Həmzəağa Orucov

XƏTTİ CƏBR

*Bu dərs vəsaiti Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyinin **22 oktyabr 2012-ci il** tarixli **1651 saylı** əmri ilə təsdiq edilmişdir.*

Qafqaz Universiteti Nəşri
Bakı – 2014

Qafqaz Universiteti Nəşri

Həmzəağa Orucov

XƏTTİ CƏBR

REDAKTOR

Həmidulla Aslanov
fizika-riyaziyyat elimləri doktoru, professor

RƏYÇİLƏR

Aqil Xanməmmədov
fizika-riyaziyyat elimləri doktoru, professor

Nihan Əliyev
fizika-riyaziyyat elimləri doktoru, dossent

KORREKTOR
Sevinc Əliyeva

DİZAYN
Sahib Kazımov, İlham Əliyev

I Nəşr: Qafqaz Universiteti, 2014.

Qafqaz Universiteti Elmi Şurasının 30.05.2012-ci il, 2012/117.02 saylı əmri ilə Universitet nəşri olaraq çap olunmasına qərar verilmişdir.

Bu kitabın Azərbaycanda nəşr hüquqları Qafqaz Universitetinə aiddir.
Müəllifin icazəsi olmadan qismən və ya tamamən yenidən nəşr oluna bilməz.

ISBN: 978-9952-468-31-1

© Həmzəağa Orucov, 2014.
© Qafqaz Universiteti, 2014.

Qafqaz Universiteti
Ünvan: AZ0101, Xırdalan şəhəri, Həsən Əliyev küç., 120, Abşeron, Bakı, Azərbaycan
Tel: (+994 12) 448 28 62/66, Faks: (+994 12) 448 28 61/67
e-mail: info@qu.edu.az; www.qu.edu.az

M Ü N D Ə R İ C A T

GİRİŞ **6**

FƏSİL 1. ..... **7**
KOMPLEKS ƏDƏDLƏR VƏ ÇOXHƏDLİLƏR **7**

§1. KOMPLEKS ƏDƏDLƏR **7**
1.1. Kompleks ədədlər üzərində əməllər 7
1.2. Kompleks ədədin triqonometrik şəkli 9
1.3. Kompleks ədəddən kök alma 11
SUALLAR **12**

§2. ÇOXHƏDLİLƏR **13**
2.1.Çoxhədlilər üzərində əməllər 13
2.2. Çoxhədlilərin bölünməsi 14
2.3. Çoxhədlinin kökləri 16
SUALLAR **18**

§ 3. QRUP, HALQA VƏ MEYDAN **19**
3.1. Cəbri əməl 19
3.2. Qruplar 20
3.3. Halqa və meydan 21
SUALLAR **21**
BİRİNCİ FƏSİLƏ AİD MƏSƏLƏLƏR **22**

FƏSİL2. YÜKSƏK TƏRTİB MATRİSLƏR VƏ DETERMİNANTLAR **28**

§4. MATRİSLƏR VƏ DETERMİNANTLAR **28**
4.1. Matrislər üzərində əməllər 28
4.2. n tərtibli determinant 31
4.3. Determinantın bilavasitə elementləri ilə ifadəsi 33
4.4. n tərtibli determinantın xassələri 35
4.5. Matrisin tərsi və onun tapılması 37
4.6. Bazis minor haqqında teorem 39
SUALLAR **42**
İKİNCİ FƏSİLƏ AİD MƏSƏLƏLƏR **43**

FƏSİL 3. XƏTTİ FƏZALAR VƏ XƏTTİ TƏNLİKLƏR SİSTEMİ 49

§5. XƏTTİ FƏZALAR 49

5.1. Xətti fəzanın tərifi 49

5.2. Xətti fəzada bazis və xətti fəzanın ölçüsü 52

5.3. Xətti fəzaların izomorfluğu 54

5.4. Xətti alt fəzalar 55

5.5. Alt fəzaların cəmi və kəsişməsi 57

5.6. Alt fəzaların düz cəmi 59

5.7. Xətti fəzada bazis dəyişdikdə koordinatların dəyişməsi 61

SUALLAR 63

§6. XƏTTİ TƏNLİKLƏR SİSTEMİ 64

6.1. Xətti tənliklər sisteminin uyuşan olması 64

6.2. Sistemin bütün həllərinin tapılması 67

6.3. Bircins sistemin həllərinin xassələri 70

6.4. Xətti tənliklər sisteminin Qaus üsulu ilə həlli 73

SUALLAR 76

ÜÇÜNCÜ FƏSİLƏ AİD MƏSƏLƏLƏR 77

FƏSİL 4. EVKLİD FƏZALARI 85

§7. HƏQİQİ VƏ KOMPLEKS EVKLİD FƏZALARI 86

7.1.Həqiqi Evklid fəzası 86

7.2. Ortonormal bazis və ortoqonallaşdırma üsulu 88

7.3. Kompleks Evklid fəzası 91

7.4. Evklid fəzalarının izomorfluğu 94

SUALLAR 95

DÖRDÜNCÜ FƏSİLƏ AİD MƏSƏLƏLƏR 96

FƏSİL 5. XƏTTİ OPERATORLAR 101

§8. XƏTTİ FƏZALARDA XƏTTİ OPERATORLAR 101

8.1. Xətti operatorlar fəzası 101

8.2. Xətti operatorun matrisi 106

8.3. Xətti operatorun ranqı 109

8.4. Xətti operatorun məxsusi ədədi və məxsusi vektoru 110

BEŞİNCİ FƏSİLƏ AİD MƏSƏLƏLƏR 115

§9. EVKLİD FƏZALARINDA XƏTTİ OPERATORLAR 123
9.1. Xətti və bixətti formalar..... 123
9.2. Qoşma operator və xassələri 125
9.3. Xətti operatorun norması 128
SUALLAR..... 130
§10.ÖZ-ÖZÜNƏ QOŞMA OPERATORLAR 131
10.1. Öz-özünə qoşma operatorun məxsusi ədədlərinin xassələri 131
10.2. Öz-özünə qoşma operatorun məxsusi vektorlarının xassələri..... 132
10.3. Öz-özünə qoşma operatorun spektral ayrılışı 135
SUALLAR..... 137
§11. BİXƏTTİ FORMALAR VƏ XƏTTİ OPERATORLAR 138
11.1. Bixətti formalarla xətti operatorlar arasında əlaqə..... 138
11.2. Unitar operatorlar..... 140
11.3. Normal operatorlar..... 141
11.4. Xətti operator matrisinin normal şəkli 144
SUALLAR..... 146
§12.HƏQİQİ XƏTTİ FƏZALARDA XƏTTİ OPERATORLAR 147
12.1. Xətti operator və qoşması 147
12.2. Öz-özünə qoşma operatorun məxsusi ədədləri 148
SUALLAR..... 152

FƏSİLVI. KVADRATİK FORMALAR 153

§13. BİXƏTTİ VƏ KVADRATİK FORMALAR..... 153
13.1. Bixətti forma və onun matrisi 153
13.2. Kvadratik formalar..... 155
13.3. Kvadratik formanın kanonik şəkilə gətirilməsi..... 157
13.4. Yakobi üsulu..... 159
13.5. Kvadratik formalar üçün ətalət qanunu..... 162
13.6. Kvadratik formaların təsnifatı..... 164
SUALLAR..... 168
ALTINCI FƏSİLƏ AİD MƏSƏLƏLƏR..... 169

TESTLƏR 170
ƏDƏBİYYAT..... 222

GİRİŞ

Azərbaycan təhsil sistemində aparılan islahatlar, tədris planlarının Dövlət standartlarına və kredit sisteminin tələblərinə uyğun olaraq yenilənməsi müasir tələblərə cavab verən dərslik və dərs vəsaitlərinin yazılmasını bir zərurətə çevirmişdir. Müasir dövrdə tədrisin təcrübə ilə qarşılıqlı əlaqəsinin genişləndirilməsi bakalavr təhsilinin keyfiyyət göstəricilərinin yüksəldiməsinin əsas amillərindən biri olmuşdur. Ona görə də, praktiki məsələlərin həllinə yol açan və kompüter texnologiyalarının tətbiq imkanlarını genişləndirməyə imkan verən fənlərin tədrisi xüsusi əhəmiyyət kəsb edir. "Xətti cəbr" fənni də universitetlərin pedaqoji, tətbiqi riyaziyyat, riyaziyyat və fizika fakultələrinin bir çox ixtisaslarının tədris planına daxil olan belə fənlərdən biridir. Xətti cəbr əsas riyazi fənlər üçün baza rolunu oynamaqla yanaşı, bir çox proseslərin, xüsusi ilə də, iqtisadi sistemlərin riyazi modellərinin qurulmasında mühüm əhəmiyyətə malikdir.

Xətti cəbrdə öyrənilən əsas riyazi obyektlər – matrislər, xətti tənliklər sistemi, xətti operatorlar və kvadratik formalardır. Müstəqil şəkildə öyrənilən bu riyazi öbyektlər arasında sıx əlaqə və daxili bağlılıq öz təzahürünü xətti cəbrin əsas anlayışı olan xətti fəzada tapır. Xətti fəzaların ilk baxışda sadə görünən mücərrəd aksiomlar üzərində qurulmuş cəbri strukturunu isə çox sayda məsələ və misallar həll etməklə öyrənmək mümkündür. Lakin son illər təhsilin yeni konsepsiyasının hazırlanması ilə əlaqədər tədris planlarının dəyişdirilməsi xətti cəbrə verilən dərs saatlarının azaldılmasına səbəb olmuşdur. Ona görə də, bu fənnin əsasları yüksək riyazi dəqiqliklə yığcam bir şəkildə tədris olunmalıdır.

Təqdim olunan "Xətti cəbr" dərs vəsaiti də bu məqsədlə, müəllifin apardığı mühazirə və seminar məşğələlərinin əsasında yazılmışdır. O, xətti cəbrin bütün əsas bölmələrin əhatə edir. Hər bölməyə aid zəruri nəzəri məlumatlar verilir və onların dərindən öyrənilməsi üçün müxtəlif xarakterli məsələlər təklif olunur. Kitabın sonunda tələbələrin öz biliyini yoxlaması üçün tərtib olunmuş testlər də verilmişdir.

Dərs vəsaiti universitetlərin mühəndislik, tətbiqi riyaziyyat, kompüter elmləri, riyaziyyat, fizika və informatika ixtisasları üzrə bakalavr pilləsində təhsil alan tələbələri üçün nəzərdə tutulur. Lakin ondan pedaqoji və texniki universitetlərin tələbələri, həmçinin xətti cəbri müstəqil öyrənmək istəyənlər də istifadə edə bilərlər.

FƏSİL 1.
KOMPLEKS ƏDƏDLƏR VƏ ÇOXHƏDLİLƏR

§1. KOMPLEKS ƏDƏDLƏR

1.1. Kompleks ədədlər üzərində əməllər

Ədəd anlayışı riyaziyyatın ilkin anlayışlarından biridir. İlk olaraq natural ədədlər, sonra tam, rasional və irrasional ədədlər yaranmaqla həqiqi ədədlər çoxluğuna qədər genişlənən bu ədədlərin hər birinin yaranması praktiki məsələlərin həlli ilə əlaqədar olub tarixin müəyyən dövrünə aiddir. Lakin $x^2+1=0$ kimi sadə bir tənliyin həqiqi ədədlər çoxluğunda həllinin olmaması kompleks ədədlər adlanan yeni ədədlərin yaradılmasını bir zərurətə çevirdi.

Kompleks ədədlər çoxluğunun yaradılmasında gözlənilən əsas prinsip ondan ibarətdir ki, kompleks ədədlər çoxluğu həqiqi ədədlər çoxluğunu da öz daxilində saxlamaqla onların malik olduğu əsas xassələrə malik olsun və bu çoxluqda $x^2+1=0$ tənliyinin, eləcə də cəbri tənliklərin həlli olsun.

Kompleks ədədlərin qurulma üsullarından biri ilə tanış olaq.

Nizam ilə götürülmüş bir cüt həqiqi ədədlə təyin olunan $\alpha=(a,b)$ $a,b\in R$ şəkilli ədədlər çoxluğuna baxaq. Bu çoxluğu kompleks ədədlər çoxluğu adlandırıb, C hərfi ilə işarə edəcəyik.

Tutaq ki, $\alpha=(a,b),\beta=(c,d)$. α və β kompleks ədədləri yalnız və yalnız o zaman bərabər hesab olunur ki, $a=c,b=d$ olsun.

C çoxluğunda cəm və vurma əməllərini aşağıdakı qaydada təyin edək.

$\alpha=(a,b)$ və $\beta=(c,d)$ kompleks ədədlərinin cəmi $\alpha+\beta$ kimi işarə olunan $(a+c,b+d)$ kompleks ədədinə, hasili isə $\alpha\cdot\beta$ kimi işarə olunan $(ac-bd,ad+bc)$ kompleks ədədinə deyilir. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, bu iki əməl həqiqi ədədlər üzərində təyin olunmuş cəm və vurma əməllərinin malik olduğu bütün əsas xassələrə malikdir. "0" kompleks ədədi $0=(0,0)$ kimi təyin olunur. Bu iki əməlin köməyilə çıxma və bölmə əməllərini də təyin etmək olar.

$\alpha=(a,b)$ ədədi ilə $\beta=(c,d)$ ədədinin fərqi elə $\gamma=(x,y)$ ədədinə deyilir ki, onu β ilə topladıqda α -ya bərabər olsun. Yəni, $\beta+\gamma=\alpha$ olsun. Onda,

$$(c,d)+(x,y)=(a,b)$$
$$(c+x,d+y)=(a,b)$$
$$c+x=a,\quad d+y=b$$

sonuncu bərabərliklərdən alırıq ki,

$$\left.\begin{aligned} x &= a-c \\ y &= b-d \end{aligned}\right\}.$$

Buradan $\alpha-\beta=\gamma=(a-c,b-d)$ olur.

Tutaq ki, $\beta\neq 0$, yəni $c^2+d^2\neq 0$. $\dfrac{\alpha}{\beta}$ kompleks ədədi elə $\gamma=(x,y)$ ədədinə deyilir ki, β-nı γ-ya vurduqda α-ya bərabər olsun. Yəni, $\alpha=\beta\cdot\gamma$ və ya $(a,b)=(c,d)(x,y)$. Kompleks ədədlərin vurulma qaydasını tətbiq etsək, $(a,b)=(cx-dy,cy+dx)$ yaza bilərik.

Kompleks ədədlərin bərabərliyindən alırıq ki,

$$\left.\begin{aligned} cx-dy &= a \\ dx+cy &= b \end{aligned}\right\}$$

Buradan, $x=\dfrac{a\,c+d\,b}{c^2+d^2}$, $y=\dfrac{b\,c-a\,d}{c^2+d^2}$.

Beləliklə, $\dfrac{\alpha}{\beta}=\gamma=\left(\dfrac{a\,c+d\,b}{c^2+d^2},\dfrac{b\,c-a\,d}{c^2+d^2}\right)$.

Əgər $\alpha=(1,0)$ götürsək, $\dfrac{1}{\beta}=\left(\dfrac{c}{c^2+d^2},-\dfrac{d}{c^2+d^2}\right)$ olar.

Aydındır ki, hər bir a həqiqi ədədinə $(a,0)$ şəklində yazılmış, kompleks ədəd kimi baxa bilərik. Asanlıqla görmək olar ki, bu şəkilli kompleks ədədlər üzərində toplama, çıxma, vurma və bölmə əməlləri həqiqi ədədlər üzərində aparılan əməllərdən yalnız yazılışı ilə fərqlənir. Məsələn, $(a,0),(b,0)$ ədədləri üçün $(a,0)+(b,0)=(a+b,0)$, $(a,0)(b,0)=(a\,b,0)$. Ona görə də, biz həqiqi ədədlər çoxluğuna kompleks ədədlər çoxluğunun alt çoxluğu kimi baxa bilərik.

Göstərək ki, kompleks ədədlər çoxluğunda $x^2+1=0$ (yazılış kompleks ədəd mənasında başa düşülür) tənliyinin həlli var. Aydındır ki, $x^2=x\cdot x=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)$. Ona görə də, $(-1,0)+(1,0)=(0,0)$. Deməli, $x=(0,\ 1)$ kompleks ədədi bu tənliyin həllidir.

Beləliklə, axtarılan tənliyin kompleks ədədlər çoxluqda həlli var. $i=(0,1)$ kompleks ədədinə xəyali vahid deyilir. Xəyali vahiddən və həqiqi ədədin yuxarıda qeyd olunan yazılışından istifadə edərək (a,b) kompleks ədədini aşağıdakı şəkildə yazaq:

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(0,1)(b,0)=(a,0)+i\ (b,0)=a+ib$$

$(a,b)=a+ib$ yazılışı kompleks ədədin cəbri şəkildə yazılışı adlanır. $\alpha=a+ib$ cəbri şəkildə olan yazılışdakı a ədədi kompleks ədədin həqiqi hissəsi, b isə xəyali hissəsi adlanır. $\overline{\alpha}=a-ib$ kompleks ədədinə $\alpha=a+ib$ kompleks ədədinin qoşması deyilir.

Kompleks ədədlərin vurulma qaydasından istifadə etsək, görərik ki, $i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1$. Bu bərabərliklərdən istifadə edərək i-nin ixtiyari natural qüvvətini hesablamaq olar.

Kompleks ədədlərin cəbri şəkildə yazılışı, bu ədədlər üzərində hesab əməllərini daha asan şəkildə yerinə yetirməyə imkan verir. Məsələn, $\alpha=a+ib,\ \beta=c+id$ olarsa,

$$\alpha\mp\beta=(a+ib)\mp(c+id)=(a+c)\mp i(b+d)$$

$$\alpha\cdot\beta=(a+ib)\cdot(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}=\frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

olar.

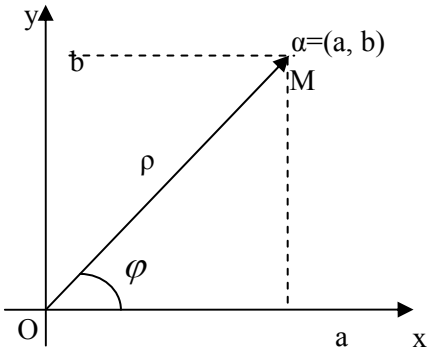
Asanlıqla görmək olar ki, hər bir $\alpha=(a,b)$ kompleks ədədinə üzərində düzbucaqlı Dekart koordinat sistemi verilmiş müstəvinin müəyyən bir nöqtəsini qarşı qoymaq olar və bu qarşıqoyma qarşılıqlı birqiymətlidir. Belə ki, həmin müstəvidə həqiqi ədədlər absis oxunun, sırf xəyali ədədlər isə ordinat oxunun nöqtələri ilə təsvir edilir. Ona görə də, absis oxunu həqiqi ox, ordinat oxuna xəyali ox adlandırırlar. Üzərində kompleks ədədlər təsvir olunmuş müstəviyə kompleks müstəvi deyilir.

1.2. Kompleks ədədin triqonometrik şəkli

Tutaq ki, müstəvi üzərində Düzbucaqlı koordinat sistemi verilmişdir. Bu müstəvi üzərində $\alpha=(a,b)$ kompleks ədədinə koordinatları (a,b) olan M nöqtəsini qarşı qoyaq. $\left|\overline{OM}\right|=\rho$ ilə, OX oxunun $\overline{OM}$ üzərinə düşməsi üçün lazım gələn və saat əqrəbi hərəkətinin əksinə yönəlmiş kiçik fırlanma bucağını isə φ ilə işarə edək. Onda, asanlıqla görmək olar ki,

$$\left.\begin{aligned}a&=\rho\cos\varphi\\ b&=\rho\sin\varphi\end{aligned}\right\}$$

a və b-nin bu qiymətlərini α kompleks ədədinin cəbri şəkildə yazılışında nəzərə alsaq, $\alpha=a+ib=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ olar.



α kompleks ədədinin bu şəkildə yazılışı onun triqonometrik şəkli adlanır. ρ-ya kompleks ədədin modulu, φ-yə isə onun arqumenti deyilir və uyğun olaraq $\rho = \mathrm{mod}\alpha, \varphi = \arg\alpha$ kimi işarə edilir. Asanlıqla görmək olar ki,

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad tg\varphi = \frac{b}{a}.$$

Qeyd edək ki, müstəvi nöqtələri ilə kompleks ədədlər arasındakı birqiymətliliyi təmin etmək üçün φ bucağı üzərinə $0 \le \varphi < 2\pi$ şərti qoyulur (bu şərt başqa şəkildə də verilə bilər).

Triqonometrik şəkildə verilmiş kompleks ədədlər üzərində vurma və bölmə əməllərini daha asan yerinə yetirmək olur.

Tutaq ki,

$$\alpha_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \ \alpha_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Onda,

$$\alpha_1\alpha_2 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\rho_2) = \rho_1\rho_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi) +$$
$$+ i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2) = \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Göründüyü kimi triqonometrik şəkildə verilmiş iki kompleks ədədin hasilinin modulu onların modulları hasilinə, arqumenti isə arqumentlərin cəminə bərabərdir.

Aydındır ki, $\alpha^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$. Xüsusi halda $n = 2$ olduqda,

$$[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^2 = \rho^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) = \rho^2(\cos^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi).$$

Sonuncu bərabərlikdən triqonometriyadan bizə məlum olan ikiqat arqumentin düsturları alınır:

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi, \ \sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi.$$

$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ kompleks ədədinin modulunun $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ -yə, arqumentinin isə $\varphi_1 - \varphi_2$-yə

bərabər olduğunu da analoji qayada göstərmək olar: $\operatorname{mod}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)=\frac{\rho_1}{\rho_2}$, $\arg\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)=\varphi_1-\varphi_2$.

1.3. Kompleks ədəddən kök alma

Tutaq ki, $\alpha=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ və $\beta=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ kompleks ədədləri və n-natural ədədi verilmişdir.

Tərif 1.1. Əgər $\alpha^n=\beta$ olarsa, onda α ədədinə β ədədinin n dərəcədən kökü deyilir.

Triqonometrik şəkildə verilmiş α kompleks ədədinin n dərəcədən köklərini tapaq.

α və β-nın qiymətlərini nəzərə alsaq, aşağıdakı bərabərliyi yaza bilərik:

$$\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

Buradan,

$$\left.\begin{aligned}\rho^n\cos n\varphi&=r\cos\theta\\ \rho^n\sin n\varphi&=r\sin\theta\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad \rho=\sqrt[n]{r},$$

$$n\varphi=\theta+2\pi k,\ \varphi=\frac{\theta+2\pi k}{n}\qquad(\kappa=0,\pm1,\pm2,\pm3,...).$$

Göstərmək olar ki, φ üçün aldığımız bu sonsuz sayda qiymətlərdən yalnız aşağıdakı n saydası müxtəlifdir:

$$\varphi_k=\frac{\theta+2\pi k}{n},\quad k=0,1,2...,n-1.$$

Qalan qiymətlər isə bu qiymətlərdən biri ilə üst-üstə düşür. Beləliklə, hər bir kompleks ədədin n dərəcədən n sayda kökü var və həmin köklər aşağıdakı düsturlarla tapılır:

$$\sqrt[n]{\beta}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\theta+2\pi k}{n}\right),\ k=0,1,2...,n-1.$$

Xüsusi halda $\beta=1$ olarsa, $r=1$, $\theta=0$ olar. Onda

$$\sqrt[n]{1}=\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n},\quad k=0,1,...,n-1.$$

Bu ədədlərə vahidin n dərəcədən kökləri deyilir.

Qeyd edək ki, kompleks ədəd cəbri şəkildə verildikdə onun köklərini tapmaq üçün yüksək dərəcəli cəbri tənliklərdən ibarət sistemi həll etmək lazım gəlir. Məsələn, kompleks ədədin iki dərəcədən köklərini tapmaq üçün iki dərəcəli tənliklər sistemini həll etmək lazımdır.

SUALLAR

1. Kompleks ədəd necə təyin olunur?
2. İki kompleks ədəd hansı halda bərabər adlanır ?
3. İki kompleks ədədin cəmi və hasili necə təyin olunur?
4. Kompleks ədədin cəbri şəkli necədir?
5. Kompleks ədədin modulu və arqumenti nəyə deyilir?
6. Kompleks ədədin triqonometrik şəkli necədir?
7. Hansı müstəviyə kompleks müstəvi deyilir?
8. Kompleks ədədin n dərəcədən kökü hansı ədədə deyilir?
9. Kompleks ədədin n dərəcədən neçə kökü var?
10. Vahidin n dərəcədən bütün kökləri hansı düsturla tapılır?

§2. ÇOXHƏDLİLƏR

2.1.Çoxhədlilər üzərində əməllər

n-dərəcəli aşağıdakı tənliyə baxaq:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n = 0 \quad (a_0 \neq 0)$$

burada, $a_0, a_1, ..., a_n$ kompleks ədədlərdir(xüsusi halda həqiqi ədədlər də ola bilər).

Bu tənliyin sol tərəfi x dəyişənindən asılı n dərəcəli çoxhədli adlanır. Aydındır ki, n dərəcəli çoxhədliyə x dəyişənindən asılı funksiya kimi baxıb analizin metodları ilə onu tədqiq etmək olar. Lakin çoxhədliləri cəbri bir obyekt kimi müstəqil öyrənmək daha məqsədəuyğundur..

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$ çoxhədlisindəki hər bir $a_0x^n, a_1x^{n-1}, ..., a_n$ toplananı bu çoxhədlinin həddi, a_0x^n isə yüksək həddi adlanır. $a_0, a_1, ..., a_n$ kompleks ədədlərinə çoxhədlinin əmsalları a_0-a yüksək həddin əmsalı deyilir. Çoxhədliləri qısa olaraq $f(x), g(x), h(x)$ və s. kimi də işarə edirlər.

Bütün əmsalları sıfra bərabər olan çoxhədliyə sıfır çoxhədli deyilir.

İki çoxhədli o halda bərabər hesab edilir ki, sıfır əmsallı hədlər nəzərə alınmamaqla onlar eyni hədlərdən ibarət olsun.

Çoxhədlilər üçün bir çox hallarda aşağıdakı yazılışdan da istifadə edirlər:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x + ... + a_nx^n \qquad (2.1)$$

Çoxhədlilər üzərində cəm və vurma əməllərini təyin edək.

Tutaq ki,

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x + ... + b_mx^m \qquad (2.2)$$

Tərif 2.1. $f(x)$ və $g(x)$ çoxhədlilərinin cəmi $f(x) + g(x)$ kimi işarə edilən

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_kx^k$$

çoxhədlisinə deyilir belə ki, $k = \max\{n, m\}$ olmaqla, $c_i = a_i + b_i$ bərabərliyi ilə tapılır və $n > m$ olarsa, $b_{m+1} = ... = b_n = 0$, $n < m$ olarsa, $a_{n+1} = ... = a_m = 0$ hesab edilir.

Tərif 2.2 $f(x)$ və $g(x)$ çoxhədlilərinin hasili $f(x) \cdot g(x)$ kimi işarə edilən

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + ... + (a_0b_i + a_1b_{i-1} + ... + a_ib_0)x^i + ... + a_nb_mx^{n+m},$$

çoxhədlisinə deyilir belə ki, əgər $i > n$ olarsa $a_i = 0$ və $j > m$ olarsa $b_j = 0$ götürülür.

Aydındır ki, $f(x) + 0 = f(x), f(x) \cdot 0 = 0$.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, çoxhədlilərin cəmi və vurulması əməlləri aşağıdakı xassələrə malikdir:

1. $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$
2. $f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x)$
3. $f(x) + (g(x) + h(x)) = (f(x) + g(x)) + h(x)$
4. $f(x) \cdot (g(x) \cdot h(x)) = (f(x)g(x))h(x)$

5. İxtiyari iki $f(x)$ və $g(x)$ çoxhədliləri üçün elə bir $h(x)$ çoxhədlisi var ki, $f(x) = h(x) + g(x)$. Bu çoxhədli $f(x)$ və $g(x)$ çoxhədlilərinin fərqi adlanır və $f(x) - g(x)$ kimi işarə edilir. $-f(x) = -a_0 - a_1x - a_2x - ... - a_nx^n$ çoxhədlisinə $f(x)$ çoxhədlisinin əksi deyilir.

6. $(f(x) + g(x))h(x) = f(x)h(x) + g(x)h(x)$

Çoxhədlilərin vurulması əməlindən istifadə etməklə göstərmək olar ki, əgər $f(x)$ və $g(x)$ çoxhədliləri sıfırdan fərqlidirsə, onda onların hasili də sıfırdan fərqlidir.

2.2. Çoxhədlilərin bölünməsi

Tutaq ki, $f(x)$ və $g(x)$ çoxhədliləri verilmişdir.

Tərif 2.3. Əgər $f(x)$ və $g(x)$ çoxhədliləri üçün elə $h(x)$ çoxhədlisi varsa ki, $g(x)h(x) = f(x)$ bərabərliyi ödənilsin, onda deyirlər ki, $f(x)$ çoxhədlisi $g(x)$ çoxhədlisinə bölünür.

Aydındır ki, tam ədədlər çoxluğunda olduğu kimi, ümumi halda istənilən iki çoxhədlinin də bölünməsindən danışmaq olmaz. Çünki iki çoxhədlinin nisbəti çoxhədli olmaya da bilər. Ümumi halda çoxhədlilərin yalnız qalıqlı bölünməsinin alqoritmini vermək olar ki, bunun üçün də bölmə əməlinin bəzi mühüm xassələrini bilmək faydalıdır:

1. hər bir çoxhədli özü-özünə bölünür

2. əgər $f(x)$ çoxhədlisi $g(x)$ çoxhədlisinə, $g(x)$ çoxhədlisi isə $f(x)$ çoxhədlisinə bölünürsə, onda $f(x)$ və $g(x)$ çoxhədlilərin biri-birindən sabit vuruqla fərqlənir: $c \cdot g(x) = f(x)$

3. əgər $f(x)$ və $g(x)$ çoxhədlilərinin hər biri *h(x)* çoxhədlisinə bölünürsə, onda bu çoxhədlilərin cəmi və fərqi də $h(x)$ çoxhədlisinə bölünür.

4. əgər $f_1(x), f_2(x),..., f_n(x)$ çoxhədlilərindən hər biri $g(x)$ çoxhədlisinə bölünürsə, onda onların xətti kombinasiyası da $g(x)$ çoxhədlisinə bölünür.

5. əgər $f_1(x), f_2(x),..., f_n(x)$ çoxhədlilərindən hər hansı biri $g(x)$ çoxhədlisinə bölünürsə, onda onların hasili də $g(x)$ çoxhədlisinə bölünür.

6. hər bir çoxhədli sıfır dərəcəli çoxhədliyə bölünür.

Teorem 2.1. İki $f(x)$ və $g(x) \neq 0$ çoxhədliləri üçün elə $q(x)$ və $r(x)$ çoxhədliləri var ki,

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

bərabərliyi doğrudur. Belə ki, $r(x)$-in dərəcəsi $g(x)$-in dərəcəsindən kiçikdir.

İsbatı. Tutaq ki,

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n \ , \quad g(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + ... + b_m \qquad (2.3)$$

Əgər $f(x) = 0$ və ya $n < m$ olarsa, onda $q(x) = 0$ və $r(x) = f(x)$ çoxhədliləri (2.3)bərabərliyini ödəyir.

Əgər $n \geq m$ olarsa, $f(x)$ çoxhədlisindən $\frac{a_0}{b_0} x^{n-m} g(x)$ çoxhədlisini çıxıb nəticəni $f_1(x)$-lə işarə etsək, onun dərəcəsi n-dən kiçik olar:

$$f(x) - \frac{a_0}{b_0} g(x) = f_1(x)$$

Əgər $n - 1 \geq m$ olarsa, $f_1(x)$ üçün yuxarıdakı qaydanı tətbiq etməklə onun dərəcəsini aşağı salırıq. Prosesi bu qayda ilə davam etdirməklə, sonda biz, dərəcəsi $g(x)$-in dərəcəsindən kiçik olan və ya sıfra bərabər olan $r(x)$ çoxhədlisini alırıq. Teorem isbat olundu.

Tutaq ki, $f(x)$ və $g(x)$ çoxhədliləri verilmişdir.

Tərif 2.4. $f(x)$ və $g(x)$ çoxhədlinin hər birinin bölündüyü çoxhədliyə onların ortaq böləni deyilir.

Tərif 2.5. Əgər $r(x)$ çoxhədlisi $f(x)$ və $g(x)$ çoxhədlilərinin ortaq bölənidirsə və bu çoxhədlilərin ixtiyari ortaq bölənina bölünürsə, onda

$r(x)$ çoxhədlisinə $f(x)$ və $g(x)$ çoxhədlilərinin ən böyük ortaq böləni deyilir.

Aydındır ki, hər iki çoxhədli sıfra bərabər olduqda onların ən böyük ortaq böləni də sıfra bərabərdir.

İki $f(x)$ və $g(x) \neq 0$ çoxhədlilərinin ən böyük ortaq böləni **Evklid alqoritmi** ilə tapılır. Evklid alqoritmi aşağıdakı qaydada yerinə yetirilir:

Əvvəlcə $f(x)$ çoxhədlisini $g(x)$ çoxhədlisinə yuxarıda qeyd etdiyimiz qaydada bölüb alınan qisməti $q(x)$-lə, qalığı isə $r(x)$-lə işarə edək.

Sonra $q(x)$ çoxhədlisini $r(x)$ çoxhədlisinə bölüb ($r(x) \neq 0$ olduqda) alınan qisməti $q_1(x)$-lə, qalığı isə $r_1(x)$-lə işarə edək. Hər dəfə alınan qisməti qalığa bölməklə bu qayda ilə davam etsək, aydınıdır ki, $r(x)$, $r_1(x)$ və s. qalıq çoxhədlilərinin dərəcəsi getdikcə azalacaq və sonda biz tam bölünməyə nail olacayıq. Tam bölünmədən əvvəlki qalıq bu iki çoxhədlinin ən böyük ortaq böləni olur.

Bu bölmə prosesini yazaq:

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$
$$g(x) = r(x)q_1(x) + r_1(x)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$r_{k-2}(x) = r_{k-1}(x)q_k(x) + r_k(x)$$
$$r_{k-1}(x) = r_k(x)q_{k+1}(x)$$

Asanlıqla görmək olar ki, $r_k(x)$ $f(x)$ və $g(x)$ çoxhədlilərinin ən böyük ortaq bölənidir.

2.3. Çoxhədlinin kökləri

Tərif 2.6. $f(x)$ çoxhədlisinin kökü x dəyişəninin bu çoxhədlini sıfra çevirən $x = a$ qiymətinə deyilir: $f(a) = 0$.

Əgər Evklid alqoritmində $g(x)$ çoxhədlisi olaraq birdərəcəli $g(x) = x - a$ çoxhədlisini götürsək, onda $r(x)$ sıfır dərəcəli çoxhədli (sabit) olar. Yəni,

$$f(x) = (x - a)q(x) + r. \qquad (2.4)$$

(2.4) düsturundan görünür ki, $x = a$ götürsək, $f(a) = (a - a)q(a) + r = r$ olar. Bu bərabərlik aşağıdakı teoremlə ifadə olunur.

Teorem 2.2. $f(x)$ çoxhədlisinin $x - a$ çoxhədlisinə bölünməsindən alınan qalıq $f(x)$ çoxhədlisinin $x = a$ nöqtəsindəki qiymətinə bərabərdir.

Qeyd edək ki, $f(x)$ çoxhədlisinin $ax+в$ çoxhədlisinə bölünməsindən onun $x-(-\frac{в}{a})$ çoxhədlisinə də bölünməsi çıxdığı üçün çoxhədlinin köklərinin tapılması onun xətti bölənlərinin tapılmasına ekvivalentdir. Ona görə də, çoxhədlinin xətti bölənlərinin tapılması xüsusi əhəmiyyət kəsb edir. Çoxhədlilərin bölünməsi üçün olan ümumi qaydadan istifadə etməklə hər bir çoxhədlinin xətti bölənlərini tapmaq olar. Lakin $x-a$ xətti çoxhədlisinə bölmə əməli **Horner sxemi** adlanan aşağıdakı üsulla daha asan yerinə yetirilir.

Tutaq ki, n dərəcəli $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$ çoxhədlisi verilmişdir. Onda bu çoxhədlinin $x-a$ çoxhədlisinə bölünməsindən alınan çoxhədlinin dərəcəsi $n-1$ olar:

$$q(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+...+b_{n-1}$$

Bunları (2.4) bərabərliyində nəzərə alıb, qruplaşdırma apardıqdan sonra aşağıdakı bərabərliyi alarıq:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n=b_0x^n+(b_1-ab_0)x^{n-2}+(b_2-ab_1)x^{x-2}+...+$$
$$+(b_{n-1}+ab_{n-2})x+(r-ab_{n-1})$$

İki çoxhədlinin bərabərliyindən istifadə etsək, aşağıdakı bərabərlikləri yaza bilərik:

$$b_0=a_0,\ b_1=a_1+ab_0,\ b_2=a_2+ab_1,\ ...,b_k=a_k+ab_{k-1},\ ...,$$
$$b_{n-1}=a_{n-2}+ab_{n-2},\ r=a_n+ab_{n-1}. \qquad (2.5)$$

Beləliklə, qismət $q(x)$ çoxhədlisinin əmsalları (2.5) düsturları ilə tapılır.

Tutaq ki, $f(x)$ çoxhədlisi $x-a$ çoxhədlisinə bölünür yəni,

$$f(x)=(x-a)q(x).$$

Aydındır ki, belə olduqda a ədədi $f(x)$ çoxhədlisinin köküdür. Ola bilər ki, bölünmədən alınan $q(x)$ çoxhədlisi də $x-a$ çoxhədlisinə bölünsün yəni, $f(x)=(x-a)^2q_1(x)$. Əgər $q_1(x)$ çoxhədlisi $x-a$ çoxhədlisinə bölünmürsə, onda deyirlər ki, a ədədi $f(x)$ çoxhədlisinin iki dəfə təkrarlanan köküdür. Ümumiyyətlə, əgər $f(x)=(x-a)^kq_k(x)$ olarsa, və $q_k(x)$ çoxhədlisi $x-a$ çoxhədlisinə bölünmürsə, onda deyirlər ki, a ədədi $f(x)$ çoxhədlisinin k a dəfə təkrarlanan köküdür.

İsbatsız olaraq aşağıdakı teoremi qeyd edək (bu teoremin sadə isbatı kompleks dəyişəli funksiyalar nəzəriyyəsində verilir).

Teorem(cəbrin əsas teoremi). Dərəcəsi birdən kiçik olmayan kompleks əmsallı hər bir çoxhədlinin kompleks ədədlər çoxluğunda heç olmazsa bir kökü var.

Cəbrin əsas teoremindən nəticə olaraq çıxır ki, kompleks əmsallı n dərəcəli hər bir çoxhədlinin kompleks ədədlər çoxluğunda təkrarlanma dərəcəsi də nəzərə alınmaqla düz n sayda kökü var.

Teorem 2.3. Əgər a ədədi $f(x)$ çoxhədlisinin k-tərtibdən təkrarlanan köküdürsə, onda $k > 1$ olduqda bu çoxhədlinin törəməsinin $k - 1$ tərtibdən təkrarlanan köküdür. $k = 1$ olduqda a ədədi $f'(x)$ çoxhədlisinin kökü deyil.

Qeyd edək ki, dərəcəsi dörddən böyük olmayan hər bir çoxhədlinin köklərini onun əmsalları ilə ifadə edən (radikalla ifadə edilən) düsturlar XVII əsrə qədər məlum idi. Lakin dörddən yüksək dərəcəli çoxhədlinin köklərini onun əmsalları ilə ifadə edən bir düsturun tapılması cəhdi uzun illər davam etsə də, nəticəsiz qaldı. Belə bir düstur tapmağın mümkün olmadığı XIX əsrin 20-ci illərində Abel tərəfindən isbat edildi. Amma bu hər hansı konkret çoxhədlinin köklərinin radikal vasitəsi ilə tapıla bilməməsi mənasına gəlmir. Verilən cəbri tənliyin köklərinin radikalla tapılması məsələləri 30-cu illərdə Qalua tərəfindən tədqiq edilmişdir. Məlum olmuşdur ki, n = 5-dən başlayaraq n dərəcəli çoxhədlilər içərisində kökləri radikal ilə tapıla bilməyən çoxhədli göstərmək olar.

SUALLAR

1. n dərəcəli çoxhədli nəyə deyilir?
2. İki çoxhədli hansı halda bərabər adlanır?
3. İki çoxhədlinin cəmi hansı çoxhədliyə deyilir?
4. İki çoxhədlinin hasili hansı çoxhədliyə deyilir?
5. Çoxhədlilərin cəmi və hasili hansı xassələrə malikdir?
6. Çoxhədlilər üçün bölmə əməli necə təyin edilir?
7. İki çoxhədlinin ortaq böləni hansı çoxhədliyə deyilir?
8. İki çoxhədlinin ən böyük ortaq böləni hansı çoxhədliyə deyilir?
9. İki çoxhədlinin ən böyük ortaq böləni necə tapılır?
10. Çoxhədlinin kökü nəyə deyilir?
11. $f(x)$ çoxhədlisinin $(x-c)$ çoxhədlisinə bölünməsindən alınan qalıq nəyə bərabərdir?
12. Horner sxemi nə üçündür?
13. k dəfə təkrarlanan kök hansı kökə deyilir?
14. Cəbrin əsas teoremi necədir?
15. Təkrarlanan kökün çoxhədlinin törəməsi ilə nə əlaqəsi var?

The page at www.qu.edu.az says:

QAFQAZ UNIVERSITY PUBLICATIONS

All rights reserved. The publications posted on the official web page of Qafqaz University for the purpose of reading and research. No part of this publication may be reproduced, translated, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without prior written permission by Qafqaz University. When it is used as literature footnote must be indicated.

OK Cancel

The page at www.qu.edu.az says:

QAFQAZ UNİVERSİTETİNİN NƏŞRLƏRİ

Bu nəşrlərin Azərbaycanda nəşr hüquqları Qafqaz Universitetinə aiddir. Nəşrlər Qafqaz Universitetinin rəsmi web səhifəsinə oxunması və araşdırma aparılması məqsədi ilə yerləşdirilmişdir. Universitetin yazılı icazəsi olmadan məlumatların nə tam, nə də hissə şəklində çap edilməsi, surətinin çıxarılması, çoxaldılması, tərcümə olunması və ya hər hansı bir digər üsulla istifadə olunması qadağandır. Ədəbiyyat kimi istifadə olunduqda mütləq dipnot göstərilməlidir.

OK Cancel

Kitabın çap olunmuş nüsxəsini əldə etmək üçün Qafqaz Universitetinin kitabxanası vəya müəlliflərlə əlaqə saxlaya bilərsiniz.

Contact with Qafqaz University Library authorities or book authors to obtain a copy of the printed book.

Ünvan: AZ0101, Xırdalan şəhəri, Həsən Əliyev küç., 120, Abşeron, Bakı, Azərbaycan

Address: Xirdalan city, Hasan Aliyev street 120, AZ0101, Absheron, Baku, Azerbaijan

Tel: (+994 12) 448 28 62-66; Faks: (+994 12) 448 28 61/67;

e-mail: info@qu.edu.az; www.qu.edu.az;