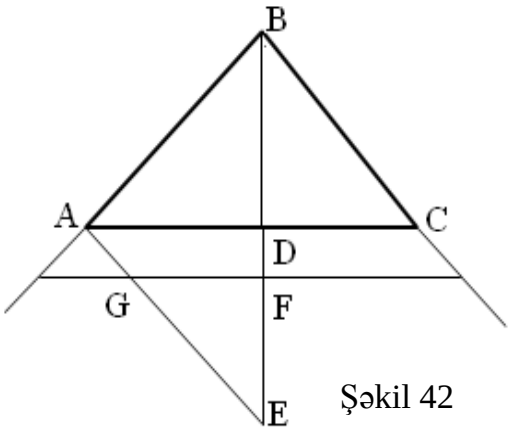
Beləliklə, L nöqtəsi bir tərəfdən (M; a) çevrəsi üzərində, digər tərəfdən isə MN vətərinin $(90^0+\alpha)$ bucağı altında göründüyü nöqtələrin həndəsi yeri olan qövsün üzərindədir.

Qurma. Əvvəlcə $90^0+\alpha$ bucağını quraq. Bunu üçün verilmiş M və N nöqtələrini çevrənin istənilən (məsələn, K) nöqtəsi ilə birləşdirib alınan MKN bucağının yarısına düz bucaq (90^0) əlavə edək. Onda alınan SKR axtarılan bucaq olar. Analizdə göstərilən (M; a) çevrəsi və MN vətərinin $90^0+\alpha=SKR$ bucağı altında göründüyü qövsün kəsişməsi olan L nöqtəsini qururuq. M və L nöqtələrini birləşdirən şüanın çevrə ilə X kəsişmə nöqtəsini qururuq.

İsbat. Qurmadan aşkardır.

Araşdırma. MN $\geq$a olduqda məsələnin yeganə həlli vardır.

Məsələ. a yan tərəfinə və hündürlüklə oturacağın S cəminə görə bərabəryanlı üçbucaq qurun.



Şəkil 42

Analiz. Tutaq ki, ABC axtarılan üçbucaqdır (şəkil 42). Onda AB=BC=a və BD+AC=S olar. Məsələ A nöqtəsinin vəziyyətinin tapılmasına gətirilir. Verilən BD+AC=S cəmini şəklə daxil edək. Bunun üçün BD hündürlüyünün uzantısı üzərində DE=AC ayıraq. Onda aydındır ki, DE=2AD olar və ADE üçbucağının növü məlum olar. AED bucağının tərəflərini istənilən GF||AD düz xətti ilə kəssək, aydındır ki, yenə də EF=2GF alarıq. Bununla qurmanın yolu tapılmış olur.

Qurma. İstənilən GFE düz bucağı qurub FE=2FG ayıraq. (B; a) çevrəsi çəkib onun EG ilə A kəsişmə nöqtəsini quraq. Sonra A nöqtəsindən EF düz xəttinə AD perpendikulyarı çəkib onun (B; a) çevrəsi ilə C kəsişmə nöqtəsini quraq. ABC axtarılan üçbucaqdır.

Simmetriya üsulu ilə həll edilən məsələlər

1. MN düz xətti AB parçasını kəsir. MN düz xətti üzərində elə X nöqtəsi tapın ki, MN düz xətti AXB bucağının tənböləni olsun.
2. a+b, c və h_a verilənlərinə görə üçbucaq qurun.
3. Diaqonallarından biri verilmiş r parçasına bərabər olub a düz xətti üzərində, qalan iki təpəsi uyğun olaraq verilmiş b və c düz xətləri üzərində olan romb qurun. Əvvəlcə verilmiş a düz xəttinə nəzərən b-yə simmetrik b` düz xəttini qurun. b` və c düz xətlərinin kəsişməsindən C təpə nöqtəsini, ona simmetrik B təpə nöqtəsini qurun. BC düz xətti ilə a düz xəttinin O kəsişmə nöqtəsindən $\frac{r}{2}$ məsafədə A və D təpə nöqtələrini qurun. ABCD axtarılan romb olar.
4. MN düz xətti AB parçasını C nöqtəsində kəsir. MN düz xətti üzərində elə X nöqtəsi tapın ki, AC və BC parçaları bu nöqtədən bərabər bucaqlar altında görünsün. MN düz xəttinə nəzərən A(və ya B) nöqtəsinə simmetrik A` (və ya B`) nöqtəsini qurun.
5. MN düz xətti və onun müxtəlif tərəflərində A və B nöqtələri verilmişdir. MN düz xətti üzərində elə C nöqtəsi tapın ki, bu nöqtədən A və B nöqtələrinə qədər məsafələrin fərqi ən böyük olsun.

6. A, h_a və 2p verilənlərinə görə üçbucaq qurun. BAC sınıq xəttini EBCF düz xəttinə elə düzləndirin ki, EB+BC+CF=2p olsun. $\angle EAF = 90^0 + \frac{A}{2}$ olduğundan A nöqtəsi iki həndəsi yerin kəsişməsi kimi tapıla bilər.
7. Perimetrinə və diaqonallarının fərqinə görə romb qurun.
8. b,c və B-C verilənlərinə görə üçbucaq qurun. BC parçasının orta perpendikulyarına nəzərən A`CB üçbucağına ACB-nin simmetriyası kimi baxın.
9. $(O_1; r)$, $(O_2; r_2)$ çevrələri və a düz xətti verilmişdir. İki qarşı təpəsi a düz xətti üzərində, digər iki təpə nöqtələri isə uyğun olaraq $(O_1; r_1)$ və $(O_2; r_2)$ çevrələri üzərində olan kvadrat qurun. Tutaq ki, ABCD axtarılan elə kvadratdır ki, $B \in a, D \in a, A \in (O_1; r_1), C \in (O_2; r_2)$. c düz xəttinə nəzərən $(O_1; r_1)$ çevrəsinə simmetrik $(O_1`; r_1)$ çevrəsini qurun. Bu simmetriyada C nöqtəsi A nöqtəsinə inikas edir. Yəni, A nöqtəsi $(O_2; r)$ çevrəsi ilə $(O_1`; r_1)$ çevrəsinin kəsişməsidir.
10. Oturacağı verilmiş AOB bucağının OA tərəfi üzərində, M təpə nöqtəsi OB tərəfi üzərində, yan tərəfləri isə bucağın daxilində verilmiş P və Q nöqtələrindən keçən bərabəryanlı üçbucaq qurun. OB şüasına nəzərən P nöqtəsinə simmetrik P`

nöqtəsini qurub P`MO bucağını AOB bucağı ilə ifadə edin.

11. Verilmiş düz xətt üzərində elə X nöqtəsi qurun ki, bu nöqtədən $(O_1;r)$ və $(O_2;r_2)$ çevrələrinə çəkilən müxtəlif toxunanların əmələ gətirdiyi bucağın tənbölənlərindən biri həmin düz xəttin üzərinə düşsün. Verilmiş düz xəttə nəzərən $(O_2; r_2)$ çevrəsinə simmetrik $(O_2`; r_2)$ çevrələrinin ümumi toxunanını qurun.

1.4.2.3. Mərkəzi simmetriya

O nöqtəsindən fərqli müstəvinin hər bir X nöqtəsi elə X` nöqtəsinə çevrilir ki, O nöqtəsi XX` parçasının orta nöqtəsi olur, XO=OX`. Müstəvinin belə çevrilməsi O mərkəzinə nəzərən simmetriya adlanır. Bu çevrilmə verilmiş O mərkəzinə nəzərən X nöqtəsinə simmetrik X` nöqtəsini asanlıqla qurmağa imkan verir.

Qeyd edək ki, mərkəzi simmetriyaya dönmə çevrilməsinin xüsusi halı kimi baxmaq olar. Belə ki, O nöqtəsi ətrafında 180^0 dönmə mərkəzi simmetriyanı verir. Bundan başqa mərkəzi simmetriya O mərkəzli və K=-1 əmsallı homotetiyadır.

Mərkəzi simmetriyanın xassələrini nəzərdən keçirək:

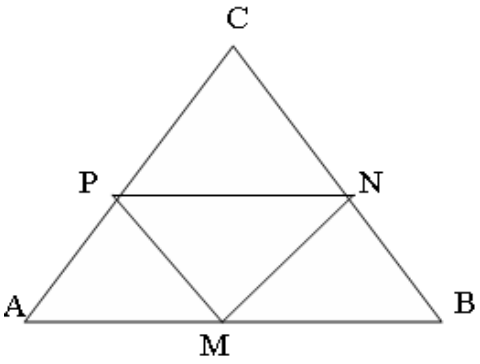
1. Mərkəzi simmetriya yerdəyişmədir.
2. Mərkəzi simmetriyanın tərsi olan inikas bu simmetriyanın özüdür.
3. Simmetriya mərkəzindən keçən hər bir düz xətt özünə inikas edir.

Məsələ həllində mərkəzi simmetriya çox vaxt tamamilə bütün çertyoja deyil, yalnız onun bir hissəsinə tətbiq edilir. Bu zaman məsələnin həlli üçün əvvəlkinə nisbətən daha əlverişli olan yeni çertyoj alına bilər.

Fikrimizi bir neçə məsələnin həlli üzərində aydınlaşdıraq.

Məsələ. Tərəflərinin verilmiş orta nöqtələrinə (üç nöqtəyə) görəüçbucaq qurun.

Analiz. Tutaq ki, tələb edilən ABC üçbucağı qurulmuşdur (şəkil 43). M, N və P nöqtələri verilmiş nöqtələrdir. Yəni, AM=MB, BN=NC və CP=PA-dir. Onda A və B nöqtələri M mərkəzinə, B və C nöqtələri N mərkəzinə, C və A nöqtələri isə P mərkəzinə nəzərən simmetrik olar. Digər tərəfdən P və N nöqtələri AC və BC tərəflərinin orta nöqtələri olduğu üçün PN parçası



Şəkil 43

ABC üçbucağının orta xətti olur. Onda PN||AB və PN=AM=MB olar. Analoji qayda ilə digər tərəflər üçün də həmin mühakiməni aparmaq olar. Beləliklə, AMNP, MPNB və MPCN dördbucaqlılarının qarşı tərəfləri cüt-cüt paralel olduğu üçün paraleloqramdır. Buradan məsələnin həlli yolu aşkardır.

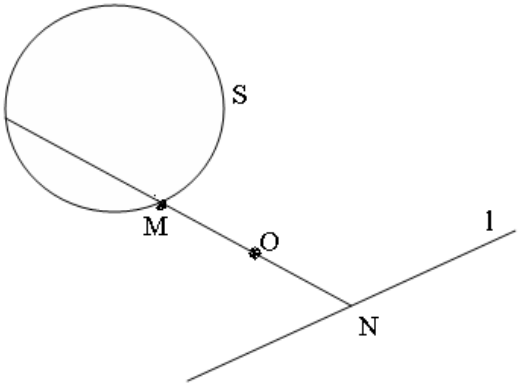
Qurma. Verilmiş M, N və P nöqtələrini birləşdirib MNP üçbucağını qururuq. Sonra M nöqtəsindən PN-ə paralel düz xətt çəkib onun üzərində M nöqtəsindən müxtəlif tərəflərdə MA=MB=PN parçası ayıraraq üçbucağın A və B təpələrini qururuq. Analoji qayda ilə, P nöqtəsindən MN-ə paralel düz xətt çəkib onun üzərində PA=PC=MN ayırıb üçbucağın C təpə nöqtəsini qururuq.

İsbat. Qurmaya görə AB||PN və MA=MB=PN-dir. Deməli, M nöqtəsi AB tərəfinin orta nöqtəsidir. Digər tərəflər üçün də bunun kimi mühakimə aparılır.

Araşdırma. M, N və P nöqtələri bir düz xətt üzərində olmadıqda məsələnin yeganə həlli vardır.

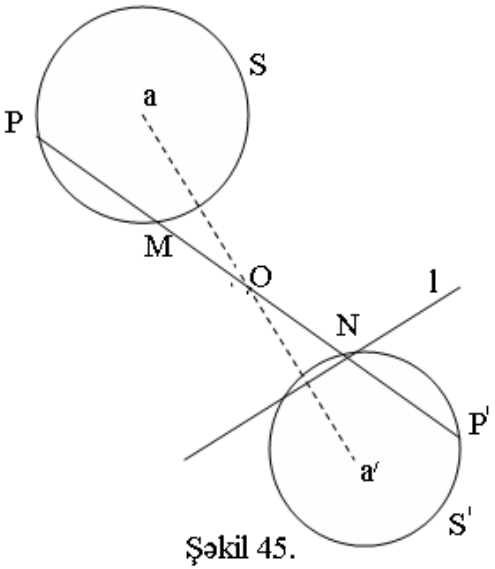
Məsələ. Verilmiş O nöqtəsindən elə düz xətt keçirin ki, bu düz xəttin verilmiş L düz xətti və verilmiş çevrəsi arasındakı parçası O nöqtəsində yarı bölünsün.

Həlli. Şəkil 44-dən göründüyü kimi, M nöqtəsi O mərkəzinə nəzərən N-ə simmetrik nöqtə kimi alınır. M nöqtəsi S çevrəsi üzərində olduğundan N nöqtəsi O nöqtəsinə nəzərən S çevrəsinə simmetrik S` çevrəsi üzərində olar. Deməli, N nöqtəsi S` çevrəsi və l düz xəttinin kəsişmə nöqtəsidir.



Şəkil 44

Aparılan mülahizə məsələnin həlli yolunu tapmağa imkan verir.



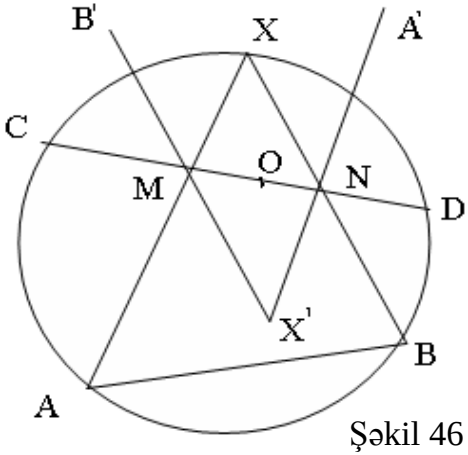
Şəkil 45.

O nöqtəsinə nəzərən S çevrəsinə simmetrik S` çevrəsini qururuq. S` çevrəsi və l düz xəttinin kəsişmə nöqtəini N ilə işarə edək (şəkil 45). Bu simmetriyada obrazı N olan nöqtəni M ilə işarə edək. Onda MN axtarılan düz xətt olar.

S` çevrəsinin l düz xətti ilə iki kəsişmə nöqtəsi olduğundan məsələnin iki həlli ola bilər.

Məsələ. Çevrənin kəsişməyəm AB, CD vətərləri və CD vətəri üzərində O nöqtəsi verilmişdir. Çevrə üzərində elə X nöqtəsi qurun ki, bu çevrənin AX və BX vətərlərinin CD vətərindən ayırdığı MN parçası O nöqtəsində yarıya bölünsün.

Analiz. Tutaq ki, axtarılan X nöqtəsi qurulmuşdur (şəkil 46). O nöqtəsinə nəzərən A, B və X nöqtələrinə simmetrik nöqtələri uyğun olaraq A`, B1 və X` ilə işarə etsək, $\angle A`NB=180^0-\angle AXB$ alarıq. A`NB bucağını məlum hesab etsək, BA` parçasının $\angle A`NB=180^0-\angle AXB$ bucağı altında göründüyü nöqtələrin həndəsi yeri olan qövsü qurmaq olar. N nöqtəsi bu qövs ilə CD vətərinin kəsişməsi kimi qurula bilər. N nöqtəsi qurulduqdan sonra BN şüasının verilmiş çevrə ilə X kəsişmə nöqtəsi tapıla bilər.



Şəkil 46

Mərkəzi simmetriyaya aid qurma məsələləri

1. İki qarşı təpəsi verilmiş nöqtələrdə, üçüncü təpəsi verilmiş çevrə üzərində, dördüncü təpəsi isə verilmiş düz xətt üzərində olan paraleloqram qurun.
2. BM medianına və ABM, CBM üçbucaqlarının xaricinə çəkilən çevrələrin radiuslarına görə ABC üçbucağını qurun.
3. AB tərəfi, AM nedianı və BH hündürlüyünə görə ABC üçbucağını qurun.

4. AB tərəfi, AM medianı və CH hündürlüyünə görə ABC üçbucağını qurun.
5. Çevrə üzərində A və B nöqtələri, l düz xətti üzərində isə M nöqtəsi verilmişdir. çevrə üzərində elə X nöqtəsi tapın AX və BX düz xətləri l düz xəttini M nöqtəsindən bərabər məsafədə olan nöqtələrdə kəssin.
6. İki çevrənin kəsişmə nöqtəsindən rlə düz xətt keçirin ki, çevrələr bu düz xətdən bərabər vətərlər ayırsın.
7. Verilmiş A nöqtəsindən elə düz xətt keçirin ki, onun verilmiş iki çevrə arasında qalan parçası A nöqtəsində yarıya bölünsün.
8. Mərkəzi verilmiş O nöqtəsində, A, B, C, D təpələri isə verilmiş a, b, c, d düz xətləri üzərində olan ABCD paraleloqramı qurun.
9. S_1 və S_2 çevrələrinin A kəsişmə nöqtəsindən elə düz xətt keçirin ki, çevrələr bu düz xətdən bərabər vətərlər ayırsın. A nöqtəsinə nəzərən S_1 çevrəsinə simmetrik S_1` çevrəsini qurun. $S_1$` və S_2 çevrələrinin kəsişmə nöqtəsindən çəkilən düz xətt axtarılan düz xətt olar.
10. ABC bucağı və onun daxilində M nöqtəsi verilmişdir. Uc nöqtələri bucağın tərəfləri üzərində, orta nöqtəsi isə M nöqtəsi ilə üst-üstə düşən parçanı qurun. M nöqtəsinə nəzərən

bucağın tərəflərinə simmetrik düz xətlər qurub bir diaqonalı M nöqtəsindən keçən paraleloqram qurun.

11. Bucaq və onun daxilində A, B nöqtələri verilmişdir. Qarşı təpələri verilmiş A və B nöqtələrində, digər təpələri bucağın tərəfləri üzərində olan paraleloqram qurun. AB parçasının orta nöqtəsini O ilə işarə etsək O nöqtəsi CD parçasının orta nöqtəsi olan bucağın tərəfləri üzərində C və D nöqtələrini qurun.
12. İki konsentrik S_1 və S_2 çevrələri verilmişdir. Çevrələri kəsən elə düz xətt çəkin ki, çevrələr bu düz xətdən üç bərabər parça ayırsın. S_1 kiçik çevrə üzərində ixtiyari X nöqtəsini qeyd edin. X nöqtəsinə nəzərən S_1 çevrəsinə simmetrik S_1` çevrəsini qurub $S_1$` ilə S_2 çevrələrinin Y kəsişmə nöqtəsini qurun. XY – axtarılan parça olar.

1.4.2.4. Dönmə

Müstəvinin verilmiş O mərkəzi ətrafında verilmiş istiqamətdə φ bucağı qədər dönməsi müstəvi nöqtələrinin elə çevrilməsinə deyilir ki, bu zaman O nöqtəsindən fərqli hər bir M nöqtəsi OM=OM` və ∠MOM`=φ olmaqla M` nöqtəsinə inikas edir. Müstəvinin O nöqtəsi isə özünə inikas edir. Dönmə, O mərkəzi və müəyyən istiqamətdə φ dönmə bucağı ilə

təyin edilir. Adətən, saat əqrəbi hərəkətinin əks istiqamətindəki dönməni müsbət qəbul edirlər.

Dönmənin aşağıdakı xassələrini qeyd edək:

1. Dönmə yerdəyişmədir. Yəni, dönmə zamanı nöqtələr arasındakı məsafələr saxlanılır.
2. Dönmənin tərs inikası, mərkəzi həmin O nöqtəsi olan, eyni bucaq qədər, lakin əvvəlki ilə əks istiqamətli dönmədir.

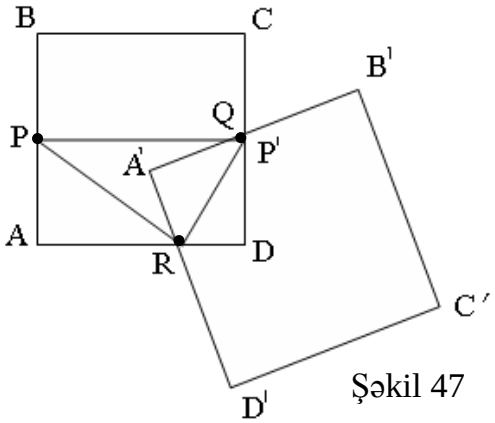
Dönmə çevrilməsində hər bir F fiquru ona bərabər F` fiquruna inikas edir.

Həndəsədə dönmə çevrilməsindən daha çox istifadə olunur. Qurma məsələlərinin həllində dönmə çevrilməsindən istifadə olunması məsələ həllinin dönmə üsulu adlanır. Bu üsulun mahiyyətini qısa şəkildə izah edək.

Qurma məsələləri həllində bəzən bərabər parçaların və bucaqların üst-üstə salınması, məsələdə verilənlərin şəklə daxil edilməsi və fiqurun müxtəlif hissələrinin yaxınlaşdırılması paralel köçürmə ilə yerinə yetirilə bilmir. Belə olduqda bir sıra məsələlərin həlli üçün fiquru (və ya onun bir hissəsini) müəyyən nöqtə ətrafında müəyyən bucaq qədər döndərmək əlverişli olur. Dönmə mərkəzi və dönmə bucağının düzgün seçilməsi dönmə üsulu ilə məsələ həllinin əsasını təşkil edir.

Dönmə üsulunun həndəsədən qurma məsələləri həllinə tətbiqlərini nümayiş etdirək.

Məsələ. Verilmiş kvadratın daxilinə bir təpəsi kvadratın tərəfi üzərində verilmiş nöqtədə olan bərabərtərəfli üçbucaq çəkin.



Şəkil 47

Analiz. Tutaq ki, məsələ həll edilmişdir. Verilmiş ABCD kvadratının daxilinə R təpəsi verilmiş nöqtədə olan bərabərtərəfli PQR üçbucağı çəkilmişdir (şəkil 47). $\angle P=\angle Q=\angle R=60^0$ olduğundan R nöqtəsi ətrafında 60^0 bucaq qədər fırlanma RP tərəfini RQ tərəfinə və P təpəsini Q təpəsinə inikas edir. Digər tərəfdən həmin fırlanma ABCD kvadratını P nöqtəsinin obrazı olan P` nöqtəsindən keçən tərəfi A`B` olan A`B`C`D` kvadratına inikas edir.

Qurma. Mərkəzi R nöqtəsi olan 60^0-li bucaq qədər fırlanmanı icra edək. Bu fırlanmanı axtarılan PQR üçbucağının P təpə nöqtəsini üzərində saxlayan AB təpəfi üçün icra etmək kifayətdir. Bunun üçün A və B nöqtələrinin inikas olunduğu A və B nöqtələrini

qururuq. A`B` və CD parçalarının Q kəsişmə nöqtəsi axtarılan üçbucağın ikinci təpə nöqtəsidir. Deməli, R və Q nöqtələri məlum olunduqdan sonra RQ düz xətti ilə 60^0-li bucaq əmələ gətirən RP düz xətti çəkməklə bərabərtərəfli üçbucağın üçüncü P təpə nöqtəsini asanlıqla qurmaq olar.

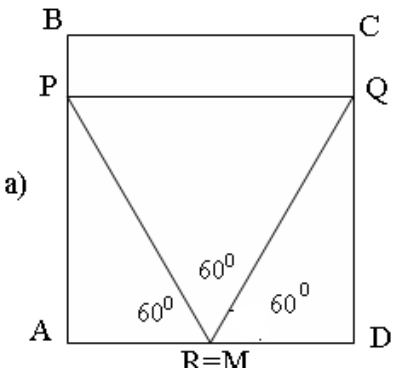
İsbat. P nöqtəsinin R nöqtəsi ətrafında 60^0 bucaq qədər fırlanmasından Q nöqtəsi alınır. Onda aydındır ki, RP=RQ olur. Beləliklə, PQR üçbucağının R təpə bucağı 60^0 olan bərabəryanlı üçbucaq olduğunu alırıq. Bu isə PQR üçbucağının bərabərtərəfli olması deməkdir.

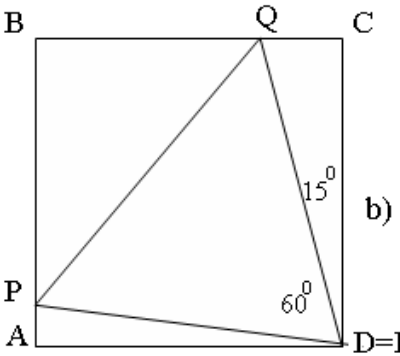
Araşdırma. R nöqtəsinin tərəf üzərindəki vəzyyətindən asılı olaraq üçbucağın P və Q təpə nöqtələrinin vəziyyəti dəyişəcəkdir. Məsələni MD aralığı üçün araşdırmaq kifayətdir. Burada ABCD kvadratının AD tərəfinin orta nöqtəsi M ilə işarə olunmuşdur. R nöqtəsi AD tərəfi üzərində MA parçasına daxil olduğu halda məsələ tamamilə buna simmetrik şəkil alır.

Hər şeydən qabaq asanlıqla göstərmək olar ki, R nöqtəsi MD aralığında istənilən nöqtə olduqda A`B` parçası ABCD kvadratını bir nöqtədə kəsir. Bu A` nöqtəsinin kvadratın daxilində, B` nöqtəsinin isə onun xaricində yerləşməsindən alınır. AB tərəfi M nöqtəsi ətrafında 60^0 fırlandıqda AA`D yarımçevrəsi

kvadratın daxilində qalır. Digər tərəfdən, B` nöqtəsi (M; MB) çevrəsi üzərindədir və B və C nöqtələri istisna olmaqla bu çevrə kvadratın xaricində yerləşir. Beləliklə, ABCD kvadratına nəzərən A` nöqtəsi daxili, B` isə xarici nöqtədir.

R nöqtəsi M ilə üst-üstə düşdükdə PQR üçbucağını şəkil 48a-da göstərildiyi kimi, R nöqtəsi D ilə üst-üstə düsdüvü halda isə səkil 48b-də

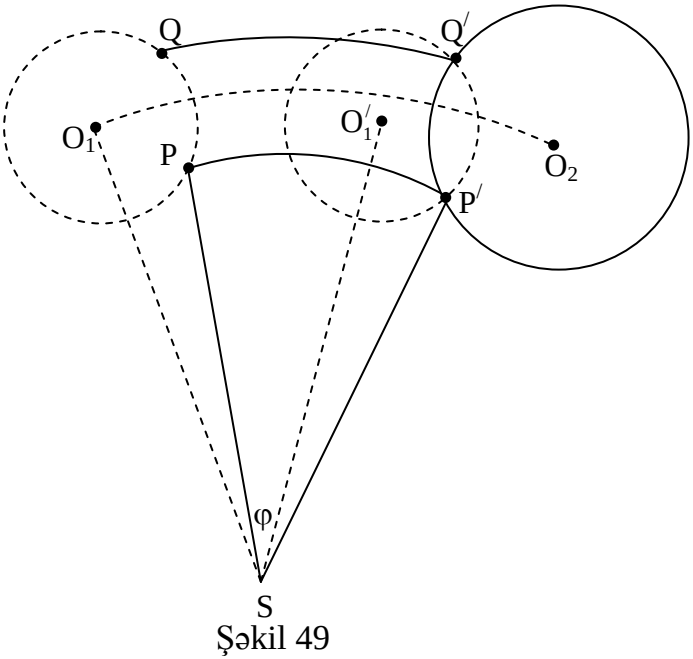




Şəkil 48

Deməli, R nöqtəsi MD parçasında dəyişdikdə P nöqtəsi AB parçasında dəyişir; Q nöqtəsi isə əvvəlcə DC parçasında, sonra isə BC parçasında dəyişir. Buradan aydındır ki, R nöqtəsinin AD tərəfi üzərində müxtəlif vəziyyətləri üçün məsələnin həmişə həlli var və bu həll yeganədir.

Məsələ. $(O_1;r)$, $(O_2;R)$ çevrələri və S nöqtəsi verilmişdir. S nöqtəsi mərkəz olmaqla elə çevrə çəkin ki, onun verilmiş çevrələrlə kəsişməsindən alınan qövsü verilmiş nöqtədən verilmiş bucaq altında görünsün.



Şəkil 49

Analiz. Tutaq ki, $(O_1;r)$ və $(O_2;R)$ verilmiş çevrələr, S isə verilmiş nöqtədir. $\cup PP`$ axtarılan qövs və $\angle PSP`=\varphi$ verilmiş bucağa bərabər olsun (şəkil 49). $(O_1;r)$ çevrəsini S nöqtəsi ətrafında φ bucağı qədər fırlandırsaq, o, yenə $(O_1`;r)$ vəziyyətini alar. Bu fırlanmada $(O_1;r)$ çevrəsinin P nöqtəsi $(O_2;R)$ çevrəsinin P` nöqtəsinə inikas edər. Digər tərəfdən, P` nöqtəsi fırlanmadan alınan $(O_1`;r)$ çevrəsi üzərində olmalıdır. Beləliklə, axtarılan P` nöqtəsi $(O_1`;r)$ və $(O_2;R)$ çevrələrinin kəsişməsidir.

Qurma. Verilmş $(O_1;r)$ çevrəsini S nöqtəsi ətrafında verilmiş φ bucağı qədər fırlandırıb $(O_1`;r)$ çevrəsini quraq. Onda $(O_1`;r)$ və $(O_2;R)$ çevrələrinin kəsişmə nöqtələri məsələnin həllidir. Bizim şəkildə həmin çevrələr P` və O` nöqtələrində kəsişir. S nöqtəsindən (S; SP`) və (S; SQ`) çevrələrini çəkib $\cup PP`$ və $\cup QQ`$ qövslərini qururuq.

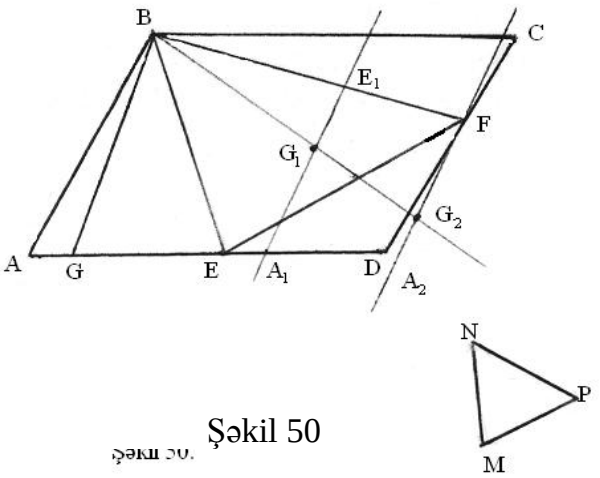
İsbat. P və Q nöqtələri S nöqtələri ətrafında φ bucağı qədər fırlanmada uyğun olaraq P` və Q` nöqtələrinə inikas olduğundan PP` və QQ` tələb olunan qövslərdir.

Araşdırma. Məsələ şərtində fırlanmanın istiqaməti göstərilmədiyi üçün $(O_1;r)$ çevrəsini S nöqtəsi ətrafında həm müsbət, həm də mənfi istiqamətdə fırlandırmaq olr. Məsələnin onda və yalnız onda həlli vardır ki, $(O_1`;r)$ çevrəsinin obrazı

ilə $(O_2;R)$ çevrəsinin kəsişməsi olsun. Həmin çevrələrin kəsişmə nöqtələrinin sayı məsələnin həlləri sayına bərabərdir.

Məsələ. Verilmiş ABCD paraleloqramının daxilinə verilmiş MNP üçbucağına oxşar olan EBF üçbucağı çəkin.

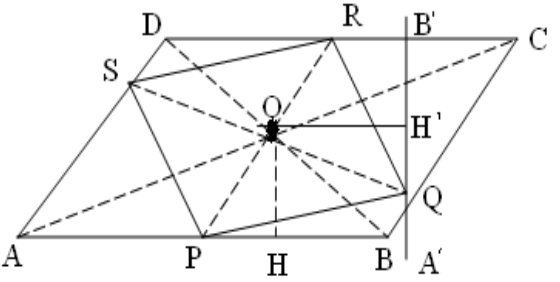
Analiz. Tutaq ki, NP:NM=K, ∠MNP=α və EBF axtarılan üçbucaqdır (şəkil 50), paraleloqramın AD tərəfini B nöqtəsi ətrafında A-dan C-yə doğru α bucağı qədər fırlandıraq.



Şəkil 50

Onda E nöqtəsi BF düz xətti üzərində E_1 nöqtəsinə inikas edər. Bundan başqa B nöqtəsini oxşarlıq mərkəzi seçib AD parçasının uzunluğunu K mütənasiblik əmsalına vursaq E_1 nöqtəsi CD düz xətti üzərindəki F nöqtəsinə inikas edər.

Qurma. AD parçasını B nöqtəsi ətrafında α bucağı qədər döndərək və alınan parçanın uzunluğunu K-ya vuraq. Bunun üçün ixtiyari BG parçasını seçib bucağına bərabər GBG_1 bucaq quraq. Sonra GBG_1 bucağının BG_1 tərəfi üzərində $BG_1=BG$ ayırıb BGA bucağına bərabər BG_1A_1 bucağını quraq. Onda A_1G_1 düz xəttini alarıq. BG_1 düz xətti üzərində BG_2 : $BG_1=K$ olmaqla G_1 nöqtəsini müəyyən edib $A_2G_2 \| A_1G_1$ çəkək. Bu zaman $F=A_2G_2 \cap CD$ qururuq. Bundan sonra $\angle FBE=\alpha$ qurmaqda AD parçası üzərində E nöqtəsini tapırıq. Asanlıqla göstərmək olar ki, EBF məsələ şərtində tələb edilən üçbucaqdır.



Məsələ. Verilmiş ABCD paraleloqramının daxilinə kvadrat çəkin.

Analiz. Tutaq ki, ABCD verilmiş paraleloqram, PQRS isə axtarılan kvadratdır (şəkil 51).

Şəkil 51

Məlumdur ki, paraleloqramın diaqonallarının O kəsişmə nöqtəsi onun simmetriya mərkəzidir. Paraleloqramın qarşı tərəfləri bu nöqtəyə nəzərən simmetrik olduqlarından O nöqtəsindən keçən

istənilən düz xəttin bu tərəflər arasında qalan parçası O nöqtəsində yarıya bölünür. Kvadratın PR və SQ diaqonalları da kəsişmə nöqtəsində yarıya bölündüyü üçün bu nöqtə paraleloqramın diaqonallarının kəsişmə nöqtəsi ilə üst-üstə düşür.

İndi ABCD paraleloqramını O nöqtəsi ətrafında saat əqrəbi hərəkətinin əksi istiqamətdə 90^0 fırlandırsaq, P nöqtəsi Q-nün üzərinə düşər. Bu zaman P nöqtəsindən keçən AB düz xətti Q nöqtəsindən keçən A`B` düz xəttinə inikas edər. A`B` düz xəttini qurmaq üçün OH⊥AB və OH`⊥OH ayırmaq və H` nöqtəsindən A`B`⊥OH` çəkmək lazımdır. Bununla da, axtarılan kvadratın Q təpə nöqtəsi A`B` düz xətti ilə paraleloqramın BC tərəfinin kəsişməsi kimi tapılar. Sonra QO şüasını çəkib S=QO∩AD nöqtəsini qurmaqla axtarılan kvadratın QS diaqonalını qururuq. Daha sonra O nöqtəsindən PR⊥QS çəkib kvadratın P və R təpə nöqtələrini qurmaq olar.

Dönməyə aid qurma məsələləri

1. Verilmiş paraleloqramın daxilinə kvadrat çəkin.
2. Bir təpəsi verilmiş çevrə üzərində, digəri verilmiş düz xətt üzərində, üçüncü təpəsi isə verilmiş A nöqtəsində olan bərabərtərəfli üçbucaq qurun.

Göstəriş. Mərkəzi A nöqtəsində olmaqla 60^0 bucaq qədər dönməni nəzərdən keçirin.

3. İki çevrə və l düz xətti verilmişdir. İki təpəsi verilmiş çevrələr üzərində, üçüncü təpədən çəkilən hündürlüyü isə l düz xətti üzərinə düşən bərabərtərəfli üçbucaq qurun.
4. Mərkəzinə və iki paralel tərəfləri üzərində verilmiş iki nöqtəsinə görə kvadrat qurun.

Göstəriş. Kvadratın mərkəzi ətrafında 180^0 bucaq qədər dönməyə baxın.

5. l_1, l_2, l_3 müxtəlif düz xətləri paralel, l isə onlara paralel deyildir. Təpə nöqtələri l_1, l_2, l_3 düz xətləri üzərində, mərkəzi isə l düz xətti üzərində olan bərabərtərəfli üçbucaq qurun.

Göstəriş. Əvvəlcə təpələri l_1, l_2, l_3 düz xətləri üzərində olan hər hansı bərabərtərəfli üçbucaq qurun. Sonra paralel köçürmə ilə onun mərkəzini l düz xətti üzərinə gətirin.

6. O nöqtəsi və ondan keçməyən a və b düz xətləri verilmişdir. O nöqtəsi mərkəz olmaqla elə çevrə çəkin ki, onun verilmiş düz xətlər arasında qalan qövsü O nöqtəsindən verilmiş α iti bucağı altında görünsün.

Verilmiş a və b düz xətləri arasındakı qövsün uc nöqtələri uyğun olaraq A və B olarsa, $\angle AOB=\alpha$ olar və a düz xəttinin O nöqtəsi ətrafında α bucağı qədər

fırlanması A nöqtəsini B nöqtəsinə inikas edir. Beləliklə, B nöqtəsini a düz xəttinin obrazı ilə b düz xəttinin kəsişməsi kimi tapın.

7. $(O_1;r)$, $(O_2;r_2)$ çevrələri və A nöqtəsi verilmişdir. $x \in (O_1';r_1), y \in (O_2;r_2)$ olmaqla elə x və y nöqtələri qurun ki, A nöqtəsi XY parçasının orta nöqtəsi olsun.
8. Verilmiş a və b düz xətləri üzərində verilmiş üçüncü c düz xəttinə nəzərən simmetrik olan iki nöqtə qurun.
9. İti bucaqları verilmiş çevrələr üzərində, düz bucaq təpəsi verilmiş nöqtədə olan bərabəryanlı düzbucaqlı üçbucaq qurun.
10. Təpələrindən hər biri verilmiş üç a, b, c paralel düz xətlərdən birinin üzərində olan kvadrat qurun.

Göstəriş. B düz xətti üzərində götürülmüş A nöqtəsi ətrafında 90^0 bucaq qədər dönməni nəzərdən keçirin.

11. Üç konsentrik çevrə verilmişdir. Təpələri bu çevrələr üzərində olan bərabərtərəfli üçbucaq qurun.
12. Düz bucaq təpəsi verilmiş A nöqtəsində, iti bucaq təpələrindən biri verilmiş düz xətt üzərində, digəri isə verilmiş çevrə üzərində olan bərabəryanlı düzbucaqlı üçbucaq qurun.

13. Verilmiş çevrə daxilinə iti bucağına və katetlərindən birinin üzərindəki verilmiş A nöqtəsinə görə düzbucaqlı üçbucaq çəkin.
14. Verilmiş çevrə xaricinə tərəflərindən biri verilmiş A nöqtəsindən keçən bərabərtərəfli üçbucaq çəkin.
15. Verilmiş nöqtədən keçən və uc nöqtələri verilmiş konsentrik çevrələr üzərində olub çevrələrin mərkəzindən verilmiş bucaq altında görünən parça çəkin.
16. Çevrə və iki A, B nöqtələri verilmişdir. Bu çevrəyə elə l toxunanı çəkin ki, A nöqtəsindən l düz xəttinə paralel, A və B nöqtələrindən l-ə perpendikulyar düz xətlər çəkdikdə bu düz xətlərin kəsişməsindən kvadrat alınsın.
17. A, B, C nöqtələri və uyğun olaraq A və B nöqtələrindən keçən a və b düz xətləri verilmişdir. a və b düz xətləri üzərində elə X və Y nöqtələri qurun ki, AX=BY olsun və XY parçası C nöqtəsindən verilmiş bucaq altında görünsün.
18. Təpələrindən biri O nöqtəsi ilə üst-üstə düşən və qalan iki təpəsi verilmiş iki çevrə üzərində olan bərabərtərəfli üçbucaq qurun.

1.4.2.5. Oxşarlıq və homotetiya

Məsafələri eyni bir K>O nisbətində dəyişməklə F fiqurunun F` fiquruna inikası varsa. F` fiquru F

fiquruna oxşardır. $F' \overset{K}{\infty} F$ yazılışı F` fiqurunun F fiquruna k oxşarlıq əmsalı ilə oxşar olduğunu göstərir.

Verilmiş fiqura oxşar fiqurun qurulması məsələsi bizi müstəvinin özünə yeni inikasına gətirir. Bu inikas homotetiya adlanır.

Mərkəzi O və əmsalı K≠O olan homotetiya müstəvinin özünə elə inikasına deyilir ki, burada ixtiyari X nöqtəsinin X` obrazı üçün $\bar{OX'} < K\vec{OX}$ bərabərliyi doğrudur. Mərkəzi O və əmsalı K olan homotetiyanı H_o^k kimi işarə edirlər.

Homotetiyanın aşağıdakı xassələrini göstərmək olar:

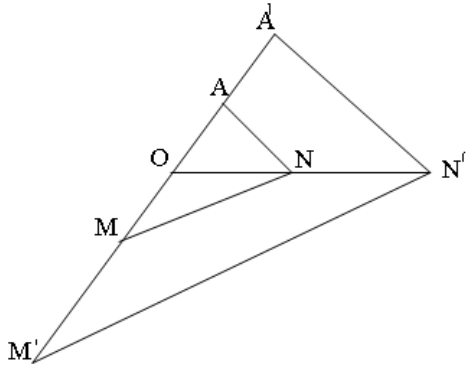
1. Homotetik fiqurlar oxşardır.
2. Əmsalı K olan homotetiyanın tərsi olan inikas mərkəzi həmin nöqtədə, əmsalı isə $K^{-1} = \frac{1}{K}$ olan homotetiyadır.
3. Müsbət əmsallı homotetiyada hər bir şüa özü ilə eyni istiqamətli şüaya, mənfi əmsallı homotetiyada isə əks istiqamətli şüaya inikas olunur.
4. Homotetiyada istənilən düz xətt (parça) özünə paralel düz xəttə (parçaya), bucaq isə özünə bərabər bucağa inikas olunur.

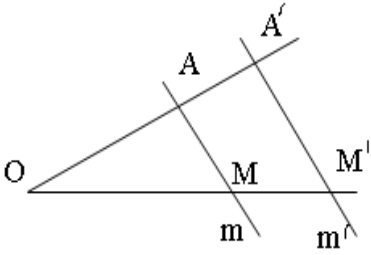
5. O, A və A_1 kimi üç nöqtə bir düz xətt üzərindədirsə, onda A nöqtəsini A_1 nöqtəsinə inikas edən O mərkəzli yeganə homotetiya var.

Həndəsədən qurma məsələlərinin bir çoxunda məsələnin şərtini elə iki hissəyə ayırmaq mümkün olur ki, bu hissələrdən biri axtarılan fiqurun formasını, digəri isə onun ölçülərini tamamilə müəyyən edir. Ona görə də oxşarlıq metodu ilə məsələ həll etdikdə əvvəlcə həll ediləcək məsələnin şərtlərindən birini kənara qoyub yerdə qalan şərtləri ödəyən fiqur qurulur. Sonra isə oxşar çevirmənin köməyi ilə qurulmuş fiqura oxşar olan və kənara qoyulmuş şərti ödəyən fiqur axtarılır. Qeyd edək ki, məsələ şərtində verilən kəmiyyətlərdən biri düz xətt parçası, qalanları isə bucaq, parçaların nisbəti və s. olduqda oxşarlıq üsulundan istifadə edilməsi əlverişli olur.

Oxşarlıq üsulu ilə qurma məsələləri həll etdikdə homotetiyada verilmiş nöqtələrin obrazlarını qurmağı bacarmaq zəruridir.

Tutaq ki, mərkəzi O nöqtəsində və bir cüt A və A` uyğun nöqtələrlə homotetiya





Şəkil 52.

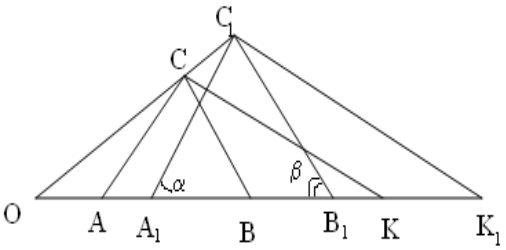
verilmişdir. Verilmiş M nöqtəsinin M` obrazını quraq. vvəlcə M nöqtəsinin OA düz xətti üzərində olmadığı hala baxaq. Verilmiş bu homotetiyada (şəkil 52) AM düz xətti ona paralel və A` nöqtəsindən keçən m` düz xəttinə çevrilir. Ona görə M nöqtəsini asanlıqla qurmaq olar. Bu OM və m` düz xətlərinin kəsişmə nöqtəsidir.

Verilmiş M nöqtəsi OA düz xətti üzərində olarsa (şəkil 53), onda əvvəlcə OA düz xətti üzərində olmayan hər hansı N nöqtəsinin N` obrazını qurur, sonra isə N və N` nöqtələrindən istifadə edərək M nöqtəsinin M obrazını qururuq. Nöqtənin obrazının qurulmasından istifadə edərək mərkəzi O nöqtəsində və bir cüt uyğun nöqtə ilə verilmiş H homotetiyasında düz xəttin, çevrənin və s. obrazını asanlıqla qurmaq olar. Oxşarlıq üsulu ilə qurma məsələlərinin həlli nümunələrini nəzərdən keçirək.

l 53.

Məsələ. 2p perimetrinə, α və β bucaqlarına görə üçbucaq qurun.

Həlli. Göründüyü kimi, bu məsələnin şərtini elə 2 hissəyə ayırmaq olar ki, bu şərtlər (α və β bucaqları) fiqurun formasını, digəri isə onun ölçüsünü (perimetrinin 2p olması) tamamilə təyin



edir. Üçbucağın perimetrinin 2p olması şərtini kənara qoyub bucaqları α və β olan ixtiyari ölçülü A, B, C üçbucağını quraq (şəkil 54).

$A_1B_1C_1$ üçbucağı axtarılan üçbucağa oxşardır və sonsuz sayda belə üçbucaqlar qurmaq olar. Bucaqları α və β olan sonsuz sayda üçbucaqlardan perimetri 2p-yə bərabər olanını ayırmaq üçün oxşar çevirmədən istifadə edək. İstənilən O nöqtəsini qeyd edib ona oxşarlıq mərkəzi kimi baxaq. Münasib olmaq üçün O nöqtəsini üçbucağın tərəfinin A_1B_1 uzantısı üzərində seçək və OC_1 şüasını çəkək. O nöqtəsindən A_1B_1-in uzantısı üzərində $A_1B_1C_1$ üçbucağının $2p_1$ perimetrinə bərabər OK_1 parçasını ayıraq və K_1 nöqtəsini C_1 ilə birləşdirək. Sonra yenidən O nöqtəsindən hesab etməklə uzunluğu verilmiş 2p-yə bərabər OK parçasını ayırıb $KC \| K_1C_1$ çəkək. Onda C nöqtəsi axtarılan üçbucağın təpə nöqtələrindən biri olacaqdır.

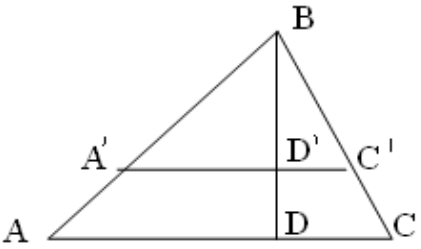
$CB \| C_1B_1$ və $CA \| C_1A_1$ çəkib ABC üçbucağının digər təpələrini qururuq.

Məsələ. A, C bucaqlarına və b+hb=S cəminə görə üçbucaq qurun.

Analiz. Axtarılan üçbucaq iki şərti ödəməlidir:

1. $\angle A=\alpha, \angle C=\beta$

2. oturacaqla bu oturacağa çəkilmiş



hündürlüyün cəmi verilmiş S parçasına bərabər olmalıdır.

(1) şərtini ödəyən üçbucaq asanlıqla qurula bilər. Həm də məlumdur ki, belə üçbucaqlar sonsuz saydadır. Tutaq ki, A`BC` bu üçbucaqlardan biridir (şəkil 55).

İndi mərkəzi B nöqtəsində olan homotetiyadan istifadə etməklə A`BC` üçbucağına oxşar və (2) şərtini ödəyən axtarılan ABC üçbucağını qurmaq olar. Doğrudan da, ABC axtarılan üçbucaqdırsa, onda AC||A`C` olar və ya A`C` ilə AC üst-üstə düşər. BD` parçası A`BC` üçbucağının hündürlüyü və BD` ilə AC-nin kəsişmə nöqtəsi D olub. Aydındır ki, BD parçası ABC üçbucağının hündürlüyü olacaqdır.

Şəkil 55

Əgər müəyyən bir homotetiyada A` nöqtəsi A nöqtəsinə uyğundursa, onda C` və D` nöqtələri də C və D nöqtələrinə uyğundur. A`BC` üçbucağını ABC üçbucağına çevirən homotetiyanın əmsalını tapaq. Şərtə görə BD+AC=S-dir. Lakin A`BC` üçbucağı verildikdə S`=BD`+A`C` parçasını da qura bilərik. Onda axtarılan homotetiya əmsalı $K = \frac{BD + AC}{BD' + A'C'} = \frac{S}{S'}$ olar.

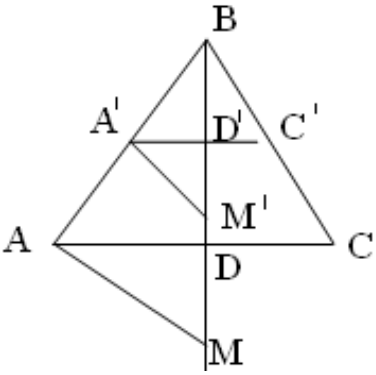
Qurma.

1. $\angle A=\alpha$ və $\angle C=\beta$ olmaqla ixtiyari A`BC` üçbucağını qururuq (şəkil 56).

2. Bu üçbucağın BD` hündürlüyünü qururuq və BD` parçasının uzantısı üzərində D`M`=A`C` parçasını elə ayıraq ki, BM`= =BD`+A`C`= =S` olsun.

3. Mərkəzi B nöqtəsində və bir cüt M, M` nöqtələri ilə verilmiş homotetiyada A` və C` nöqtələrinin obrazları olan A və C nöqtələrini qururuq. ABC axtarılan üçbucaqdır.

İsbat. A`BC` və ABC üçbucaqları homotetik olduqlarından $\angle A=\alpha$, $\angle C=\beta$ və



Şəkil 56

$\frac{BD}{BD'}=\frac{AC}{A`C`}=\frac{AB}{A`B}=\frac{BM}{BM`}=\frac{S}{S`}$ olar. Ona görə $\frac{AC+BD}{A`C`+B`D`}=\frac{S}{S`}$ yazmaq olar. Lakin qurmaya görə A`C`+BD`=S` olduğundan AC+BD=S olduğunu alırıq. Beləliklə, ABC üçbucağı (2) şərtini də ödəyir. Deməli, ABC üçbucağı (1) və (2) şərtlərini ədədi axtarılan üçbucaqdır.

Araşdırma. Aydındır ki, yalnız $<180^0$ olduqda məsələnin həlli vardır. Bu bərabərsizlik ödəndikdə məsələnin ancaq bir həlli vardır.

Doğrudan da, tutaq ki, məsələnin şərtlərini ödəyən iki ABC və $A_1B_1C_1$ üçbucaqları qurulmuşdur. Onda $\angle A=\angle A_1$, $\angle C=\angle C_1$ və A_1C_1

$+B_1D_1=AC+BD=S$ olar. Onda aydındır ki, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ olar. Ona görə

$\frac{A_1C_1}{AC}=\frac{B_1D_1}{BD}=\frac{A_1C_1+B_1D_1}{AC+BD}$ yazmaq olar.

$A_1C_1+B_1D_1=AC+BD$ olduğundan $A_1C_1=AC$, yəni $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$ alırıq.

Məsələ. Bucağına, bu bucağı əmələ gətirən tərəflərin nisbətinə və daxilə çəkilmiş çevrənin radiusuna görə üçbucaq qurun.

Analiz. Axtarılan ABC üçbucağı üç şərti ödəməlidir:

1. $\angle B=\alpha$
2. $BC:AB=a:c$,
3. $OD=r$

(1) və (2) şərtlərini ödəyən üçbucaq asanlıqla qurula bilər. Həm də belə üçbucaqlar sonsuz saydadır. BDE bu üçbucaqlardan biri olsun. İndi mərkəzi B nöqtəsində, əmsalı $K\frac{a}{c}$ olan homotetiyadan istifadə edərək BDE üçbucağına oxşar olan və (3) şərtini də ödəyən axtarılan ABC üçbucağını qurmaq olar.

Qurma.

1. $\angle B=\alpha$, $\frac{BD}{BE}=\frac{a}{c}$ olmaqla BDE üçbucağını quraq.

2. B bucağının tənbölənini quraq və FK⊥DE çəkək. Onda O=BO∩FK tapırıq. FK düz xətti üzərində O nöqtəsindən başlayaraq OG=r ayıraq.

3. Mərkəzi B nöqtəsində, əmsalı $K=\frac{a}{c}$ olan homotetiyada D və E nöqtələrinin obrazları olan A və C nöqtələrini quraq. Yəni, G nöqtəsindən DE düz xəttinə paralel düz xətt çəkək. Alınan ABC axtarılan üçbucaqdır.

İsbat. ABC və BDE üçbucaqlsrı homotetik olduqlarından

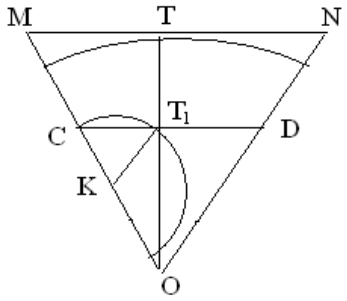
BD:BE=AB:BC=a:c

∠B=α qurmaya görə;

OG=r qurmaya görə.

Araşdırma. $\alpha<180^0$ olduqda məsələnin yeganə həlli vardır.

Məsələ. AOB sektoru verilmişdir. Onun qövsünə elə toxunan çəkin ki, toxunanın radiuslarının üzantıları arasında qalan parçası toxunma nöqtəsi ilə m:n nisbətində bölünsün.



Şəkil 57

Analiz. Aşkardır ki, OT⊥MN-dir (şəkil 57).

İxtiyari CD||MN çəksək, alınan ΔCOD ~ ΔMON olar. Ona görə $OT_1 \perp CD$ alarıq. $\angle CT_1O = 90^0$ olduğundan T_1 nöqtəsi diametri OC parçası olan çevrə üzərində yerləşməlidir.

MT : TN = m : n olduğundan $CT:T_1D = m:n$ olur. $T_1K \parallel ON$ çəksək $CK:KO = CT_1:TD = m:n$ olar. Ona görə T_1 nöqtəsi digər tərəfdən OC parçasını C nöqtəsindən hesab etməklə m:n nisbətində bölən K nöqtəsindən KT_1:ON keçən düz xətt üzərində olmalıdır.

Qurma.

a) OB radiusu üzərində ixtiyari OC parçası ayırmaq;

b)OC-ni diametr qəbul edib onunüzərində çevrə qurmaq;

c) OC parçasını nisbətində bölmək;

d) $KT_1 \| ON$ çəkib T_1-i qurmaq;

e) OT_1 şüasını çevrə ilə kəsişənə qədər çəkib T_1 nöqtəsini qurmaq;

f) $MN \perp OT$ çəkib radiusların uzantıları iləkəsişmə nöqtələrini tapmaq.

Məsələ. İki tərəfinə və onlar arasındakı bucağın tənbölənə görə üçbucaq qurun.

Analiz. Tutaq ki, məsələ həll olunmuş və axtarılan ABC üçbucağı qurulmuşdur.

Burada AC=b, AB=c və AD=l_a-dir. Üçbucağın BA tərəfini öz istiqamətində uzadaraq AE=b parçası ayrılıb E nöqtəsini C nöqtəsi ilə birləşdirsək, AEC üçbucağını alarıq. Aşkardır ki, burada EC||AD olar. Onda EC=x parçası b+c, c və l_a parçaları ilə dördüncü mütənasib parça olacaqdır. x:l_a=(b+c):c. Beləliklə, məsələ x oturacağına və b yan tərəfinə görə bərabəryanlı AEC üçbucağının qurulmasına gətirir. AEC üçbucağını qurduqdan sonra EA tərəfini öz istiqamətində AB=c parçası qədər uzadıb EB parçasını quraq. Sonra B nöqtəsini C ilə birləşdirsək axtarılan ABC üçbucağını alarıq.

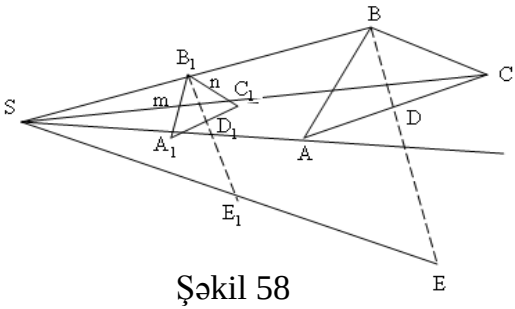
Məsələ. yan tərəflərinin nisbətinə, oturacağındakı bucaqlardan birinə və oturacağı ilə bu oturacağa çəkilmiş hündürlüyün çəminə görə üçbucaq qurun.

Analiz. Verilən şərtin elə hissəsini götürək ki, tələb olunan üçbucağa oxşar üçbucağı qurmaq mümkün olsun.

Ona görə də əvvəlcə yan tərəflərinin nisbətinə və oturacağındakı bir bucağına görə üçbucaq quraq. Sonra da qurulmuş bu üçbucağa oxşar olan və məsələ şərtindəki ölçünü nəzərə alaraq tələb edilən üçbucağı qurmaq olar.

Qurma.

1. Verilmiş üçbucağın yan tərəflərinin nisbəti m:n oturacağındakı bucağı isə α-dır. Onda $\angle A_1=\alpha$, $A_1B_1=m$ və $B_1C_1=n$ şərtinə görə $A_1B_1C_1$ üçbucağını qurmaq mümkündür (şəkil 58). Bundan sonra $B_1D_1\perp A_1C_1$ qurub, $B_1E_1=B_1D_1+A_1C_1$ tapırıq.



Şəkil 58

2. İstənilən B nöqtəsindən $BE \parallel B_1E_1$ çəkək və $BE=b+hb$ ayıraq, onda $A_1B_1C_1$ üçbucağının tərəfləri ilə qurulan üçbucağın tərəfinin paralelliyindən BE və B_1E_1 parçaları homotetik olacaqdır.

BB_1 və EE_1 düz xətləri hər hansı S nöqtəsində kəsişərsə, onda S nöqtəsi B_1E_1 və BE parçalarının homotetiya mərkəzi olacaqdır. Beləliklə, D nöqtəsini $SD\cap BE=D$ alarıq. Onda BD parçası tələb olunan üçbucağın hündürlüyüdür. Buna görə də D nöqtəsindən $AC\parallel A_1C_1$ və B nöqtəsindən AC düz xəttini A və C nöqtələrində kəsən $BA\parallel B_1A_1$ və $BC\parallel B_1C_1$ şüalarını keçirək. Alınan ABC üçbucağı tələb olunan üçbucaqdır.

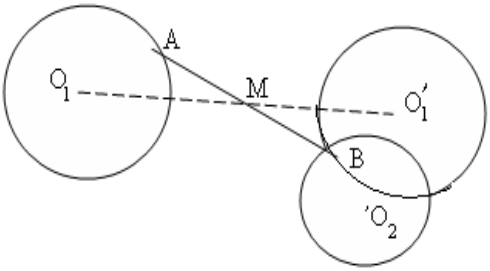
Araşdırma.

1. $n>B_1D_1$ və $n<m$ olduqda məsələnin iki həlli;

2. $n=B_1D_1$ və $n>m$ olduqda məsələnin bir həlli var;

3. $n<B_1D_1$ olduqda isə məsələnin həlli yoxdur (n və m-in yerləri dəyişilməzdir).

Məsələ. O_1 və O_2 çevrəsi və M nöqtəsi verilmişdir. Çevrələr üzərində uyğun olaraq elə A və B nöqtələri qurun ki, $AM \cup MB=AB$ və AM:MB=2:3 olsun.



Şəkil 59

Analiz. Tutaq ki, məsələ həll edilmiş və AB axtarılan parçadır (şəkil 59). M nöqtəsi A və B nöqtələri arasında yerləşdiyindən $AM \cup MB=AB$ və AM:MB=2:3 olmasından alınar ki, M mərkəzli və $K=-\frac{2}{3}$ əmsallı homotetiya A nöqtəsini B nöqtəsinə inikas edir.

Lakin A nöqtəsi O_1 çevrəsi üzərindədir. Aşkardır ki, B nöqtəsi $H_M^{-\frac{2}{3}}$ homotetiyasında O_1 çevrəsinin inikas etdiyi O_1` çevrəsi üzərində olar. Bundan başqa, B nöqtəsi həmçinin məsələ şərtində verilmiş $O_2$ çevrəsi üzərindədir. Ona görə $B=O_1` \cap O_2$ qurmaq olar.

Qurma. M mərkəzli və $K=-\frac{2}{3}$ əmsallı homotetiyada O_1 çevrəsinin obrazını qurub $O_1`$ və O_2 çevrələrinin B kəsişmə nöqtəsini tapırıq. $H_M^{-\frac{2}{3}}$ homotetiyasında obrazı B nöqtəsi olan nöqtəni qurub onu A ilə işarə edək. A və B axtarılan nöqtələrdir.

İsbatı. B nöqtəsi $O_1`$ çevrəsi üzərində olduğu üçün onun proobrazı olan A nöqtəsi O_1 çevrəsi üzərində olar, həm də $H_M^{-\frac{2}{3}}(A)=B$ olur. Aşkardır ki, AM∪MB=AB və AM:MB=2:3 olar.

Araşdırma. $O_1`$ və O_2 çevrələrinin aşağıdakı vəziyyətlərindən asılı olaraq həllin varlığı, həlləri sayını söyləmək olar:

a) $O_1`$ və O_2 çevrələri iki nöqtədə kəsişərsə, onda məsələnin iki həlli vardır.

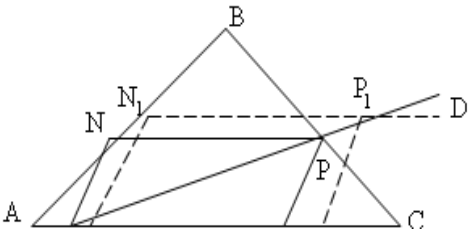
b) bu çevrələr toxunarsa, məsələnin bir həlli vardır.

c) bu çevrələrin ortaq nöqtəsi yoxdursa, məsələnin həlli yoxdur.

d) bu çevrələr üst-üstə düşərsə məsələnin sonsuz sayda həlli vardır.

Məsələ. Verilmiş üçbucaq daxilinə verilən bucağı α və tərəflərinin nisbəti m:n olan paraleloqram çəkin.

Analiz. Tutaq ki, ABC üçbucağının daxilinə MNPQ paraleloqramı elə çəkilmişdir ki, $\angle NMQ=\alpha$ və NP:NM=m:n-dir (şəkil 60).



Şəkil 60

MNPQ paraleloqramını mərkəzi A nöqtəsində, əmsalı K=m:n olan homotetiya ilə çevirsək $N_1P_1:N_1M_1=m:n$ və $\angle N_1M_1Q_1=\alpha$ olan yeni $M_1N_1P_1Q$ paraleloqramını alarıq. Aydındır ki, belə paraleloqramlar sonsuz saydadır. Onların hamısı MNPQ paraleloqramına homitetikdir və hamısının P, P_1... təpələri bir AP düz xətti üzərindərir.

Qurma.

1. AB tərəfi üzərindəki istənilən N_1 nöqtəsindən $N_1D\|$ və elə N_1M_1 çəkək ki, $\angle N_1M_1C=\alpha$ olsun.

2. N_1D şüası üzərində $N_1P_1:N_1M_1=m:n$ şərtini ödəyən N_1P_1 parçasını ayıraq və $P_1Q_1\|N_1M_1$ çəkək.

3. Axtarılan paraleloqramın P təpə nöqtəsi AP_1 düz xətti üzərində olmalıdır. Belə ki, A mərkəzli homotetiyada P nöqtəsi P_1-ə uyğun nöqtədir.

Aydındır ki, AP_1 düz xəttinin BC tərəfi ilə kəsişməsi P nöqtəsidir.

P nöqtəsindən PN||AC; PQ||P_1Q_1 və N nöqtəsindən NM||PQ çəkək. Alınan MPQN axtarılan paraleloqramdır.

İsbat. $\angle NMQ=\angle N_1M_1Q_1$ qurmaya görə, NM=PQ və NP=MQ paralel düz xətlər arasındakı parçalar olduğu üçün olur. Ona görə $NP:PQ=N_1P_1:P_1Q_1=m:n$

Araşdırma. Qurmadan aşkardır ki, məsələnin yeganə həlli vardır.

Müstəqil həll etmək üçün məsələlər

1. İki bucağına və tərəflərindən birinə çəkilmiş medianına görə üçbucaq qurun.
2. C bucağı, bu təpədən çəkilmiş hündürlüyü və digər iki tərəfinin nisbətinə görə ABC üçbucağını qurun.
3. Verilmiş üçbucağın daxilinə tərəfləri verilmiş üçbucağın tərəflərinə perpendikulyar olan üçbucaq çəkin.
4. Tərəfinə və diaqonallarının nisbətinə görə romb qurun.
5. Verilmiş yarımçevrə daxilinə elə kvadrat çəkin ki, onun iki təpəsi çevrə qövsü, digər ikisi isə diametr üzərində olsun.

6. Verilmiş çevrə xaricinə bucaqları verilmiş üçbucaq çəkin.

7. Verilmiş romb daxilinə təpələri rombun tərəfləri üzərində olan kvadrat çəkin.

8. Tərəfi, diaqonallarının nisbəti və onlar arasındakı bucağına görə paraleloqram qurun.

9. İki tərəfinin nisbəti, bir bucağı və bir diaqonalına görə paraleloqram qurun.

10. Bir bucağı, bir tərəfi və o biri tərəfi ilə bu tərəfə çəkilmiş hündürlüyün nisbətinə görə paraleloqram qurun.

11. İki bucağına, oturacağı ilə hündürlüyünün cəminə (fərqinə) görə üçbucaq qurun.

12. Verilmiş kvadratın xaricinə verilmiş üçbucağa oxşar üçbucaq çəkin.

13. Oturacaqdakı bucağına, bir diaqonalına və oturacaqlarının nisbətinə görə bərabəryanlı trapesiya qurun.

14. Bucaqlardan biri, oturacaqlarından biri və digər oturacaqla yan tərəfin nisbəti verilmiş bərabəryanlı trapesiya qurun.

15. A və B bucaqlarına, c tərəfinə çəkilmiş hündürlüyünə görə ABC üçbucağını qurun.

16. Üçbucağın daxilinə hər biri onun iki tərəfinə və digər çevrəyə toxunan iki bərabər çevrə çəkin.

Aydındır ki, hər iki çevrə üçbucağın tərəflərindən birinə toxunur. AB tərəfinə toxunan çevrələrin necə qurulduğunu göstərək AB tərəfinə paralel c` düz xətti çəkək. Biri-birinə və c` düz xəttinə toxunan eyni radiuslu S_1` və $S_2$` çevrələrini quraq. Bu çevrələrin BC və AC düz xətlərinə uyğun olaraq paralel olan a` və b` toxunanlarını çəkək. A`, b` və c` düz xətlərinin əmələ gətirdiyi A`B`C` üçbucağının tərəfləri ABC üçbucağının tərəflərinə paralel olacaqdır. Ona görə A`B`C` üçbucağını ABC üçbucağına çevirən homotetiya vardır. Bu homotetiyada $S_1$` və S_2` çevrələrinin obrazları tələb edilən çevrələr olar.

17. İti bucaqlı ABC üçbucağı verilmişdir. AB və BC tərəfləri üzərində:

a) AX=XY=YC; b) BX=XY=YC

şərtlərini ödəyən X və Y nöqtələrini qurun.

a) ABC üçbucağının AB və BC tərəfləri üzərində uzunluğu a-ya bərabər olan AX_1 və CY_1 parçalarını ayıraq. Y_1 nöqtəsindən AC tərəfinə paralel l düz xəttini çəkək, düz xəttinin üçbucağın daxilində yerləşən $(X_1;a)$ çevrəsi ilə kəsişmə nöqtəsini Y_2 ilə işarə edək. Onda AY_2 düz xəttinin BC tərəfi ilə kəsişməsi axtarılan Y nöqtəsi olar. AB şüasının AX=CY şərtini ödəyən nöqtə X olar.

b) üçbucağın AB tərəfi üzərində ixtiyari $X_1 \neq B$ nöqtəsi götürək. $(X_1; BX_1)$ çevrəsi BC şüasını B və Y_1 nöqtələrində kəsər. BC düz xətti üzərində $Y_1C_1 = BX_1$ şərtini ödəyən C_1 nöqtəsini quraq. Y_1 nöqtəsi B və C_1 nöqtələri arasında yerləşir. C_1 nöqtəsini C-yə çevirən B mərkəzli homotetiyada X_1 və Y_1 nöqtələri axtarılan X və Y nöqtələrinə çevrilər.

17. AB və AC tərəflərinə və AD tənböləninə görə ABC üçbucağını qurun.

AD parçasını quraq və $S_1(A; AB), S_2(A; AC)$ çevrələrini çəkək. D mərkəzli, $K = -\frac{DB}{DC} = -\frac{AB}{AC}$ əmsallı homotetiyada S_2 çevrəsinin obrazı ilə S_1 çevrəsinin kəsişməsindən üçbucağın B təpə nöqtəsi qurula bilər.

18. Düzbucaqlı ABC üçbucağının A təpə nöqtəsi tərpənməz qalmaqla B və C təpə nöqtələri xaricindən A nöqtəsində biri-birinə toxunan verilmiş S_1 və S_2 çevrələri üzrə sürüşür. Üçbucağın AD hündürlüyünün oturacağı olan D nöqtəsinin həndəsi yerini tapın.

S_1 və S_2 çevrələrinin ortaq xarici l_1 və l_2 toxunanlarını çəkək. l_1 və l_2 toxunanlarının K nöqtəsində kəsişdiyini fərz edək. K nöqtəsi S_1 çevrəsini S_2 çevrəsinə çevirən H homotetiyasının

mərkəzi olar. Bu homotetiyada A nöqtəsinin çevrildiyi nöqtəni A_1 ilə işarə edək. Yəni, $A_1=H(A)$ olsun. A və K nöqtələri verilmiş çevrələrin mərkəzlər xətti üzərində olar. Ona görə AA_1 parçası S_2 çevrəsinin diametri olar, yəni $\angle ACA_1=90^0$ və $A_1C\|AB$ alarıq. Aydındır ki, H homotetiyasında AB parçası A_1C-yə inikas edir. Ona görə BC düz xətti K nöqtəsindən keçir və $\angle ADK=90^0$ olur. Deməli, D nöqtəsi diametri AK olan S çevrəsi üzərindədir. Həmçinin aydındır ki, D nöqtəsi l_1 və l_2 düz xətlərinin əmələ gətirdiyi bucağın daxilindədir. Beləliklə, D nöqtəsinin həndəsi yeri l_1 və l_2 düz xətlərinin S çevrəsindən ayırdığı qövslərdir.

19. A, B və C nöqtələri bir düz xətt üzərindədir və B nöqtəsi A və C nöqtələri arasındadır. AMB və CMB üçbucaqlarının xaricinə çəkilən çevrələrin radiusları bərabər olan M nöqtələrinin həndəsi yerini tapın.

AMB və CMB üçbucaqlarının xaricinə çəkilən çevrələrin mərkəzləri P və Q nöqtələri olsun. BPMQ dördbucaqlısı romb olduqda M nöqtəsi axtarılan həndəsi yerə daxildir. Başqa sözlə, M nöqtəsi mərkəzi B nöqtəsində əmsalı K=2 olan homotetiyada PQ parçasının orta nöqtəsinin obrazıdır.

P və Q nöqtələrinin AC düz xətti üzərindəki proyeksiyaları AB və BC parçalarının orta nöqtələri olduğundan bütün PQ parçalarının orta nöqtələri bir düz xətt üzərində olar. Alınan həndəsi yerdən AC düz xəttinin nöqtələrini çıxmaq lazımdır.

1.4.3. Cəbri üsul

Həndəsə məsələlərinin həllinə cəbrin tətbiqi imkanları genişdir. Belə ki, bir sıra həndəsə məsələlərinin həlli cəbri tənliyin həllinə gətirilir və bir çox həndəsi faktlar cəbri formada (Pifaqor teoremi, sinuslar, kosinuslar teoremi və s.) verilmiş olur.

Qurma məsələlərinin cəbri üsulla həllinin mahiyyəti aşağıdakı kimidir: analiz mərhələsində fiqurun qurulması üçün zəruri olan elementi məchul qəbul edərək verilənlərlə bu məchul arasındakı münasibəti tənliklə ifadə edir və alınan tənliyi həll edirlər. Tənliyin kökü məchul elementi ifadə edən cəbri düstur olur. Deməli, axtarılan fiquru qurmaq üçün əvvəlcə həmin cəbri düsturu qurmaq lazım gəlir. Başqa sözlə, qurma məsələsinin cəbri üsulla həlli dörd addımdan ibarətdir:

1) tənliyin tərtibi;
2) tənliyin həlli;
3) kökün (cəbri düsturun) araşdırılması;

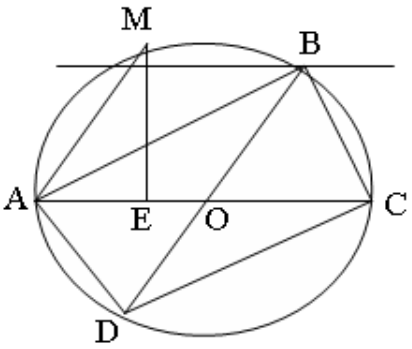
4) kökün qurulması.

Qeyd edək ki, cəbri düsturların qurulmasında aşağıdakı mühüm nəticəni yadda saxlamaq lazımdır: pərgar və xətkeşlə yalnız elə cəbri ifadələri qurmaq olar ki, bu ifadədə ya tamamilə radikal olmasın və ya ona daxil olan radikalların dərəcəsi 2, 4, 8, ... olsun.

Məktəb həndəsə kursundan $x = a \pm b; x = \frac{ab}{c};$ $x = \sqrt{ab}; x = \sqrt{a^2 + b^2}$ və s. sadə düsturlarla verilmiş parçaların qurulması məlumdur. Bir sıra hallarda parçaların qurulması həmin bu məlum qurmalara gətirilir.

İndi də cəbri üsulla bir eçə qurma məsələsinin həllini nəzərdən keçirək.

Məsələ. Verilmiş çevrə daxilinə verilmiş kvadratla bir böyüklükdə düzbucaqlı çəkin.



Şəkil 61

Analiz. Tutaq ki, çevrə daxilinə tərəfi a olan kvadratla bir böyüklükdə olan ABCD düzbucaqlısı çəkilmişdir (şəkil 61).

Düzbucaqlının AC dioqanalı verilmiş çevrənin diametri olduğundan onu qurmaq olar. ABC və ACD üçbucaqları bərabər olduğu üçün

bunlardan birini qurmaq kifayətdir. ABC üçbucağını qurmaq üçün B nöqtəsini tapmaq lazımdır. Bunun üçün ABC üçbucağının BH hündürlüyünü tapmaq kifayətdir.

AC=d və BH=x qəbul edərək ABCD düzbucaqlısının sahəsini d və x ilə ifadə edək və onu kvadratın sahəsinə bərabər götürək. Onda

$$dx=a^2$$

burada isə $x=\frac{a^2}{d}$ alarıq.

Qurma. $x=\frac{a^2}{d}$ düsturundan istifadə edərək əvvəlcə BH hündürlüyünü quraq. Bunun üçün çevrənin AC diametrini çəkək. Sonra AM=a olmaqla çevrə üzərində M nöqtəsini quraq. M nöqtəsindən ME⊥AC çəkək. Onda $AE=x=\frac{a^2}{d}$ olar. bundan sonra AC düz xəttindən x məsafədə və ona paralel düz xətt çəkib bu düz xəttin çevrə ilə B kəsişmə nöqtəsini, sonra isə çevrənin O mərkəzinə nəzərən B-yə simmetrik D nöqtəsini qururuq.

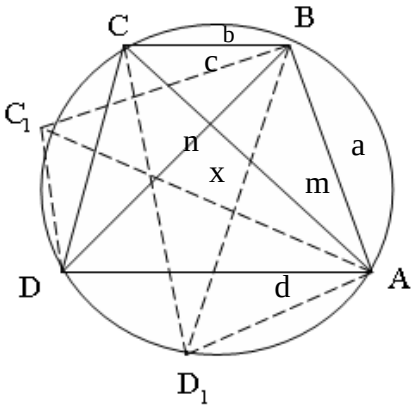
İsbat. AC və BD çevrənin diametrləri olduğu üçün ABCD düzbucaqlıdır. Düzbucaqlının S sahəsi tərəfi a olan kvadratın sahəsinə bərabərdir. Doğrudan da, $S=AC\cdot BH=d-\frac{a^2}{d}=a^2$

Araşdırma. Məsələnin yalnız $x \le \frac{d}{2}$ olduqda həlli vardır. Bu isə $d \ge a\sqrt{2}$ şərti ilə eynigüclüdür.

Məsələ. Verilmiş a, b, c və d tərəflərinə görə daxilə çəkilmiş dördbucaqlı qurun.

Daxilə çəkilmiş dördbucaqlının diaqonallarını m və n ilə işarə etsək, Ptolomey teoreminə görə m·n=ac+bd (1) olar. m və n diaqonallarını hesablamaq üçün onlar arasında daha bir asılılıq tapmağa çalışaq.

Tutaq ki, ABCD daxilə çəkilmiş dördbucaqlı və AB=a, BC=b, CD=c, DA=d, AC=m, DB=n-dir (şəkil 62). D nöqtəsindən $\cup DC_1=\cup BC$ ayıraq və C_1 nöqtəsini A, B və D nöqtələri ilə birləşdirək. ABC_1D dördbucaqlısında $DC_1=b$, $\cup BCC_1=\cup DC_1C$ olduğu üçün $C_1B=c$, BA=a, DA=d, BD=n və $C_1A=x$-dır. Deməli, $n\cdot x=ab+cd$ (2) yazmaq olar. Sonra A nöqtəsindən $AD_1=CD$ ayırıb D_1 nöqtəsini A, B və C ilə birləşdirək. Alınan $ABCD_1$ dördbucaqlısında $CD_1=AD=d$, $AD_1=CD=c$, BA=a, CA=m, BC=b və $BD_1=AC_1=x$



Şəkil 62

olar. Ona görə mx=ad+bc (3) yazmaq olar. (2) bərabərliyini (1) bərabərliyinə bölsək $\frac{m}{n}=\frac{ad+bc}{ab+cd}$ (4) alarıq.

(1) və (4) bərabərliklərini tərəf-tərəfə vursaq və bölsək

$$m^2=\frac{(ac+bd)(bc+ad)}{ab+cd}$$ və

$n^2=\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{bc+ad}$ alarıq.

Buradan

$$m=\sqrt{\frac{(ac+bd)(bc+ad)}{ab+cd}}$$ və

$n=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{bc+ad}}$ olar.

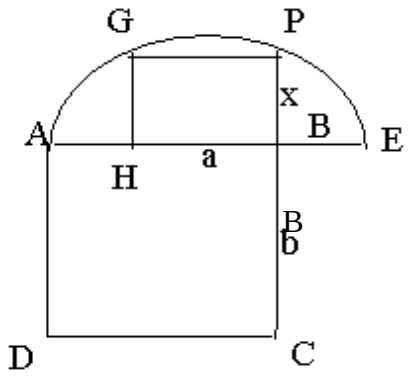
Bu adiaqonallardan birini, məsələn, m-i qurmaq üçün

$$\sqrt{ac+bd}=x,\sqrt{bc+ad}=y \quad \text{və} \quad \sqrt{ab+cd}=z$$

qəbul etsək, $m=\frac{xy}{z}$ alarıq.

x, y və z parçalarının qurulması bunlarla mütənasib dördüncü m parçasını qurmağa imkan verir. m parçasını qurduqdan sonra a, b və m tərəflərinə görə ABC üçbucağını, nəhayət, c, d və m tərəflərinə görə ACD üçbucağını qurmaq olar.

Verilmiş tərəflərdən hər biri qalan tərəflərin cəmindən kiçik olduqda dördbucaqlını qurmaq mümkündür.



Şəkil 63

Məsələ. Verilmiş düzbucaqlı ilə bir böyüklükdə kvadrat qurun.

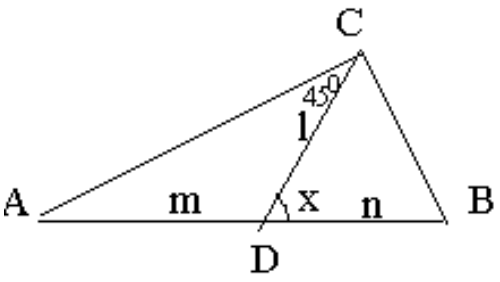
Tutaq ki, ABCD verilmiş düzbucaqlıdır. Onun AB oturacağı a, BC hündürlüyü b, axtarılan kvadratın tərəfini isə x ilə işarə edək. Onda $x^2=ab$ olar. Aydındır ki, verilmiş düzbucaqlı ilə bir böyüklükdə olan kvadtarın x tərəfi bu düzbucaqlının oturacağı və hündürlüyü arasında orta mütənasib parçadır. a və b parçaları arasında orta mütənasib x parçasının qurulması şəkil 63-də göstərilmişdir.

Həndəsə məsələlərini cəbri üsulla həll etdikdə bir neçə dəyişən daxil etmək lazım gəlir. Məsələ şərtində tapılması tələb edilən kəmiyyəti məchul qəbul etmək zəruri deyildir. Bir çox hallarda başqa dəyişən qəbul etməklə daha sadə münasibət almaq olur ki, həmin dəyişənin tapılmış qiyməti ilə tələb olunan kəmiyyəti hesablamaq olur. Beləliklə, həndəsə

məsələlərinin cəbri üsulla həllində dəyişənin seçilməsi böyük əhəmiyyət kəsb edir.

Bəzən bucağın dəyişən kəmiyyət kimi seçilməsi məqsədəuyğun olur. Bu halda həmin bucağı tapmaq üçün triqonometrik tənlik tərtib edilir. Axtarılan bucağın triqonometrik funksiyasını verilmiş elementlərlə ifadə edərək əvvəlcə həmin bucağı, sonra isə tələb edilən fiquru qurmaq olar.

Məsələ. Hipotenuzuna, düz bucağın tənbölənə görə düzbucaqlı üçbucaq qurun.



Şəkil 64

Analiz. ∠BDC=x qəbul edək (şəkil 64). x bucağının qiymətini tapa bilsək, onda köməkçi BDC üçbucağın l tənböləninin uzunluğuna, 45^0 və ∠BDC=x bucaqlarına görə qurmaq olar. Bundan sonra x bucağının tərəfini c uzunluğuna qədər uzadıb onu 45^0-li bucağın təpə nöqtəsi ilə birləşdirərək tələb edilən üçbucağı qurmaq olar.

AD=m, BD=n işarə edək.

ΔACD-dən sinuslar teoreminə görə $\frac{AD}{\sin 45^0} = \frac{CD}{\sin A}$ yazmaq olar. Üçbucağın xarici

bucaqlarının xassəsinə əsasən $x=A+45^0$ və ya $A=x-45^0$ tapsaq

$$\frac{m}{\sin 45^0}=\frac{l}{\sin(x-45^0)} \qquad (1) \text{ alarıq.}$$

ΔBCD-dən həmçinin sinuslar teoreminə görə

$$\frac{BD}{\sin 45^0}=\frac{CD}{\sin B};\frac{n}{\sin 45^0}=\frac{l}{\sin(180^0-(x+45^0)} \qquad (2)$$

və ya $\frac{n}{\sin 45^0}=\frac{l}{\sin(x+45^0)}$ alarıq. (1) və (2) bərabərliklərini hədbəhəd toplasaq,

$$\frac{m+n}{\sin 45^0}=\frac{\sin(x+45^0)+\sin(x-45^0)}{\sin(x-45^0)\sin(x+45^0)}l$$

$$\frac{c}{\sin 45^0}=\frac{2l\sin x\cos 45^0}{\sin(x-45^0)\sin(x+45^0)}=\frac{2l\sin x\cos 45^0}{\cos(x+45^0)\sin(x+45^0)}$$

və ya

$$\frac{2l\sin x}{\sin(2x+90^0)}=\frac{2l\sin x}{sos2x}=\frac{2l\sin x}{2\sin^2 x-1} \text{ alarıq.}$$

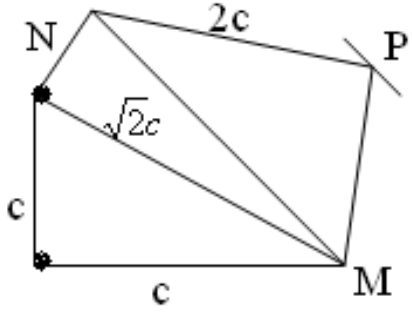
Buradan $2c\sin^2 x-2l\sin x-c=0$ yazmaq olar. Bu tənlikdən sinx-i tapaq:

$$\sin x=\frac{l\pm\sqrt{l^2+2c^2}}{2c}$$

Burada $\sin x>0$ olduğu üçün yalnız müsbət kök yarayır. Deməli,

$$\sin x=\frac{l+\sqrt{l^2+2c^2}}{2c}$$

olur. Şərtə görə



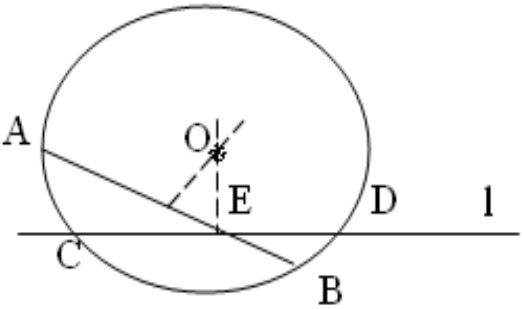
0<sinx<1-dir. l üçün ən böyük mümkün qiymət $\frac{c}{2}$-yə bərabər olur.

Qurma. Əvvəl $c\sqrt{2}$ parçasını katetləri c və c olan düzbucaqlı üçbucağın hipetonuzu kimi qururuq. Sonra $\sqrt{l^2+\left(\sqrt{2}c\right)^2}$ parçasını katetləri l və olan düzbucaqlı üçbucağın hipetonuzu kimi quraq. Həmin şəkildə $MN=l+\sqrt{l^2+\left(\sqrt{2}c\right)^2}$ parçasını qurmaqla, N nöqtəsindən 2c radiuslu qövslə P nöqtəsini tapırıq. ΔMPN-də ∠MPN=x tələb edilən bucaqdır (şəkil 65).

Maksimum və minimuma aid həndəsə məsələlərinin əksəriyyəti cəbri üsulla həll edilir. Bu halda məsələ müəyyən cəbri və ya triqonometrik funksiyanın maksimumu və ya minimumunun araşdırılmasına gətirilir. Qeyd edək ki, araşdırma arqumentin elə qiymətləri çoxluğunda aparılmalıdır ki, o zaman baxılan həndəsi fiqurun varlığı mümkün olsun. Funksiyanın araşdırılması 2 üsulla aparıla bilər:
a) elementar vasitələrlə (törəmənin tətbiqi olmadan);
b) törəmənin tətbiqi ilə.

Məsələ. Verilmiş l düz xəttinin müxtəlif tərəflərində yerləşən A və B nöqtələrindən elə çevrə keçirin ki, bu çevrənin düz xətdən ayırdığı vətərin uzunluğu ən kiçik olsun.

Həlli. AB parçasının l düz xətti ilə kəsişmə nöqtəsi E; A və B nöqtələrindən keçən çevrənin l düz xəttindən kəsdiyi vətər CD olsun (şəkil 66).



Şəkil 66

AE=a, BE=b, CE=x, DE=y işarə etsək CD=x+y, xy=ab olar. Aydındır ki, $x = y = \sqrt{ab}$ olduqda CD-in uzunluğu ən kiçik olar. Axtarılan çevrənin mərkəzi E nöqtəsində l düz xəttinə qaldırılmış perpendikulyarla AB parçasının orta perpendikulyarının kəsişmə nöqtəsi olar.

Müstəqil həll etmək üçün məsələlər

1. İki paralel a və b düz xətləri və bu düz xətlərin xaricində A nöqtəsi verilmişdir. A nöqtəsindəki təpə bucağı verilmiş α-ya bərabər, oturacağının təpə nöqtələri isə verilmiş a və b düz xətləri üzərində olan bərabəryanlı üçbucaq qurun.
2. Verilmiş üçbucağın sahəsini və perimetrini yarıya bölən düz xətt çəkin.
3. Katetləri fərqinə və hipetonuzuna çəkilmiş hündürlüyünə görə düzbucaqlı üçbucaq qurun.
4. Verilmiş üç hündürlüyünə görə üçbucaq qurun.

5. Verilmiş bucağın daxilində yerləşən nöqtədən elə düz xətt keçirin ki, bu düz xəttin bucağın tərəflərindən kəsib ayırdığı parçaların cəmi ən kiçik olsun.
6. Verilmiş yarımçevrə daxilinə:
    a. Sahəsi ən böyük olan;
    b. Perimetri ən böyük olan düzbucaqlı çəkin.
7. Bir düz xətt üzərində yerləşməyən A, B, C nöqtələri verilmişdir. A nöqtəsindən elə l düz xətti çəkin ki, B və C nöqtələrindən ı düz xəttinə qədər məsafələrin cəmi:
    a. Verilmiş məsafəyə bərabər olsun;
    b. Ən böyük (ən kiçik) qiymət alsın.
8. Trapesiyanın oturacaqları a və b-dir. Trapesiyanı bir böyüklükdə iki hissəyə ayırın, oturacaqlara paralel keçirilmiş düz xətt parçasının uzunluğunu tapın.
9. Verilmiş paraleloqramı bir təpədən çəkilən iki düz xətlə bir böyüklükdə olan üç hissəyə bölün.
10. Verilmiş üçbucağın perimetrini və sahəsini yarıya bölən düz xətti qurun.
11. Verilmiş nöqtədən verilmiş çevrəyə elə kəsən çəkin ki, onun çevrə ilə ayrılmış parçaları fərqi verilmiş parçaya bərabər olsun.
12. Hipotenuzuna və iti bucağının tənböləninə görə düzbucaqlı üçbucaq qurun.

13. c tərəfinə, onun qarşısındakı $\angle C$ bucağına və daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusuna görə üçbucaq qurun.
14. Sahələri m:n nisbətində olan iki kvadrat qurun.
15. İki tərəfinə və bu iki tərəfin əmələ gətirdiyi bucağın tənbölənə görə üçbucaq qurun.
16. Verilmiş iki nöqtədən keçən və verilmiş düz xəttə toxunan çevrə qurun.
17. MN parçası və onun daxili A nöqtəsi verilmişdir. AB tərəfi AD tərəfindən iki dəfə böyük, BC və CD tərəfləri isə uyğun olaraq N və M nöqtələrindən keçən ABCD düzbucaqlısını qurun.
18. İki hündürlüyünə və perimetrinə görə paraleloqram qurun.
19. ABCD kvadratının BC tərəfi üzərində elə E nöqtəsi qurun ki, AE=EC+CD olsun.

Cəbri üsul

Həndəsi fiqura daxil olan parçaların uzunluqları arasında müəyyən ədədi asılılıqlar düzəltmək olar. Uzunluq vahidinin seçilməsindən asılı olmayan asılılıqlara metrik münasibətlər deyilir. Belə münasibətlərin hər birini

$$x=f(a,b,c,\ldots,k,e)$$

burada a, b, c, ..., k, e – müəyyən parçaların uzunluqları, x – parçanın uzunluğudur şəklində göstərmək olar.

x=f(a,b,c, ..., k, e) funksiyası öz arqumentlərinin müsbət qiymətlərinin müəyyən oblastında təyin olunmuşdur və bu oblastda, ümumiyyətlə, yalnız müsbət qiymətlər alır, ölçü vahidinin seçilməsindən asılı olmayaraq x=f(a,b,c, ..., k, e) münasibətinin eyni bir parçanı təyin etməsi şərti ondan ibarətdir ki, həmin münasibət öz arqumentlərindən asılı bir dərəcəli bircins funksiya olsun. Bu halda x=f(a,b,c, ..., k, e) münasibəti uzunluq vahidinin seçilməsindən asılı olmadığından onu parçaların özləri arasındakı münasibət kimi başa düşmək olar.

Bu deyilənlərin qurma məsələlərinə tətbiqi aşağıdakından ibarətdir. Axtarılan elementləri göstərildikdən sonra F fiqurunun qurulması haqqındakı istənilən tələbi axtarılan elementləri verilənlərlə ifadə edən müəyyən münasibətin tapılmasına gətirmək olar. Bu zaman axtarılan fiqur üçün metrik münasibətlərdən istifadə edilir. Bu münasibətlər adətən tənliklərə və ya tənliklər sisteminə gətirilir. Tənliyi və ya tənliklər sistemini cəbri üsulla həll edərək axtarılan parçanı verilən elementlərlə ifadə edən düstur şəklində yeni asılılıqlar alınır.

Əgər x-parça olarsa, onda f –hökmən birdərəcəli bircins funksiya olacaqdır.

Aşağıdakı ifadələrin pərgar və xətkeşlə qurulmasını məlum hesab edirik:

x=a+b, x=a-b, burada a>b;

$x = n \cdot a;\ \ x = \frac{a}{n}$, burada n-sıfra bərabər olmayan tam ədəddir;

$x = \frac{a \cdot b}{c}$ - verilən üç parça ilə mütənasib dördüncü parçanın qurulması;

$x = \sqrt{ab}$ - verilən iki parça ilə orta mütənasib parça;

$x = \sqrt{a^2 + b^2}$; $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ (a>b)

Kvadrat tənliyin köklərinin parçalarla qurulmasının bütün üsulları da məlum hesab edilir.

Pərgar və xətkeşlə qurmaq mümkün olan x parçasının göstərilən əsas ifadələri daha mürəkkəb ifadələrin qurulmasını yerinə yetirməyə imkan verir. Fiqurun məlum olmayan elementi ilə verilənlər arasında müəyyən münasibətlərin təyin edilməsi yolu ilə fiqurun həndəsi xassələri haqqındakı məsələnin həllinə cəbrin tətbiqi cəbri üsulla qurmaya aid məsələ həllinin xarakter əlamətidir.

Hər şeydən əvvəl cəbri üsulun dəyəri bundan ibarətdir ki, cəbri üsullarla (məhz ali cəbr vasitəsilə) pərgar və xətkeşlə həll edilə bilən məsələlər sinfini müəyyən etmək mümkün olmuşdur. İsbat

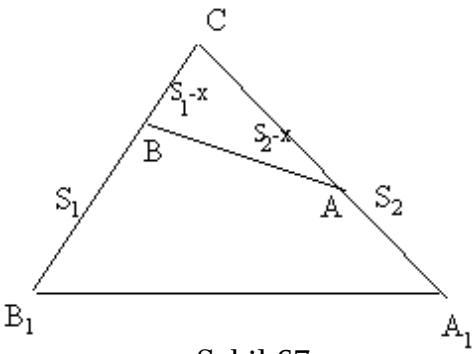
olunmuşdur ki, yalnız əmsalları verilmiş parçaların rasional funksiyaları (rasional ədədi əmsalları) olan və kvadrat köklərdə həll edilən cəbri tənliklərin kökləri olan bütün parçaları bu alətlərlə qurmaq olar.

Pərgar və xətkeşlə həll edilən qurma məsələləri həllinə cəbri üsulun tətbiqini nəzərdən keçirək.

Məsələnin həll edilmiş olduğunu fərz edərək, axtarılan elementlərin həndəsi xassələrini müəyyən etməyə çalışırıq. Əgər bunu həndəsi vasitələrlə etmək çətin olarsa, onda cəbri üsula müraciət edirik. Konkret məsələ nümunəsində cəbri analizin mahiyyətini aydınlaşdıraq.

Məsələ. Hipotenuzla bir katetin S_1 cəminə və hipotenuzla digər katetin S_2 cəminə görə düzbucaqlı üçbucaq qurun.

Analiz. Bütün verilənləri daxil edərək qaralama çertyoj çəkirik (şəkil 67). Məsələnin həndəsi həlli aşkar olmadığından analizi cəbri vasitələrlə avam etdirək. BA=x qəbul edək. Onda CB=S_1-x, CA=S_2-x olar və Pifaqor teoreminə görə



Şəkil 67

$$x^2=(S_1-x)^2+(S_2-x)^2$$

yazmaq olar. Onu sadələşdirsək

$$x^2-2(S_1+S_2)x+S_1^2+S_2^2=0$$ olar.

Buradan,

$$x=S_1+S_2\pm\sqrt{2S_1S_2}$$ alarıq.

Burada x-parçası S_1 və S_2 parçalarından asılı birdərəcəli bircins funksiya ilə ifadə olunacaqdır. Funksiyanın ifadəsinə yalnız kvadrat kök daxildir. Deməli x parçasının pərgar və xətkeşlə qurulması mümkündür.

Bu məsələ həndəsi həlli kifayət qədər mürəkkəb, cəbri analizi isə məqsədə daha tez yaxınlaşdıran nümunə ola bilər.

$S_1=S_2$ olduqda və $S_1\neq S_2$ olub $\frac{S_1}{2}<S_2$ şərti ödənildikdə məsələnin həlli vardır. Cəbri üsulla həll edilən həndəsə məsələsinin qurma mərhələsinə aid aşağıdakı qeydi söyləmək faydalıdır. Həndəsi üsullarla həll edilən məsələlərdə qurma mərhələsi bəzi hallarda nəzərdən keçirilməyə bilər. Lakin cəbri üsulda bu mərhələ hər bir məsələ üçün icra edilməlidir. Ona görə ki, burada cəbr yalnız köməkçi rol oynayır, həndəsə məsələsini yalnız cəbri məsələyə gətirmək olmaz.

II Fəsil

FƏZADA HƏNDƏSİ QURMALAR

Həndəsə maddi aləmin fəza formalarını öyrənməklə məşğul olan bir elmdir. Maddi aləmin fəza formalarını dərk edə bilmək və öyrənmək üçün çox yaxşı inkişaf etmiş fəza təsəvvürünə malik olmaq lazımdır. Həndəsi problemlərin həllində yaradıcı təsəvvür tələb olunur. Buna görədir ki, orta məktəbdə həndəsə təliminin məqsədlərindən biri də şagirdlərin fəza təsəvvürünü inkişaf etdirməkdən ibarətdir.

Orta məktəblərin buraxılış imtahanlarında və habelə ali məktəblərə qəbul imtahanlarında aparılan müşahidələr əksəriyyətlə şagirdlərdə fəza təsəvvürünün çox zəif olduğunu göstərir. Fəza təsəvvürünün zəif olması üzündən şagirdlər fəza fiqurlarının çertyojlarını çəkməkdə çox zaman çətinlik çəkirlər; görünən və görünməyən tilləri, xətləri bir-birindən ayıra bilmirlər, çarpaz xətləri bəzən kəsişən xətlər hesab edirlər; onlara təklif olunmuş məsələ

həllinin göz qabağında olan asan yolunu qoyub, uzun hesablamalara əl atırlar və s.

Şagirdlər, xüsusən, fəza fiqurlarının kəsiklərinə aid məsələlərin həllində acizlik göstərirlər.

Şagirdlərin əksəriyyətlə zəif fəza təsəvvürünə malik olmalarının səbəbi odur ki, riyaziyyat müəllimlərinin çoxu bütün həndəsə təlimi müddətində bu məsələyə lazımi əhəmiyyət vermirlər. Onlar çox zaman fiqurların səth və həcmlərini ancaq hazır düsturlarla hesablamağa aid məsələlər həll etdirərək, şagirdlərin fəza təsəvvürlərini inkişaf etdirən qurma məsələlərini həll etdirməklə məşğul olmurlar.

Həndəsədən hesablama məsələlərində şagirdlərin fikri çox zaman ya hesablama və ya cəbri çevirmə ilə məşğul olduğundan, məsələnin həndəsi cəhəti onların nəzərindən qaçır, halbuki, qurma məsələlərində həndəsi cəhət əsas yer tutur. Proyeksiya çertyojunda kifayət qədər qurma məsələlərinin həlli, şagirdlərdə çertyoja əsasən həndəsi fiquru, onun forma və konstruksiyasını "görmək" qabiliyyətini inkişaf etdirir. Burada, həndəsi fiqur üzərində edilən müxtəlif əməliyyatla (düz xətt, müstəvi və s. keçirmək kimi) uyğun proyeksiya çertyojundakı müvafiq qurma arasında olan tam uyğunluğun fəza təsəvvürünün inkişafı

üçün böyük əhəmiyyəti vardır. Həmçinin qurma məsələlərinin xəyalda həlli təsəvvürün (xəyalın) gərgin fəaliyyətinə səbəb olduğundan, yenə də onun inkişafına kömək edir.

Stereometriya dərslərində şagirdlər kifayət qədər qurma məsələsi həll etmiş olduqda, fəza fiqurlarının çertyojlarına əsasən onların modellərini hazırlamaq və tərsinə, bu və ya başqa fiqurla bilavasitə tanış olduqdan sonra, onun doğru və əyani çertyojunu qurmaq işində bir sıra qiymətli bilik və bacarıq əldə edirlər.

Həndəsi fiqurların çertyojlarını qurmaq və modellərini hazırlamaq prosesində şagirdlər çertyoj alətlərindən istifadə etmək, ölçmək, işlədilən materialdan (kağız, karton, faner şüşə, metal və s.) qənaətlə istifadə etmək, kəsmək, quraşdırmaq, yapışdırmaq və s. kimi mühüm əməli vərdişlər əldə edirlər.

Qurma məsələlərinin həllində şagirdlər həndəsədən keçmiş olduqları nəzəri məlumatdan geniş surətdə istifadə etməli olurlar. Bu fakt həndəsənin şagirdlər tərəfindən şüurlu öyrənilməsində qurma məsələlərinin qüvvətli bir vasitə olduğunu göstərir. Ümumiyyətlə, qurma məsələləri şagirdlərdən təşəbbüs, müstəqillik tələb edərək, öz məzmunlarına görə onlarda məntiqi

təfəkkürün inkişafına kömək edir. Buna görə də qurma məsələlərinə fəza təsəvvürünün və məntiqi təfəkkürün inkişafına kömək edən qüvvətli vasitə nəzəri ilə baxmaq lazımdır.

2.1. Fəza fiqurlarının çertyojlarına verilən tələblər

Stereometriya dərslərində fəza fiqurlarının çertyojlarından geniş surətdə istifadə edilir.

Şagirdlərin fəza təsəvvürlərinin tərbiyə olunmasında və riyazi intuisiyanın inkişafında fəza fiqurlarının çertyojlarını başqa heç bir şeylə əvəz etmək olmaz.

Fəza fiqurlarının çertyojlarının düzgün qurulması məsələsi bu qədər böyük əhəmiyyətə malik olduğu halda, təəssüf ki, məktəblərimizdə ona çox az əhəmiyyət verilir; bəzi riyaziyyat müəllimləri bir çox hallarda yazı taxtasında səhv çertyojlar çəkir və şagirdlər də öz növbələrində həmin səhvləri təkrar edirlər.

Həndəsənin tədrisində çəkilən çertyojlar aşağıdakı üç tələbi ödəməlidir:

1) Çertyoj doğru olmalıdır, yəni o, əks etdirdiyi fiqurun müxtəlif proyeksiyalarından biri olmalıdır.

Aydındır ki burada çertyojun prinsip etibarı ilə doğru olmasından danışılır. Doğru çertyoj məsələnin düzgün həllini tapmağa kömək edir; doğru olmayan çertyoj isə çox zaman şagirdləri səhv düşünməyə sövq edir və bəzən də gərgin fikirləşməyə məcbur edir.

2) Çertyoj əyani olmalıdır, qəni o, əks etdirdiyi fiqur haqqında fəza təsəvvürü doğurmalıdır. Bu şərt pedaqoji prosesdə olduqca mühümdür.

Çertyojun doğru olması ilə əyani olması başqa-başqa şeylərdir; ola bilər ki, çertyoj doğru olsun, lakin əyani olmasın; məsələn, düz xəttin proyeksiyası nöqtə, kubun proyeksiyası kvadrat, çevrənin proyeksiyası düz xətt parçası şəklində alına bilər; deməli bu çertyojlar doğrudur, ancaq bunların əyani olmadıqları aydındır.

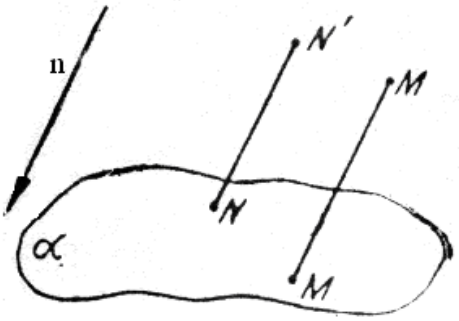
3) Çertyoj sadə üsulla çəkilməlidir; yəni onun çəkilməsində mövzuya daxil olmayan başqa üsullar, qurmalar işlədilməməlidir, çünki belə üsulların işlədilməsi, şagirdlərin diqqətinin əsas məsələ üzərində mərkəzləşməsinə mane ola bilər.

Pedaqoji prosesdə fiqurların müxtəlif proyeksiyaları içərisində paralel proyeksiyalar (çəpbucaqlı və ortoqonal) daha sadə və əlverişli olduğundan çertyojların qurulmasında onlardan daha çox istifadə olunur. Ona görə də paralel

proyeksiyalama haqqında bəzi məlumat verməyə keçək.

2.2. Paralel proyeksiya və onun əsas xassələri

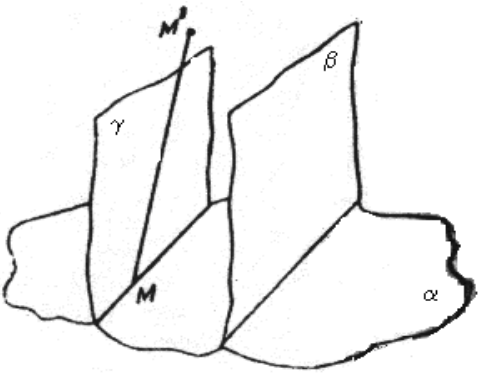
Fəzada ixtiyari bir α müstəvisi (əlverişli olmaq üçün üfüqi vəziyyətdə) və onun xaricində bir M` nöqtəsi götürək (şəkil 68) M` nöqtəsindən verilmiş n istiqamətinə paralel düz xətt çəkək və bunun α müstəvisi ilə kəsişmə nöqtəsini M ilə işarə edək. M nöqtəsinə M` nöqtəsinin n istiqamətində **proyeksiyası** deyilir. α müstəvisinə **proyeksiya müstəvisi** deyilir. M`M və ona paralel olan düz xətlərə **proyeksiyalayıcı düz xətlər** deyilir. n istiqamətində α müstəvisinə perpendikulyar olduqda, proyeksiyalayıcı düz xətlər də α müstəvisinə perpendikulyar olur; bu zaman nöqtənin **düzbucaqlı (ortoqonal) proyeksiyası,** əks halda nöqtənin **çəpbucaqlı proyeksiyası** alınır. N` nöqtəsinin proyeksiyasını N ilə göstərək. Şəkildən görünür ki, N` nöqtəsi M`



Şəkil 68

nöqtəsinə nisbətən bizdən uzaqdadır və bu iki nöqtədən α müstəvisinə daha yaxın olanı N` nöqtəsidir.

Deməli, nöqtələrin proyeksiyaları onların nisbi vəziyyətlərini (bir-birinə və proyeksiya müstəvisinə nəzərən) müəyyən edir. Ona görə, nöqtə ancaq o zaman verilmiş hesab olunur ki, onun proyeksiyası şəklində göstərilmiş olsun. Verilmiş nöqtənin proyeksiyasının işarəsi nöqtənin işarəsi yanında mötərizədə yazılır, məsələn M`(M); N`(N) və s.



Proyeksiyalayıcı düz xəttə paralel olan müstəviyə (məsələn, β müstəvisinə, şəkil 69) **proyeksiyalayıcı müstəvi** deyilir. Proyeksiyalayıcı düz xətdən keçən müstəvi də proyeksiyalayacı müstəvi hesab olunur (γ müstəvisi).

Paralel proyeksiyalamanın bir neçə əsas xassəsi vardır ki, fəza fiqurlarının çertiyojlarını qurduqda

biz həmin xassələrdən istifadə edirik; bu xassələr aşağıdakılardır:

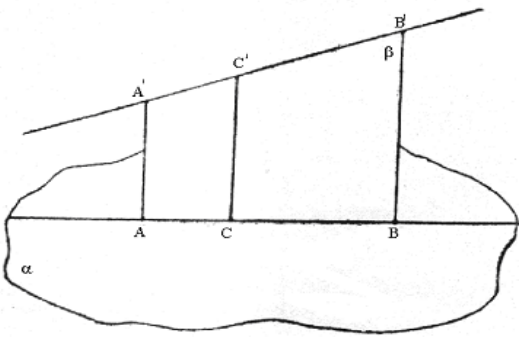
I xassə. Nöqtənin proyeksiyası nöqtədir.

Bu xassə nöqtənin proyeksiyasının tərifindən çıxdığı üçün aydındır.

Tərif. Hər hansı fiqurun bütün nöqtələrinin proyeksiyalarının həndəsi yerinə həmin fiqurun proyeksiyası deyilir.

II xassə. Proyeksiyalama istiqamətinə paralel olmayan düz xəttin proyeksiyası düz xətdir.

İsbatı.A`(A)B`(B) düz xəttinin α müstəvisi üzərindəki proyeksiyasının düz xətt olduğunu göstərmək üçün A`A ‖ B`B düz xətlərindən (şəkil 70) β müstəvisini keçirək; onda A`B` düz xətti β müstəvisi üzərində olar və bu müstəvi proyeksiya müstəvisini A və B nöqtələrindən keçən AB` düz xətti boyunca kəsər.



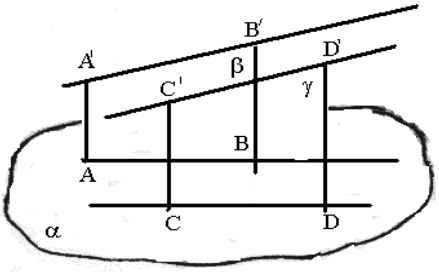
Şəkil 70

İndi A`B` düz xətti üzərindəki hər hansı C` nöqtəsinin C proyeksiyasını qurmaq üçün C`C‖A`A çəkək, onda C`C düz xətti β müstəvisi üzərində olar və α müstəvisini AB düz xətti üzərindəki bir C nöqtəsində kəsər. Deməli, A`B` düz xətti üzərindəki

hər hansı nöqtənin proyeksiyası AB düz xətti üzərindədir; əksinə, AB üzərindəki hər bir nöqtə A`B` üzərindəki bir nöqtənin proyeksiyasıdır. Deməli, A`B` düz xəttinin proyeksiyası AB düz xəttidir.

***Qeyd**. Proyeksiyalama istiqamətindəki düz xəttin proyeksiyası nöqtədir.*

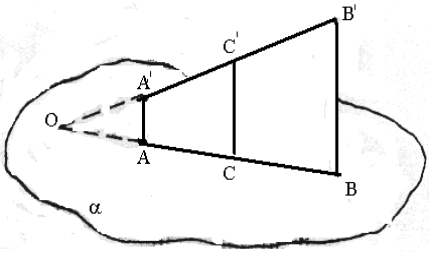
III xassə. Paralel düz xətlərin proyeksiyaları da paraleldir.



Şəkil 71

İsbatı. A`(A)B`(B) və C`(C)D(`(D) verilmiş paralel düz xətlər olsun (şəkil 71), bu düz xətlərin proyeksiya müstəvisi üzərindəki proyeksiyalarının paralel olduğunu isbat etmək lazımdır. Bunun üçün A`A||B`B düz xətlərindən β və C`C||D`D düz xətlərindən isə γ proyeksiyalayıcı müstəvisini keçirək.

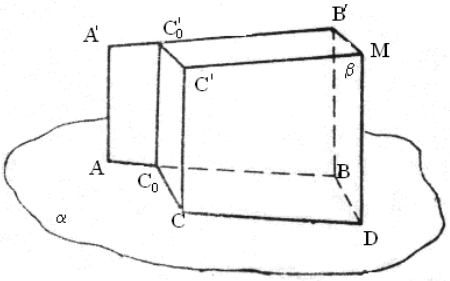
Onda A`A||C`C və A`B`||C`D` olduğundan, iki müstəvinin paralellik əlamətinə görə β|| γ olar. Proyeksiya müstəvisi bu iki paralel müstəvini AB və CD düz xətləri boyunca kəsdiyindən, AB||CD olacaqdır.



IV xassə. Verilmiş düz xətt parçası (A`B`, şəkil 72) üzərindəki nöqtə (C`) verilmiş parçanı hansı nisbətlə bölürsə, bu nöqtənin proyeksiyası (C), verilmiş düz xətt parçasının proyeksiyasını (AB) həmin nisbətdə bölür.

Şəkil 72

İsbatı. A`B` düz xətti ilə AB düz xəttinin kəsişmə nöqtəsini O ilə işarə edək. İndi B`OB bucağının tərəflərini A`A||C`C||B`B düz xətləri kəsdiyindən, bu tərəflərin üzərində mütənasib parçalar alınır, yəni, A`C`:C`B`=AC:CB olur.



Şəkil 73

V xassə. İki paralel düz xətt parçasının (A`B` və C`D`, şəkil 73) nisbəti, onların proyeksiyalarının (AB və CD) nisbətinə bərabərdir.

İsbat. B`B||D`D düz xətlərindən β müstəvisini və CC`-dən β müstəvisinə paralel olan γ müstəvisini keçirək; onda γ müstəvisi AA`B` müstəvisini $C_0`C_0$||C`C düz xətti boyunca kəsər (çünki CC`||AA` olduğundan CC`||AA`B`-dir) yəni A`A||$C_0`C_0$||B`B olar, o biri tərəfdən C`B`-C`D` və C_0B=CD alınar (γ və β paralel müstəviləri arasında qalan paralel düz xətt parçaları olduğundan) IV xassəyə görə

$$\frac{A'C_0'}{C_0B`}=\frac{AC_0}{C_0B} \text{ və ya } \frac{A`B`}{C_0'B'}=\frac{AB}{C_0B}$$

olduğundan götürsək, $\frac{A'B'}{C'D'}=\frac{AB}{CD}$ alarıq.

Paralel proyeksiyalamanın əsas xassələrini göstərdik, indi bu proyeksiyalamanın əsas teoremi olan Polke-Şvars teoremini nəzərdən keçirək.

Polke-Şvars teoremi. Müstəvi üzərindəki hər hansı dördbucaqlıya (diaqonalları ilə birlikdə) qabaqcadan verilmiş ixtiyari formada olan tetraedrin paralel proyeksiyası kimi baxmaq olar.

2.3. Tam və metrik müəyyən çertyojlar

İki həndəsi obrazın hər birinə aid olub, bunlarla tamamilə müəyyən olan obraza həmin iki obrazın **insidensiyası** deyilir.

Məsələn, bir-birinə paralel olmayan düz xətlə müstəvinin insidensiyası onların kəsişmə nöqtəsidir. Bir düz xətlə onun xaricindəki nöqtənin insidensiyası onlardan keçən müstəvidir və h.b.

Müstəvi üzərinə proyeksiyalanan fiqura **orijinal** deyilir.

Orjinal elementlərinin hər bir insidensiyası orijinalın proyeksiyasında (çertyojunda) qurulmuş olarsa (və ya qurula bilərsə), belə çertyoja **tam çertyoj** deyilir. Tam çertyojda orijinaldakı hər bir

nöqtənin proyeksiyası göstərilmiş olur (və ya göstərilə bilər). Orijinal elementlərinin hər bir insidensiyası tam çertyojda göstərilmiş insidensiyalarla tamamilə məyyəm olunduğuna görə, belə çertyojda heç bir insidensiyanı ixtiyari götürmək olmaz.

İxtiyari prizma çertyojunun tam çertyoj olduğunu isbat etmək mümkündür. Orijinalın çertyojunda göstərilmiş insidensiyalar, göstərilməmiş insidensiyaları qurmaq üçün kifayət olmazsa, belə çertyoja **natamam çertyoj** deyilir. Natamam çertyoju tam çertyoja çevirmək olar: bunun üçün əlavə insidensiyalar (bunlara **parametrlər** deyilir) verilməlidir. Natamam çertyojun tam çertyoja çevrilməsi üçün verilməsi zəruri olan parametrlərin sayına **natamamlıq əmsalı** deyilir.

Aydındır ki, hər hansı müstəvi fiqur elementlərinin hər bir insidensiyası bu fiqurun çertyojunda da qurula bilər: ona görə də müstəvi fiqurların çertyojları tamdır.

Fəza fiqurlarına, məcələn, coxüzlülərə gəldikdə, bunlardan bəzilərinin çertyoju tam, bəzilərininki isə natamamdır. İsbat edilmişdir ki[1], bütün təpələrindəki çoxüzlü bucaqları üçüzlü bucaq olan

---

[1] *Четверухин Н.Ф. "Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии". М., Учпедгиз, 1958. с.85*

coxüzlülərin çertyoju tamdır[2]. Deməli, bütün prizmaların, tetraedrin və düzgün onikiüzlünün (dodekaedr) çertyojları tamdır.

Uzləri ancaq üçbucaqlardan ibarət olan çoxüzlülərin çertyojları ümumiyyətlə, natamamdır; deməli, düzgün səkkizüzlünün (oktaedr) və düzgün iyirmiüzlünün (ikosaedr) çertyoju natamamdır. Burada tetraedr müstəsnalıq təşkil edir, yəni onun bütün üzləri üçbucaq olduğu halda çertyoju tamdır.

Yuvarlaq cisimlərdən: silindr, konus və kürənin çertyoju həmişə tamdır.

Tam çertyoj, verilən insidensiyalara görə yeni insidensiyaların qurulmasını tələb edən məsələlərin həllinə imkan verir.

Verilən insidensiyalara görə yeni insidensiyaların qurulmasını tələb edən məsələlərə **mövqe məsələləri** deyilir.

Belə məsələlərin həlli verilənlərin fəzadakı vəziyyətindən asılı olur. Misal üçün, verilmiş həndəsi cismin, verilmiş üş nöqtədən keçən müstəvi ilə kəsiyinin qurulması məsələsi mövqe məsələsidir.

Qeyd etmək lazımdır ki, tam çertyoj orijinalın metrik xassələrini təyin etmir. Belə çertyoj üzərində metrik məsələləri həll etmək olmaz. Tam çertyoj

---

[2] *Bu şərt kafidir, lakin zəruri deyildir; məsələn, ixtiyari piramida çertyojunun tam çertyoj olduğu göstərilmişdir.*

üzərində metrik məsələləri həll edə bilmək üçün bu çertyoj üzərinə orijinalın ödədiyi əlavə şərtlər qoyulmalıdır. Bu halda alınan çertyoj **metrik müəyyən çertyoj** adlanır. Misal üçün, çertyojdakı hər hansı paraleloqram həm ixtiyari paraleloqramın, həm də düzbucaqlı və ya kvadratın proyeksiyasını göstərə bilər. Lakin bu paraleloqramın üzərinə onun kvadratı göstərməsi şərti qoyulsa, onda həmin çertyoj metrik müəyyən olar. Həmçinin, çertyojdakı üçbucaqlı piramidanın üzərinə onun düzgün tetraedri göstərməsi şərti qoyulsa, onda həmin çertyoj da metrik müəyyən olar.

Orijinalın formasını müəyyən edən çertyoja **metrik müəyyən çertyoj** deyilir. Aydındır ki, orijinala oxşar olan fiquru metrik müəyyən çertyoja əsasən qurmaq olar. metrik müəyyən çertyoj orijinalın tam çertyoju üzərinə əlavə şərtlərin qoyulmasından alındığı üçün ona **şərti çertyoj** da deyilir.

Aşağıda metrik məsələlərə nümunələr göstərilmişdir.

Məsələ 1. ABCDA`B`C`D` kubunun BB`C`C üzü üzərində götürülmüş M nöqtəsindən kubun AA`C`C diaqonal kəsiyinə endirilmiş perpendikulyarı qurun.

Məsələ 2. Yan tili oturacağının tərəfindən üç dəfə böyük olan düzgün üçbucaqlı piramidada

oturacağın tərəfindən qarşıdakı yan tilə perpendikulyar olaraq keçən kəsiyi qurun.

Məsələ 3. Düzgün dördbucaqlı prizmanın hündürlüyü oturcağının tərəfinin $\frac{3}{4}$-nə bərabərdir. Oturacağın təpəsindən, bu təpədən keçməyən diaqonallardan birinə perpendikulyar olaraq keçən kəsiyi qurun.

2.4. Fəzada müstəvi fiqurların çertyojlarının qurulması

Stereometriyada məsələ həllində və nəzəri materialın izahında üçbucaq, paraleloqram, düzbucaqlı, pomb, trapesiya və düzgün çoxbucaqlıların çertyojlarını qurmaq lazım gəlir. Aşağıda bu fiqurların çertyojlarının qurulması göstərilmişdir.

1. **Paraleloqramın və rombun çertyoju**. Paralel proyeksiyalamanın III və V xassəsinə əsasən müstəvi üzərində çəkilmiş ixtiyari bir paraleloqram, ixtiyari bir paraleloqramın və ya rombun çertyoju olaraq qəbul oluna bilər.
2. **Düzbucaqlının və kvadratın çertyoju**. Paralel proyeksiyalamanın III, V xassəsinə və Polke teoreminə əsasən müstəvi üzərində çəkilmiş

ixtiyari bir paraleloqram ixtiyari bir düzbucaqlının və ya kvadratın çertyoju olaraq qəbul oluna bilər.

Buradan görünür ki, hər bir paralelepipeddə kvadrat şəklində kəsik keçirmək mümkündür.

3. **Üçbucağın çertyoju**. Paraleloqramın diaqonalı onu iki üçbucağa, pombun diaqonalı onu iki bərabəryanlı (xüsusi halda düzgün) üçbucağa və düzbucaqlının diaqonalı onu iki düzbucaqlı üçbucağa ayırır.

Buradan və 1-ci, 2-ci maddələrdən görünür ki, müstəvi üzərində çəkilmiş ixtiyari bir üçbucaq, ixtiyari bir üçbucağın çertyoju ola bilər.

Buradan habelə görünür ki, hər bir üçbucaqlı prizmada düzgün üçbucaq şəklində kəsik keçirmək mümkündür.

4. **Trapesiyanın çertyoju**. Paralel proyeksiyalamanın üçüncü xassəsinə əsasən müstəvi üzərində çəkilmiş ixtiyari trapesiya ixtiyari bir trapesiyanın çertyoju ola bilər.
5. **Müstəvinin çertyoju**. Stereometriyada bir adət olaraq müstəvi paraleloqram şəklində çəkilir, lakin düzbucaqlı şəklində təsəvvür olunur; buna görə də iki qarşılıqlı perpendikulyar düz xətti (qarşılıqlı qoşma düz xətləri) çəkərkən onları uyğun olaraq

paraleloqramın qonşu tərəflərinə paralel götürmək tövsiyə olunur.

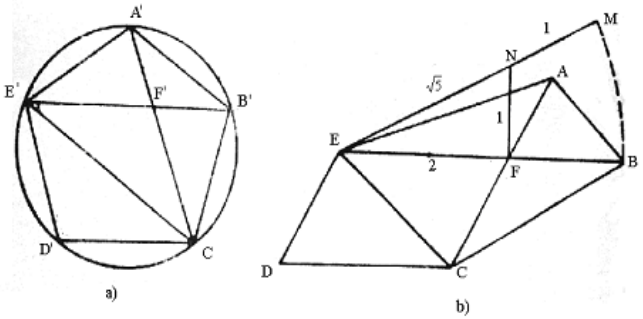
Metrik müəyyən çertyoj nöqteyi-nəzərindən müstəvinin paraleloqram şəklində çəkilib, düzbucaqlı şəklində təsəvvür olunması ilə onun üzərinə bir şərt (bucaqların düz bucağı göstərməsi şərti) qoyulmuş olur, yəni bir parametr sərf olunur və müstəvinin metrik müəyyən olunması üçün sərf olunmalı bircə sərbəst parametr qalır; bu isə müstəvi üzərində çertyojların qurulmasındakı sərbəstliyi (ixtiyariliyi) aradan qaldırmış olur.

Deyilənləri nəzərə alaraq müstəvinin çertyojunu aşağıdakı kimi çəkirlər (şəkil 74 a, b)

Şəkil 74.

Qeyd. *1-5-ci maddələrdə uyğun fiqurların çertyojlarının doğru olması şərtindən danışılır. Lakin başlanğıcda deyildiyi kimi həmin çertyojların qurulmasında əyanilik tələbinin də nəzərdə tutulması zəruridir.*

6. Düzgün beşbucaqlının çertyoju. Şəkil 75-də düzgün beşbucaqlı (a) və onun çertyoju (b) çəkilmişdir. A`C`||E`D`. E`B`||D`C` və E`D`=D`C` olduğundan E`F`C`D` dördbucaqlısı romdur. Bunun çertyoju olaraq ixtiyari DEFC paraleloqramını (şəkil 75 b) çəksək, beşbucaqlının üç təpəsinin (E`, D` və C`) proyeksiyası alınmış olar; deməli, A` və B` təpələrinin proyeksiyasını çəkmək qalır.



Şəkil 75

E`A`B`C` bərabəryanlı trapesiyasını diaqonalların hasili, qarşı tərəflərin hasilləri cəminə bərabər olduğundan[3], E`B`=A`C`=E`C`=d və E`A`=A`B`=B`C`=a ilə işarə etsək $d^2=a^2+ad$ alarıq.

Buradan:

$$d=\frac{1}{2}a\left(1+\sqrt{5}\right)$$

[3] *Ptolomey teoreminə görə*

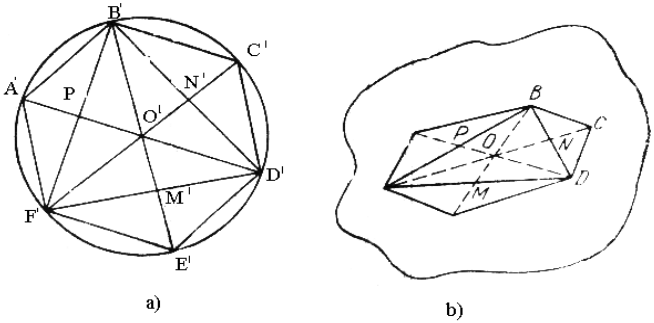
və

$$E`B`:E`F`=\frac{1}{2}a\left(1+\sqrt{5}\right):a=\left(1+\sqrt{5}\right):2$$

olar, yəni EF=1 olsa $EB=1+\sqrt{5}$ olar (şəkil 75,b-də FN⊥EF-dir). Deməli, $EM=1+\sqrt{5}$ quraraq, pərgarla EB=EM ayıraraq, B` təpəsinin proyeksiyası olan B nöqtəsini alarıq. Nəhayət, BA||EC düz xətti ilə CF düz xətlərinin kəsişməsindən A təpəsini alarıq.

Beləliklə, ABCDE fiquru düzgün beşbucaqlının çertyoju olur.

7. Düzgün altıbucaqlının çertyoju. Düzgün A`B`C`D`E`F` altıbucaqlısının (şəkil 76 a) çertyojunu çəkmək üçün düzgün B`D`F` üçbucağının çertyojundan istifadə etmək olar; bunun üçün ixtiyari BDF üçbucağını və onun BM, D və FN medianlarını çəkirik (şəkil 76 b).



a) b)

Şəkil 76

ME=MO, PA=PO və NC=NO ayırmaqla (orijinalda M`E`=M`O` və s-dir) E`, A` və C` təpələrinin proyeksiyalarını qurmuş olarıq. ABCDEF düzgün altıbucaqlının çertyoju olar.

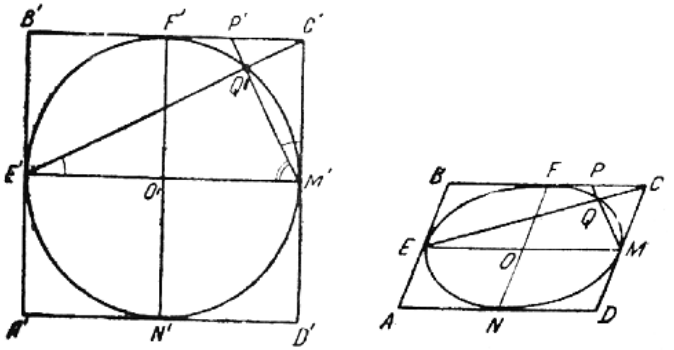
8. Çevrənin çertyoju. Çevrənin paralel proyeksiyalanmasından alınan əyriyə **ellips** deyilir. Çevrə elementlərinin və paralel proyeksiyalamanın xassələrinə əsasən ellipsin bəzi xassələrini müəyyən etmək olar. Çevrə müstəvisini, onunla proyeksiya müstəvisinin kəsişmə xətti ətrafında döndərməklə (bu halda proyeksiya müstəvisini və proyeksiyalama istiqamətini sabiq saxlayırıq) çevrənin proyeksiyası olan ellipsin formasını dəyişmək olar. Xüsusi halda həmin ellips çevrəyə və ya düz xətt parçasına çevrilə bilər. Çevrənin proyeksiyası olan ellipsi qurmaq üçün müxtəlif üsullar vardır. Bu üsulların ikisini göstərək.

1) Şəkil 77 a-da O` çevrəsinin çertyojunu qurmaq üçün onun xaricinə A`B`C`D` kvadratını çəkək və toxunma nöqtələrini E`, F`, M`, N` ilə işarə edək.

F`C` parçasının P` orta nöqtəsini M` nöqtəsi ilə və E` nöqtəsini C` nöqtəsi ilə birləşdirək. M`P` və E`C` düz xətlərinin kəsişmə nöqtəsini Q` ilə işarə edək. $\Delta C`M`E`$ və $\Delta P`C`M`$-də $\angle M`=\angle C`=90^0$ və P`C`:C`M`=C`M`:M`E`=1:2 olduğundan onlar

oxşardır, ona görə $\angle C`M`P`=\angle C`E`M`$-dir. Lakin $\angle C`M`P`+ \angle P`M`E`=90^0$; deməli $\angle C`E`M`+\angle P`M`E`=90^0$-dir.

Buradan görünür ki, $\Delta M`Q`E`$ düzbucaqlı üçbucaqdır, yəni Q` nöqtəsi O` çevrəsi üzərindədir.Bu xassədən istifadə edərək O` çevrəsinin proyeksiyası olan ellipsi qurmaq olar. Bunun üçün əvvəlcə A`B`C`D` kvadratının çertyoju olaraq ixtiyati ABCD paraleloqramını çəkək (şəkil 77 b). Bu paraleloqramın tərəflərinin E, F, M, N orta nöqtələri uyğun olaraq E`, F`, M`, N` nöqtələrinin proyeksiyaları olduğundan (paralel proyeksiyalamanın IV xassəsinə görə), O` çevrəsinin proyeksiyası olan ellips üzərində olacaqdır. İndi Q` nöqtəsinin proyeksiyasını quraq; bunun üçün



a) b)

Şəkil 77

aydındır ki, EC düz xətti ilə MP düz xəttinin (P

nöqtəsi FC parçasının ortasıdır) Q kəsişmə nöqtəsini qurmaq kifayətdir. Q nöqtəsi ellips üzərində olacaqdır.

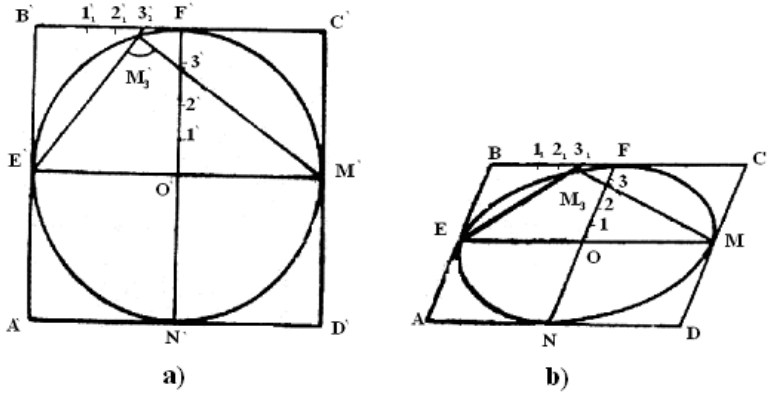
Həmin qayda ilə ellipsin daha 7 nöqtəsini qura bilərik və nəticədə ellipsin 12 nöqtəsini qurmuş olarıq. Qurulmuş nöqtələri səlis əyri ilə birləşdirdikdə O` çevrəsinin proyeksiyası olan ellips alınır.

2) İki qoşma diametrinə görə ellipsi qurmaq üçün yenə də O` çevrəsinin xaricinə A`B`C`D` kvadratını çəkək (şəkil 78 a); E`, F`, M` və N` nöqtələri həmin kvadratın tərəfləri ilə çevrənin toxunma nöqtələri olsun. B`F` və F`O` parçalarını eyni sayda bərabər hissələrə ayıraq və bölgü nöqtələrini uyğun olaraq $1_1'',2_1',3_1'$... və 1″,2′,3′,... ilə işarə edək. İndi E` nöqtəsini B`F` parçasının bölgü nöqtələrindən biri, məsələn 3_1` ilə birləşdirək və M` nöqtəsini F`O` parçasının 3` nöqtəsi ilə birləşdirib E`3` düz xəttini kəsənə kimi uzadaq; bu iki düz xəttin kəsişmə nöqtəsini $M_3$ ilə işarə edək. Bu halda $M_3$` nöqtəsi O` çevrəsi üzərində olacaqdır. Doğrudan da E`B`$3_1$` və M`O`3` düzbucaqlı üçbucaqları bərabər olduğundan (iki katetə görə), ∠B`3_1`E`=∠O`3`M` olar. Lakin bu bucaqlardan birincinin B`3_1` tərəfi ikincinin O`3` tərəfinə perpendikulyardır, deməli, bu bucaqların o bir

tərəfləri də perpendikulyar olmalıdır, yəni $E`3_1`\perp M`3`$-dir. Buradan görünür ki, $\angle M`M_3`E`=90^0$-dir, yəni $M_3`$nöqtəsi O` çevrəsinin üzərindədir.

Göstərilən xassədən istifadə edərək qoşma diametrinə görə ellipsi qurmaq olar.

Tutaq ki, qurulacaq ellipsin EM və FN qoşma diametrləri verilmişdir (şəkil 78 b). EM və FN



Şəkil 78

parçalarını orta xətt hesab edərək, ABCD paraleloqramını quraq (bu paraleloqramı A`B`C`D` kvadratının çertyoju hesab etmək olar). Sonra BF və FO parçalarını eyni sayda bərabər hissələrə ayıraq və bölgü nöqtələrini uyğun olaraq 1_1, 2_1, 3_1 ... və 1, 2, 3... ilə işarə edək.

$\frac{B3_1}{BF}=\frac{B'3'_1}{B'F'}$ və $\frac{O3}{OF}=\frac{O'3'}{O'F'}$ olduğundan $E3_1$ və M3 düz xətləri uyğun olaraq $E`3_1`$ və M`3` düz

xətlərinin proyeksiyası və onların M_3 kəsişmə nöqtəsi də $M_3`$ nöqtəsinin proyeksiyası olacaqdır. Lakin $M_3`$ nöqtəsi O` çevrəsi üzərindədir, deməli $M_3$ nöqtəsi də O` çevrəsinin proyeksiyası olan ellips üzərindədir. Həmin üsulla, göstərilən ellipsin istənilən sayda nöqtəsini (bizim şəkildə E, F, M və N nöqtələrindən başqa 12 nöqtəni) qurmaq olar. Yenə də qurulmuş nöqtələri səlis əyri ilə birləşdirdikdə çevrənin proyeksiyası olan ellips alınar.

Qeyd. *Ellipsin çəkilməsini sürətləndirmək üçün qalın kartondan kəsilmiş ellips modellərindən istifadə etmək olar*[4]*. Bəziləri bərabər, bəziləri oxşar olan bir neçə ellips modeli hazırlamaqla yuvarlaq cisimlərin çertyojlarının qurulmasını xeyli asanlaşdırmaq olar.*

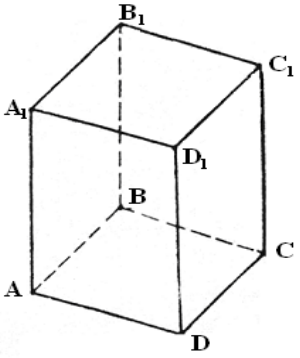
2.5. Həndəsi cisimlərin çertyojlarının qurulması

İndi də həndəsi cisimlərin çertyojlarının qurulmasına keçək.

Hər şeydən əvvəl qeyd edək ki, çoxüzlülərin və habelə silindr ilə konusun çertyojunu (ortoqonal proyeksiyada) qurarkən şəkil müstəvisini (proyeksiya müstəvisini) şaquli vəziyyətdə, həmin cisimlərin oturacaq müstəvilərini isə proyeksiya müstəvisinə mail vəziyyətdə götürəcəyik (çünki

[4] *«Математика в школе» jurnalı (№4, 1956-cı il). A.İ.Volxonskinin məqaləsinə bax.*

cisimlərin oturacaq müstəvisi proyeksiya müstəvisinə perpendikulyar götürülərsə, oturacaqların proyeksiyası düz xətt parçası şəklində alınar və ona görə də əyani olmaz). Bu səbəbə görə cisimlərin hündürlüyü onların həqiqi hündürlüyündən kiçik olan parçalarla göstəriləcəkdir.



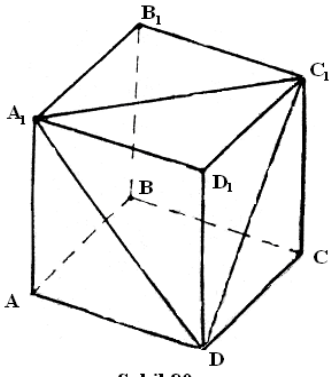
Şəkil 79

1. **Düzbucaqlı paralelipipedin çertyoju.** İxtiyari bir ABCD paraleloqramını çəkirik (şəkil 79). Bunun təpələrindən şaquli istiqamətdə düz xətlər çəkib, onların üzərində $AA_1=BB_1=CC_1=DD_1$ parçalarını ayırırıq. A_1, B_1, C_1 və D_1 nöqtələrini ardıcıl olaraq birləşdirdikdə düzbucaqlı paralelepipedin çertyojunu alarıq.

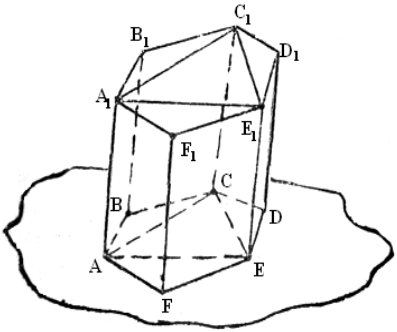
Qeyd 1*. Çertyojun daha çox əyani olması üçün aşağıdakı qaydalara riayət etmək məsləhətdir: 1. AD tərəfi üfüqi istiqamətdə çəkilməməli; 2. Fiqurun konturu və görünən elementləri orta qalınlıqda (0,5mm) bütün xətlərlə, görünməyən elementləri isə qırıq (punktir) xətlərlə və iki dəfə nazik (0,25mm) çəkilməlidir. 3.Təpələr, mərkəzləri bu təpələrdə hesab edilən kiçik dairələrlə göstərilməlidir.*

Bu qaydalar, başqa çoxüzlülərin çertyojlarına da aiddir.

Qeyd 2. *Düzbucaqlı paralelepipedin çertyojunu qurarkən onun AB, AD və AA_1 tillərini istənilən istiqamətdə götürmək olar və bu zaman alınan çertyoj Polke teoreminə görə doğru olar. Lakin burada*



Şəkil 80



Şəkil 81

əyanilik prinsipini də gözləmək lazımdır.

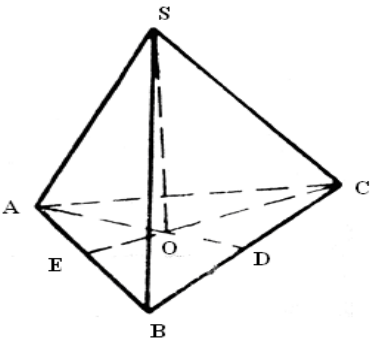
Şəkil 80-də kubun çertyoju göstərilmişdir. Buradakı $D_1A_1C_1D$ tetraedrinin forması müəyyən olunduğundan (o, düzgün tetraedri göstərir) kubun çertyoju metrik müəyyəndir.

2. Düzgün prizmanın çertyoju. Şəkil 81-də düzgün altıbucaqlı prizmanın çertyoju göstərilmişdir. Bunun bir oturacağını bildiyimiz qayda ilə

çəkdikdən sonra yan tillərin köməkliyi ilə o biri oturacağını qururuq.

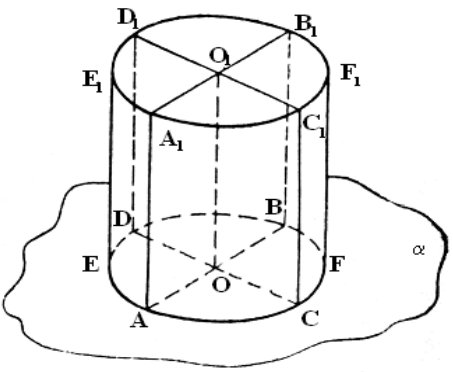
Burada $ACEA_1C_1E_1$-i düzgün üçbucaqlı prizmanın çertyoju olaraq qəbul etmək olar.

3. Düzgün piramidanın çertyoju. Şəkil 82-də düzgün üçbucaqlı piramidanın çertyoju göstərilmişdir. Bunun oturacağı olaraq ixtiyari ABC üçbucağını çəkirik və onun AD, CE medianları vasitəsi ilə orijinal mərkəzinin O proyeksiyasını qururuq (paralel proyeksiyalamanın IV xassəsinə görə hər hansı üçbucağın medianlarının proyeksiyaları, həmin üçbucağın proyeksiyasının medianlarıdır). Sonra şaquli istiqamətdə və ixtiyari uzunluqda OS parçasını çəkib, S nöqtəsini oturacağın A, B və C təpələri ilə birləşdiririk.



Şəkil 82

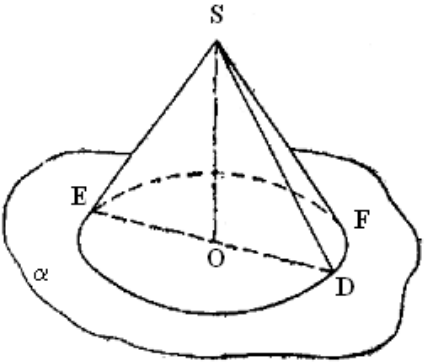
Qeyd. *Düzgün üçbucaqlı piramidanın çertyoju, diaqonalları çəkilmiş hər hansı dördbucaqlı şəklində göstərilə bilər və bu çertyoj Polke-Şvare teoreminə görə doğru olar, lakin burada da əyanilik gözlənilməzdir.*



4. Silindrin çertyoju. Düz dairəvi silindrin oproqonal proyeksiyada çertyojunu qurmaq üçün α müstəvisi üzərində bildiyimiz qayda ilə ixtiyari ellips quruluq (şəkil 83), sonra O mərkəzindən şaquli OO_1 düz xəttini çəkirik və O_1 nöqtəsini silindrin üst oturacağı mərkəzinin proyeksiyası hesab edərək, bu nöqtəyə görə alt oturacağa bərabər və onunla oxşar vəziyyətli ellipsi

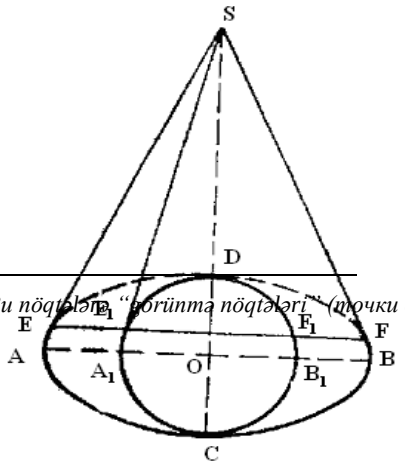
Şəkil 83

Şəkil 84



quruluq. E və F nöqtələri orijinalda alt oturacaq çevrəsinin görünən hissəsini (E`A`C`F` qövsünü) görünməyən hissəsindən (E`D`B`F` qövsündən) ayıran E` və F` nöqtələrinin proyeksiyası olduğundan[5] EE_1 və FF_1 parçaları kənar doğuranların proyeksiyası olacaqdır (EE_1 və FF_1 düz xətləri hər iki ellipsə ortaq toxunan düz xətlərdir).

5. Konusun çertyoju. Ortoqonal proyeksiyada düz dairəvi konusun



[5] *Bu nöqtələrə "görünmə nöqtələri" (точки видимости) deyilir.*

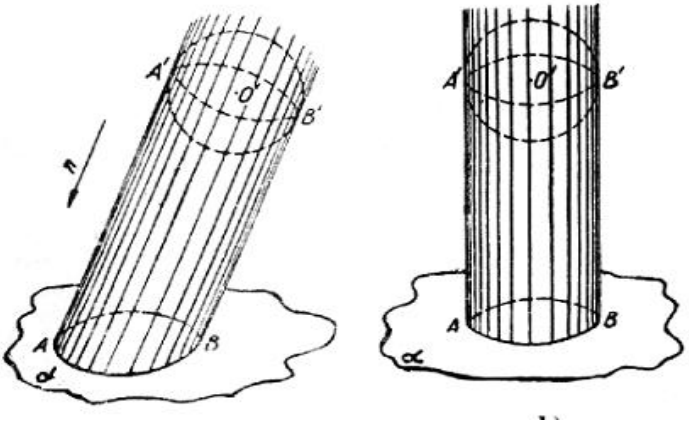
çertyojunu qurmaq üçün silindrdə olduğu kimi α müstəvisi üzərində ixtiyari ellips çəkirik (şəkil 84); onun O mərkəzindən şaquli OS düz xəttini çəkərək, S nöqtəsini E və F görünmə nöqtələri ilə birləşdiririk.

Qeyd. *E və F görünmə nöqtələrini qurmaq üçün, mərkəzi ellipsin mərkəzində və radiusu ellipsin kiçik yarımoxu olan köməkçi çevrə çəkirik (şəkil 85); sonra S nöqtəsindən bu çevrəyə SE_1 toxunanı çəkib, E_1 toxunma nöqtəsindən AB oxuna paralel düz xətt keçiririk. Bu düz xətt ilə ellipsin kəsişdiyi E və F nöqtələri axtarılan nöqtələr olacaqdır (doğrudan da, oxu OS və istiqaməti AB olan afin çevirməsində AB ellipsi A_1B_1 çevrəsinə çevrilir və bu halda ellipsə çəkilmiş SE toxunanı çevrəyə çəkilmiş SE_1 toxunanına çevrildiyindən E və E_1 toxunma nöqtələri uyğun nöqtələr olur).*

Şəkil 85

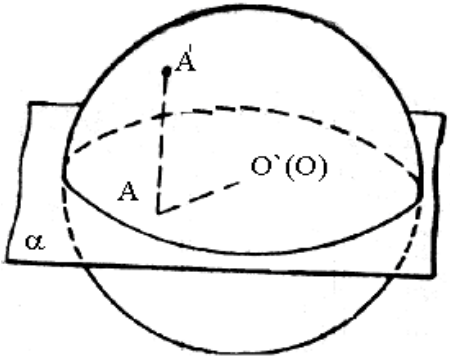
6. Kürənin çertyoju. Proyeksiya müstəvisi üzərində O` kürəsinin n istiqamətində proyeksiyasını almaq üçün həmin istiqamətdə kürəyə toxunanlar (proyeksiyalayıcı şüalar) keçirmək və bu toxunanlar ilə proyeksiya müstəvisinin kəsişmə nöqtələrinin həndəsi yerini tapmaq lazımdır (şəkil 86). Bu proyeksiyalayıcı şüaların həndəsi yeri dairəvi silindrik səth olduğundan, bu silindrik səth ilə proyeksiya müstəvisinin kəsişmə xətti olan AB əyrisi kürənin proyeksiyası olacaqdır. Aydındır ki, AB

əyrisi ortoqonal proyeksiyada çevrə (şəkil 86, b), qalan hallarda isə ellipsdir (şəkil 86, a). Deməli, kürənin proyeksiyası həm ellips, həm də çevrə ola bilər; biz əyani olmaq üçün kürənin ortoqonal proyeksiyasını işlədəcəyik; bu zaman kürənin proyeksiyası olan çevrənin diametri orijinalın diametrinə bərabər olacaqdır.



a) Şəkil 86 b)

Proyeksiya müstəvisini orijinala (kürəyə) nisbətən ixtiyari vəziyyətdə götürmək olar; biz əlverişli olduğuna görə proyeksiya müstəvisini kürənin mərkəzindən keçən, həm də şaquli vəziyyətdə hesab edəcəyik. Onda kürənin proyeksiyası orijinal ilə proyeksiya müstəvisinin kəsişmə xətti (böyük dairə çevrəsi) olacaqdır.

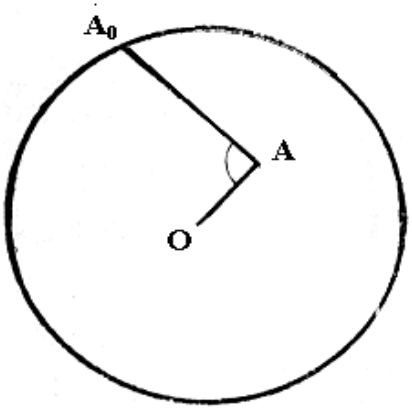


Şəkil 87

Kürə səthinin hər hansı ixtiyari A nöqtəsinin proyeksiya müstəvisindən olan məsafəsinə həmin **nöqtənin hündürlüyü** deyilir, bunun $A`A \perp \alpha$ parçası ilə ölçüldüyü aydındır (şəkil 87, burada aydın olmaq üçün α proyeksiya müstəvisi üfqi vəziyyətdə götürülmüşdür).

Kürə səthindəki A` nöqtəsinin çertyojda verilmiş A proyeksiyasına görə onun hündürlüyünü tapmaq olar.

Doğrudan da A` və Q` nöqtələrindən proyeksiya müstəvisində perpendikulyar müstəvi (proyeksiyalayıcı müstəvi) keçirsək, kəsikdə böyük dairə alınar və bu müstəvi proyeksiya müstəvisini OA düz xətti boyunca kəsər;



Şəkil 86

həmin böyük dairə müstəvisini OA ətrafında 90^0 fırlatsaq, onun çevrəsini kürənin proyeksiyası olan çevrə üzərinə gətirmiş olarıq. Bu fırlanma zamanı $A`A \perp O`A$ şərti həmişə ödəndiyindən, A`A-nın nəticədə aldığı $A_0A$ vəziyyətində də ödənəcək (şəkil 88), yəni $A_0A \perp OA$ olacaqdır. Beləliklə, $AA_0$ parçası A` nöqtəsinin hündürlüyünü göstərəcəkdir. Deməli, proyeksiyası A olan A` nöqtəsinin hündürlüyünü tapmaq üçün A nöqtəsində OA-ya perpendikulyar çəkmək və bu perpendikulyarın A nöqtəsi ilə çevrə arasında qalan parçasını götürmək lazımdır.

Aydındır ki, kürənin mərkəzindən keçən kəsiklərdən ancaq birisi üfüqi vəziyyətdə ola bilər.

Tərif. ***Kürənin üfüqi vəziyyətdə olan kəsiyinə onun ekvatoru deyilir, ekvatora perpendikulyar olan diametrə kürənin oxu və oxdan keçən kəsiklərə meridian deyilir. Kürənin oxuna perpendikulyar olan kəsiklərə paralellər deyilir.***

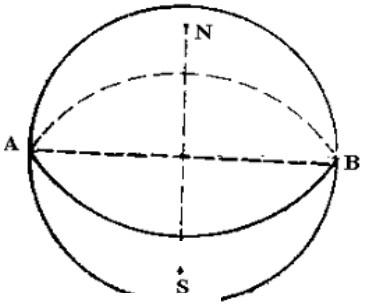
Çevrənin ortoqonal proyeksiyası ellips olduğuna görə, istəa ekvator, istər meridian və istərsə paralellərin ortoqonal proyeksiyaları ellipsdir.

Tərif. ***Kürənin oxu onun səthini iki nöqtədə kəsir ki, bunlara qütb deyilir.***

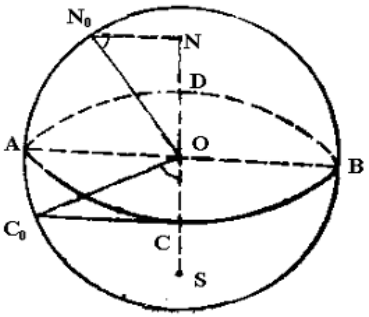
Qütblər ekvatordan bərabər məsafədə olub, biri ondan yuxarıda, digəri isə aşağıda yerləşir.

A`B` ekvator müstəvisi proyeksiya müstəvisinə perpendikulyar olsa, onda proyeksiyalama istiqaməti ekvator müstəvisinə paralel olar və bu zaman ekvator ellips şəklində deyil, kürənin proyeksiyası olan çevrənin üfüqi AB diametri şəklində göstərilər. Deməli, ekvatorun ellips şəklində göstərilməsi üçün onun müstəvisi A`B` diametri ətrafında hər hansı bucaq qədər dönməlidir. Bu zaman ekvatora perpendikulyar olan ox da, oxdan keçən proyeksiyalayıcı müstəvi üzərində öz əvvəlki vəziyyətindən həmin bucaq qədər meyl edəcəkdir. Nəticədə dönmə istiqamətindən asılı olaraq, qütblərdən biri bizə yaxınlaşıb, o biri bizdən uzaqlaşacaqdır. Beləliklə, qütblərin proyeksiyası N və S nöqtələrinə düşəcəkdir (şəkil 89).

Qeyd etmək lazımdır ki, ekvatorun proyeksiyası verildikdə, qütblərin proyeksiyasını qurmaq olar. Doğurdan da, N` nöqtəsinin hündürlüyü $NN_0$ (şəkil 90), C` nöqtəsinin hündürlüyü isə CC_0-dir. (C`nöqtəsi ekvatorun proyeksiya müstəvisindən ən uzaq olan nöqtəsidir).



Şəkil 89



Şəkil 90

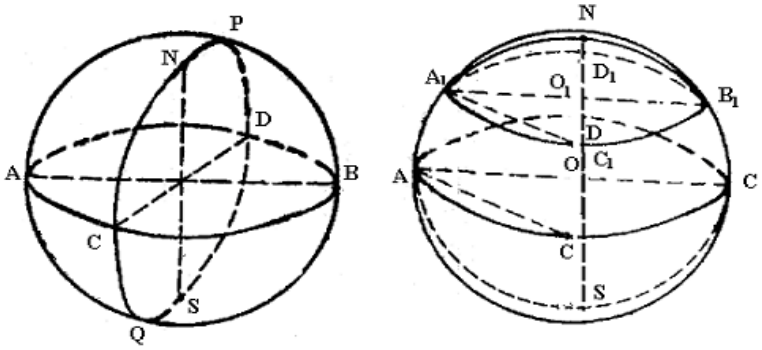
$N_0O \perp OO_0$ olduğundan (çünki, O`N`$\perp$O`C`-dir), $\angle ON_0N = \angle COC_0$ olar və buna görə də $\Delta ON_0N = \Delta OC_0C$ (hipotenuz və iti bucaqlarına görə) alarıq. Buradan da $ON = CC_0$ alınar. Həmin qayda ilə $OS = CC_0$ (yəni OS=ON) olduğunu göstərmək olar. Deməli, qütbü proyeksiyasının mərkəzdən olan məsafəsi ekvatorun proyeksiya müstəvisindən ən uzaq olan nöqtəsinin hündürlüyünə bərabərdir.

Biz, ekvatorun proyeksiyasına görə qütblərin proyeksiyasını qurduq; tərsinə, qütblərin proyeksiyası verildikdə, ekvatorun proyeksiyasını qurmaq olar.

Bunun üçün nəzərə almaq lazımdır ki, ekvator proyeksiyasının böyük yarımoxu sabit (AO), kiçik yarımoxu isə NN_0-a bərabərdir ($OC = NN_0$).

Beləliklə, kürənin çertyojunda qütblərin proyeksiyası ilə ekvatorun proyeksiyası bir-birindən asılıdır; bunlardan ancaq biri ixtiyari götürülə bilər, digəri bundan asılı olaraq qurulmalıdır.

İndi meridianların qurulmasına keçək: meridian oxdan keçdiyi üçün ekvatoru, onun müəyyən bir diametri boyunca kəsir; ona görə də, ekvatorun proyeksiyası olan ellipsin ixtiyari bir CD diametri



Şəkil 92

müəyyən bir meridianı təyin edir. Bu meridian CD diametri ilə NS oxundan keçib, kürənin proyeksiyası olan çevrəyə P və Q nöqtələrində toxunur (şəkil 91) NS ilə CD orijinalda qarşılıqlı perpendikulyar olduqlarından, buradakı meridianın qoşma diametrləridir, PQ isə onun böyük oxudur. CD-nin istiqamətini dəyişməklə istənilən qədər meridian qurmaq olar. Paralelləri qurmaq üçün AB diametrdən keçən ANBS meridianından istifadə edək (şəkil 92).

Şəkil 91

Tutaq ki, mərkəzi O_1 nöqtəsində olan paraleli qurmaq istəyirik. ANBS meridian müstəvisi ekvator ilə axtarılan paraleli paralel xətlər boyunca kəsəcəyindən, axtarılan paralelin böyük oxu $A_1B_1 \| AB$ olacaqdır. Kiçik yarımoxu tapmaq üçün AC xətti ilə A_1 nöqtəsindən köməkçi bir müstəvi keçirək (orijinalda); bu müstəvi NS oxunu bir C_1 nöqtəsində kəsər ($A_1C_1 \| AC$) və O_1C_1 axtarılan paralelin kiçik yarımoxu olar. Beləliklə, $A_1D_1B_1C_1$ paralelini qurmaq olar. Deməli ekvatorunun və oxunun proyeksiyası qurulmuş olan kürənin ixtiyari paralelini qurmaq üçün onun ancaq mərkəzinin verilməsi kafidir.

Fəzada fiqurları qurarkən aşağıdakıları nəzərdə tutacağıq:

1. Müstəvinin fəzadakı vəziyyətini təyin edən elementlər tapıldıqda bu müstəvini qurmaq olar, yəni verilən üç nöqtədən keçən, düz xətdə onun xaricindəki bir nöqtədən keçən, bir nöqtədə kəsişən və ya paralel iki düz xətdən keçən müstəvini qura bilərik.
2. Kəsişən iki müstəvi verildikdə onların kəsişmə xətti də verilmiş olur, yəni iki müstəvinin kəsişmə xəttini yapa bilərik.

3. Fəzada müstəvi verildikdə planimetriyadakı bütün qurmaları həmin müstəvi üzərində yerinə yetirə bilərik.

Fəzada hər hansı bir fiquru qurmaq, onu müəyyən sayda indicə göstərilmiş əsas elementar qurmalara gətirmək deməkdir.

Aydındır ki, bu üç təklif, fəzada həndəsi qurmaların əsaslanmalı olduğu aksiomlar sistemini təşkil edir.

2.6. "Xəyalda" qurma və "Proyeksiya çertyojunda qurma" üsulları

Fəzada qurma məsələlərinin həllində əsas iki üsul vardır.

Qurma məsələsini birinci üsulla həll edərkən, çertyojda həndəsi obrazlar və onların müxtəlif insidensiyaları ixtiyari götürülür və qurma, planimetriyada çertyoj alətləri ilə yerinə yetirilən real qurmalardan fərqli olaraq, fikirdə, xəyalda yerinə yetirilir, çünki bu qurmaları fəzada çertyoj alətləri ilə yerinə yetirmək mümkün deyildir. Bu üsulda çertyoj xəyalda yerinə yetirilən qurmanı əyaniləşdirməyə və beləliklə onu asanlaşdırmağa xidmət edir. İzah etdiyimiz üsulla yerinə yetirilən qurmalara "**xəyalda" qurmalar** deyilir.

“Xəyalda qurmalarda çəkilən çertyojlar “çertyoj-şəkil” adlanır.

Qeyd etmək lazımdır ki, “xəyalda” qurmalar üsulunda qurma məsələləri qənaətləndirici şəkildə həll olunmur, çünki işin əsas hissəsi olan qurma burada həqiqətdə yerinə yetirilmir. Burada qurma məsələsi həllinin qalan mərhələləri (analiz, isbat və araşdırma) daha əhəmiyyətli yer tutur.

Fəzada qurma məsələlərinin həllində qurmanı həqiqətdə yerinə yetirmək üçün məsələdə verilən fiqurun paralel proyeksiyada çertyojunu çəkmək və həmin çertyoj üzərində tələb olunan qurmanı çertyoj alətləri vasitəsi ilə yerinə yetirmək mümkündür. Bu üsul “xəyalda” qurmalar üsulundan tamamilə fərqlidir. Bu üsul “**proyeksiya çertyojunda həndəsi qurma”** adlanır. Buradakı çertyojlara “çertyoj-model” deyilir. “Çertyoj-model”lər vasitəsi ilə fəzada formaların üzərində əməliyyat aparmaqla məsələni həqiqətən həll etmiş, yəni qurmanı həqiqətdə yerinə yetirmiş oluruq. Bu çertyojlarda, “çertyoj-şəkil”lərdən fərqli olaraq, axtarılan elementi ixtiyari götürmək olmaz, çünki o, çertyojun verilənləri ilə tamamilə müəyyən olunmuşdur.

Proyeksiya çertyojunda həndəsi qurmalar çertyoj alətləri vasitəsi ilə real olaraq yerinə

yetirildiyinə görə, bu qurmaları müstəvi üzərindəki həndəsi qurmaların davamı hesab etmək olar.

Göstərdiyimiz bu iki üsulu müqayisə etdikdə hər birinin o birinə görə üstünlüyü olduğu aydın olur: ikinci üsulun birincidən üstünlüyü, burada qurmanın həqiqətdə yerinə yetirilməsidir ki, bununla şagirdlər əməli əhəmiyyətli vərdişlər əldə edirlər. Birinci üsulun üstünlüyü ondan ibarətdir ki, nisbətən mürəkkəb məsələlərin həlli proyeksiya çertyojunda çətin yerinə yetirildiyindən belə məsələləri birinci üsulla həll etmək əlverişli olur.

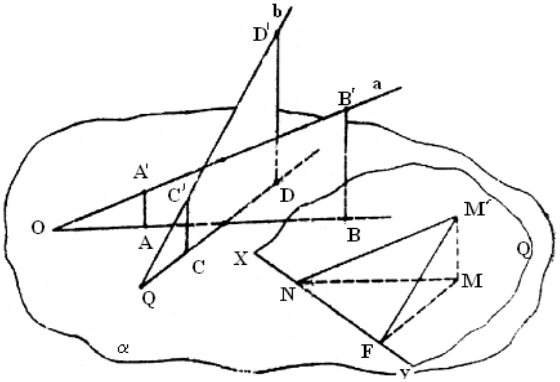
"Proyeksiya çertyojunda həndəsi qurmalar" üsulu orta məktəblərdə çoxdan tətbiq olunduğu halda təəssüf ki, respublikamızda bəzi müəllimlər onunla tanış deyildirlər. Bu üsulun orta məktəbdə tətbiq edilməsindən ən çox fayda əldə etmək üçün onu məktəbin stereometriya kursu ilə üzvi surətdə əlaqələndirmək lazımdır.

Bizim fikrimizcə, hər iki üsul orta məktəbdə tətbiq olunmalıdır; belə ki, əvvəlcə şagirdləri proyeksiya çertyojunda qurma məsələlərini həll etməyə alışdırmaq, sonra "xəyalda" qurmalara keçmək və şagirdlərin bu üsulla məsələ həlli sahəsində müəyyən vərdişlər əldə etməsinə nail olmaq lazımdır. Daha sonra qurma məsələlərinin

hər iki üsulla həlli üzərində şagirdləri çalışdırmaq lazımdır.

Proyeksiya çertyojunda qurma məsələlərinin həlli haqqında təsəvvür əldə etmək üçün aşağıdakı məsələlərin həllini veririk.

Məsələ 1. Kəsişməyən iki a və b düz xətti və onların xaricində M`(M) nöqtəsi verilmişdir. Bu nöqtədən a və b düz xətlərinə paralel olan müstəvi keçirin (şəkil 93).



1. Analiz. a düz xətti A`(A) və B`(B) nöqtələri ilə, b düz xətti isə C`(C) və D`(D) nöqtələri ilə verilmiş olsun. Tutaq ki, Q axtarılan müstəvi və XY onun α proyeksiya müstəvisi ilə kəsişmə xəttidir. M` nöqtəsindən a düz xəttinə paralel düz xətt çəkək və onun xy düz xətti ilə N kəsişmə nöqtəsini tapaq; onda N nöqtəsi bu düz xətt ilə α müstəvisinin kəsişmə nöqtəsi və MN onun həmin müstəvi üzərindəki proyeksiyası olar. Deməli,

MN||AB-dir (paralel proyeksiyalamanın II xassəsinə görə). Həmin qayda ilə M` nöqtəsindən b büz xəttinə paralel düz xətti çəkək və onun α müstəvisi ilə F kəsişmə nöqtəsini quraq; inda M`F-in α müstəvisi üzərindəki MF proyeksiyası DC düz xəttinə paralel olar.

Q müstəvisi M`N və M`F düz xətləri ilə təyin olunur.

2. Qurma. M` və M nöqtələrindən uyğun olaraq a və AB düz xətlərinə paralel düz xətlər çəkək və onların N kəsişmə nöqtəsini quraq. Sonra M` və M nöqtələrindən uyğun olaraq b və DC düz xətlərinə paralel düz xətlər çəkək və onların F kəsişmə nöqtəsini quraq. Nəhayət M`N və M`F düz xətlərindən Q müstəvisini keçirək. Q-axtarılan müstəvi və NF(XY) onun α müstəvisi ilə kəsişmə xəttidir.

3. İsbatı. Qurmaya görə a düz xətti Q müstəvisi üzərindəki M`N düz xəttinə paralel olduğundan, Q müstəvisinə də paraleldir. Həmin səbəbə görə b||Q-dür. Deməli, Q müstəvisi həm a düz xəttinə və həm də b düz xəttinə paraleldir və verilmiş M` nöqtəsindən keçir.

4. Araşdırma. a və b düz xətləri çarpaz olduqda (şəkil 93) məsələnin yeganə həlli vardır. a||b olduqda məsələnin sonsuz sayda həlli vardır (bu halda M`F

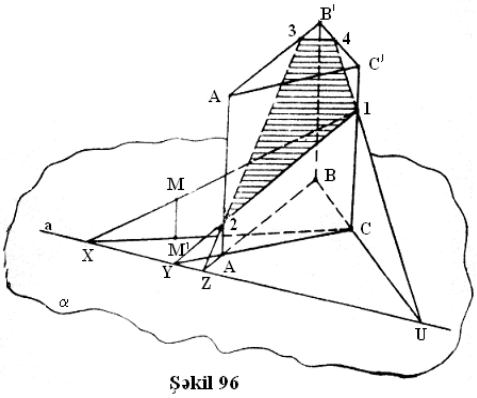
düz xətti M`N-in üstünə düşür və onlardan keçən sonsuz sayda müstəvinin hər biri məsələnin şərtini ödəyir).

Məsələ 2. (A`B`C` ABC üçbucaqlı prizması, bunun xaricində M`(M) nöqtəsi[6] və proyeksiya müstəvisi üzərində a düz xətti verilmişdir. a düz xəttindən və M` nöqtəsindən keçən müstəvi ilə prizmanın kəsiyini qurun (şəkil 94).

Həlli. Aydındır ki, a düz xətti, kəsən müstəvi ilə α proyeksiya müstəvisinin kəsişmə xəttidir və kəsiyin təpələri kəsən müstəvi ilə prizma tillərinin kəsişmə nöqtələrindədir. Kəsiyin, C`C tili üzərindəki təpəsini tapmaq üçün əvvəlcə CM düz xətti ilə a düz xəttinin X kəsişməsi nöqtəsini quraq. X nöqtəsi və habelə XM` düz xətti kəsən müstəvi üzərində olacaqdır. XM` düz xətti həm də CC`X müstəvisi üzərindədir və bu müstəvi üzərindəki CC` düz xəttini 1 nöqtəsində kəsir. Deməli, 1 nöqtəsi C`C tili ilə kəsən müstəvinin kəsişmə nöqtəsidir, yəni kəsiyin CC` tili üzərindəki təpəsidir. A`A tili üzərindəki təpəsini tapmaq üçün CA düz xətti ilə a düz xəttinin Y kəsişmə nöqtəsini tapmaq və bu nöqtə ilə 1 nömrəsini birləşdirmək lazımdır. Y 1 düz xətti ilə

Şəkil 94

[6] *Prizmanın yan tilini proyeksiyalama istiqaməti və oturacaq müstəvisini proyeksiya müstəvisi qəbul edirik.*



Şəkil 96

A`A tilinin 2 kəsişmə nöqtəsi axtarılan təpə olacaqdır.

Kəsiyin A`B` və B`C` tilləri üzərindəki 3 və 4 təpələri də həmin qayda ilə qurulur. 1-2-3-4 dördbucaqlısı axtarılan kəsikdir.

"Xəyalda" qurmalara keçərkən müəllim şagirdlərə izah edir ki, onlar indiyədək proyeksiya çertyojunda qurma məsələlərinin həlli ilə məşğul olmuşlar. Bu məsələlərdə nöqtələr, düz xətlər, müstəvilər, kəsiklər və s. ixtiyari deyil, verilənlərdən asılı olaraq, həqiqətdə (modellər üzərində) olduğu kimi qurulurdu.

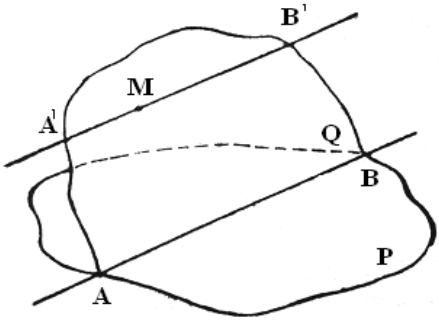
Fəzada qurma məsələlərini proyeksiya çertyojunda həll etməkdən başqa bir də fikirdə (xəyalda) həll edirlər. Bu zaman məsələ stereometriyanın aksiomlarına və teoremlərinə əsasən fikirdə həll olunur, çertyoj isə həllin gedişini asanlaşdırmaq məqsədi ilə, həm də ixtiyari çəkilir. Ona görə də belə qurmalara "xəyalda qurmalar" adı verilmişdir. Sonra, müəllim əlavə edir ki, stereometriya aksiomları və onlardan çıxan nəticələr olduqca çoxdur; siz bunlardan bur çoxunu artıq bilirsiniz (onlar təkrar edilir).

Xəyalda həll olunacaq məsələlərdən bəziləri

artıq proyeksiya çertyojunda həll edilmiş olduğundan, həmin həlləri yeni həllər ilə müqayisə etmək şagirdlər üçün faydalı olar. Aşağıda qurma məsələlərinin xəyalda həllinə nümunələr göstərilmişdir.

Məsələ 1. Fəzada verilmiş düz xətt xaricindəki nöqtədən həmin düz xəttə paralel çəkin.

Göstəriş. Dərslikdə bu məsələnin həlli qurma ilə başlanmışdır. Müəllim məsələnin həllini analiz ilə başlasa daha yaxşı olar.



Şəkil 97.

Məsələ 2. Fəzada verilən P müstəvisinin xaricindəki M nöqtəsindən həmin müstəviyə paralel düz xətt çəkin (şəkil 95).

Həlli. 1. Analiz. Tutaq ki, A`B`||P düz xətti qurulmuşdur; bu düz xətdən P müstəvisini AB düz xətti boyunca kəsən ixtiyari bir Q müstəvisi keçirək, onda Q müstəvisi AB düz xətti ilə M nöqtəsindən keçən və AB||A`B` olar.

2. Qurma. P müstəvisi üzərində ixtiyari bir AB düz xətti çəkək; sonra AB düz xətti ilə verilmiş M nöqtəsindən Q müstəvisini keçirək və nəhayət Q

müstəvisi üzərində M nöqtəsindən keçib, AB-yə paralel olan A`B` düz xəttini çəkək. A`B` düz xətti tələb olunan düz xətdir.

3. İsbatı. A`B` düz xətti P müstəvisi üzərindəki AB düz xəttinə paralel olduğundan, P müstəvisinə də paraleldir.

4. Araşdırma. P müstəvisi üzərində sonsuz sayda AB düz xətti çəkmək mümkün olduğundan, M nöqtəsindən P müstəvisinə paralel olan sonsuz sayda A`B` düz xətti çəkmək olar, yəni məsələnin sonsuz sayda həlli vardır.

Müəllim bu düz xətlərin həndəsi yerinin, P müstəvisinə paralel olan bir müstəvi olduğunu qeyd edir.

Məsələ 3. Verilmiş düz xətdən verilmiş ikinci düz xəttə paralel müstəvi keçirin.

Qeyd. *Bu məsələnin həllindəki ikinci hala aid şəkil dərslikdə çəkilməmişdir. Müəllim bu hala aid uyğun şəkil çəksə, yaxşı olar.*

Məsələ 4. Fəzada verilmiş nöqtədən verilmiş düz xəttə perpendikulyar müstəvi keçirin.

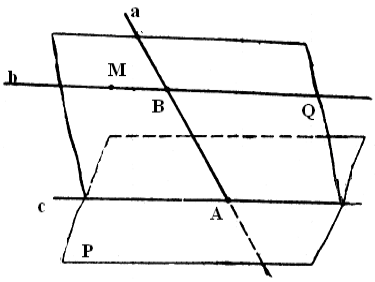
Qeyd. *Bu məsələnin həlli dərslikdə verilmişdir. 3-cü məsələyə aid olan qeyd bu məsələyə də aiddir.*

Məsələ 5. Fəzada verilmiş nöqtədən verilmiş müstəviyə perpendikulyar düz xətt keçirin.

Qeyd. *Bu məsələ dərslikdə həll olunmuşdur.*

Məsələ 6. Verilən M nöqtəsindən, verilən P müstəvisinə paralel və verilən a düz xəttini kəsən düz xətt keçirin.

Həlli. 1.Analiz. Tutaq ki, b axtarılan düz xəttdir (şəkil 96), yəni b||P-dir və b ıı ə a düz xətləri B nöqtəsində kəsişir. a düz xətti ilə P müstəvisinin kəsişmə nöqtəsi A olsun. a və b düz xətlərindən Q müstəvisini keçirək; bu müstəvi P müstəvisini A nöqtəsindən keçən və b düz xəttinə paralel olan c düz xətti boyunca kəsəcəkdir.



Şəkil 96

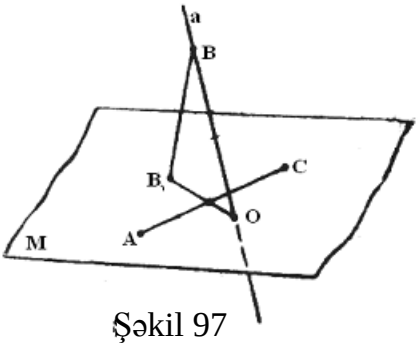
2. Qurma. a düz xətti ilə M nöqtəsindən Q müstəvisini keçirək; bu müstəvi ilə P müstəvisinin kəsişmə xətti c olsun (c düz xətti A nöqtəsindən keçir). Q müstəvisi üzərində M nöqtəsindən c düz xəttinə paralel olan b düz xəttini çəkək; b düz xətti axtarılan düz xətdir.

3. İsbatı. Qurmaya görə b||c olduğundan b||P-dir. a düz xətti b və c paralel düz xətlərindən birini (c-ni) kəsdiyindən o birini də kəsər (a, b və c düz xətləri bir müstəvi üzərindədir).

4. Araşdırma. a düz xətti P müstəvisini kəsdikdə, məsələnin yeganə həlli olacaqdır. a||P olduqda: M nöqtəsi ilə a düz xətti P müstəvisindən

eyni məsafədə olarsa, onda məsələnin sonsuz sayda həlli olar (M nöqtəsi ilə a düz xəttinin ixtiyari nöqtəsindən keçən düz xətt məsələnin şərtini ödəyir); M nöqtəsi ilə a düz xətti P müstəvisindən eyni məsafədə olmadıqda isə, məsələnin həlli olmaz.

Məsələ 7. M müstəvisi və a düz xətti verilmişdir. M müstəvisi üzərindəki verilmiş A nöqtəsindən keçən və həmin müstəvi üzərində olmaqla a düz xəttinə perpendikulyar olan düz xətti qurun (şəkil 97).



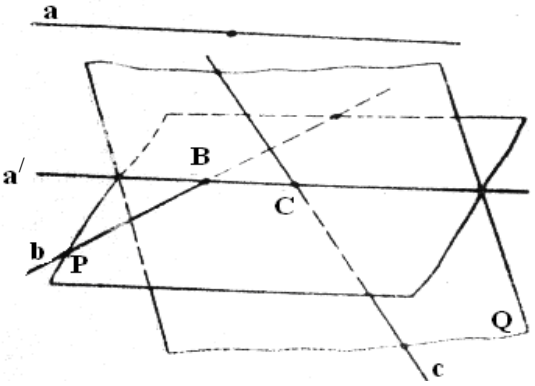
Şəkil 97

Həlli. a düz xətti ilə M müstəvisinin kəsişmə nöqtəsi O olsun; a düz xəttinin ixtiyari B nöqtəsindən $BB_1 \perp M$ çəkək və B_1 ilə O nöqtəsini birləşdirək; onda B_1O parçası BO mailinin M müstəvisi üzərindəki proyeksiyası olacaqdır. İndi A nöqtəsindən B_1O düz xəttinə AC perpendikulyarını çəkək; onda üç perpendikulyar haqqındakı teoremə görə $AC \perp a$ olar.

a düz xətti M müstəvisinə perpendikulyar olmadıqda məsələnin həmişə yeganə həlli vardır; əks halda məsələnin sonsuz sayda həlli vardır (M

müstəvisi üzərində olan və A nöqtəsindən keçən hər bir düz xətt məsələnin şərtini ödəyir).

Məsələ 8. Verilən iki b və c düz xəttini kəsən və üçüncü a düz xəttinə paralel olan düz xətti qurun (a,b və c düz xətləri cüt-cüt çarpazdır).



Həlli.

1. Analiz. a` axtarılan düz xətt olsun (şəkil 98), yəni a`‖a olub, b düz xəttini, məsələn, B nöqtəsində, c düz xəttini isə məsələn, C nöqtəsində kəsir.

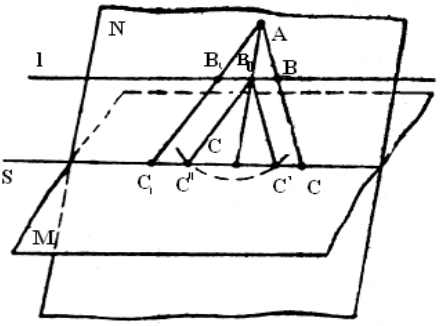
Kəsişən a` ilə b düz xətlərindən P müstəvisini və a` ilə c düz xətlərindən də Q müstəvisini keçirək; onda a` düz xətti P və Q müstəvilərinin kəsişmə xətti olar və a‖a` olduğundan, a‖P və a‖Q alınar.

2. Qurma. Verilmiş b düz xəttindən verilmiş a düz xəttinə paralel olan P müstəvisini və c düz xəttindən də a düz xəttinə paralel olan Q müstəvisini keçirək; onda P ilə Q müstəvisinin a` kəsişmə xətti axtarılan düz xətt olacaqdır.

3. İsbatı. Qurmaya görə P||a və Q||a olduğundan, a`||a olacaqdır (düz xətt kəsişən iki müstəvidən hər birinə paralel olarsa, onların kəsişmə xəttinə də paralel olar). Digər tərəfdən a` düz xətti b düz xətti ilə eyni bir müstəvi üzərində olduğundan onlar kəsişir, həmin səbəbə görə a` düz xətti c düz xətti ilə də kəsişir.

4. Araşdırma. Aydındır ki, P||Q olduqda məsələnin həlli olmaz; bu halda b||Q, c||P, və a||P||Q olduğundan, verilmiş düz xətlərin üçü də eyni bir müstəviyə paralel olar. Deməli, verilmiş düz xətlərin üçü də eyni bir müstəviyə paralel olduqda, məsələnin həlli olmaz. P ilə Q müstəviləri paralel olmadıqda, aşağıdakı üç hal ola bilər: 1) ola bilər ki, b||Q olsun; onda b düz xəttindən keçən P müstəvisi Q müstəvisini b-yə paralel olan a` boyunca kəsər və məsələnin həlli olmaz; 2) ola bilər ki, c||P olsun; onda yenə də həmin səbəbə görə a`||c olar və məsələnin həlli olmaz; 3) nəhayət, b düz xətti Q müstəvisinə və c düz xətti P müstəvisinə paralel olmadıqda, məsələnin yeganə həlli olar.

Məsələ 9. A nöqtəsi, l düz xətti və bu düz xəttə paralel olan M müstəvisi verilmişdir. A nöqtəsindən l düz xəttini kəsən elə bir düz



Şəkil 99

xətt keçirin ki, bunun l düz xətti ilə M müstəvisi arasında qalan parçası verilmiş a uzunluğunda olsun.

Həlli. 1. Analiz. Tutaq ki, ABC düz xətti axtarılan düz xətdir (şəkil 99), yəni BC=a-dır. Kəsişən AC və l düz xətlərindən N müstəvisini keçirək; onda N müstəvisi M müstəvisini C nöqtəsindən keçən və l düz xəttinə paralel olan s düz xətti boyunca kəsər. N müstəvisi üzərində $AC_0 \perp s$ çəkək, onda AC_0 düz xətti l düz xəttinə də perpendikulyar olar. İndi AC_0 düz xətti ilə l düz xəttinin B_0 kəsişmə nöqtəsindən $B_0C` \| BC`$ çəkək; onda $B_0C`=BC=a$ olar.

2. Qurma. A nöqtəsi ilə l düz xəttindən N müstəvisini keçirək; M və N müstəvilərinin kəsişmə xəttini s ilə işarə edək; onda $s \| l$ olar. $AB_0C_0 \perp s$ çəkək və N müstəvisi üzərində mərkəzi B_0 nöqtəsi və radiusu a olan qövslə s düz xəttini C` və C`` nöqtələrində kəsək. İndi A nöqtəsindən $ABC \| B_0C`$ və $AB_1C_1 \| B_0C``$ çəksək, ABC və AB_1C_1 axtarılan düz xətlər olacaqdır.

3. İsbatı. ABC və $B_0C`$ paralel düz xətlərindən birisi ($B_0C`$) bunların müstəvisi üzərində olan l düz xəttini kəsdiyindən o birisi də l düz xəttini kəsəcəkdir. $l \| s$ və $BC \| B_0C`$ olduğundan $BC=B_0C`=a$

olacaqdır. AB_1C_1 düz xəttinin də məsələnin şərtlərini ödədiyini həmin qayda ilə göstərmək olar.

4. Araşdırma. A nöqtəsi ilə l düz xətti M müstəvisindən eyni məsafədə olmadıqda və $a \geq B_0C_0$ olduqda məsələnin həmişə həlli vardır; $a > B_0C_0$ olduqda məsələnin ABC və AB_1C_1 kimi iki həlli, $a=B_0C_0$ olduqda isə AB_0C_0 kimi bircə həlli olacaqdır (bu halda yuxarıdakı şərtlə çəkilən qövs s düz xəttinə C nöqtəsində toxunacaqdır).

2.7. Qurma məsələləri həllinin xüsusi metodları

Qurma məsələsi həllindəki dörd mərhələnin mahiyyəti məlumdur.

Qeyd etmək lazımdır ki, bir çox qurma məsələsi həllini analiz edərkən, tələb olunan fiquru qurmaq üçün çoxlu sayda qurmaların yerinə yetirilməli olduğu aşkara çıxa bilər və ona görə də həmin məsələlərin həlli çox çətin və hətta qeyri-mümkün görünə bilər. Halbuki, burada bəzi xüsusi metodlardan istifadə etdikdə həmin məsələlər çox sadə və tez həll oluna bilər. Bu xüsusi metodları üç yerə bölmək olar:

1. Həndəsi yerlər metodu;

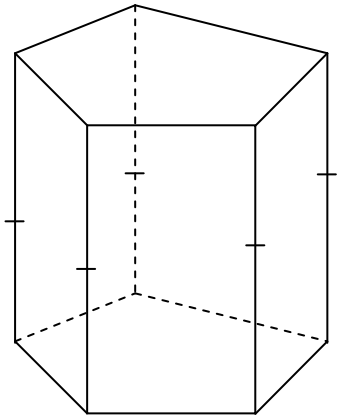
2. Həndəsi çevirmə metodları (simmetriya, paralel köçürmə, fırlanma, oxşarlıq və inversiya metodları);

3. Cəbri metod.

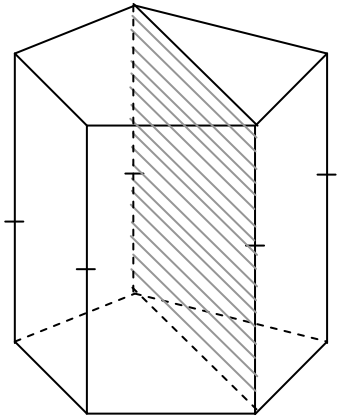
III Fəsil

HƏNDƏSİ CİSMİN MÜSTƏVİ KƏSİYİNİN QURULMASI ÜSULLARI

3.1. Prizmanın təsviri və müstəvi kəsiyinin qurulması



P aralel proyeksiyalama qaydalarına uyğun olaraq prizmanın təsviri aşağıdaki kimi qurulur. Əvvəl oturacaqlardan biri - P qurulur (şəkil 100). Bu hər hansı müstəvi çoxbucaqlıdır. Sonra P çoxbucaqlısının təpələrindən uzunluqları bərabər olan paralel parçalar kimi prizmanın yan tilləri çəkilir. Bu parçaların uclarını birləşdirib, prizmanın o biri oturacağını alırıq. Görünməyən tillər çizgili xətlə çəkilir. Yan tillərə paralel müstəvilərlə

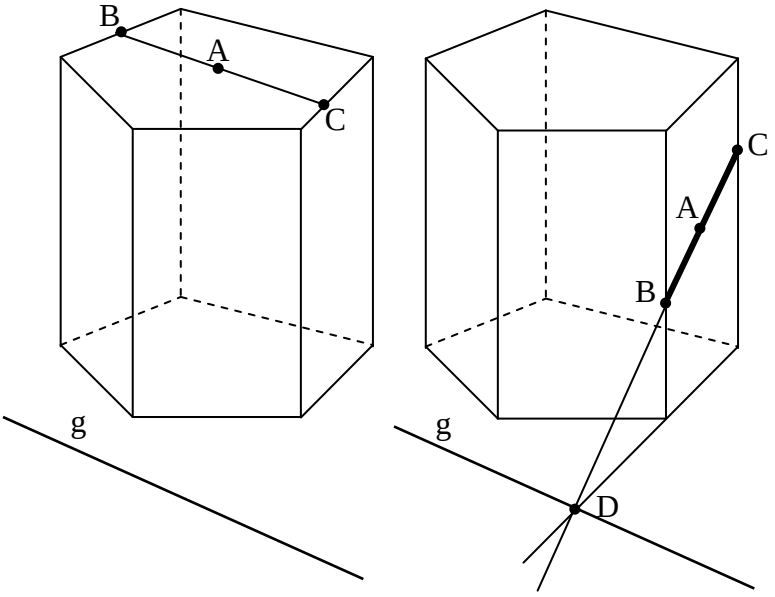


Şəkil 100.

prizmanın kəsişməsindən alınan kəsiklər paraleloqramlardır. Xüsusi halda, diaqonal kəsikləri də paraleloqramlardır. Bu, bir üz də olmayan iki yan tildən keçən müstəvilərlə prizmanın kəsişməsindən alınan kəsiklərdir (şəkil 101).

Praktikada, xüsusi halda, məsələlər həllində çox vaxt prizmanın oturacaqlarından birinin üzərində olan g düz xəttindən keçən müstəvi ilə prizmanın kəsişməsindən alınan kəsiyi qurmaq lazım olur. Belə düz xəttə kəsən müstəvinin oturacaq müstəvisi üzərindəki izi deyilir. Prizmanın kəsiyini qurmaq üçün kəsən müstəvi ilə prizmanın üzlərinin kəsişməsindən alınan parçaları qurmaq kifayətdir.

Prizmanın səthində kəsiyə aid hər hansı A nöqtəsi məlum olduqda, kəsiyin necə qurulduğunu



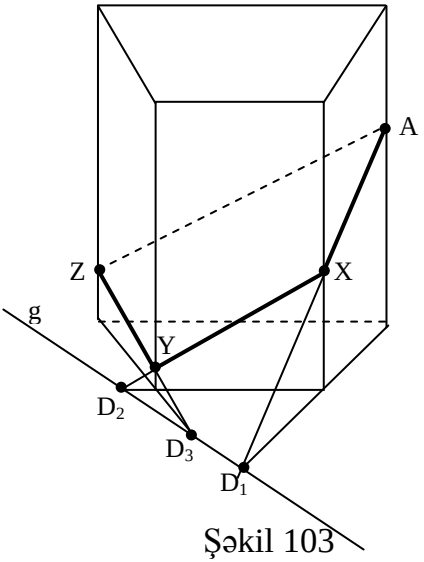
a) b)

izah edək (şəkil 102).

Verilmiş A nöqtəsi prizmanın o biri oturacağına aiddirsə, onda onun kəsən müstəvi ilə kəsişməsi, g izinə paralel və A nöqtəsindən keçən VS parçasıdır (şəkil 102 a)

Verilmiş nöqtə yan üzdədirsə, onda bu uzun kəsən müstəvi ilə kəsişməsini 102 b şəklində göstərildiyi kimi qurmaq olar. Belə ki, əvvəlcə üzün müstəvisi ilə verilmiş g izinin D kəsişmə nöqtəsi

qurulur. Sonra A və D nöqtələrindən düz xətt çəkilir. AD düz xəttinin VS parçası nəzərdən keçirilən üzün kəsən müstəvi ilə kəsişməsidir. Əgər A nöqtəsinin aid olduğu üz g düz xəttinə paralel olarsa, onda kəsən müstəvi bu üzü A nöqtəsindən keçən və g düz xəttinə paralel olan parça üzrə kəsər.



Şəkil 103

VS parçasının uçları prizmanın tilləri üzərində olduğundan onlar həm də qonşu üzlərə aiddir. Buna görə göstərilən üsulla həmin üzlərin verilmiş kəsən müstəvi ilə kəsişməsini qurmaq olar və i.a. Bu işi prizmanın bütün üçün apardıqda kəsikdə çoxbucaqlı alınacaq. Bu çoxbucaqlıya verilmiş g düz xəttindən və A nöqtəsindən keçən prizmanın kəsiyi deyilir.

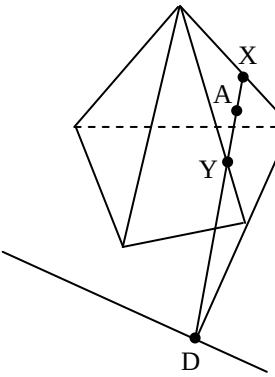
103-cü şəkildə dördbucaqlı prizmanın alt oturacağı üzərində verilmiş g düz xəttindən və yan tillərdən biri üzərindəki A nöqtəsindən keçən müstəvi ilə prizmanın kəsiyinin qurulması göstərilmişdir.

3.2. Piramidanın təsviri və müstəvi kəsiyinin qurulması

Paralel proyeksiyalama qaydalarına uyğun olaraq piramidanın təsviri aşağıdaki kimi qurulur. Əvvəl oturacaq qurulur. Bu hər hansı müstəvi çoxbucaqlı olacaq. Sonra piramidanın təpəsi qeyd edilir, onu yan tillərlə çoxbucaqlının təpələri ilə birləşdiririk.

Piramidanın təpədən keçən müstəvilərlə kəsikləri üçbucaqlardır.

Xüsusi halda, üçbucaqlar diaqonal kəsikləridir. Xüsusi halda, üçbucaqlar dioqanal kəsikləridir. Bu kəsiklər piramidanın qonşu olmayan iki tilindən keçən müstəvi kəsikləridir.

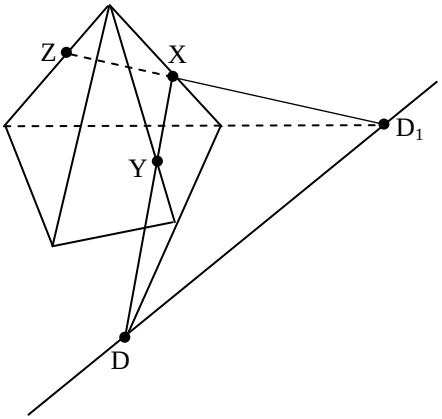


Şəkil 104.

Piramidanın g izinə paralel olmayan üzü üzərində kəsiyə aid hər hansı A nöqtəsi verilmişsə, onda əvvəl kəsən müstəvinin g izi ilə bu üzün kəsişmə nöqtəsi, 104-cü şəkildə göstərildiyi kimi D nöqtəsi qurulur. D nöqtəsi A nöqtəsi ilə düz xətlə birləşdirilir. Onda bu düz xəttin üzə aid olan parçası, bu üzün kəsən müstəvi ilə kəsişməsidir. Əgər A nöqtəsi g izinə paralel olan üz üzərindədirsə, onda kəsən müstəvi bu üzü g düz xəttinə paralel parça üzrə kəsir. Sonra

qonşu yan üzün kəsən müstəvi ilə kəsişməsi qurulur və s. Nəticədə
piramidanın tələb olunan kəsiyi alınır.

105-ci şəkildə dördbucaqlı piramidanın oturacağının tərəfindən və onun yan tillərindən biri üzərində olan A nöqtəsindən keçən müstəvi ilə kəsiyinin qurulması göstərilmişdir.



Şəkil 105

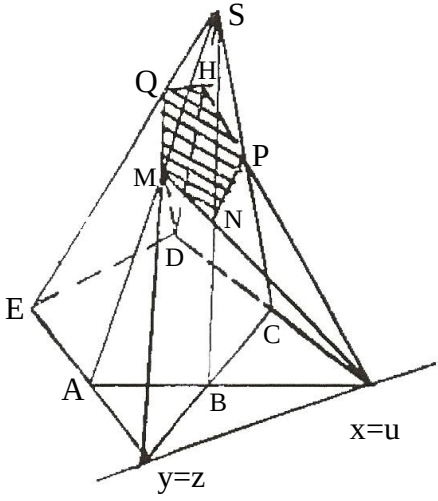
Çoxüzlülərin müstəvi kəsiklərinin qurulmasının müxtəlif üsulları vardır. Həmin üsulların bəziləri üzərində dayanaq və onların mahiyyəti haqqında qısa məlumat verək.

3.3. İzlər üsulu və onun tətbiqləri

Bu halda əvvəlcə kəsən müstəvi ilə verilmiş cismin oturacaq müstəvisinin kəsişmə xətti (izi) qurulur. Sonra bu düz xətt ilə cismin yan üzü müstəvilərinin kəsişmə nöqtələri tapılır. Tapılmış nöqtələr kəsən müstəvinin verilmiş nöqtələri ilə

birlikdə axtarılan kəsiyin tərəflərinə aid olan düz xətləri müəyyən edir. Fikrimizi aşağıdaki məsələlərdə aydınlaşdıraq.

Məsələ 3. SABCDE beşbucaqlı piramidasının (şəkil 106) uyğun olaraq SA, SB və SC ilə üzərində verilmiş M, N və P nöqtələrindən keçən müstəvi kəsiyini



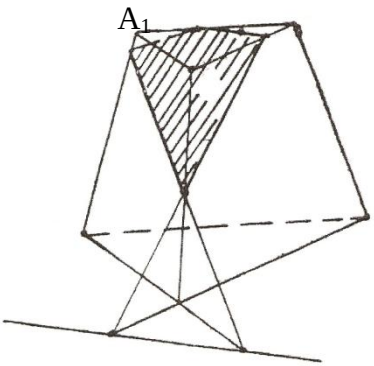
Şəkıl 106

Həlli. MNP kəsən müstəvinin ABCDE oturacaq müstəvisindəki izini qurmaqdan ötrü MNP və ABCDE müstəvilərinə aid olan iki nöqtəni qurmaq lazımdır. Bunun üçün ASB müstəvisində AB və MN şualarının X kəsişmə nöqtəsini qururuq. Beləliklə, yuxarıda söylədiyimiz müstəvilərin kəsişdiyi nöqtələrdən biri X bizə məlum olur. İkinci belə bir

nöqtəni müəyyən etmək üçün BCD üzərində CB və PN şualarının kəsişdiyi Y nöqtəsini qururuq. Beblikb, M, N, P nöqtələrindən keçən müstəvi ilə ABCDE oturacaq müstəvisinin kəsişdiyi iki nöqtə X və Y artıq bizə məlum olur. Şərtə görə, M nöqtəsi ASE üzərindədir. Kəsən müstəvinin bu üzdəki izini müəyyən etmək üçün həmin üzdə ikinci bir nöqtəni müəyyən etməliyik. Bundan ötrü EA şüası ilə XY düz xəttinin kəsişdiyi Z nöqtəsini qururuq. ZM şüasını çəksək, bu şüa piramidanın ES tilini Q nöqtəsində kəsəcəkdir.

İndi də müstəvinin CSD üzərindəki izini quraq. Bunun üçün DC şüası ilə (XY)-in U kəsişmə nöqtəsini qurub Up şüasını çəkək. Aşkardır ki, bu şüa DS tilini müəyyən bir H nöqtəsində kəsəcəkdir. Bu halda MNPHQ tələb edilən kəsik olacaqdır.

Məsələ 4. $ABCA_1B_1C_1$ kəsik piramidasının (şəkil 107) $A_1B_1C_1$ üst oturacağında M nöqtəsi, ABC alt oturacaq müstəvisində isə tərəfləri kəsməyən EF düz xətti verilmişdir. Kəsik piramidanın EF düz xəttindən və M nöqtəsindən keçən müstəvi



kəsiyini qurun.

Həlli. Kəsik piramidanın $(A_1B_1C_1)$ oturacağında M nöqtəsindən keçən (E_1F_1) izi (ABC) oturacağında verilmiş (EF)-ə paralel olacaqdır. $(A_1B_1C_1)$ oturacağında

Şəkil 107

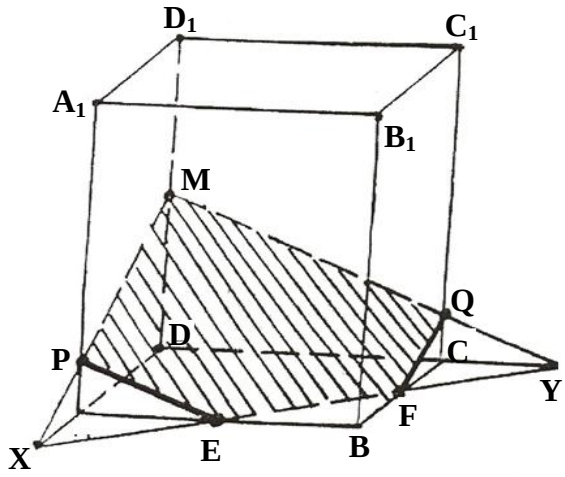
$$(E_1F_1)\cap [A_1C_1]=F_1,\ (E_1F_1)\cap [B_1C_1]=E_1$$

nöqtələrini quraq. Sonra kəsən müstəvinin BB_1C_1C üzündəki izini tapmaq üçün bu üz ilə oturacaq müstəvisindəki (EF)-in müəyyən bir X nöqtəsini qurmalıyıq. Bunun üçün CB şuasının EF düz xəttini kəsdiyi X nöqtəsini qururuq. Müstəvi üzərində olan X və E_1 nöqtələrini birləşdirsək $[XE_1]\cap [BB_1]=N$ qurulmuş olar. Beləliklə, (NE_1) kəsən müstəvinin (BB_1C_1C) üzündəki izidir. Həmin qayda ilə AB şüasının EF düz EF düz xəttini kəsdiyi Y nöqtəsini tapıb YN çəksək, $[YN]\cap[AA_1]=K$ taparıq. KF_1-i çəkərək NE_1F_1K kəsiyini qurarıq.

İndi də bu metodun tətbiqi ilə bir neçə məsələnin həllinə baxaq.

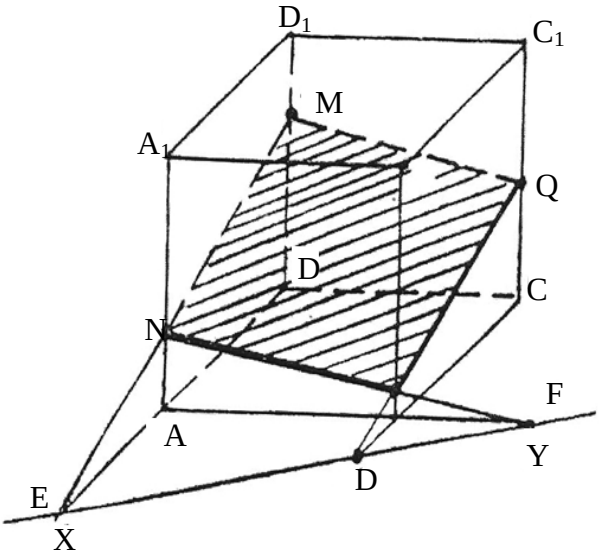
Məsələ 5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ prizmasının (şəkil 108) DD_1 yan tili üzərində M nöqtəsi və ABCD alt oturacaq müstəvisi üzərində oturacağın AB və VS tərəflərini kəsən EF düz xətti verilmişdir. Prizmanın EF düz xəttindən və M nöqtəsindən keçən müstəvi kəsiyini qurun.

Həlli. Kəsən müstəvi M nöqtəsindən keçdiyi üçün prizmanın AA_1D_1D və DD_1C_1C yan üzlərini də kəsməlidir.



Bu yan üzlərin verilmiş müstəvi ilə kəsişməsinin bir M nöqtəsi məlumdur.

İkinci belə bir kəsişmə nöqtəsini tapmaq üçün əvvəlcə AA_1D_1D müstəvisinin DA şüası ilə (EF)-in X kəsişmə nöqtəsini qururuq. Məlumdur ki, X həmçinin AA_1D_1D müstəvisi üzərində olacaqdır. Onda [XM] çəksək $P = [XM] \cap [AA_1]$ qurarıq. Həmin qayda ilə Q nöqtəsi də qurulur. Beləliklə, EFQMP axtarılan kəsik olacaqdır.



Məsələ 6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubu (şəkil 109*)* və bunun yan tillərindən birinin üzərində M nöqtəsi, oturacaq müstəvisi üzərində isə oturacağın tərəflərini kəsməyən (EF) verilmişdir. Kubun bu düz xətdən və M nöqtəsindən keçən müstəvi kəsiyini qurun.

Həlli. M nöqtəsi yerləşən AA_1D_1D üzərində kəsən müstəvinin izini tapmaqdan ötrü həmin üzdə M nöqtəsindən başqa ikinci bir X nöqtəsini axtaraq.

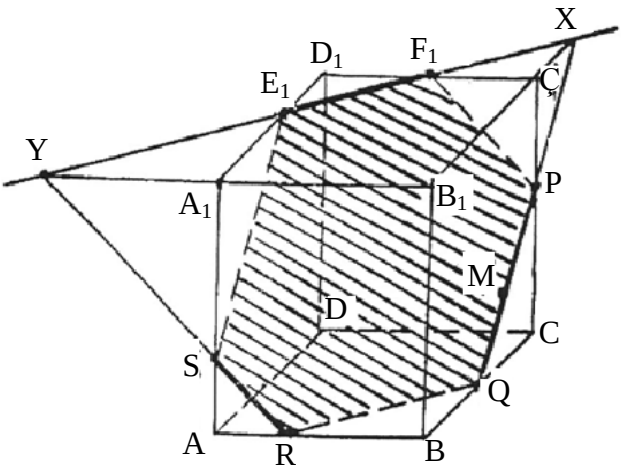
Bunun üçün $[DA]\cap [EF] =X$ qururuq. Bu halda $[XM]\cap[AA_1]=N\in(AA_1D_1D)$ üzərində olan MN izini qurmuş oluruq $N\in$ nöqtəsi AA_1D_1D müstəvisində olmaqla, yanaşı həm də AA_1B_1B müstəvisi üzərindədir. AA_1B_1B üzündəki izi tapmaq

Şəkil 109

üçün ikinci bir nöqtə qurmalıyıq. Bunun üçün AB düz xəttini Y nöqtəsində kəsənə qədər uzadaq. Sonra bu müstəvi üzərində [YN] çəkib $P = [YN] \cap [BB_1]$ nöqtəsini qururuq. İndi də $[BB_1C_1C]$ müstəvisində kəsən müstəvinin izini qurmaqdan ötrü bu müstəvi ilə oturacaq müstəvisində olan (EF)-in $Z=[CB] \cap [EF]$ ortaq nöqtəsini tapıb [ZP] şüasını çəksək, $Q=[ZP] \cap [CC_1]$ alırıq.

Bu halda BB_1C_1C üzündəki iz [PQ] olacaqdır. Q ilə M-i birləşdirsək kəsən müstəvinin CC_1D_1D üzündəki [QM] izini qurmuş olarıq. Qeyd edək ki, kəsiyin P nöqtəsi müəyyən edildikdən sonra paralel müstəviləri başqa bir müstəvi ilə kəsdikdə alınan xətlərin paralelliyinə əsasən də qurmaq olardı.

Məsələ 7. Paralelepipedin (şəkil 110) $A_1B_1C_1D_1$ üst oturacağının A_1D_1 və D_1C_1 tillərini uyğun olaraq



Şəkil 110

E_1 və F_1 nöqtələrində kəsən E_1F_1 düz xəttə və BB_1C_1C üzərində M nöqtəsi verilmişdir. Paralelepipedin E_1F_1 düz xəttindən və M nöqtəsindən keçən müstəvi kəsiyini qurun.

Həlli. Aydındır ki, $[E_1F_ı]$ kəsən müstəvinin üst oturacağında izi olacaqdır. Kəsən müstəvinin BB,CıC üzündəki izini tapmaq üçün bu üzün müstəvisində ikinci bir X nöqtəsini quraq.

Bunun üçün $B_ıC_1$ tilini $(E_ıF_ı)$-i kəsənə qədər uzadaq. Onda $[B,C_1] \cap [CC_1)=X$ olur. Aşkardır ki, (XM) çəksək, $[XM]\cap[SS,]=R$; $[XM]\cap[CB]=Q$ qurulur. Paralelepipedin xassəsinə görə $(ABCD)\|(A_ıB_ıC_ıD_ı)$-dir. İki paralel müstəvini üçüncü bir müstəvi ilə kəsdikdə müstəvilərin kəsişmə xətləri paralel olduğu üçün ABCD üzərində $[QP] \| [E_1F_ı]$ çəkib $[QR] \cap [BA]=R$ qururuq. Kəsən müstəvinin $AA_ıB_ıB$ üzərindəki izini tapmaq üçün bu üzün müstəvisində ikinci bir Y nöqtəsini qurmalıyıq. Bunun üçün (B_1A_1) çəksək bu şüa $(E_ıF_ı)$-i Y nöqtəsində kəsəcəkdir. [YR] çəksək, bu paralelepipedin AA) tilini S nöqtəsində kəsəcəkdir. Beləliklə, $E_ıF_1$ F_1P, PQ, QR, RS, SE_1 paralelepipedin uygun üzlərindəki izləri olduğundan $E_ıF_1PQRS$ tələb edilən kəsikdir. Qeyd edək ki, $AA_ıB_ıB$ üzündə R nöqtəsindən $[PF_ı]$-ə paralel çəkməklə də [RS] izini qurmaq olardı.

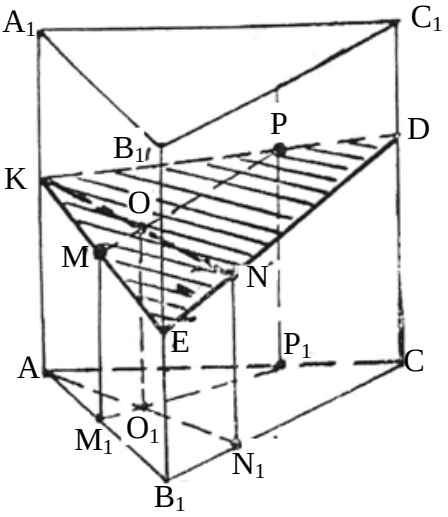
M nöqtəsinin vəziyyətindən asılı olaraq XM şüası VS tilini kəsmədiyi halda məsələnin həll edilməsini oxuculara tapşırırıq.

3.4. Uyğunluq üsulu və onun tətbiqləri

Bu üsulun mahiyyəti verilmiş fiqurun oturacaq müstəvisini proyeksiyalama müstəvisi, yan tilini isə proyeksiya istiqaməti qəbul edərək (piramida və konusda isə təpə nöqtə proyeksiya mərkəzi qəbul edilir) kəsən müstəvinin istənilən proyeksiyalayıcı düz xətt ilə kəsişməsini tapmaqdan ibarətdir.

Yuxarıda prizma üçün paralel, piramida üçün isə mərkəzi proyeksiyadan istifadə edildiyini qeyd etdik. Lakin bəzən piramidada da müəyyən düz xətt proyeksiyalama istiqaməti qəbul edilərək məsələn (hündürlük) paralel proyeksiyadan istifadə edib, onun müstəvi kəsiyini qurmaq olar.

İndi də uyğunluq metodunun tətbiqi ilə çoxüzlünün müstəvi kəsiyinin qurulmasına aid bir neçə məsələ həll edək.



kil 111

Məsələ 8. ABC $A_1B_1C_1$ üçbucaqlı prizmanın (şəkil 111) AA_1B_1B, BB_1C_1C, CC_1A_1A üzlərində uyğun olaraq M, N, P nöqtələri verilmişdir. Prizmanın bu nöqtələrindən keçən müstəvi kəsiyini qurun.

Həlli. Aşkardır ki, (MNP)-nin prizmanın tillərindən birini, məsələn, $[AA_1]$-i kəsdiyi müəyyən bir K nöqtəsini bilsək, məsələ həlli edilmiş olar. Bunun üçün belə hərəkət edirik. Prizmanın tillərini proyeksiyalama istiqaməti (ABC)-ni proyeksiya müstəvisi qəbul edib, M, N nöqtələrinin M_1, N_1 proyeksiyalarını quraq[1]. A nöqtəsi ilə N1-i və M_1 nöqtəsi ib P-ni birləşdirək və bunların kəsişmə nöqtəsini Oı ilə işarə edək. MM_1P_1P müstəvisində $O_ı$ nöqtəsinə uyğun olan nöqtəni qurmaq üçün O_1 nöq-

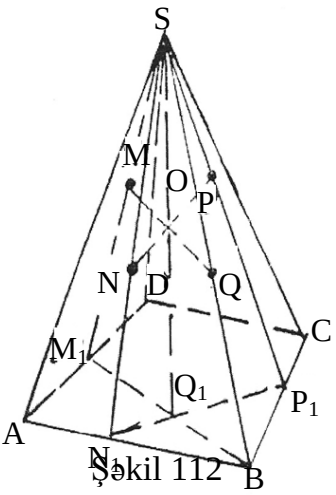
təsindən prizmanın tillərinə paralel düz xətt çəksək, bu düz xətt M_1P_1 parçasına uyğun olan MP parçasını bir O nöqtəsində kəsəcəkdir.

İndi də AN_1N müstəvisində NO şuasını çəkək. Aydındır ki, bu şüa AA_1 tilini bir K nöqtəsində kəsəcəkdir.

KM şuasının BB_1 tilini kəsdiyi nöqtəni E ilə işarə etsək, KDE prizmanın tələb edilən müstəvi kəsiyi olacaqdır.

Qeyd: KP və DN şualarının E nöqtəsində kəsişdiyini izah edin.

Məsələ 9. SABCD prizmasının (şəkil 112) SAD, SAB və SBC üzərində uyğun olaraq M, N və P nöqtələri verilmişdir. MNP müstəvisinin SB tilini kəsdiyi nöqtəni qurun.

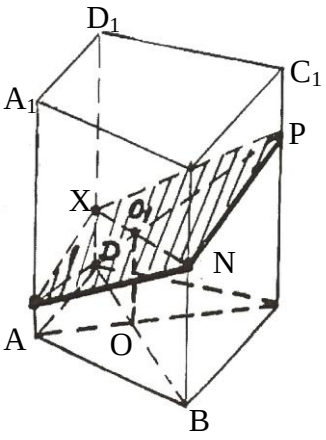


Şəkil 112

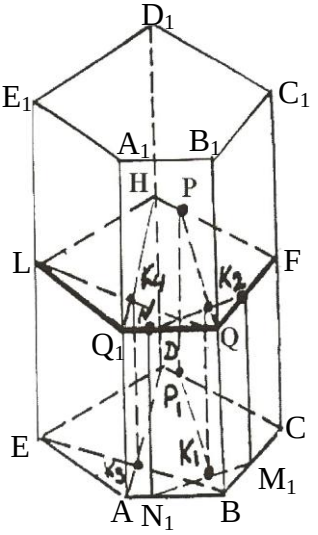
Həlli. Piramidanın təpə nöqtəsini proyeksiyalama mərkəzi, oturacaq müstəvisini isə proyeksiya müstəvisi qəbul edib M, N, P nöqtələrinə uyğun olan M_1, N_1 və P_1 nöqtələrini quraq, ABCD müstəvisi üzərində $O_1=[M_1B]\cap[N_1P_1]$ qurub $[SO_1]$ çəksək SN_1P_1 müstəvisi üzərində

O_1 nöqtəsinə uyğun $O_1=[SO_1]\cap[N_1P_1]$ qura bilirik. O nöqtəsi həmçinin SM_1B müstəvisi üzərindədir. Onda həmin müstəvi üzərində [MO] çəksək Q = [MO] ∩ [SB] qura bilərik. Q nöqtəsi axtarılan nöqtə olacaqdır.

Məsələ 10. ABCDA₁B,C,Dı prizmasının (şəkil 113) üç yan tili üzərində M, N və P nöqtələri verilmişdir. (M ∈ $[AA_1]$, N∈ $[BB_1]$ və P∈$[CC_1]$) Prizmanın bu nöqtələrdən keçən müstəvi kəsiyini qurun.



Şəkil 113



Şəkil 114

Həlli. M və N nöqtələri AA_1B_1B və BB_1C_1C üzlərində olduğundan MN və NP kəsən müstəvinin bu üzlərdəki izi olacaqdır. Müstəvinin CC_1D_1D və DD_1A_1A üzlərindəki izini tapmaq üçün DDı tili üzərində müəyyən bir X nöqtəsini tapmalıyıq. M və

P nöqtələri AA_1C_1C müstəvisi üzərində olduğundan MP parçası üzərində oturacaq diaqonallarının O kəsişmə nöqtəsinə uyğun olan O_1 nöqtəsini qurmaq olar Bunun üçün AA1C_1C müstəvisində olan O nöqtəsindən prizmanın yan tilinə paralel düz xətt çəkmək lazımdır. Onda $[OO_1] \cap [MP]=O_1$ olar. Bu halda X nöqtəsinin istiqaməti məlum olacaqdır. Aşkardır ki, BB_1D_1D müstəvisində [NO1) çəksək X= [NO,] ∩ $[DD_1]$. Beləliklə, MNPX tələb edilən müstəvi kəsiyi olur.

Məsələ 11. Beşbucaqlı prizmanın (şəkil 114) yan üzündə M, N və P nöqtələri verilmişdir. Prizmanın bu nöqtədən keçən müstəvi kəsiyini qurun.

Həlli. Prizmanın yan tilini proyeksiya istiqaməti, oturacaq müstəvisini isə proyeksiya müstəvisi qəbul edərək M, N və P nöqtələrinin M_1, N_1, və P_1 paralel proyeksiyalarını quraq. Oturacaq müstəvisi üzərində P_1B və M_1N_1 parçalarını çəkib $K_1= [P_1B_1]\cap[M_1N_1]$ quraq. Sonra K_1 nöqtəsindən $[K_1K_2] \parallel [BB_1]$ çəkib kəsən müstəvi üzərində K_t nöqtəsinə uyğun K_2 nöqtəni axtaraq. Həmin nöqtə $K_2=[MN]\cap[PK_2]$ olacaqdır. $[PK_2)$ çəksək. Q nöqtəsini alarıq. $Q=[RK_2]\cap[BB_1]$ bu nöqtə kəsiyin təpə nöqtələrindən biridir. Q nöqtəsini qurduqdan sonra [QM) və [QN) şualarını çəkib F = [QM) ∩ $[CC_1]$ və G = [QN) ∩ $[AA_1]$, həmçinin [FP) şüasını çəkib H = [FP) ∩ $[DD_1]$ nöqtələrini qurmaq olar.

Beləliklə, kəsiyin dörd təpə nöqtəsini qurmuş oluruq. Kəsiyin beşinci təpə nöqtəsini qurmaq üçün uenə də oturacaq müstəvisi üzərində [BE] və [AD] çəkib K_3 nöqtəsini qururuq, $K_3=[BE]\cap[AD]$ olar. Sonra kəsən müstəvi üzərində K_3 nöqtəsinə uyğun olan nöqtəni axtaraq. Bunun üçün ADHG müstəvisi üzərində K_3 nöqtəsindən $[K_3K_4]\|\|[AA]$ çəkib $K_4=[K_3K_4)\cap[HG]$ quraq. Q və K_4 nöqtələri kəsən müstəvi üzərində olduğundan onlardan keçən düz xətt də həmin müstəvi üzərində olacaqdır. Ona görə də QBEL müstəvisi üzərində $[QK_4)$ şüasını çəksək $L=[QK_4]\cap[EE_1]$ nöqtəsini qurmaq olar. Beləliklə, QFHLG beşbucaqlısı axtarılan kəsik olacaqdır.

3.5. Bəzi xüsusi üsullar haqqında

Planimetriya kursunda bəzi məsələlərin həllində xüsusi üsullardan istifada edildiyi kimi, fiqurların müstəvi kəsiklərin qurulmasına da xüsusi metodlar tətbiq edilə bilər. Bu metodların tətbiq edilməsi fiqurların müstəvi kəsiklərinin qurulması prosesini sadələşdirir. Həmin metodların bəziləri üzərində dayanmağı lazım bilirik.

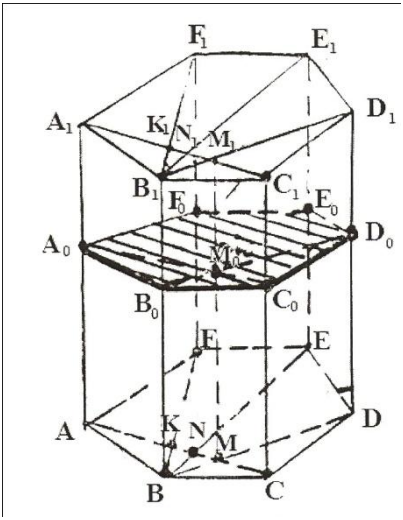
3.1. n bucaqlı fiqurun üçbucaqlı fiqura tamamlanması metodu.

3.2. Paralel düz xətlər metodu.

3.3. Kəsən müstəvinin köçürülməsi metodu.

Bu metodların mahiyyətini və məsələlər həllinə tətbiqlərini göstərək.

Məsələ 12. Altıbucaqlı prizma (şəkil 115) və onun AA_1 VV_1 CC_1 yan tilləri üzərində uyğun olaraq A_0, B_0, C_0 nöqtələri verilmişdir. Prizmanın A_0, B_0, və S_o nöqtələrindən keçən müstəvi kəsiyini qurun.



kil 115

Həlli. Əvvəlcə Ao, Vo, C_0 nöqtələrinin yerləşdiyi tillərin əmələ gətirdiyi $ABCA_1B_1C_1$ üçbucaqlı prizmasının A_0B_0Co müstəvi kəsiyini qururuq.

Həmin prizma ilə ortaq hissəli $BCDB_1C_1D_1$, $BDEB_1D_1E_1$ $BEFB_1E_1F_1$ prizmalarını müəyyən edək.

$M = [AC] \cap [BD]$, $N = [AC] \cap [BE]K$ $K=[AC] \cap [BF]$

$M_1 = [A_1C_1] \cap [B_1D_1]$, $N_1 =[A_1C_1] \cap [B_1E_1]K_1 = [A_1C_1] \cap [B_1F_1]$ nöqtələrini quraq.

$ABCA_1B_1C_1$ və $BCDB_1C_1D_1$ prizmalarında $[MM_1]=(AA_1S_1S)\cap(VV_1DD_1)$ qurduqdan sonra $[MM]\cap[A_0S_0]=M_0$ nöqtəsi vardır ki,

$[B_0M_0]\cap[DD_1]=D_0$ qurmaq olur. Aydındır ki, $BCDB_1C_1D_1$ prizmasının kəsiyi $B_0C_oD_0$-dir. Analoji mühakimə aparmaqla digər üçbucaqlı prizmaların kəsiklərini quraraq verilmiş prizmanın $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$ kəsiyini tamamlamağı oxuculara tapşırırıq.

3.1. Verilmiş fiqur əvvəlcə üçbucaqlı fiqurla tamamlanır. Alınan üçbucaqlı fiqurun kəsiyi qurulur. Sonra verilmiş fiqurun kəsiyi üçbucaqlı fiqurun kəsiyinin bir hissəsi kimi tapılır.

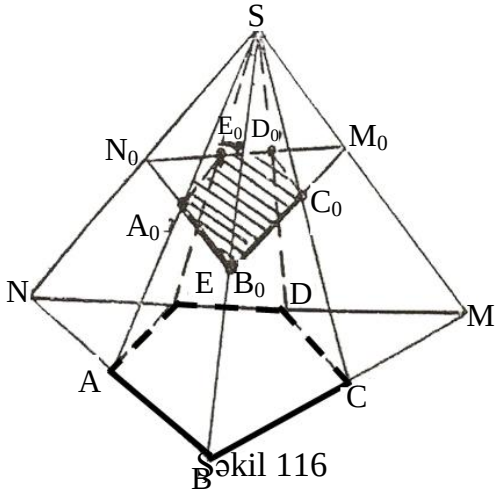
Məsələ 13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ prizmasının üç yan tilində M, N, P nöqtələri verilmişdir. Prizmanın bu nöqtələrdən keçən müstəvi kəsiyini qurun.

Həlli. Prizmanın AD və VS tillərinin K kəsişmə nöqtəsini, həmin qayda ilə A,Dı və B_1C_1 tillərinin $K_ı$ kəsişmə nöqtəsini qurub K ilə K_1-i birləşdirsək verilmiş $ABCDA_ıC_ıD_1$ dördbucaqlı prizmasını $ABKA_1B_ıK_1$ üçbucaqlı prizmaya tamamlamış olarıq. M və P nöqtələri $AA_1K_ıK$ müstəvisi üzərində olduğundan MP şüası KK_ri X nöqtəsində kəsəcəkdir. Beləliklə, BB_1K_1K müstəvisi üzərində olan iki N vs X nöqtələrini alırıq. Məlumdur ki, bu nöqtələri birləşdirən parça $BB_ıK_ıK$ müstəvisi üzərində olan CC_1 parçasını müəyyən bir E nöqtəsində kəsəcəkdir. MNEP tələb edilən kəsik olacaqdır.

Məsələ 14.

SABCDE beşbucaqlı piramidasının (şəkil 116) SA, SB və SC yan tilləri üzərində uyğun olaraq A_0, B_0 və C_0 nöqtələri verilmişdir. Piramidanın ($A_0B_0C_o$) müstəvi kəsiyini qurun.

Həlli. [VS)∩[ED)=M və [BA)∩[DE)=N qurub, həmin nöqtələri S ilə birləşdirsək, bir hissəsi verilmiş beşbucaqlı piramida olan SBMN üçbucaqlı piramidasının alırıq. Onun ($A_0B_0C_0$) müstəvi kəsiyini qurmaq üçün [BoAo)∩ [SN)=N_0; [B_0C_0) ∩[SM) = M_0 nöqtələrini qurmaq lazımdır. $B_0N_0M_0$ üçbucaqlı SNBM piramidasının A_0, B_0, C_0 nöqtələrindən keçən kəsiyidir.

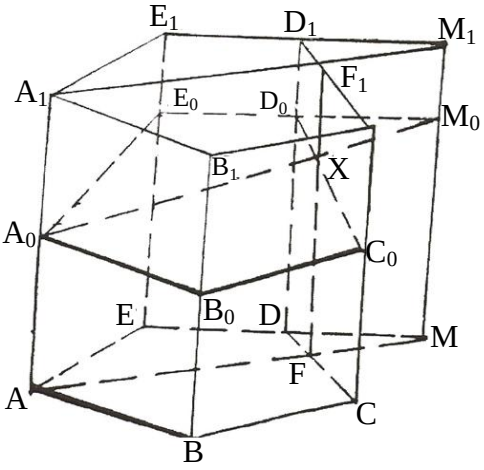


Şəkil 116

[NoMo]∩[SE) = E_0 və [N_0M_0]∩[SD) - D_0 nöqtələrini qurmaqla verilmiş beşbucaqlı SABCDE piramidasmm A_0BoCoD_0Eo kəsiyini qururuq.

3.2. Bu metod "Bir neçə paralel müstəvinin hər hansı müstəvi ilə kəsdikdə kəsişmə xətlərinin paralelliyi" haqqındakı teoremə əsaslanır. Bu metodun mahiyyətini məsələ ilə izah edək.

Məsələ 15. $ABCDEA_1B_1D_1E_1$ beşbucaqlı prizması (şəkil 117) və $A_0 \in [AA_1]$, $B_0 \in [BB_1]$ və $So \in [CC_1]$ verilmişdir. Prizmanın A_0BoC_0 müstəvi kəsiyini qurun.



Şəkil 117

Həlli. Prizmanın AA_1 tilindən BB_1C_1C üzünə paralel AA_1M_1M müstəvisi keçirərək, $(CC_1DD_1)\cap(AA_1M_1M)=(FF_1)$, $(EE_1DD_1)\cap(AA_1M_1M)=(MM_1)$ alırıq $(AA_1M_1M)\parallel(BB_1C_1C)$ olduğundan $[A_0X] \parallel [B_0C_0]$ çəkib $[A_0X) \cap [FF_1]=X$ quraq. Sonra $[A_oX) \cap [MM_1]=M_0$;

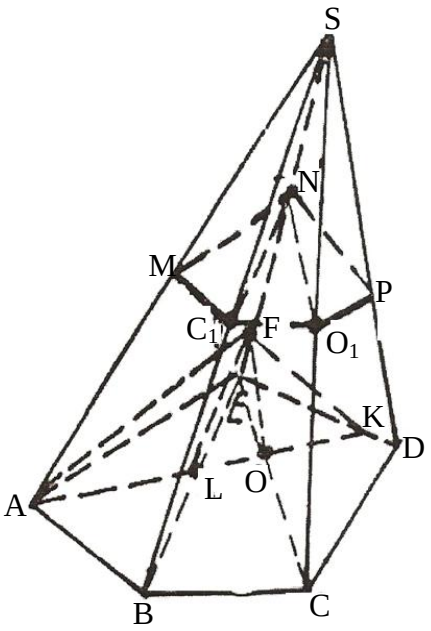
$[S_oX]\cap[DD_1]=D_0$; $[D_0M_0]\cap[EE_1]=E_0$ nöqtələrini qurmaqla tələb edilən $A_0B_0C_0D_0E_0$ kəsiyini qururuq.

3.3. Əvvəlcə verilmiş çoxüzlünün aşağıdakı şərtləri ödəyən köməkçi kəsiyi qurulur:

a) Kəsikdə alınan fiqur kəsən müstəviyə paralel olsun;

b) Verilmiş çoxüzlü ilə kəsən müstəvinin kəsiyi üçbucaq olsun.

Bundan sonra axtarılan kəsik iki paralel müstəvinin üçüncü müstəvi ilə kəsişməsindən alınan düz xətlərin paralel olması xassəsinə əsaslanaraq qurulur.



Şəkil 118

Məsələ 16. Beşbucaqlı SABCDE piramidası (şəkil 118) və N e [SE], P e (SD), M ∈ (SA] nöqtələri verilmişdir. Piramidanın MNP müstəvi kəsiyini qurun.

Həlli. (NP) və (NM) qurduqdan sonra [AF]‖(MN) və [FK) ‖ [NP] çəkərək verilmiş piramidanın kəsiyi olan AFK üçbucağını qururuq. Aydındır ki, MNP və AFK müstəviləri paraleldir. [ES]∩[AK]=0; [EV]∩[AK]=L nöqtələrini qurduqdan sonra [NL1] ‖

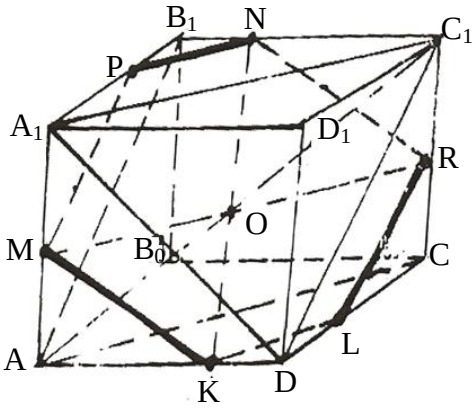
[FL] və $[NO_1) \parallel [FO]$ çəkərək $[NL_1) \cap [SB] = L,$; $[NO_1) \cap [SC] = 0$, nöqtələrini qurmaqla piramidanın $MNPO_1L_1$ müstəvi kəsiyini almış oluruq.

Fiqurların müstəvi kəsiklərinin qurulmasında bəzən fiqurun xassələrinə (mərkəzi simmetriya, oxa nəzərən simmetriya, düz xətlərin və ya müstəvilərin paralelliyi və i.a.) əsasən onun müstəvi kəsiyinin qurulması çətinlik törətmir. Bu metoddan istifadə etməklə fiqurun müstəvi kəsiyinin qurulması prosesi sadələşir. Aşağıdaki məsələni nəzərdən keçirək.

Məsələ 17. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ paralelepipedi (şəkil 119) və $K \in [AD]$, $L \in [DC]$, $N \in [V,S,]$ verilmişdir. K, L və N nöqtələrinin həmin tilləri nisbətində böldüyünü bilərək paralelepipedin KLN müstəvi kəsiyini qurun.

$|AK| : |KD| = |CL| : |LD| = |C,N| : |NB,| = m : n$

Həlli. Paralelepipedin O simmetriya mərkəzinin kəsən müstəvi üzərində olduğunu göstərək. ADB_1C_1 diaqonal müstəvisi üzərində paralelepipedin [AS,] diaqonalı və kəsən müstəvi üzərində olan (KN) düz xətti yerləşir.$[AS_1] \cap [KN] = 0$ qəbul edək. $[AO] = [OS_1]$ olduğu-



Şəkil 119

nu, başqa sözlə, O nöqtəsinin paralelepipedin simmetriya mərkəzi olduğunu isbat edək. Doğrudan da,

$$[KA] = [NC_1] = \frac{n}{m+n}[AD] \text{ və } K\hat{A}O = N\hat{C}O$$

olduğundan $\Delta KAO = \Delta NOC_1$ olur. Ona görə də, [AO] = [OC1] alırıq. Kəsən müstəvi və ACC_1A_1 diaqonal müstəvisi uyğun olaraq (KL1) || (AC) düz xətlərindən keçdiyindən, onlar paralelepipedin O simmetriya mərkəzindən keçən (MR) düz xətti boyunca kəsişəcəkdir. Sonra [NP]=[KL] çəkərək kəsiyin digər təpə nöqtələrini müəyyən edirik. Beləliklə, KLRNPM kəsiyini qururuq. Fiqurların müstəvi kəsiyinin qurulmasının yuxarıda göstərilən metodlarının hər birinin üstün cəhətləri və nöqsanları vardır. Düz xətt və müstəvilərin qarşılıqlı vəziyyətlərinin müəyyən edilməsində proyeksiya metodu daha əlverişlidir. Həmçinin həmin metod bir də ona görə əlverişlidir ki, o, şagirdlərə proyeksiya çevrilmələrini mənimsəməyə kömək edir.

İzlər metodu digər metodlara nisbətən fəza təsəvvürlərinin inkişafına daha çox müsbət təsir göstərir, fiqurlarda dərhal gözə çarpmayan həndəsi xassələrin aşkar edilməsinə, öyrənmiş teoremlərdən istifadə edilməsinə imkan verir. Ona görə də kəsiklərin qurulmasına aid məsələlərin həllində bu metoddan daha geniş istifadə edilir.

3.6. Fırlanma cisminin müstəvi kəsiyinin qurulması üsulları

Çoxüzlülərin müstəvi kəsiklərinin qurulmasından fərqli olaraq fırlanma səthinin müstəvi kəsiyi ayrı-ayrı nöqtələr üzrə qurulur. Yəni, səthin bir sıra doğuranlarını çəkib həmin doğuranları kəsən müstəvi ilə kəsişmə nöqtələri qurulur. Bu nöqtələrin sayı qurulan fiqurun

dəqiq olmasını müəyyən edir. Belə nöqtələr nə qədər çox götürülərsə, qurulan fiqur bir o qədər dəqiq olar.

Silindr və konusun müstəvi kəsiklərində ikitərtibli əyrilərlə əhatə olunmuş fiqurlar alınır. Odur ki, kəsiyin qurulmasında həmin əyrilərin xassələrinin nəzərə - alınması kəsiyin formasını müəyyən etməyə imkan verir. Bu isə məsələnin həlli prosesini sürətləndirir.

Məlumdur ki, fırlanma fiqurlarından kürənin istənilən müstəvi ilə kəsiyi dairə, silindirin kəsiyi isə əsasən ellipsdir. Konusun müstəvi kəsiyi müxtəlif fiqurlar verdiyindən onların qurulması daha çox maraq doğurur.

Ona görə də biz burada əsasən düz dairəvi konusun müstəvi kəsiklərinin qurulması ilə məşğul olacağıq.

Qeyd edək ki, düz dairəvi konusun müstəvi kəsiyi aşağıdaki fiqurlar ola bilər:

1. Kəsən müstəvi oturacağa paralel olarsa, dairə;

2. Kəsən müstəvi konusun təpə nöqtəsindən keçərsə, üçbucaq;

3. Kəsən müstəvi doğuranlardan birinə paralel olarsa, parabola və düz xətt parçası ilə əhatə olunmuş fiqur;

4. Kəsən müstəvi konusun iki doğuranına paralel olarsa, (xüsusi halda müstəvi konusun oxuna paralel olarsa), hiperbola və düz xətt parçası ilə əhatə olunmuş fiqur;

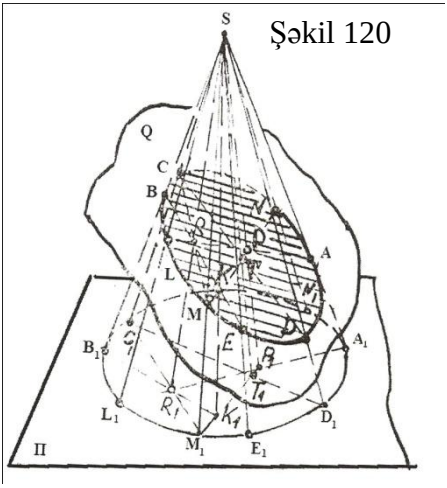
5. Kəsən müstəvi konusun bütün doğuranlarını kəsərsə, ellips alınır.

Ona görə də konusun müstəvi ilə kəsilməsindən alınan ellips, parabola və hiperbola konus kəsikləri adlanır.

Aşağıdakı məsələləri nəzərdən keçirək.

Məsələ 53. Konus və onun səthi üzərində (şəkil 120) L, M, N nöqtələri verilmişdir. Həmin nöqtələrdən keçən müstəvi ilə konusun kəsişmə xəttini qurun.

Həlli. Məsələnin həllində konusun təpə nöqtəsini proyeksiya mərkəzi, oturacaq müstəvisini isə proyeksiya müstəvisi qəbul edərək, verilmiş L, M, N nöqtələrinin L_1 M_1 N_1 mərkəzi proyeksiyalarını quraq. Verilmiş konusun kənar doğuranlarını SA_1 və SB_1 qəbul edərək əvvəlcə kənar doğuranların LMN müstəvisi ilə kəsişmə nöqtələrini quraq. Bunun üçün $[M_1N_1] \cap [L_1A_1] = P_1$ və $[SP_1] \cap [MN] = P$ qurub $[LP] \cap [SA_1] = A$ tapırıq.



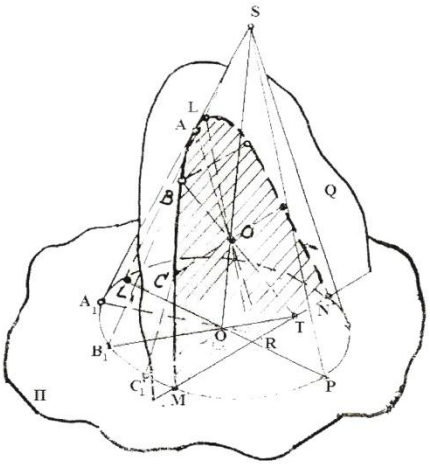
Şəkil 120

Konusun istənilən SE_1 doğuranını çəkib B_1E_1 ilə L_1A_1 və M_1N_1 düz xətlərinin R_1 və K_1 kəsişmə nöqtələrini qursaq $[R_1S] \cap [LA] = R$ və $[R_1S] \cap [MN] = K$ taparıq. KR düz xəttini çəkərək əyrinin $[SB_1] \cap (KR) = V$ və $[SE_1] \cap [KR] = E$ nöqtələrini tapırıq.

Verilmiş nöqtələrin konus səthi üzərində olmasından aydındır ki, kəsikdə ellips alınacaqdır. Ellipsin daha bir sıra nöqtələrinin qurulması qaydasını izah edək.

Konusun SC, və SD] doğuranlarını çəkib C_1D1 ilə M_1N_1-in T_1 kəsişmə nöqtəsindən T_1S çəksək $T = [T_1S] \cap [NM]$ nöqtəsini qurarıq. Sonra ellipsin $[MR] \cap [SC_1] = S$ nöqtəsini qurub CT şüasını çəksək ellipsin daha bir $[CT] \cap [SD_1] = D$ nöqtəsini qurarıq. Analoji qayda ilə prosesi davam etdirməklə ellipsin istənilən sayda nöqtələrini qura bilərik. Qeyd edək ki, kəsiyin kifayət sayda nöqtələrinin qurulması onun dəqiqliyini artırmağa imkan verir.

Məsələ 54. Verilmiş konusu parabola əyrisi üzrə kəsin (şəkil 121).



Şəkil 121

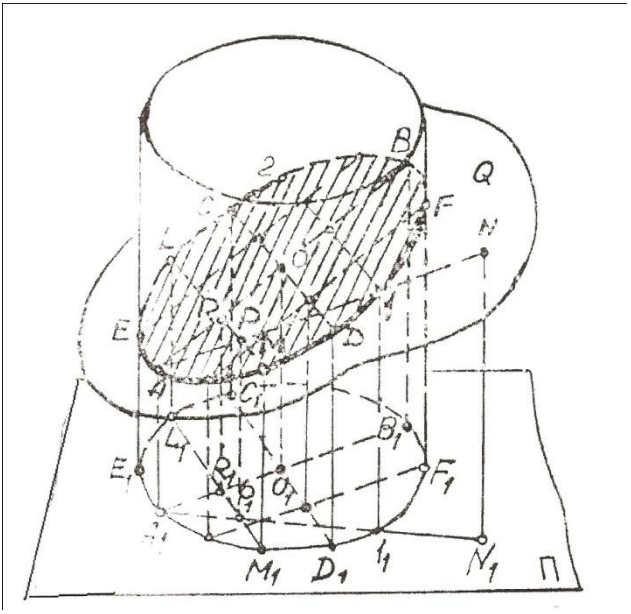
Həlli. Tutaq ki, M və N nöqtələri konusun oturacaq çevrəsi üzərində, L isə yan səthi üzərindədir. Konusun həmin nöqtələrdən keçən müstəvi ilə parabola əyrisi üzrə kəsmək üçün MN vətərini çəkək və bu vətərlə qoşma olan LıP diametrini quraq. ([MK] = [KN], (L_1P) ⊥ (MN)). Konusun SP doğuranını və K nöqtəsindən [KO] || [SP] çəkək. Bu halda yuxarıda qəbul etdiyimiz tərifl ərə uyğun olaraq (tərif 3) MN və KO düz xətləri ilə müəyyən edilən müstəvi verilmiş konusun, təpəsi L nöqtəsində, oxu isə LO düz xətti olan parabola əyrisi üzrə kəsəcəkdir. Parabolanın digər nöqtələrini qurmaq üçün $O(O_1)$ nöqtəsindən və onun LO oxuna simmetrik olması xassəsindən istifadə edək.

Məsələn, şəkil 125-də göstərilən V, A, S və onlarla LO oxuna nəzərən simmetrik nöqtələrin qurulması qaydasını göstərək. A_1O_1 şüası ilə MN düz xəttinin R kəsişmə nöqtəsindən çəkilən RO düz xəttinin SAı doğuranı ilə A kəsişməsi nöqtəsi parabolamn nöqtəsidir. Həmin nöqtə ilə simmetrik nöqtə də parabolanın nöqtəsi olacaqdır. Eyni qayda ilə SB_1 doğuranını çəkib V A şuasının MN düz xətti ilə T kəsişmə nöqtəsindən çəkilən TO düz xəttinin SB_1 doğuranı ilə V kəsişmə nöqtəsinin, həmçinin digər nöqtələri qurmaq olar.

Məsələ 55. M, N və L nöqtələrindən keçən müstəvi ilə silindri kəsin (şəkil 122)

Həlli. Verilmiş M, N və L nöqtələrinin alt oturacaq müstəvisi üzərində M_1N_1 və $L_ı$ paralel proyeksiyalarını quraq. Əvvəlcə kəsən müstəvinin verilmiş silindrin kənar doğuranlarını kəsdiyi nöqtələri quraq. Bunun üçün oturacaq müstəvisində A_1B_1 və $L_1M_ı$ çəkib, $P_1=[A_1N_1]\cap[L_1M_1]$ quraraq P_1 nöqtəsindən $[PP_1]\cap[BB_1]$ çəkək. Onda $P=[P_1P)\cap[NA]$ nöqtəsini taparıq. Həmin qayda ilə də E nöqtəsini qurmaq olar. NP şuasını silindrin səthini $A=[NP]\cap[AA]$ nöqtəsində kəsənə qədər uzadaq. A nöqtəsi kəsiyin nöqtələrindən biridir.

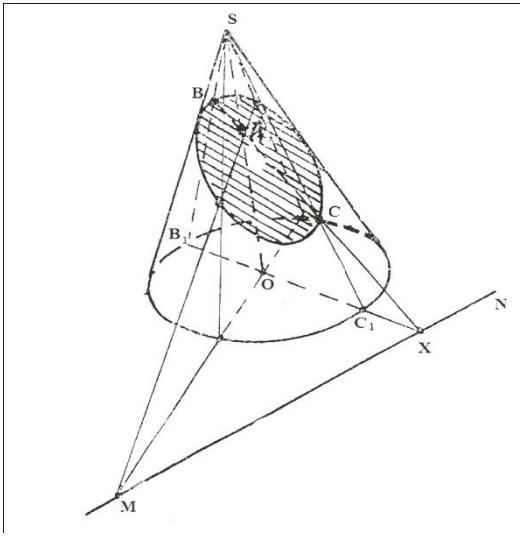
Kəsiyi daha dəqiq qurmaq üçün nöqtələri kifayət qədər qurmaq lazımdır.



Şəkil 122

Məsələ 56. Konusun hündürlüyü üzərində (şəkil 123) verilmiş A nöqtəsindən və onun oturacaq müstəvisi üzərindəki MN düz xəttindən keçən müstəvi kəsiyini qurun.

Həlli. Konusun oturacaq müstəvisində hündürlüyünün oturacağından MN düz xəttini kəsən istənilən düz xətt çəkək (məsələn: B_1C_1 düz xətti). B_1 və C_1 nöqtəbrini S ilə birbşdirək. $[B_1C_1]\cap(MN)=X$ nöqtəsi kəsən müstəviyə aid olduğundan [XA) şüası da kəsən müstəviyə aid olar.



Şəkil 123

Onda

$$(XA) \cap [SB_1] = V;\ [XB) \cap [SC_1] = S$$

nöqtələrini qururuq ki, bunlar kəsiyə aid olan nöqtələrdir. Həmin prosesi davam etdirməklə kəsiyin dəqiq qurulması üçün kifayət qədər nöqtələr tapıb konusun müstəvi kəsiyini qurmaq olar. Kəsikdə A nöqtəsinin vəziyyətindən asılı olaraq, konus kəsikləri ellips, parabola və hiperbola alına bilər.

IV FƏSİL

CİSMİN MÜSTƏVİ KƏSİYİNİN ELEMENTLƏRİNİN QURULMASINA AİD TÖVSİYƏLƏR

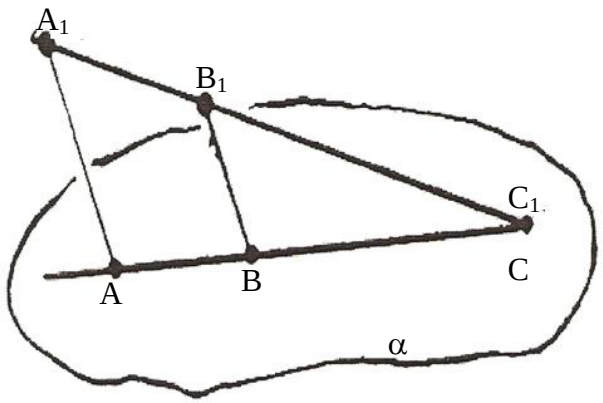
4.1. Çoxüzlünun müstəvi kəsiyinin qurulmasında istifadə edilən ən sadə aid məsələlər

Həndəsədən məsələ həllində bu və ya digər təklifdən və ya əvvəlcədən həll edilmiş məsələdən istifadə etməli oluruq. Məsələn, çoxlu sayda məsələlər göstərmək olar ki, onları həll edərkən üç perpendikulyar teoremindən istifadə edilir. Eləcə də, çoxüzlülərin müstəvi kəsiklərinin qurulmasına aid olan məsələlərin həlli prosesində üç əsas məsələnin həllindən tez-tez istifadə etməli oluruq. Bu məsələlər tələbələr tərəfindən şüurlu surətdə mənimsənildikdə onlar kəsiklərin qurulmasına aid mürəkkəb məsələlərin həllində bir o qədər çətinlik çəkmirlər.

Həmin məsələlər aşağıdakılardır.

Məsələ 18. Verilmiş düz xəttin (şəkil 125) verilmiş müstəvi ilə kəsişmə nöqtəsini qurun.

Həlli. Proyeksiya çertyojunda nöqtə, düz xətt verilmişdir dedikdə həmin nöqtənin, düz xəttin verilmiş müstəvisi üzərində proyeksiyasının da verildiyi və ya qurula bilməsi başa düşülür. Ona görə də A_1B_1 (AB) verilmiş düz xətt, α verilmiş proyeksiya müstəvisi olsun.



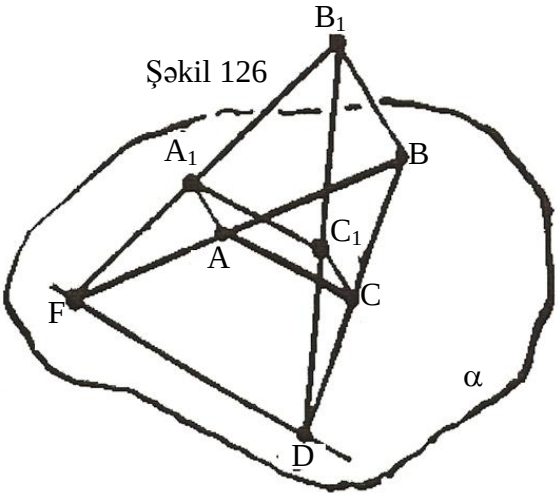
A_1A və B_1B proyeksiyalayıcı düz xətlər olduğundan onlar paralel olur, həm də A_1B_1 və AB düz xətləri bir proyeksiyalayıcı müstəvi üzərində olur. Ona görə də burada $(A_1B_1) \parallel (AB)$ və ya $(A_1B_1) \cap (AB)$ münasibətlərindən yalnız biri doğru olar. Bu halların har birini ayrılıqda nəzərdən keçirək.

1. Tutaq ki, $(A_1B_1) \parallel (AB)$-dir. Onda düz xətt və müstəvinin paralelliyi əlamətinə görə $(A_1B_1) \parallel (AB) \rightarrow (A_1B_1) \parallel \alpha$ olur. Bu halda verilmiş düz xətt verilmiş müstəvini kəsmir.

2. Tutaq ki, $(A_1B_1) \cap \alpha$-dir. Onda verilmiş düz xətlə müstəvinin yalnız bir ortaq nöqtəsi olacaqdır. $(A_1B_1) \cap (AV)=S$, burada $S \in (AB)$ və $S \in (A_1B_1)$-dir. $(AB) \subset \alpha$ a olmasından isə $S \in \alpha$ e a olduğunu alırıq. Deməli, $(A_1B_1) \cap \alpha=S$ olur. Bu halda qurduğumuz S nöqtəsi verilmiş düz xəttin verilmiş müstəvi ilə kəsişmə nöqtəsi

olacaqdır. S nöqtəsinə verilmiş düz xəttin α müstəvisi üzərindəki izi də deyilir.

Məsələ 19. Verilmiş ($A_1B_1C_1$) müstəvisinin (şəkil 126) proyeksiya müstəvisi ilə kəsişmə xəttini qurun.



Şəkil 126

Yuxarıda söylədiyimiz məsələdə olduğu kimi burada da iki hal ola bilər.

1. $(A_1B_1)\|(AB)$, $(B_1C_1)\|(AC)$ münasibətlərindən hər hansı ikisi doğru olarsa müstəvilərin paralel əlamətinə görə $(A_1B_1C_1) \| \alpha$ olar. Bu halda $A_1B_1C_1$ müstəvisi α müstəvisini kəsmir.

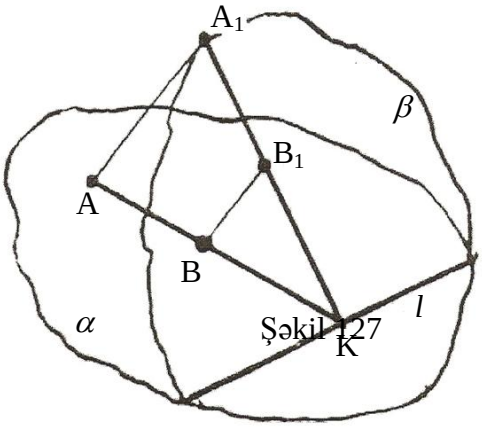
2. Tutaq ki, $A_jB_1C_1$ müstəvisi bir düz xətt üzərində olmayan A_1, B_1 və C_1 nöqtələri ilə verilmişdir. Həmin müstəvinin α proyeksiya müstəvisi ilə kəsişmə xəttini qurmaq üçün $A_1B_1C_1$ müstəvisinin hər hansı iki düz xəttinin, məsələn, B_1A_1 və B_1C_1-in bundan əvvəlki məsələdə olduğu kimi α proyeksiya müstəvisi ilə kəsişmə nöqtələrini qurmaq kifayətdir.

$$\left.\begin{array}{l}(B_1C_1)\cap(BC)=D\in\alpha\\(B_1A_1)\cap(BA)=F\in\alpha\end{array}\right\}\rightarrow(DF)\subset\alpha$$

Bu halda DF düz xətti verilmiş $A_1B_1C_1$ müstəvisinin α proyeksiya müstəvisi üzərindəki izi adlanır.

Məsələ 20. α müstəvi, üzərində (şəkil 127) B, xaricində isə A_t nöqtəsi və a müstəvisi ilə A_1 nöqtəsindən

keçən müstəvisinin a üzərindəki ℓ izi verilmişdir. β müstəvisi üzərində V nöqtəsinin obrazmı qurun.



Şəkil 127

Həlli. A_1 nöqtəsi verildiyindən aşkardır ki, onun A proyeksiyası da verilmiş olacaqdır. Beləliklə, bir düz xətt üzərində olmayan V, A_1, A nöqtələrini alırıq. Bu nöqtələrdən keçən μ müstəvisini quraq. Bu halda B_1 obrazını müəyyən etmək üçün K=[AB) $\cap$ qurur, sonra β müstəvisi üzərində [KA]] və [BB]] || [AA]] çəkərək B] e $[A_1K]$ tapırıq.

Məlumdur ki, bu tipdən olan məsələlərin həllində fiqurların ortaq elementlərinin qurulması əsas rol oynayır. Həmin elementləri qurmaq üçün məntiqi mühakimə və geniş fəza təsəvvürü tələb edildiyi kimi həm də onları inkişaf etdirir.

Çoxüzlünün kəsiyinin qurulmasına aid məsələlərdə kəsən müstəvi müxtəlif üsullarla verilə bilər. Məsələn, kəsən müstəvi bir düz xətt üzərində olmayan üç nöqtə ilə, düz xətt və bunun xaricində olan nöqtə ilə, kəsişən və ya paralel iki düz xətt ilə verilir. Həmçinin, kəsiyin elementlərinin bəziləri arasındaki asılılıq çoxüzlünün üzləri, tilləri, diaqonalları üzərində və hətta çoxüzlünün daxilində və ya xaricində də verilə bilər. Odur ki, məsələdə verilənlərin vəziyyətindən asılı olaraq həll metodunun seçilməsi oxucudan ustalıq tələb edir.

Söylədiklərimizi aşağıdakı məsələlər vasitəsilə izah edək.

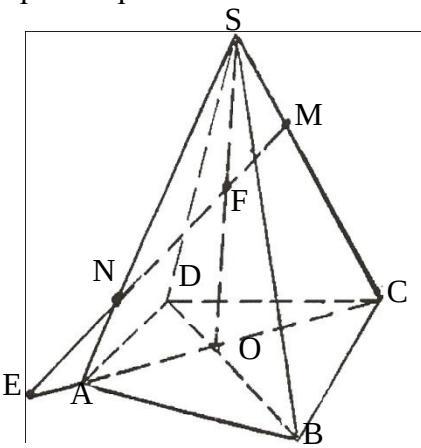
4.2. Müstəvinin xassələrinə aid məsələlər

Məlumdur ki, çoxüzlülərin müstəvi kəsiklərinin qurulması müstəvinin xassələrinə, düz xətt və müstəvinin, iki müstəvinin qarşılıqlı vəziyyətlərinə və bəzi təkliflərə əsaslanır.

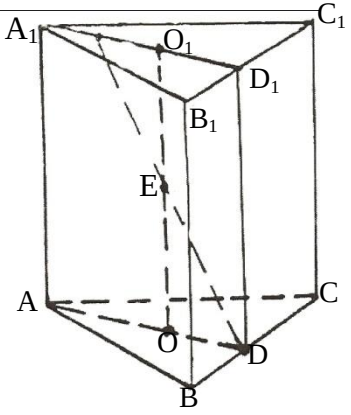
İndi həlli müstəvinin xassələrinə əsaslanan belə məsələləri nəzərdən keçirək.

Qeyd edək ki, bu məsələlərin həlli yalnız stereometriya aksiomlarına əsaslanır.

Məsələ 21. SABCD dördbucaqlı piramidası (şəkil 128) və onun S A, SC tilləri üzərində M, N nöqtələri verilmişdir. MN düz xəttinin 1. ABCD oturacaq müstəvisi ilə; 2. SBD diaqonal müstəvisi ilə kəsişmə nöqtəsini qurun.



Şəkil 128



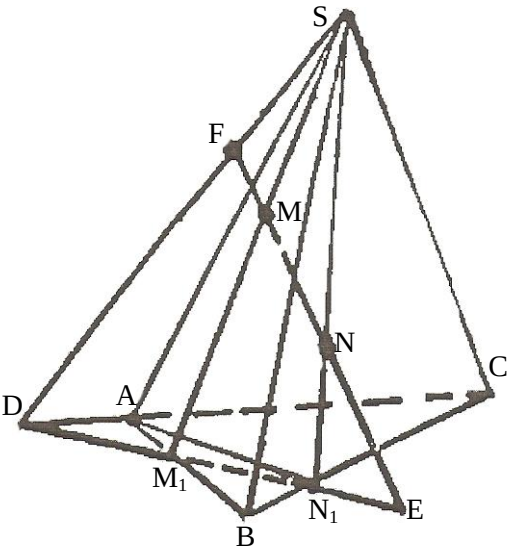
Şəkil 129

Həlli 1. SAC müstəvisi üzərindəki MN düz xətti ilə oturacaq müstəvisinə aid olan AC düz xəttinin

kəsişməsindən alınan E axtarılan nöqtədir. 2. ASC və BSD diaqonal müstəviləri SO düz xətti boyunca kəsişir. Uyğun olaraq onların üzərində olan MN və SO düz xətləri də F nöqtəsində kəsişər. Onda F nöqtəsi həm də MN düz xətti ilə SBD müstəvisinin kəsişmə nöqtəsi olacaqdır.

Məsələ 22. $ABCA_1B_1C_1$ düz prizmasında (şəkil 129) oturacağın VS tilinin D orta nöqtəsindən və prizmanın oxunun E orta nöqtəsindən keçən düz xəttin $A_1B_1C_1$ müstəvisi ilə kəsişmə nöqtəsini qurun.

Həlli. AA_1D_1D müstəvisi üzərində DE şüasını çəksək bu şüa onunla eyni bir müstəvi üzərində yerləşən A_1D_1 düz xəttini müəyyən bir E_1 nöqtəsində kəsəcəkdir. E_1 nöqtəsi axtarılan nöqtədir.



Şəkil 130

Məsələ 23. SABC piramidası (şəkil 130) və onun SAB, SBC yan üzlərində M, N nöqtələri verilmişdir. MN düz xəttinin:

1.ABC oturacaq müstəvisi ilə;

2. SAC üzünün müstəvisi ilə kəsişmə nöqtəsini qurun.

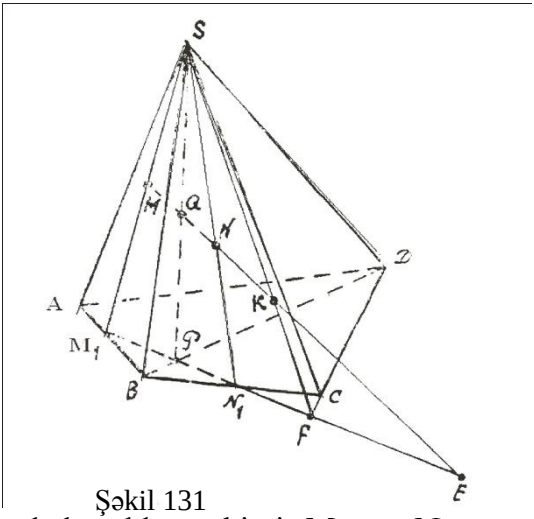
Həlli. 1. Piramidanın S təpəsini proyeksiya mərkəzi, ABC müstəvisini proyeksiya müstəvisi qəbul edərək

M və N nöqtələrinin uyğun olaraq M_1 və N_1 mərkəzi proyeksiyalarını quraq. $E=[MN)\cap[M_1N_1)$. E nöqtəsi MN düz xəttinin ABC oturacaq müstəvisi ilə kəsişmə nöqtəsidir.

2. $(M_1N_1)\cap[AC)=D\in(SAC)$ quraraq (SD)-ni çəksək $F=(MN)\cap[SD]$ nöqtəsini qurarıq. F nöqtəsi (MN) ilə SAC müstəvisinin kəsişmə nöqtəsidir.

Məsələ 24. SABCD piramidası (şəkil 131) və onun SAB, SBC yan üzlərində M, N nöqtələri verilmişdir. MN düz xəttinin:

1. ABCD oturacaq müstəvisi ilə;
2. SCD üzünün müstəvisi ilə;
3. SBD diaqonal müstəvisi ilə kəsişmə nöqtəsini qurun.



Şəkil 131

Həlli. Əvvəlki məsələdə olduğu kimi M_1 və N_1 nöqtələrini qururuq.

1. $E=[NM)\cap[N_1M_1)$ nöqtəsi M və N nöqtələrindən keçən düz xəttin ABCD oturacaq müstəvisi ilə kəsişmə nöqtəsidir.

2. Bundan əvvəlki məsələdə olduğu kimi $F=[N_1M_1)\cap[DC]$ nöqtəsini qurub [FS] çəksək $(MN)\cap[FS]=K$ nöqtəsini qurarıq. K nöqtəsi (MN)-in SDC müstəvisi ilə kəsişmə nöqtəsidir.

3. $(M_1N_1)\cap[BD]=P$ nöqtəsini quraraq (PS) çəksək, $(MN)\cap[PS]=Q$ alarıq. Q nöqtəsi M və N nöqtələrindən keçən düz xəttin SBD diaqonal müstəvisi ilə kəsişmə nöqtəsidir.

Məsələ 25. ABCD tetraedri (şəkil 132) və M, N nöqtələri verilmişdir. Burada M $\in$[DC], N $\in$[AV]. ABM və DCN müstəvilərinin kəsişmə xəttini qurur.

Həlli. 1. Analiz. ABCD verilmiş tetraedr, (MN) isə ABM və DCN müstəvilərinin kəsişmə xətti olsun. M nöqtəsi ADC və CDB müstəviləri üzərində olduğundan MA və MB düz xətlərini qurmaq olar.

Beləliklə, ABM müstəvisi qurulmuş olur. Həmin qayda ilə DCN müstəvisi də qurula bilər.

Aydındır ki, iki müstəvinin kəsişmə xəttini qurmaq üçün həmin müstəvilərin iki ortaq nöqtəsi məlum olmalıdır. M və N nöqtələri ABM və DCN müstəvilərinin hər ikisinə aid olduğundan, onda MN tələb edilən xətt olar.

2. Qurma. Qurma aşağıdaki ardıcıllıqla aparılır.

1. $\left.\begin{matrix} M \in (BDC) \\ B \in (BDC) \end{matrix}\right\} \rightarrow [BM] \subset (BDC)$

2. $\left.\begin{matrix} M \in (ADC) \\ B \in (ADC) \end{matrix}\right\} \rightarrow [MA] \subset (ADC)$

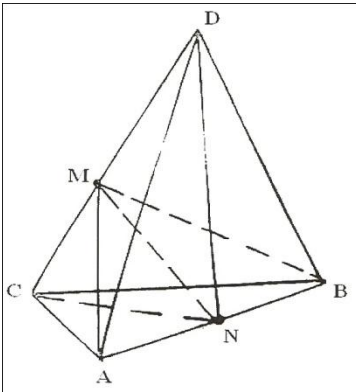
3. MB və MA parçaları ABM müstəvisini təyin edir.

4. $\left.\begin{matrix} N \in (ADB) \\ B \in (ADB) \end{matrix}\right\} \rightarrow [ND] \subset (ADB)$

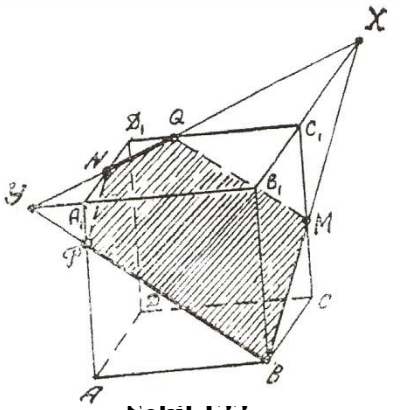
5. $\left.\begin{matrix} N \in (ABC) \\ C \in (ABC) \end{matrix}\right\} \rightarrow [NC] \subset (ABC)$

6. ND və NS düz xətləri NDS müstəvisini təyin edir.

7. M$\in$(NDS), M$\in$(MAB), N$\in$(NDS), N$\in$(MAB) olduğundan NM düz xəttini qururuq.



Şəkil 132



Şəkil 133

3. İsbat. Bu mərhələ məsələnin analiz və qurma mərhələsindən məlumdur.

4. Araşdırma. M və N nöqtələri iki müxtəlif müstəvinin ortaq nöqtələridir. Bu nöqtələrdən keçən düz xətt yeganə olduğundan həll yeganədir.

N nöqtəsi [AB]-nin daxili nöqtəsi, M isə tetraedrin S (və ya D) təpəsi üzərinə düşərsə, müstəvilərin kəsişmə xətti NC (və ya ND) olar. Digər nalların da araşdırılmasını oxuculara tapşırırıq.

Məsələ 26. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubunun (şəkil 133) V təpəsindən, CC_1 və A_1D_1 tillərinin orta nöqtələrindən keçən müstəvi kəsiyini qurun.

Həlli. 1. Analiz. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ verilmiş kub,

$M \in [CC_1]; |CM| = |MC_1|$

$N \in [A_1D_1]; |A_1N| - |ND_1|$ olsun.

Kubun V təpəsi və verilmiş M nöqtəsi BB_1CC_1 müstəvisi üzərində olduğundan BM şuasını $A_1D_1C_1B_1$ müstəvisini X nöqtəsində kəsənə qədər uzadıb sonuncu müstəvi üzərində XN şüasını (A_1B_1)-i kəsənə qədər uzatsaq qurduğumuz Y nöqtəsi həmçinin AA_1B_1B

müstəvisi üzərində olduğundan YB düz xəttini çəkməklə axtarılan kəsiyi qura bilərik.

2. Qurma. Bu mərhələ aşağıdaki ardıcıllıqla aparılır.

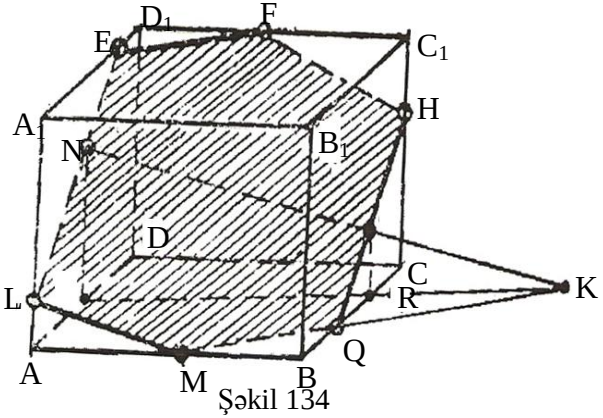
1. $[BM) \cap [B_1C_1] = X \in (A_1B_1C, D_1)$;
2. $[XN) \cap [D_1C_1] = Q$;
3. $[XN) \cap [B_1A_1] = Y$;
4. $[YB) \cap [AA_1] = P$

BMQNP axtarılan kəsikdir.

3. İsbat. Analiz mərhələsindən aşkardır.

4. Araşdırma. V, M və N nöqtələri bir düz xətt üzərində deyildir. Odur ki, həll yeganədir.

Məsələ 27. M, N, P nöqtələri uyğun olaraq (şəkil 134) AB tilinə, AA_1D_1D və BB_1C_1C üzlərinə;



Şəkil 134

2. ABCD, AA_1B_1B və BB_1C_1C üzlərinə aid olarsa, $ABCDA_1C_1D_1$ paralelepipedinin (MNP) müstəvi kəsiyini qurun.

Həlli 1. $M \in [AB]$, $N \in (AA\ D_1D)$ və $P \in (BB_1C_1C)$ olsun.

Paralelepipedin yan tilini proyeksiyalama istiqaməti, oturacaq müstəvisini isə proyeksiya müstəvisi qəbul etsək, N və P nöqtələrinin bu müstəvi üzərində proyeksiyaları $N_1 \in [AD]$, $P_1 \in [VS]$ olar.

$(NP) \neq (N_1P_1)$ olarsa, $(NP) \cap (N_1P_1) = K$ qurub [KM] çəksək, $[KM] \cap [VS]=Q$ qurarıq. QP şüasını çəksək $[QP) \cap [CC_1] =H$ qurarıq. N nöqtəsindən $[EL) \parallel [QH]$ çəksək, $[EL] \cap [AA_1]=L$ və $[EL] \cap [DD_1] = E$ qurarıq.

Beləliklə, MQHFEL altıbucaqlısı axtarılan kəsikdir.

Müstəqil həll etmək üçün məsələlər:

1. SABCDE altıbucaqlı piramidasının SA, SB və SE yan tilləri üzərində uyğun olaraq M, N və P nöqtələri verilmişdir. Piramidanın həmin nöqtələrdən keçən müstəvi kəsiyini qurun.

2. SABCD dördbucaqlı piramidasının oturacağının AB və VS tərəfləri üzərində E və F, SAC ilə SBD diaqonal müstəvilərinin kəsişmə xətti üzərində verilmiş P nöqtəsindən keçən müstəvi kəsiyini qurun.

3. SABCD dördbucaqlı piramidası və onun SAB, SBC, SCD üzlərinin müstəvilərində uyğun olaraq E, F, K nöqtələri verilmişdir. Piramidanın həmin nöqtələrdən keçən müstəvi kəsiyini qurun.

4. Dördbucaqlı prizmanın oturacaq müstəvisi üzərində verilmiş M və onun a) iki müxtəlif tili üzərində verilmiş N və P; b) iki müxtəlif üzün müstəvisi üzərində verilmiş E və F nöqtələrindən keçən müstəvi kasiyini qurun.

5. Düzgün altıbucaqlı prizmanın alt oturacağının tərəfindən və üst oturacaqda bu tarafın qarşısında duran tərəfdən keçən müstavi kəsiyini qurun.

6. Kubun oturacağının iki qonşu tərəflərinin orta nöqtəsindən və onun oxunun orta nöqtəsindən keçən müstəvi kəsiyini qurun.

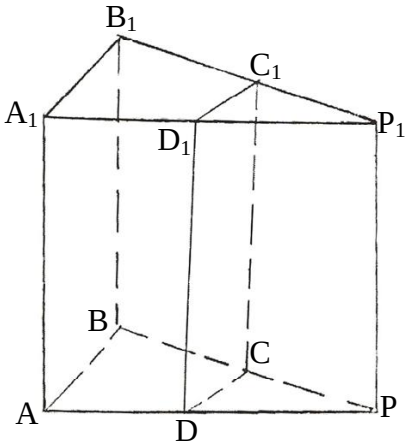
7. Düzgün dördbucaqlı piramidanın oturacağının tərəfindən və hündürlüyü $\frac{1}{3}$ nisbətində bölən nöqtədən

keçən müstəvi kəsiyini qurun. Piramidanın bütün tillərinin uzunluqları a olarsa, alınan kəsiyin sahəsini tapın.

4.3. Düz xətt və müstəvinin paralelliyinə aid məsələlər

"Düz xətt və müstəvilərin paralelliyi" mövzusuna aid kəsiklərin qurulması düz xətlərin və müstəvilərin paralelliyinə aid teoremlərə əsaslanır. Xüsusilə, burada iki paralel müstəvinin üçüncü müstəvi ilə kəsişməsindən alınan düz xətlərin paralel olması haqqındakı teorem daha tez-tez istifadə edilir. Misal göstərək.

Şəkil 135



Məsələ 28. Oturacağının AD və VS tərəfləri (şəkil 135) paralel olmayan $ABCDA_1B_1C_1D_1$ dördbucaqlı prizmasının qonşu olmayan AA_1D_1D və CC_1B_1B yan üzlərinin yerləşdiyi müstəvilərin kəsişmə xəttini qurun.

Həlli. Oturacağın AD və VS tərəfləri paralel olmadığından

$[AD) \cap [VS) = P$ və $[A_1D_1) \cap [B_1C_1) = P_1$

nöqtələrini qururuq. PP_1 verilmiş prizmanın qonşu olmayan AA_1D_1D və BB_1C_1C üzlərinin kəsişmə xətti olacaqdır.

Məsələ 29. Beşbucaqlı prizmanın qonşu olmayan yan üzlərinin müstəvilərinin kəsişmə xəttini qurun.

Həlli. Prizmanın oturacağındakı beşbucaqlının qonşu olmayan tərəflərinin kəsişmə nöqtələrini qurmaqla həmin məsələni asanlıqla həll etmək olar. Məsələn,

$[SV) \cap [EA) = M$ və $[C_1B_1) \cap [E_1A_1) = M_1$ nöqtələrini qursaq, alınan (MM_1) beşbucaqlı prizmanın qonşu olmayan BB_1C_1C və AA_1E_1E yan üzlərinin müstəvilərinin kəsişmə xətti olar. Digər müstəvilərin kəsişmə xətlərinin qurulmasını oxuculara tövsiyə edirik.

Məsələ 30. SABCD piramidasının oturacağı trapesiyadır.

Qonşu olmayan SBC və SAD yan üzlərinin müstəvilərinin kəsişmə xəttini qurun.

Həlli. ABCD trapesiyasının yan tərəflərinin K kəsişmə nöqtəsini qurub onu S nöqtəsi ilə birləşdirsək alınan SK düz xətti piramidanın SAD və SBC yan üzlərinin kəsişmə xətti olar.

Məsələ 31. $ABCA_1B_1C_1$ üçbucaqlı piramidası verilmişdir. Onun $[BB_1]$ və $[CC_1]$ yan tilləri üzərində M və N nöqtələri verilmişdir. MN düz xəttinin ABC və $A_1B_1C_1$ oturacaq müstəviləri ilə kəsişmə nöqtələrini qurun.

Həlli. $[MN] \cap [CB] = P$ qururuq. P nöqtəsi M və N nöqtələrindən keçən düz xəttin ABC müstəvisi ilə kəsişmə nöqtəsi olacaqdır.

Eyni qayda ilə də $P_1 = [MN] \cap [B_1C_1]$ qurmaq olar.

Məsələ 32. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ dördbucaqlı prizması və onun VV_1 CC_1 yan tilləri üzərində M və N nöqtələri verilmişdir. MN düz xəttinin:

1. $A_1B_1C_1D_1$ oturacaq müstəvisi ilə;

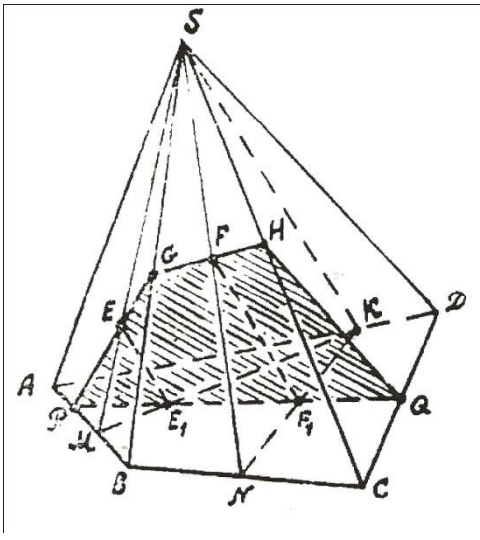
2. AA_1D_1D üzünün müstəvisi ilə kəsişmə nöqtəsini qurun.

Həlli. 1. $[MN] \cap [B_1C_1] = K$ qururuq. K nöqtəsi (MN)-in $A_1B_1C_1D_1$ müstəvisi ilə kəsişmə nöqtəsidir.

2. $(AA_1D_1D) \cap (BB_1C_1C) = (EE_1)$ qururuq.

$E=(EE_1) \cap (MN) = P$ nöqtəsi (MN)-in (AA_1D_1D) müstəvisinin kəsdiyi nöqtədir.

Məsələ 33. SABCD dördbucaqlı piramidası (şəkil 136) və onun SAB, SBC yan üzlərində E və F nöqtələri verilmişdir. E və F nöqtələrindən keçib SAD üzündə verilmiş SK düz xəttinə paralel olan kəsiyi qurun.



Şəkil 136

Həlli. SK düz xətti və E nöqtəsindən SKM müstəvisini keçirək və həmin müstəvi üzərində $[EE_1] \| [SK]$ çəkib $[EE_1) \cap [KM) = E_1$ quraq.

Sonra SK düz xətti və F nöqtəsindən SKN müstəvisini keçirək və həmin müstəvi üzərində $[FF_1] \| [SK]$ çəkib $[FF_1) \cap [KN] = F$, quraq. E_1 və F_1 nöqtələri həmçinin kəsən müstəvi üzərində olduğu üçün (E_1F_1)-i çəkib $(E_1F_1) \cap [DC] = Q$ quraq. Sonra G və H nöqtələrinin qurulması çətinlik törətmir. Beləliklə, PGHQ tələb edilən kəsikdir.

Məsələ 34. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ dördbucaqlı prizması və onun AA_1 və CC_1 yan tilləri üzərində M və N nöqtələri verilmişdir. MN düz xəttinin:

1. $A_1B_1C_1D_1$ oturacaq müstəvisi ilə;

2. BB_1D_1D diaqonal müstəvisi ilə kəsişmə nöqtəsini qurun.

Həlli. 1. Verilmiş M və N nöqtələrinin ABCD oturacaq müstəvisi üzərində paralel proyeksiyasını qururuq.

Aydındır ki, həmin proyeksiyalar uyğun olaraq A və S nöqtələri üzərinə düşəcək. Onda

$[CA) \cap [NM) = F \in (ABCD)$ olar.

2. $(AA_1CC) \cap (BB_1D_1D) = (OO_1)$; $[MN] \cap (OO_1) = E$

E nöqtəsi MN düz xəttinin BB_1D_1D müstəvisi ilə kəsişmə nöqtəsidir.

Məsələ 35. Oturacağı paraleloqram olan SABCD piramidası verilmişdir. Onun SB və SC yan tilləri üzərində M və N nöqtələri verilmişdir. MN düz xəttinin:

1. ABCD oturacaq müstəvisi ilə;
2. SAD üzünün müstəvisi ilə kəsişmə nöqtəsini qurun.

Həlli: 1. $[MN] \cap [CB) = E \in (ABCD)$;

2. $(SAD) \cap (SBC) = (SF)$

$[AD] \parallel [VS] \parallel [SF]$

$[NM] \cap [SF] \models F \in (SAD)$

Məsələ 36. $ABCA_1V_1C_1$ üçbucaqlı prizmasının AA_1B_1B və BB_1C_1C yan üzlərində M və N nöqtələri verilmişdir. MN düz xəttinin:

1. ABC və $A_1V_1S_1$ oturacaq müstəviləri ilə;
2. AA_1C_1C üzünün müstəvisi ilə kəsişmə nöqtəsini qurun.

Həlli. 1. Məlum qayda üzrə P, Q və P1 Q-nöqtələrini qururuq. Həmin müstəvi üzərində MN düz xəttinin QP və Q_1P_1 şuaları ilə uyğun olaraq E və E, kəsişmə nöqtələri olacaqdır.

2. $[QP) \cap [CA] = E$;

$[Q,P,) \cap [C_1A_1] = E_1$;

$[NM) \cap [EE_1] = L$

L - nöqtəsi MN düz xəttinin AA_1C_1C müstəvisi ilə kəsişmə nöqtəsidir.

Məsələ 37. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ dördbucaqlı prizmasının AA_1B_1B və BB_1C_1C yan üzlərində M və N nöqtələri verilmişdir. MN düz xəttinin:

1. ABCD və $A_1B_1C_1D_1$ oturacaq müstəviləri ilə;
2. AA_1D_1D və DD_1C_1C üzlərinin müstəviləri ilə;
3. AA_1C_1C və BB_1D_1D diaqonal müstəviləri ilə kəsişmə nöqtəsini qurun.

M və N nöqtələrinin ABCD və $A_1B_1C_1D_1$ müstəvilərində E, F və E1 F, paralel proyeksiyalarmı tapıb

$$(MN) \cap (ABCD) = K$$
$$(MN) \cap (A,B_1C_1D_1) = K_1$$

qururuq.

2. $(EE_1F_1F) \cap (AA_1D_1D) = (PP_1)$

$(MN) \cap (PP_1) = L$

L - nöqtəsi MN düz xəttinin AA_1D_1D müstəvisi ilə kəsişmə nöqtəsidir. Eyni qayda ilə L_1 nöqtəsini qururuq.

3. $(EE_1F_1F) \cap (AA_1C_1C) = (PP_1)$

$(NM) \cap (PP_1) = K \in (AA_1C_1C)$

MN düz xəttinin VV_1D_1D diaqonal müstəvisi ilə kəsişmə nöqtəsini tapmaq üçün $(BB_1D_1D) \cap (EE_1F_1F) = (OO_1)$ qurur və $(OO_1) \cap (MN) = G$ tapırıq.

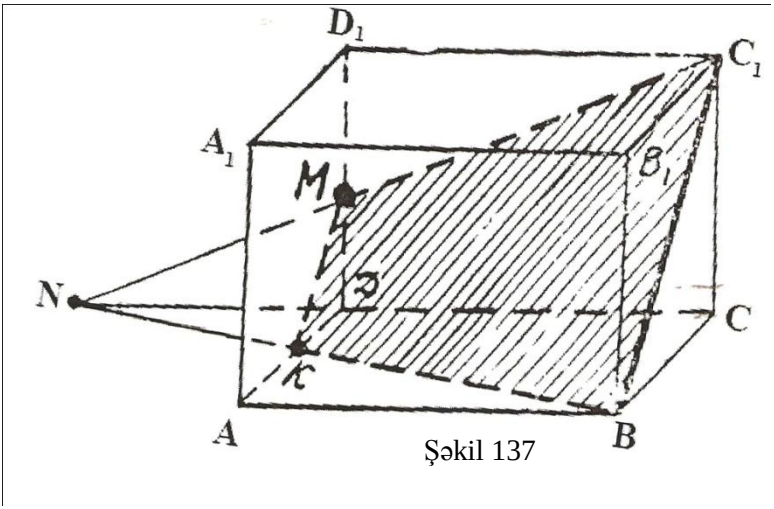
Məsələ 38. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ paralelepipedinin (şəkil 137) VS, düz xəttindən və DD_1 tilinin M orta nöqtəsindən keçən müstəvi kəsiyini qurur.

Həlli. 1. Analiz. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ verilən paralelepiped, M isə DD_1 tilinin orta nöqtəsi olsun.

Tələb edilən müstəvi kəsiyi paralelepipedin CC_1B_1B üzünü VS_1 düz xətti boyunca, DD_1C_1C üzünü isə C_1M düz xətti boyunca kəsəcəkdir.

BB_1C_1C və AA_1D_1D paralel müstəvilər BC_1M müstəvisi ilə kəsişdikdə kəsişmə xətlərinin paralel

olmasına əsasən [MK] ∥ [VS] çəkib K nöqtəsini qurmaqla məsələni həll etmək olar.



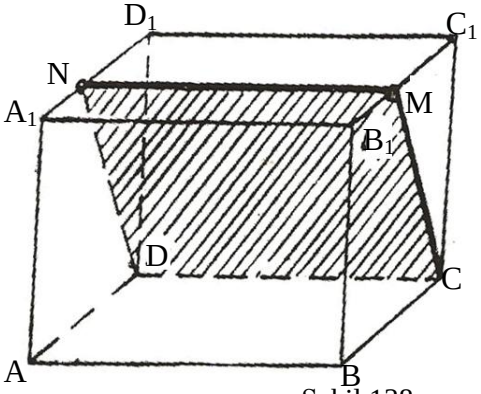
Şəkil 137

Məsələ 39. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ paralelepipedində (şəkil 138) M nöqtəsi (B_1C_1)-in orta nöqtəsidir. DC düz xətti ilə M nöqtəsindən keçən müstəvi kəsiyini qurun.

Həlli.

1. Analiz. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ verilən paralelepiped, (DCMN) müstəvisi isə (DC) düz xəttindən və M nöqtəsindən keçən, yəni tələb edilən müstəvi olsun.

[DC]⊂ [ABCD) və (ABCD) ∥ $(A_1B_1C_1D_1)$ olduğundan (MN) ∥ (CD) olar. Bununla da qurmanın ardıcıllığı tapılmış olur.



Şəkil 138

2. **Qurma.** M nöqtəsindən [NM] ∥ [CD]

çəkib N ilə D-ni birləşdirək. CDNM tələb edilən kəsiyi qururuq.

3. **İsbat.** Düz xətt və bunun xaricindəki bir nöqtədən müstəvi keçirmək mümkün olduğundan və həmin müstəvi verilən paralelepipedin A_1D_1 tilini ancaq bir N nöqtəsində kəsdiyindən tələb edilən müstəvi

$A_1B_1C_1D_1$ üzünü MN düz xətti boyunca, AA_1D_1D üzünü isə DN düz xətti boyunca kəsəcəkdir.

Beləliklə, DCMN dördbucaqlısı tələb edilən kəsik olacaqdır.

4. Araşdırma. Düz xətt və onun üzərində olmayan nöqtədən ancaq bir müstəvi keçirmək mümkün olduğundan məsələnin yeganə həlli vardır.

Məsələ 40. AB tilinin daxili M nöqtəsindən keçən və DBC üzünə paralel olan müstəvi ilə ABCD tetraedrinin kəsiyini qurun.

Göstəriş. M nöqtəsindən VS-yə və BD-yə paralel düz xətlər çəkməklə axtarılan kəsiyi qurmaq olar.

Məsələ 41. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ paralelepipedində AD və B_1C_1 tillərinin daxili M və N nöqtələri verilmişdir. M və N nöqtələrindən keçən və AB tilinə paralel müstəvi ilə paralelepipedin kəsiyini qurun.

Göstəriş. Axtarılan müstəvi M nöqtəsindən keçib AB-yə paralel olduğundan, əvvəlcə oturacaq müstəvisində M nöqtəsindən [AV]-uə paralel düz xətt çəkin, sonra isə üst oturacaq müstəvisində N nöqtəsindən bu düz xəttə paralel düz xətt çəkməklə kəsiyi qura bilərsiniz.

Məsələ 42. ABCD tetraedrinin D təpəsi ABC üzünün medianlarının M kəsişmə nöqtəsi ilə birləşdirilmişdir. $N \in [AB]$ nöqtəsindən keçib BCD üzünə paralel olan kəsiyi qurun.

Göstəriş. [AF] parçasını $\Delta AABC$-nin medianı qəbul edərək ADF müstəvisi üzərində N nöqtəsindən

[PQ] || (DF) (P $\in$[AD], Q $\in$[AF);
ABC müstəvisində Q nöqtəsindən
[KL] || (VS) (K $\in$[AC], L $\in$[AB) qurun.

Məsələ 43. ABCD tetraedrinin müstəvi kəsiyini qurun. Kəsən müstəvi AD düz xəttinə paralel olub ABC üzünün CM medianından keçir.

Göstəriş. CM medianının üç nöqtəsindən AD-yə paralel düz xətt çəkmək kifayətdir.

Məsələ 44. ABCD tetraedri verilmişdir. [AD]-dən keçib (VS)-uə paralel olan müstəvi ib ABC müstəvisinin kəsişmə xəttini qurun.

Göstəriş. Tetraedrin A təpəsindən oturacaq müstəvisində olmaqla (VS)-uə paralel düz xətt çəkmək kifayətdir.

Müstəqil həll etmək üçün məsələlər.

1. Düzgün dördbucaqlı prizmanın oturacağının diaqonalından keçib prizmanın diaqonalına paralel olan müstəvi kəsiyini qurur. Kəsiyin sahəsi S olarsa, bu kəsiyə paralel olub prizmanın oxunu 1:3 nisbətində bölən kəsiyin sahəsini tapın.

2. Düzgün dördbucaqlı prizmanın oturacağının iki qonşu tərəfinin orta nöqtələri və oxunun orta nöqtəsindən keçən müstəvi kəsiyini qurun. Kəsiyin sahəsinin S olduğunu bilərək bu kəsiyə paralel olan və prizmanın oxunu 1:3 nisbətində bölən kəsiyin sahəsini tapın.

3. Dördbucaqlı piramidanın oturacağının diaqonalından keçib yan tilinə paralel olan müstəvi kəsiyini qurun.

4. SABCD dördbucaqlı piramidasının oturacağının AB və AD tərəfləri üzərində verilmiş E və F nöqtələrindən keçib SA tilinə paralel müstəvi kəsiyini qurun.

5. S ABCD düzgün dördbucaqlı piramidasının S A və SC yan tillərinin M və N orta nöqtələrindən və oturacağın, BD diaqonalını |BK| : |KD| = 1:3 nisbətində bölən K nöqtəsindən keçən müstəvi kəsiyini qurun.

6. SABCD dördbucaqlı piramidasının A təpə nöqtəsindən və SC yan tili üzərində verilmiş M nöqtəsindən keçib oturacağın BD diaqonalına paralel müstəvi kəsiyini qurun.

7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ düzbucaqlı paralelepipedinin A_1B_1 və A_1D_1 tillərinin M və N orta nöqtələrindən keçib paralelepipedin A_1C diaqonalına paralel müstəvi kəsiyini qurun.

4.4. Düz xətt və müstəvinin perpendikulyarlığına aid məsələlər

"Düz xətt və müstəvilərin perpendikulyarlığına" aid müstəvi kəsiklərinin qurulması yalnız həmin mövzunun əsas məsələlərinin daha dərindən mənimsənilməsinə deyil, həmçinin prizma və piramidanın bir sıra xassələrini də öyrənməyə imkan verir.

Məsələ 45. SABCD düzgün dördbucaqlı piramidasının [SC] yan tili üzərində verilmiş E nöqtəsindən ABCD oturacaq müstəvisinə perpendikulyar keçirin.

Həlli. SAC müstəvisində $[SO] \perp [AC]$ olduğundan həmin müstəvi üzərində $[EF] \parallel [SO]$ çəkərək $[EF] \cap [AC] = F$ qururuq.

EF tələb edilən düz xətdir.

Məsələ 46. SABC düzgün üçbucaqlı piramidasının ABC oturacağının daxilində yerləşən D nöqtəsindən ABC oturacağına perpendikulyar qaldırın.

Həlli. ABC müstəvisi üzərində O və D nöqtələrindən (EF) çəkərək (EF)‖[AB]=E və (EF) ∩ [VS] = F qururuq. SEF müstəvisi üzərində [DK] ‖ [OS] çəkərək, [DK) ∩ [SF] = K qururuq. (DK) tələb edilən perpendikulyardır.

Məsələ 47. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ düzgün altıbucaqlı prizması verilmişdir. Üst oturacağın A_1 təpə nöqtəsindən DD_1C_1C yan üzünə və həmin oturacağın C_1 təpə nöqtəsindən EE_1F_1F yan üzünə perpendikulyar endirin.

Həlli. Məlumdur ki, $[A_1C_1] \perp [D_1C_1]$-dir. Həmçinin $[A_1C_1] \perp [CC_1]$-dir. Onda $[A_1C_1] \perp [CC_1D_1D]$ olar. Eyni qayda ilə $[S_1E_1] \perp [EE_1FF_1]$ qururuq.

Məsələ 48. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubunun A_1 təpə nöqtəsindən ABCD oturacağının (AB) və $A_1B_1C_1D]$ oturacağının (D_1C_1) tilindən keçən müstəviyə perpendikulyar endirin.

Həlli. $[A_1D_1] \perp [AA_1]$; ΔAA_1D bərabəryanlıdır. Onda $[A_1O] \perp [AD_1]$ olur. Məlumdur ki, $[AB] \perp [AA_1DD_1]$-dir. Onda $[AB] \perp [A_1O]$ olduğunu alırıq.

Məsələ 49. Düzbucaqlı prizmanın oturacaq müstəvisi üzərində verilmiş nöqtədən və

a) hər biri bir yan tildə olan iki nöqtədən;

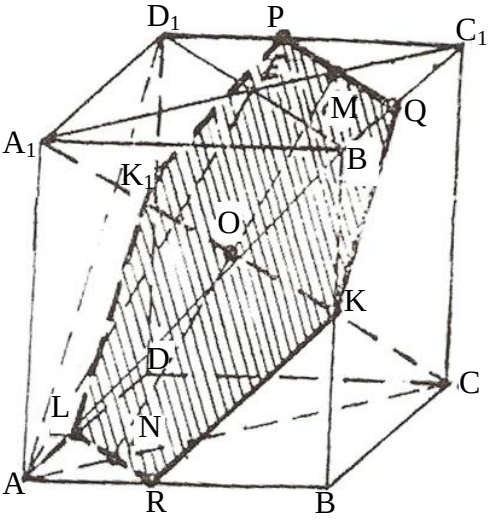
b) hər biri bir yan üzdə olan iki nöqtədən keçən müstəvi kəsiyini qurun.

Həlli. a) Tillər üzərindəki M və N nöqtələrinin oturacaq müstəvisi üzərindəki proyeksiyalarını taparaq kəsən müstəvinin oturacaq müstəvisi üzərindəki K izini qururuq. Sonra (KM) çəkib.

$Q=[KM)\cap[AD]$; $G=[KM)\cap[DC]$ qururuq. $[QN)\cap[D_1A_1] = E$ və $[GP)\cap[D_1C_1]=F$ qurub (EF) çəkirik, $(EF)\cap[A,B,]=L$ və (EF) P $[B_1C_1]=H$ taparaq verilmiş prizmanın QGPHLN kəsiyini qururuq.

Məsələnin b) bəndində, a) bəndinə analoji olaraq həll edilir.

Məsələ 50. Kubun diaqonalına perpendikulyar olub (şəkil 139) onun ortasından keçən müstəvi kəsiyini qurun.

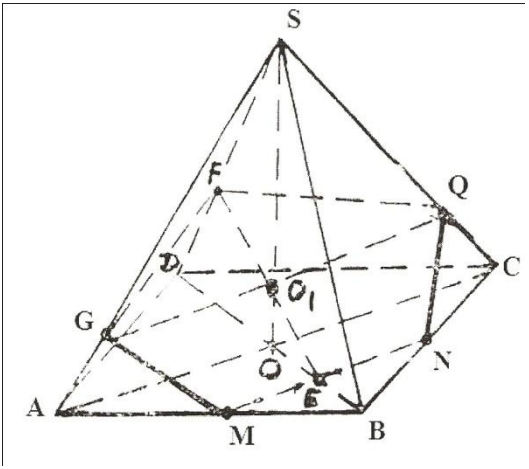


Həlli. Kubun bir təpəsindən çıxan üc tilinin uclarından keçən müstəvi həmin təpədən çıxan diaqonalına peprendikulyar olması aşkardır. Yəni $[A_1C] \perp (AB_1D_1)$. Onda (AC)-nin O orta nöqtəsindən (AB_1D_1)-ə paralel müstəvi qursaq, həmin müstəvi məsələdə tələb edilən müstəvi olacaqdır.

Doğrudan da, (AA_1S_1C) müstəvisi üzərində olan həmin O nöqtəsindən $(OM)\|(AE)$ çəksək, onda $(OM)\cap(A_1C_1)=M$ qurarıq.

Bu halda M nöqtəsi kəsən müstəvi ilə $A_1B_1C_1D_1$ üzünün kəsişmə xətti üzərindəki nöqtə olacaqdır. Kəsən müstəvi (AB_1D_1)-ə paralel olduğundan $(PQ) \parallel [B_1D_1]$ çəkirik. Sonra (DD_1C_1C) üzündə P nöqtəsindən $[PH] \parallel [AB_1$, (AA_1D_1D) üzündə H nöqtəsindən $[PH] \parallel [AD]$ və i.a. çəkərək əməliyyatı qapalı çoxbucaqlı alınana qədər davam etdiririk. Nəticədə kəsikdə QPHLRK altıbucaqlısı alınmış olar.

Məsələ 51. Düzgün dördbucaqlı piramidanın (şəkil 140) oturacağı tərəfinin M orta nöqtəsindən keçib onun diaqonalına paralel və qarşıdakı yan tilə perpendikulyar olan müstəvi kəsiyini qurun.



Şəkil 140

Həlli. ABCD müstəvisində [MN]‖[AC] qurun N və E=[MN]∩[BD] nöqtəsini tapırıq. Sonra SBD müstəvisi üzərində E nöqtəsindən [EF]⊥[SD] çəkərək F=[EF]∩[SD] və O=[EF]∩[SO] qururuq. Daha sonra SAC müstəvisi üzərində O_1 nöqtəsindən (QG) ‖ [AC] çəkib (QG) ‖ [SC] = Q və (GQ) ∩ [SA] = G qursaq, piramidanın MNQFG kəsiyini qurarıq. Bu kəsiyin oturacağın AC diaqonalına paralel olması aşkardır. MNQFG kəsiyinin piramidanın SD tilinə perpendikulyar olduğunu isbat edək. Doğrudan da, [SO] 1 (ABCD) olduğuna görə [SO] ⊥ [BD] və [SO] ⊥ [AC] alırıq. [AC] ⊥ [BD] və [AC] ‖ [MN] olduğundan [MN] ⊥ [BD] alırıq.

Qurmaya görə [EF] ⊥[SD]-dir. Düz xəttin müstəviyə perpendikulyar olması teoreminə görə [SD] ⊥(MNQFG) olur.

Qeyd edək ki, F nöqtəsini qurduqdan sonra kəsiyin Q və G təpələrini başqa üsulla da qurmaq olardı. Belə ki, SDC müstəvisi üzərində [FQ] ⊥ [SD] və SDA müstəvisi üzərində [GF] ⊥[SD] çəkib Q və G nöqtələrini qurmaq olar.

Müstəqil həll etmək üçün məsələlər:

1. Düzgün üçbucaqlı S ABC piramidasının oturacağının AB və AC tərəflərinin orta nöqtələrindən keçib onun SA tilinə perpendikulyar müstəvi kəsiyini qurun. Kəsiyin növünü müəyyən edin.

2. Düzgün dördbucaqlı SABCD piramidasının oturacağının AB və VS tərəflərinin orta nöqtələrindən keçib yan tilə perpendikulyar olan müstəvi kəsiyini qurun.

3. Üçbucaqlı piramidanın ABC oturacağının AC və VS yan tərəflərinin, həmçinin SAB yan üzünün SA və SB yan tillərinin uzunluqları bərabərdir. Piramidanın AB tilindən keçib SC yan tilinə perpendikulyar müstəvi kəsiyini qurun.

4. Düzgün dördbucaqlı SABCD piramidasının oturacağının V təpə nöqtəsindən keçib SD yan tilinə perpendikulyar olan müstəvi kəsiyini qurun.

5. Düzgün dördbucaqlı SABCD piramidasının oturacağının BD diaqonalından keçib onun yan tilinə perpendikulyar olan müstəvi kəsiyini qurun.

6. $ABCA_1B_1C_1$ mail prizmasının oturacaqları $[AB] = [AC]$ və $[A_1B_1] = [A_1C_1]$ olan üçbucaqdır. Prizmanın AA_1 yan tili oturacağın tərəfləri ilə bərabər bucaqlar əmələ gətirir. $D \in [AA_1]$ nöqtəsindən prizmanın yan tillərinə perpendikulyar müstəvi kəsiyini (perpendikulyar kəsiyi) qurun.

4.5. Cismin müstəvi kəsiyinin qurulmasına aid çalışmalar

Bu paraqrafda olan məsələlər həllinə verilən göstəriş, məsələnin bütün mümkün olan hallarına aid deyil, ancaq bir həll üçündür. Oxucunun təşəbbüsünün qarşısını almamaq üçün o, qalan halları özü axtarmalıdır.

Bəzi həllərə verilən göstərişdə şəkil çəkilməmişdir. Bu iş oxucunun üzərinə buraxılmışdır.

Söylədiyimiz kimi hər bir qurma məsələsi dörd mərhələdə aparılmalıdır. Vəsaitin həcmi imkan vermədiyindən biz burada ancaq qurma mərhələsi ilə kifayətlənmişik. Zənn edirik ki, verdiyimiz göstərişə əsasən bütün mərhələləri tapmaq olar.

Oxucu uyğun məsələyə aid şəkil qurarkən o hərflərin düzülüşündə saat əqrəbi hərəkətinin əks istiqamətini nəzərə almalı və şəklin sadəliyi və doğruluğu haqqında yuxarıda söylədiyimiz tövsiyələri də nəzərə almalıdır.

Bəzi məsələlərdə verilən nöqtələrin yerini dəyişməklə bir məsələ bir neçə məsələyə ayrılmışdır. Belə məsələlərin didaktik əhəmiyyəti olduğunu nəzərə alaraq başqa məsəblərin həllində də oxucuların bu üsuldan istidafə etməsini faydalı hesab edirik.

İrəlidə göstərdiyimiz kimi bəzi məsəblərdə qurma tələbi ilə yanaşı hesablama və isbat tələbləri də vardır. Hesablama tələbləri olan məsələləri əvvəlcə ümumi şəkildə həll edib sonra onun verilən elementlərini yerinə yazmaqla nəticəni almaq daha münasibdir.

İndi də müstəqil həll etmək üçün çalışma nümunələrini göstərək.

1. S ABC piramidası müstəvi ilə kəsilmişdir. Bu müstəvi piramidanın SC tilini M nöqtəsində, ABC oturacağını K və N nöqtələrdən $K \in [AB]$, $N \in [AC]$ kəsir. Piramidanın bu nöqtələrdən keçən müstəvi kəsiyini qurun.

2. SABCD piramidasını kəsən müstəvinin oturacaqdakı izi ℓ-dir. (ℓ-oturacağın AD və AB tərəflərini uyğun olaraq Q və N nöqtələrində kəsir). Bu müstəvi piramidanın SC tili üzərində verilmiş M nöqtəsindən keçir. Kəsiyi qurun.

3. $ABCA_1B_1C_1$ kəsik piramidasının alt oturacağının AB və AC tərəflərinin M və N orta nöqtələrindən keçməklə AA_1 tilinə paralel olan müstəvi kəsiyini qurun.

4. SABC düzgün üçbucaqlı piramidasında SB və SC yan tillərinin M və N orta nöqtələri verilmişdir. Bu nöqtələrdən və oturacağın O mərkəzindən keçən müstəvi kəsiyini qurun.

5. $ABCA_1B_1C_1$ üçbucaqlı kəsik piramidasında oturacağın AB və AC tərəflərinin orta nöqtələrindən keçməklə BB_1 yan tilinə paralel olan müstəvi kəsiyini qurun.

6. $ABCA_1B_1C_1$ prizmasını kəsən müstəvinin oturacağındakı izi ℓ-dir. (ℓ-oturacağın tərəflərini kəsmir və onlara paralel deyildir). Prizmanın BB_1C_1C üzündə müstəvinin keçdiyi K nöqtəsi verilmişdir. ℓ düz xəttindən və K nöqtəsindən keçən müstəvi kəsiyini qurun.

7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ prizmasını kəsən müstəvinin ABCD oturacağındakı izi ℓ-dir. (ℓ- oturacağın tərəflərini kəsmir və onlara paralel deyildir), Bu müstəvi $|AM| = \frac{1}{3}|AA_1|$ olmaqla M nöqtəsindən keçir. Prizmanın müstəvi kəsiyini qurun.

8. $ABCA_1B_1C_1$ prizmasını kəsən müstəvinin ABC oturacağındakı izi MN düz xəttidir. (M $\in$ [AB], N $\in$ [VS]). Bu müstəvi prizmanın CC_1 tilini $|C_1K| = \frac{1}{3}|CC_1|$ olmaqla K nöqtəsində kəsir. Prizmanın müstəvi kəsiyini qurun.

9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ dördbucaqlı prizması üst oturacağın A_1B_1 tilində verilmiş M nöqtəsindən keçir və onun alt oturacaq müstəvisi üzərindəki izi ℓ-dir (ℓ - oturacağın tərəflərini kəsmir və onlara paralel deyildir). Prizmanın müstəvi kəsiyin qurun.

10. SABC piramidasım kəsən müstəvinin oturacağındakı izi ℓ-dir (ℓ-oturacağın tərəflərini kəsmir və onlara paralel deyildir. Kəsən müstəvi ℓ düz xəttindən və piramidanın ASB üzündə verilmiş M nöqtəsindən keçir. Piramidanın müstəvi kəsiyini qurun.

11. $ABCA_1B_1C_1$ prizmasını kəsən müstəvi onun üst oturacağının daxili M nöqtəsindən keçir. Həmin müstəvinin alt oturacaq müstəvisindəki izi ℓ-dir (ℓ-oturacağın tərəflərini kəsmir və onlara paralel deyildir). Prizmanın müstəvi kəsiyini qurun.

12. DABC piramidasını kəsən müstəvinin ABC oturacağındakı izi ℓ-dir (ℓ -oturacağın tərəflərini kəsmir və onlara paralel deyildir). Kəsən müstəvi ℓ düz xəttindən və piramidanm daxilində verilmiş K nöqtəsindən keçir. Piramidanın müstəvi kəsiyini qurun.

13. $ABCA_1B_1C_1$ üçbucaqlı prizması daxilində K nöqtəsi və kəsən müstəvinin alt oturacaq müstəvisindəki ℓ izi verilmişdir. Prizmanın ℓ düz xəttindən və K nöqtəsindən keçon müstovi kəsiyini qurun.

14. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ prizması daxilində E nöqtəsi və kəsən müstəvinin alt oturacaqdakı ℓ izi verilmişdir. Prizmanın ℓ düz xəttindən E nöqtəsindən keçon müstovi kosiyini qurun. ℓ düz xəttinin və E nöqtəsinin müxtəlif vəziyyətləri üçün kəsiyi qurun.

15. Dördbucaqlı piramidanın üç müxtəlif üzündə verilmiş nöqtələrdən keçon müstəvi kəsiyini qurun.

16. Dördbucaqlı piramidanın üç müxtəlif yan tilləri üzərində verilmiş nöqtələrdən keçən müstəvi kəsiyini qurun.

17. Dördbucaqlı piramidada oturacağın bir tərəfindən və bu tərəfin qarşısında duran üzdə verilmiş nöqtədən keçən müstəvi kəsiyini qurun.

18. MABCD düzgün dördbucaqlı piramidasında

$$A_1 \in [MA] \; C_1 \in [MC]$$

$$|MA_1| = |A_1A| \text{ və } |MC_1| = \frac{3}{4}|MC|$$

verilir. (A_1BC_1) kəsiyini qurun.

19. $ABCA_1B_1C_1$ prizmasında

$$|B_1M| = \frac{1}{2}|BB_1|,\ |A_1N| = \frac{1}{3}|A_1C_1| \text{ və}$$

$$|A_1K| = \frac{1}{2}|A_1B_1| \ \left(M \in [BB_1], N \in [CC_1], K \in [A_1B_1]\right)$$

verilmişdir. (MNK) kəsiyini qurun.

20. Düzgün dördbucaqlı SABCD piramidasında

$$|SK| = \frac{2}{3}|SA|,\ |SL| = \frac{1}{2}|SB|$$

$$|SM| = \frac{1}{3}|SC| \ \left(K \in [SA], L \in [SB], M \in [SC]\right)$$

olduğunu bilərək (LKM) kasiyini qurun.

21. Düzgün dördbucaqlı prizmanın oturacağının bir tərəfindən əa

1. prizmanın yan üzündə;
2. üst oturacaq üzündə;
3. üst oturacağın tərəfı üzərində;
4. prizmanın daxilində verilmiş M nöqtəsindən keçən müstəvi kəsiyini qurun.

22. SABCD düzgün piramidasının oturacağının VS tarafından va

1. piramidanın SD yan tili üzərində;
2. (ASD) yan üzündə;
3. SO hündürlüyü üzərində verilmiş M nöqtəsindən keçən müstəvi kəsiyini qurun.

23. Düzgün dördbucaqlı piramidanın oturacağının diaqonalından yan üzün apofemina paralel müstəvi keçirin, kəsiyi müəyyən edin.

24. SABCD piramidasının AD tili üzərində E nöqtəsi verilmişdir. Oturacağın CA diaqonalından keçib SE düz xəttinə paralel olan müstəvi kəsiyini qurun.

25. ABCDA₁B₁C₁D₁ prizmasının (AA_1), (BB_1) və (CC_1) tilləri üzərində

$$|AL| = \frac{1}{3}|AA_1|,\ |BN| = \frac{1}{2}|BB_1| \text{ və } |CM| = \frac{2}{3}|CC_1|$$

olmaqla L, N və M nöqtələri verilmişdir. Prizmanın bu nöqtələrdən keçən müstəvi kəsiyini qurun.

26. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ prizmasının AA_1, DD_1 tilləri üzərində və BB_1C_1C yan üzündə aşağıdakı şərtləri ödəyən M, N, L nöqtələri verilmişdir:

$$|AM| = \frac{1}{4}|AA|,\ |DN| = \frac{2}{3}|DD_1|$$

L - yerləşdiyi yan üzün diaqonallarının kəsişmə nöqtəsidir. Prizmanın M, N, L nöqtələrindən keçən müstəvi kəsiyini qurun.

27. Düzgün piramidanı kəsən müstəvinin oturacağındakı / izi və piramidanın hündürlüyü üzərində H nöqtəsi verilmişdir / düz xəttindən və H nöqtəsindən keçən müstəvi kəsiyini qurun.

28. SABC piramidasının SA və SC yan tillari üzarinda uyğun olaraq M və N nöqtələri, oturacaq müstəvisi üzarinda isa K nöqtəsi verilmişdir. Piramidanın (MNK) kasiyini qurun.

29. $ABCA_1B_1C_1$ prizmasında C_1A_1, C_1B_1 və CA tillari üzərində uyğun olaraq aşağıdakı şərtləri ödəyən D, E, M nöqtələri verilmişdir:

$$|C_1D| = \frac{1}{2}|C_1A_1|,\ |C_1E| = \frac{2}{3}|C_1B_1|,\ |CM| = \frac{3}{4}|CA|$$

Prizmanın verilən nöqtələrdən keçən müstəvi kəsiyini qurun.

30. Kubun $K \in [BB_1]$ və $|BK| = \frac{1}{4}|BB_1|$;

$L \in [DD_1]$ və $|DL| = \frac{1}{4}|DD_1|$;

$M \in [AB]$ və $|AM| = \frac{1}{3}|AB|$

nöqtələrindən keçən müstəvi kəsiyini qurun.

31. Kubun $K \in [DD_1]$ və $|DK| = \frac{1}{8}|DD_1|$;

$L \in [CC_1]$ və $|CL| = \frac{3}{4}|CC_1|$

$M \in [A_1B_1]$ və $|A_1M| = |MB_1|$

nöqtələrindən keçan müstəvi kəsiyini qurun.

32. Kubun $K \in [CD]$ va $|DK| = |KC|$; $L \in [AD]$ va $|AL| = |LD|$ və

$M \in [BB_1]$ və $|BM| = |MB_1|$ nöqtələrindən keçən müstəvi kəsiyini qurun.

33. Kubun $K \in [AD]$ və $|AK| = \frac{3}{4}|AD|$

$L \in [DD_1]$ və $|DL| = \frac{1}{2}|DD_1|$;

$M \in [CC_1]$ və $|CM| = \frac{5}{8}|CC_1|$

nöqtələrindən keçən müstəvi kasiyini qurun.

34. Düzgün üçbucaqlı piramidada oturacağın tərəfmdən qarşıdakı yan tilə perpendikulyar müstəvi keçirilmişdir. Piramidanın hündürlüyü H və oturacağın tərəfı a olarsa, alınan kəsiyin sahəsini tapm.

35. Düzgün dördbucaqlı piramidanın oturacağının təpə nöqtəsindən yan tilə perpendikulyar müstəvi keçirilmişdir. Piramidanın yan tili hündürlüklə 30°-li

bucaq əmələ gətirib və oturacağın tərəfı a olarsa alınan kəsiyin sahəsini tapın.

36. Verilmiş düz xətdən keçməklə verilmiş paralelepipedi kəsən elə müstəvi keçirin ki, həmin müstəvi paralelepipedi həcmləri bərabər olan iki fiqura bölsün. Düz xətt paralelepipedin müxtəlif vəziyyətlərini nəzərdən keçirin.

37. Paralelepipedi üzlərindən birinə paralel elə müstəvi ilə kəsin ki, paralelepipedin kəsiyi onun həcmini m: n nisbətində bölün.

38. Üçbucaqlı piramidanı müstəvi ilə elə kəsin ki, piramidanın müstəvi kəsiyi onun həcmini m:n nisbətində iki hissəyə ayrılsın.

39. Verilmiş kubu müstəvi ilə elə kəsin ki, kəsikdə düzgün altıbucaqlı alınsın.

düzgün üçbucaq alınsın.

40. Tili a olan kubu müstəvi ilə kəsin ki, kəsikdə sahəsi $\frac{9\sqrt{3}}{32}a^2$ olan düzgün üçbucaq alınsın.

41. R radiuslu küräni müstəvi ilə eb kəsin ki, kəsikdə verilmiş r radiuslu dairə alınsın.

42. Konusun oturacağına paralel elə müstəvi ilə kəsin ki, kəsikdə verilmiş dairəyə bərabər dairə alınsın.

43. Silindri onun hündürlüyünə paralel elə müstəvi ilə kəsin ki, kəsikdə sahəsi verilmiş kvadratm sahəsi ilə bir böyüklükdə olan fıqur alınsın.

44. Verilmiş konusu oturacağına paralel elə müstəvi ilə kəsin ki, kəsikdə alınan dairə onun həcmini 8:19 nisbətində bölsün.

45. Silindri oturacağına paralel elə müstəvi ilə kəsin ki, kəsikdə alınan dairənin sahəsi silindrin hissələrinin yan səthləri arasında orta mütənasib olsun.

Çalışmalara aid həllər və göstərişlər

1. **Göstəriş.** İki hala baxın. a) AC və AB tərəflərini uyğun olaraq N və K nöqtələrində kəsən NK izi CB tərəfinə paralel deyil. Bu hal üçün NK ilə [CB]-inin kəsişmə nöqtəsini M ilə birləşdirin və bunun piramidanın SB tilini kəsdiyi nöqtəni E ilə işarə edin. MNKE tələb edilən kəsik olacaq.

b) NK izi CB-yə paraleldir. SBC üzündə M nöqtəsindən BC-yə paralel ME xəttini (E $\in$[SB] çəkin. MNKE tələb edilən kəsik olacaqdır.

2. **Göstəriş.** [CD)$\cap\ \ell$ = K və [CB)$\cap\ \ell$ = E,

[EM)$\cap$ [SB] = F, [KM)$\cap$ [SD] = R

nöqtələrini qeyd edin. MFNCR tələb edilən kəsik olacaq.

3. **Göstəriş.** AA_1B_1B üzündə AB tilinin M orta nöqtəsindən AA_1 tilinə paralel MK şüasını çəkin. Sonra AA_1C_1C üzündə [NL] || $[A_1A]$ çəkin. MNLK tələb edilən müstəvi kəsiyi olacaqdır.

4. **Göstəriş.** Oturacağın O mərkəzindən (ED) || [MN] çəkin. (E $\in$|AB|; D $\in$|AC|) MDEN tələb edilən kəsik olacaqdır.

5. Göstəriş. Kəsik piramidanın AA_1B_1B üzündə AB-nin M orta nöqtəsindən V_1V yan tilinə paralel MN düz xəttini çəkin. Sonra N nöqtəsi ilə AC tərəfinin K orta nöqtəsini birləşdirin. MNK tələb edilən kəsik olacaqdır.

6. Göstəriş. [AV)$\cap\ \ell$ = X, [SV)$\cap\ \ell$ = u, [YK)$\cap$ $[BB_1]$ = E

[UK)$\cap$[CC_1] =L və [XE)$\cap$ $[AA_1]$ = F nöqtələrini qurun ELF tələb edilən kəsik olacaqdır.

7. **Göstəriş.** [DA)D / = x, [VA)$\cap\ \ell$ = u və [CD)$\cap\ \ell$ = z nöqtələrini qurun. Sonra [XM)$\cap$ $[DD_1]$ = R, [YM)$\cap$ $[BB_1]$ = Q və [ZR)$\cap$ $[CC_1]$ = S qurun. MQSR tələb edilən kəsik olacaqdır.

Qeyd: S nöqtəsini uyğunluq metodu ilə də qurmaq olardı.

8. Göstəriş. a) $(MN) \neq [AS]$, $[AS] \cap (MN) = X$

$[XK] \cap [AA_1] = E$-ni qurun. MEKN tələb edilən kəsik olacaqdır.

b) $(MN) \| [AC]$ olarsa, onda K nöqtəsindən $(MN) \| [KE]$ çəkib tələb edilən kəsiyi qurun.

9. **Göstəriş.** $[DC] \cap \ell = X$, $[SV) \cap \ell =$ y-i qurun. Aşkardır ki, üst oturacaqda kəsən müstəvinin izi verilmiş M nöqtəsindən keçib ℓ düz xəttinə paralel çəkilmiş (MN) düz xətti $(N \in [C_1D_1])$ olacaqdır.

$$[NX] \cap [CC_1] = E, \quad [YE] \cap [BB_1] = L$$

qurun. MNEL tələb edilən kəsik olacaqdır. Kəsiyi başqa qayda ilə də qurmaq olardı.

10. **Göstəriş.** $[AB) \cap \ell = E$ və $[SV) \cap \ell = F$ qurun. Sonra

$[EM) \cap [SB] = K$, $[EM) \cap [SA] = L$ və $[FK) \cap [SC] = N$

qurun. KLN tələb edilən kəsik olacaqdır.

11. **Göstəriş.** $[CB) \cap \ell = K$ qurun və M nöqtəsindən $(EN) \| \ell$ çəkin $(E \in [A_1B_1], N \in [B_1C_1])$. N nöqtəsi ilə K-nı birləşdirin $F = [NK] \cap [BB,]$. FNE tələb edilən kəsikdir.

12. **Həlli.** K nöqtəsinin K_1 mərkəzi proyeksiyasını quraq. DK düz xəttini üzərində saxlayan DK_1B müstəvisini quraq. Onda $X=(DK_1B) \cap \ell P=(DK_1B) \cap [AC]$ olar. DK_1B müstəvisində $[XK]$ çəkib

$[XK) \cap (ADC) = M$; $[XK) \cap [DB] = N$

nöqtələrini qururuq. Sonra $Y=[AS) \cap \ell$ qurub $[YM)$ çəksək $E=[YM) \cap [DC]$-nə $F=[YM) \cap [DA]$ qurmaq olar. Beləliklə, NEF tələb edilən kəsik olacaqdır.

13. **Göstəriş.** CC_1 tilinə nəzərən K nöqtəsinin proyeksiyası olan K_1 nöqtəsini və KK_1C müstəvinin ℓ

düz xətti ilə X kəsişmə nöqtəsini qurun. Sonra [XK] çəkib bu müstəvi üzərində [CC1] ∩ [XK) = M və De (AA1V) nöqtələrini, bunlardan sonra Y = [AB] ∩ ℓ, daha sonra isə [YD] çəkib N və P nöqtələrini qurun. (P∈ [AA1], N∈ [BB1]). MNP tələb edilən kəsik olacaqdır.

14. Göstəriş. Prizmanın daxilində istənilən E nöqtəsi qeyd edin. Sonra onun yan tilini proyeksiyalama istiqaməti, oturacaq müstəvisini isə proyeksiya müstəvisi qəbul edərək E nöqtəsinin E_1 paralel proyeksiyasını qurun. Oturacaq müstəvisində E_1 nöqtəsini prizmanın elə təpə nöqtəsi ilə birləşdirin ki, bu düz xətt kəsən müstəvinin izini kəssin. Bu halda həmin nöqtə ilə E nöqtəsini birləşdirən düz xətt prizmanın tilini kəsiyə aid olan nöqtədə kəsəcəkdir. Əməliyyatı bu qayda ilə bir 176

daha təkrar etməklə kəsiyi qurmaq olar. E nöqtəsinin vəziyyəti dəyişdikdə alınan kəsiyin növü də dəyişəcəkdir.

15. Göstəriş. SABCD piramidasında ASD, ASB və CSD üzlərində uyğun olaraq M, N, K nöqtələrini qeyd edin. S-i proyeksiya mərkəzi qəbul edib DA, AB və DC tilləri üzərində M-ə N-ə və K-yə uyğun olaraq M_1, N_1 və K_1 nöqtələrini qurun. M_1N_1, AK_1 parçalarının O kəsişmə nöqtəsini qeyd edin və SO xəttinin MN parçasını kəsdiyi O_1 nöqtəsindən keçməklə KO_1 şüasını çəkin və bunun SA tilini kəsdiyi nöqtəni E ilə işarə edin. M, E, N, K nöqtələrindən keçdiyi müstəvidə alınan kəsik tələb edilən kəsik olacaq.

16. Göstəriş. SABCD piramidasında M e [SD]; N ∈ [SB] və K ∈[SA], qeyd edin. AC diaqonalını və SO hündürlüyünü çəkin. [MN] və E = [MN] ∩ [SO] qurun. [KE) ∩ [SC] - F-i tapın. KMFN tələb edilən kəsik olacaqdır.

17. Göstəriş. SABCD piramidasında AB tilindən və bunun qarşısında duran DSC üzündə verilmiş M

nöqtəsindən müstəvi keçirmək üçün iki hala baxın. a) [AB] || [DC]. Onda bunların kəsişmə nöqtəsi olan E-ni M nöqtəsi ilə birləşdirin və bu düz xəttin SC, SD tillərinin kəsdiyi nöqtələri L və K işarə edin. Bu halda ABLK tələb edilən kəsik olacaqdır.

b) Oturacağın AB tili DC tilinə paralel olduqda M nöqtəsindən DC-yə paralel düz xətt çəkib SD və SC tillərini kəsən K və L nöqtələrini qeyd edin. ABLK tələb edibn müstəvi kəsiyi olacaqdır.

18. Göstəriş. A_1B, BC_1 parçalarını qurun və A_1 ilə C_1-i birləşdirib piramidanın MO hündürlüyünü çəkin. K = [MO] P [A_1C_1]. Bütün bunlardan sonra [BK) çəkib E nöqtəsini adın (E ∈[MD]). A_1BC_1E tələb edilən kəsik olacaqdır.

19. Göstəriş. [MK) və [AA_1) -in S kəsişmə nöqtəsini qurun və [SN] ilə [CC_1]-in kəsişmə nöqtəsi olan X-i qeyd edin. MKNX tələb edilən müstəvi kəsiyi olacaqdır. Kəsiyi başqa cür də qurmaq olar.

Məsələdə verilənlərin yerini dəyişməklə məsələyə oxşar məsələ düzəldib onu da həll edin.

20. Göstəriş. [KL], [LM] və [KM]-i qurun. SO hündürlüyünün [KM] ilə E kəsişmə nöqtəsini müəyyən edib [LE] çəkin. [LE] ilə SD-nin X kəsişmə nöqtəsini qeyd edin. KLMX tələb edilən kəsik olacaqdır.

21. Göstəriş. M nöqtəsinin M, proyeksiyasından və V nöqtəsindən keçən BK düz xəttini çəkərək BKK_1 köməkçi müstəvi qurun. Həmin müstəvi üzərində BM çəkib

E = [BM] ∩ [KK_1] qurun. E nöqtəsindən (PQ) || [AB] çəkib prizmanın kəsiyini qurun.

22. Göstəriş. BDC müstəvisində (BM] çəkib E = [BM] ∩ [SD], sonra isə ACS müstəvisində (CM] çəkib F = [SM) P [AS] qursanız axtarılan kəsiyi alarsınız.

23. **Göstəriş.** Tutaq ki, müəyyən müstəvi piramidanın oturacağının AC diaqonalından keçəcək və ASD üzündəki SE apofeminə paralel olacaqdır. E ilə B-ni birləşdirin.

M= [AS] ∩ [EB], [MN] || [ES]

çəkin. N = [MN] ∩ [SB] olar. ANC tələb edilən müstəvi kəsiyi olacaqdır.

24. Göstəriş. 23 nömrəli məsələnin göstərişindən istifadə edin.

25. Göstəriş. Əvvəlcə [MN) ∩ [DA) = x qurun. Sonra [XL) ilə DD, tilinin E kəsişmə nöqtəsini qurun. LNME tələb edilən kəsik olacaqdır.

26. Göstəriş. Əvvəlcə [NM] ∩ [CB)=X-i qurun. Sonra XL şuasını çəkib B_2=[XL) ∩[BB_1] və C_2 = [XL) ∩ [$CC_ı$] qurun. NMB_2C_2 tələb edilən kəsik olacaqdır.

27. [DB] ∩ ℓ =X nöqtəsini qurub SDB müstəvisində [XH] çəkərək M=[XH)∩ [SB] və N = [XH) ∩ [SD] nöqtələrini qurun. Sonra [DC] ∩ ℓ = Y qurub SDC müstəvisində [YN] çəksəniz P = [YN) ∩ [SC] nöqtəsini qurarsınız. Piramidanın düzgün olduğunu nəzərə alıb SAB müstəvisində M nöqtəsindən [MQ]||(NP) çəkərək Q=[MQ)∩[SA] qura bilərsiniz. MPNQ tələb edilən kəsik olacaqdır.

28. Göstəriş. Əvvəlcə [MN] ∩ [AC) = X nöqtəsini qurub [XK) çəkin. Onda kəsən müstəvinin oturacaq üzərindəki izini qurarsınız. Sonra [AB) ∩ [XK) =Y qurub [YM] çəksəniz E = [YM] ∩ [SB] qurarsınız. MNE tələb edilən kəsikdir.

29. 1) [ML); 2) K = [DE) ∩ [A_1B_1]; 3) [DM); 4) E = [DM] ∩ [AA_1] bu halda F və K e (AA_1VV_1); 5) M = [FK); 6) N = [FK] ∩ [AB); 7) L = [FK] ∩ [BB_1]. Onda DMNLE tələb edilən kəsik olur.

30. KM şuasını çəkib N = [KM] ∩ [A_1A] quraq NL çəksək P=[NL]∩[AD] qurarıq. E = [MP] ∩ [AC] və [OF] || [CC,] çəkib [OF) ∩ [KL] = F nöqtələrini quraraq, [EF) çəksək [EF) ∩ [CC,]=Q taparıq. Q - kəsiyə aid olan nöqtədir. QLPMK tələb edilən kəsikdir.

31. Həlli. KL düz xəttini çəkib E = [KL] ∩ [D,C,] quraq. Sonra isə Q = [EM) ∩ [V_1S_1], F = [EM) ∩ [D_1A_1] quraraq, FK düz xəttini çəksək P = [FK]∩[AA_1] qura bilərik. Beləliklə, kəsikdə KLQMP çoxbucaqlısını alarıq.

32. Həlli. KL düz xəttini çəkib F=[VS]∩(KL) və E=[BA)∩[KL] nöqtələrini quraq. Sonra P=[EM]∩[AA_1] və Q=[FM]∩[CC1] tapıb MPLKQ kəsiyini qurarıq.

33. Həlli. KL və ML-i qurduqdan sonra P = [ML) ∩ [CD) quraq. PK şuasını çəkib Q = [PK) **O** [AB] quraq. (AA_1B_1B) || (DD_1C_1C) olduğundan kəsən müstəvi AA_1B_1B üzünü Q nöqtəsindən keçən [QH] || [ML] şüa boyunca kəsəcəkdir. Onda H=[QH)∩[BB_1] alarıq. H nöqtəsi ib M-i birləşdirsək MLKQH kəsiyini qurmuş olarıq. Hallin düzgün olması üçün [KL] || [MH] olmalıdır.

İSTİFADƏ EDİLMİŞ ƏDƏBİYYAT

- Adigözəlov A.S., Acalova N.A., Xudaverdiyeva G.N. "Həndəsədən qurma məsələlərinin həlli metodları" (Metodik göstəriş). Bakı, N.Tusi adına ADPU, 1993. -69 s.
- Adigözəlov A.S. "Orta məktəbdə həndəsənin rəsmxətlə əlaqəli öyrənilməsi" (Dərs vəsaiti). Bakı, V.İ.Lenin adına APİ, 1989. - 109 s.
- Əsgərov K.S., Adigözəlov A.S., Məmmədov A.A. "Həndəsədən məsələ həlli praktikumu" (Dərs vəsaiti). Bakı, V.İ.Lenin adına APİ, 1986. - 117 s.
- Sadıqov S., Adigözəlov A.S. "Stereometriya kursunda çoxüzlülərin müstəvi kəsiklərinin qurulması" (Dərs vəsaiti). Bakı, V.İ.Lenin adına APİ, 1988. -125 s.
- Pedaqoji Universitet və institutlarda bakalavr hazırlığı üçün proqram: Elementar riyaziyyat. Bakı, ADPU, 2005. - 15 s.
- Əsgərov K.S., Axundov S.S. "Elementar həndəsə". Bakı, APİ, 1974. – 211 s.
- İbrahimov Ə.Y. "Orta məktəbin stereometriya kursunda qurma məsələləri". Bakı, Maarif, 1965.- 139 s.
- Poqorelov A.V. Həndəsə: orta məktəbin 7-11 sinifləri üçün dərslik. Bakı, Maarif, 1991.-390 s.
- Klopskiy V.M. və b. Həndəsə: orta məktəbin 9-11 sinifləri üçün dərslik / Z.A.Skopetsin redaktəsi ilə. Bakı, Maarif, 1991.

- Mərdanov M.S. və b. Həndəsə: orta məktəbin 7-11 sinifləri üçün dərslik / prof. S.Mirzəyevin redaktorluğu ilə. Bakı, Çaşıoğlu, 2008.
- Çetveruxin N.F. "Stereometriçeskie zadaçi na proek-üionnom çerteje", ç. I i II . İzd-vo APN RSFSR, 1955.
- Çetveruxin N.F. "Çerteji prostranstvennıx fiqur v kurse qeometrii". M., Uçpedqiz, 1958. - 194 s.
- Vasilevskiy A.B. "Metodı reşeniə qeometriçeskix zadaç". Minsk, Vısşaə şkola, 1969. - 232 s.
- Paşayev X., Nəcəfov M. "Analitik həndəsədən mühazirələr". Bakı, Çaşıoğlu, 2002.-360 s.
- Litvinenko V.N. "Sbornik zadaç po stereometrii s metodami reşeniy". Posobie dlə uçahixsə. M., Prosvehenie, 1998. - 254 s.
- Əliyev İ.F. "Stereometriyadan qurma məsələlərinin həllinə aid metodik göstəriş". Bakı, ADPU, 1994.-42 s.
- "Sbornik zadaç po qeometrii dlə 9 i 10 klassov" (İ.S.Qerasimova, V.A.Qusev i dr.). M., Prosvehenie, 1977. - 190 s.
- Yaqubov M.N. və b. Riyaziyyat. Dərs vəsaiti. Bakı: TQDK, 2009. – 855 s.

Mündəricat

GİRİŞ .....

I FƏSİL. MÜSTƏVI ÜZƏRINDƏ HƏNDƏSI QURMALAR .....

1.1. Konstruktiv həndəsənin aksiomlar sistemi .....
1.2. Məktəb həndəsə kursunda əsas qurma məsələləri .....
1.3. Qurma məsələlərinin həlli alqoritmi .....
1.4. Həndəsi qurma üsulları .....
1.4.1. Həndəsi yerlər (fiqurların kəsişməsi) üsulu .....
1.4.2. Həndəsi çevirmələr üsulu .....
1.4.2.1. Paralel köçürmə .....
1.4.2.2 Ox simmetriyası .....
1.4.2.3 Mərkəzi simmetriya.....
1.4.2.4.Dönmə.....
1.4.2.5. Oxşarlıq və homotetiya.....
1.4.3. Cəbri üsul .....

II FƏSİL. FƏZADA HƏNDƏSI QURMALAR .....

2.1. Fəza fiqurlarının çertyojlarına verilən tələblər .....
2.2. Paralel proyeksiya və onun əsas xassələri .....
2.3. Tam və metrik müəyyən çertyojlar .....
2.4. Fəzada müstəvi fiqurların çertyojlarının qurulması .....
2.5. Həndəsi cisimlərin çertyojlarının qurulması .....
2.6. "Xəyalda" qurma və "Proyeksiya çertyojunda qurma" üsulları .....
2.7. Qurma məsələləri həllinin xüsusi metodları .....

III FƏSIL. MÜSTƏVİ KƏSİYİN QURULMASI ÜSULLARI .....
3.1. Prizmanın təsviri və müstəvi kəsiyinin qurulması .....
3.2. Piramidanin təsviri və müstəvi kəsiyinin qurulması .....
3.3. İzlər üsulu və onun tətbiqləri .....
3.4. Uyğunluq üsulu və onun tətbiqləri .....
3.5. Bəzi xüsusi üsullar haqqında.....
3.6. Fırlanma cisminin müstəvi kəsiyinin qurulması üsulları.....

IV FƏSİL. CİSMİN MÜSTƏVİ KƏSİYİNİN ELEMENTLƏRİNİN QURULMASINA AİD TÖVSİYƏLƏR .....
4.1. Çoxüzlünun müstəvi kəsiyinin qurulmasında istifadə edilən ən sadə aid məsələlər.....
4.2. Müstəvinin xassələrinə aid məsələlər .....
4.3. Düz xətt və müstəvinin paralelliyinə aid məsələlər.....
4.4. Düz xətt və müstəvinin perpendikulyarlığına aid məsələlər .....
4.5. Cismin müstəvi kəsiyinin qurulmasına aid çalışmalar .....
Çalışmalara aid həllər və göstərişlər .....

İSTİFADƏ EDİLMİŞ ƏDƏBİYYAT .....

AZADXAN SƏFƏRXAN oğlu ADIĞÖZƏLOV
Pedaqogika üzrə elmlər doktoru, professor

XALİDƏ SİDQƏLİ qızı HƏSƏNOVA

H Ə N D Ə S İ

Q U R M A L A R

Pedaqoji Universitet və
Ali Pedaqoji məktəb tələbələri üçün
dərs vəsaiti

Texniki redaktor: **Dürdanə Mirtağıqızı**

Yığılmağa verilmiş 11.09.2011.
Çapa imzalanmış 25.09.2011.
Şərti çap vərəqi 12. Sifariş № 65.
Kağız formatı 70x100 1/16. Tiraj 1000.