

X.M.QULİYEV, K.Q.HƏSƏNOV

DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR. MƏSƏLƏ VƏ MİSALLAR HƏLLƏRİ İLƏ

Dərs vəsaiti

*Azərbaycan Respublikası
Təhsil Nazirliyi tərəfindən
təsdiq edilmişdir*



Çaşıoğlu

BAKİ - 2001

Rə'y verənlər:

Yaqubov M.N. – BDU-nun professoru,
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru
Süleymanov C.N. – ADPU-nun dosenti,
fizika-riyaziyyat elmləri namizədi

Quliyev X.M., Həsənov K.Q. Diferensial tənliklər. Məsələ
və misallar həlləri ilə. Ali məktəblər üçün dərs vəsaiti.
Bakı: Çarşıoğlu, 2001. – 322 s.

Dərs vəsaiti adi diferensial tənliklər və onlara aid məsələlər və
misallar həllinə həsr olunub və universitetlərin, institutların tələbələri,
elmi işçilər, mühəndislər, məşğələ dərsləri aparan müəllimlər üçün
nəzərdə tutulmuşdur.

Kitabda adi diferensial tənliklərə aid qısa nəzəri mə'lumatlar verilir,
onlara aid çoxsaylı məsələ və misallar həll olunur, diferensial tənlik-
lərin qurulmasına geniş yer ayrılır.

Sərbəst çalışmaq üçün məsələ və misalların, yoxlama sualların ol-
ması kitabdən məşğələ dərslərində və kollokviumlarda istifadə etmə-
yə imkan yaradır.

1602070100 - 377

Q

082 – 01

© «Чашыоғлу» nəşriyyatı, 2001

Diferensial tənliklər kursu riyazi fənnlər arasında mühüm yer tutur.
Bu da təsadüfi deyil. Çünki həyatda baş verən bə'zi hadisələr, gedən
proseslər, elmin, texnikanın bir çox məsələləri diferensial tənliklərə
gətirilərək həll olunur.

Diferensial tənliklər adi və xüsusi törəməli tənliklərə bölünür. Bir-
dəyişənli funksiyanın törəmələri daxil olan tənliklər adi diferensial tən-
liklər, çoxdəyişənli funksiyanın xüsusi törəmələri daxil olan tənliklər
xüsusi törəməli diferensial tənliklər adlanır.

Dərs vəsaiti adi diferensial tənliklər kursuna aid qısa nəzəri
mə'lumatlar verir, məsələ və misallar həllinə həsr olunmuşdur və dörd
fəsildən ibarətdir.

Birinci fəsil birtərtibli diferensial tənliklərin həll üsullarına həsr
olunmuşdur. Əvvəlcə izoklin üsuluna, dəyişənlərə ayrılma, bir-
cins, xətti, Bernulli, tam diferensiallı, Rikkati tənliklərinə və integralla-
yıq vurğun tapılmasına aid misal və məsələlərin həll nümunələri
verilir. Sonra isə törəməyə nəzərən həll olunmamış birtərtibli diferensi-
al tənliklərə aid misallar həll edilir. Fəsilin sonunda trayektoriyaya aid
misalların həlli, tənqibə həllin tapılması üçün Eyler və ardıcıl yaxınlaş-
maların tətbiqi verilmişdir.

İkinci fəsil əvvəlində tərtibi aşağı salına bilən ikitərtibli tənliklərə
aid misalların həlli verilmiş, ikitərtibli xətti tənliklərin ümumi həllinin ta-
pılması üsullarına aid misallar həll olunmuşdur. Analoji misallar daha
yüksək tərtibli tənliklər üçün də verilir, tənliklər sisteminin həllinə aid
müxtəlif misallar, dayanıqlıq məsələsi, sərhəd məsələsi və həllin
qüvvət sırasının köməkliyi ilə tapılmasına aid misallar həll olunur.

Üçüncü fəsildə elmin, texnikanın müxtəlif sahələrini əhatə edən və
adi diferensial tənliklərə gətirilən məsələlərin həlli verilir. Burada əsas
məsələ diferensial tənliyin qurulmasıdır. Diferensial tənliyin tapılma-
sını asanlaşdırmaq məqsədi ilə əlavə izahatlar verilir, tənliyin qurulma
üsulları göstərilir.

Dördüncü fəsildə qıyabı oxuyan tələbələr və diferensial tənlikləri
sərbəst öyrənənlər üçün adi diferensial tənliklərin bütün sahələrinə aid
misalların həlləri, müstəqil həll edilmək üçün əlavə misallar, məsələlər
və fərdi tapşırıqların variantları verilmişdir.

Hər fəsilin axırında müstəqil həll etmək üçün misallar, məsələlər,
yoxlama sualları verilmişdir.

BİRTƏRTİBLİ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR

1. Adi diferensial tənliklər. Ümumi anlayışlar və təriflər

Sərbəst dəyişən x , axtarılan $y = y(x)$ funksiyası və onun $y', y'', \dots, y^{(n)}$ törəmələri arasındakı

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

münasibətinə n -*tərtibli adi diferensial tənlik* deyilir.

Diferensial tənliyə funksiyanın törəmələrinin daxil olması vacibdir.

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2)$$

tənliyə *ən yüksək tərtibli törəməyə nəzərən həll olunmuş tənlik* deyilir. Tənliyə daxil olan *ən yüksək tərtibli törəmənin tərtibinə diferensial tənliyin tərtibi* deyilir.

$$1) y' - 2y = x + 1, \quad 2) y' + 3y = 1, \quad 3) y'' + 5y' + 6y = \sin x,$$

$$4) yy' + 2x = 0, \quad 5) y''' = x^2 + 3, \quad 6) y'' = \operatorname{tg} x.$$

tənliklərdən 1), 2), 4)-birtərtibli, 3), 6)-ikiteərtibli, 5)-üçteərtibli.

Tənliyin (a, b) intervalında *həlli ilə* $y = \varphi(x)$ funksiyasına deyilir ki, bu funksiyanın tənliyə daxil olan tərtibdən törəmələri olsun, özünü və törəmələrini tənlikdə yazdıqda alınan bərabərlik $x \in (a, b)$ nəzərən eynilik kimi ödənsin, yəni

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0, \quad x \in (a, b).$$

Tənliyin $y = \varphi(x)$, $x \in (a, b)$ -*aşkar*, $\Phi(x, y) = 0$ -*qeyri-aşkar* və $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$ parametrik şəkildə həlli verilə bilər.

Tənliyin həllinin qrafikə *inteqral əyrisi* deyilir.

(1) tənliyinin

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \quad (3)$$

şərtlərini ödəyən həllinin tapılmasına *Koşi məsələsi* deyilir.

Xüsusi halda, törəməyə nəzərən həll olunmuş

$$y' = f(x, y) \quad (4)$$

tənliyinin

$$y(x_0) = y_0 \quad (5)$$

şərtlərini ödəyən həllinin tapılmasına birtərtibli diferensial tənlik üçün Koşi məsələsi deyilir. Həndəsi olaraq, bu (4) tənliyinin (x_0, y_0) nöqtəsindən keçən inteqral əyrisini tapmaqdan ibarətdir.

$f(x, y)$ funksiyası (x_0, y_0) nöqtəsinin müəyyən ətrafında kəsilməz olduqda, (4)-(5) *Koşi məsələsinin həlli var*. Əlavə olaraq (x_0, y_0) nöqtəsi ətrafında $\frac{\partial f}{\partial y}$ kəsilməz xüsusi törəməsi varsa, Koşi məsələsinin həll yeganə olur.

$f(x, y)$ funksiyasının x və y dəyişənlərinə nəzərən k tərtibə qədər bütün xüsusi törəmələri varsa, onda (4) tənliyinin istənilən həllinin $k + 1$ tərtibə qədər törəməsi olur.

Tənliyin $y = \varphi(x)$, $x \in (a, b)$ inteqral əyrisi üzərindəki hər bir nöqtədə Koşi məsələsinin həlli yeganə olarsa, ona *xüsusi həll* deyirlər.

$y = \psi(x)$, $x \in (\alpha, \beta)$ inteqral əyrisi üzərindəki hər bir nöqtədə Koşi məsələsinin həllinin yeganəliyi pozularsa, bu həll *məxsusi həll* adlanır.

Ancaq tənliyin ixtiyari xüsusi həllini $y = \varphi(x, c)$ ailəsindən c sabitinə qiymət verməklə almaq mümkündürsə, $y = \varphi(x, c)$ *ailəsinə* (4) *tənliyinin ümumi həlli* deyilir. Tənliyin ümumi həlli qeyri-aşkar $\Phi(x, y) = c$ şəkildə verildikdə $\Phi(x, y)$ -ə tənliyin *inteqralı* deyilir. Ümumi həllin $x = \varphi(t, c)$, $y = \psi(t, c)$, $t \in (\alpha, \beta)$ ifadəsinə parametrik şəkildə *ümumi həll* deyilir.

Tənliyin $y = \varphi(x, c)$ ümumi həlli məlum olduqda Koşi məsələsinin həllini almaq üçün $y_0 = \varphi(x_0, c)$ bərabərliyini c -ə nəzərən həll edib, $c = c_0$ tapırıq və c_0 ümumi həlldə yazırıq: $y = \varphi(x, c_0)$. Ümumi həll qeyri-aşkar $\Phi(x, y, c) = 0$ şəkildə verildikdə Koşi məsələsinin həllini tapmaq üçün $\Phi(x_0, y_0, c) = 0$ tənliyinin c_0 həllini tapırıq. Onda $\Phi(x, y, c_0) = 0$ Koşi məsələsinin qeyri-aşkar şəkildə həlli olur.

Tənliyin məxsusi həlli həllər ailəsinin qurşayanı kimi tapılır. $\Phi(x, y, c) = 0$ ailəsinin qurşayanı

$$\begin{cases} \Phi(x, y, c) = 0, \\ \Phi'_c(x, y, c) = 0 \end{cases}$$

sistemindən c sabitini yox etməklə alınır. Ailənin qurşayanı varsa, 0 , məxsusi həll olur.

Ümumi həll mə'lum olmadıqda, məxsusi həll diskrimat əyriləri arasında axtarılır.

$$F(x, y, y') = 0$$

tənliyin diskrimat əyrisi

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F'_{y'}(x, y, y') = 0 \end{cases}$$

sistemindən y' yox etməklə alınan $R(x, y) = 0$ tənliyi ilə təyin olunur. Tənlik $y' = f(x, y)$ şəklində verilmişdirsə $\frac{1}{f_y(x, y)} = 0$ tənliyi

ilə təyin olunan əyrilərə məxsusi həll üçün *şübhəli əyrilər* deyilir. Məxsusi həll məxsusi həll üçün *şübhəli əyrilər* arasında axtarılır.

Tutaq ki, $f(x, y)$ funksiyası xoy müstəvisinin D oblastında təyin olunmuşdur. Hər bir $(x, y) \in D$ nöqtəsi üçün bu nöqtədən bucaq əmsalı $k = f(x, y)$ olan düz xətt keçirək. Onda D oblastında *istiqamətlər meydanı* yaranır.

Həndəsi olaraq diferensial tənliyi həll etmək qrafiki D oblastında yerləşən ele əyrilər tapmaqdan ibarətdir ki, bu əyrilərin hər bir nöqtəsində çəkilən toxunan meydanın həmin nöqtəsindəki istiqaməti ilə üst-üstə düşsün.

1. $y = x \ln x$ funksiyasının $xy' - y = x$ tənliyinin həlli olduğunu göstərin.

HƏLLİ. $y = x \ln x$ funksiyasının verilmiş tənliyin həlli olması üçün $y' = (x \ln x)' = \ln x + 1$ törəməsinin olması vacibdir və y, y' -in qiymətlərini tənlikdə yazdıqda onu eyniliyə çevirməlidir:

$$x(\ln x + 1) - x \ln x = x, \quad x = x.$$

Deməli, $y = x \ln x$ funksiyası verilmiş tənliyin həllidir.

2. $y = Ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$ funksiyasının $y' + 2y = e^x$ tənliyinin ümumi həlli olduğunu göstərin.

HƏLLİ. $y = Ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$ funksiyası və onun $y' = -2Ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$ törəməsinə verilmiş tənlikdə yerinə yazsaq

$$-2Ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^x + 2Ce^{-2x} + \frac{2}{3}e^x = e^x,$$

Deməli, $y = Ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$ funksiyası C -sabitinin ixtiyari qiymətində verilən tənliyin həlli olur. İxtiyari $y(x_0) = y_0$ başlangıç şərtinə baxaq. $y = Ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$ funksiyasında x, y əvəzinə verilən x_0, y_0 qiymətlərini yerinə yazsaq: $y_0 = Ce^{-2x_0} + \frac{1}{3}e^{x_0}$. Alınan bərabərliyi

C -yə nəzərən həll edib, yerinə yazsaq. Onda alınan $y = \left(y_0 - \frac{1}{3}e^{x_0} \right) e^{2(x_0-x)} + \frac{1}{3}e^x$ funksiyası $y(x_0) = y_0$ başlangıç şərtini ödə-

yən həll olur. Deməli, $y = Ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$ ailəsi verilən tənliyin ümumi həlli olur.

3. Qeyri-aşkar şəkildə verilmiş $e^{-y} - cx = 1$ funksiyasının $xy' + 1 = e^y$ tənliyinin ümumi həlli olduğunu göstərin.

HƏLLİ. Verilən $e^{-y} - cx = 1$ bərabərliyindən $y = -\ln(1 + cx)$

funksiyasını tapaq. Buradan $y' = -\frac{c}{1+cx}$ alırıq. Bunları verilən tənlikdə

yazaq. $-\frac{cx}{1+cx} + 1 = e^{-\ln(1+cx)}$. Buradan $\frac{1}{1+cx} = \frac{1}{1+cx}$. Deməli,

ixtiyari c ədədi üçün $y = -\ln(1+cx)$ funksiyası verilən tənliyin həlli olur. İxtiyari $y(x_0) = y_0$ başlanğıc şərtini ödəyən həllə baxaq. $y_0 = -\ln(1+cx_0)$ bərabərliyindən c sabitini tapaq. $x_0 \neq 0$ olduqda

$cx_0 = e^{-y_0} - 1$, $c = \frac{1}{x_0}(e^{-y_0} - 1)$ olur. Onda qeyri-aşkar şəkildə ve-

rilmiş $e^{-y} - \frac{x}{x_0}(e^{-y_0} - 1) = 1$ funksiyası Koşi məsələsinin həlli olur.

Deməli, $\Phi(x, y) = \frac{1}{x}(e^{-y} - 1)$ funksiyası verilən tənliyin inteqralı olur.

4. Parametrik şəkildə verilmiş $x = te^t$, $y = e^{-t}$ funksiyasının $(1+xy)y' + y^2 = 0$ tənliyinin həlli olduğunu göstərin.

HƏLLİ. $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$, $x'_t = e^t(1+t)$, $y'_t = -e^{-t}$ olduğundan,

$y'_x = -\frac{e^{-t}}{e^t(1+t)} = -\frac{e^{-2t}}{1+t}$. x, y və y' -in ifadələrini verilmiş tənlikdə

yazsaq,

$$(1+te^te^{-t})\left(-\frac{e^{-2t}}{1+t}\right) + (e^{-t})^2 = -(1+t)\frac{e^{-2t}}{1+t} + e^{-2t} = -e^{-2t} + e^{-2t} = 0$$

Deməli, verilmiş $x = te^t$, $y = e^{-t}$ funksiyası verilən tənliyin həlli olur.

5. $y = c \sin(\omega x + \varphi)$ funksiyasının φ və $c \geq 0$ ədədləri üçün $yy'' + \omega^2 y = 0$ ($\omega \geq 0$) tənliyinin ümumi həlli olduğunu göstərin.

HƏLLİ. İxtiyari φ və $c \geq 0$ ədədləri üçün $y = c \sin(\omega x + \varphi)$ funk-

siyasının verilən tənliyin həlli olduğunu göstərək. $y' = c\omega \cos(\omega x + \varphi)$, $y'' = -c\omega^2 \sin(\omega x + \varphi)$. y və y'' -in ifadələrini verilmiş tənlikdə yazsaq:

$$-c\omega^2 \sin(\omega x + \varphi) + c\omega^2 \sin(\omega x + \varphi) = 0.$$

İxtiyari $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$ başlanğıc şərtlərini ödəyən həllini c və φ sabitlərinə ədədi qiymətlər verməklə almaq mümkün olduğunu göstərək:

$$\begin{cases} y_0 = c \sin(\omega x_0 + \varphi), \\ y_1 = c\omega \cos(\omega x_0 + \varphi) \end{cases}$$

sistemindən

$$\begin{cases} \sin(\omega x_0 + \varphi) = \frac{y_0}{c}, \\ \cos(\omega x_0 + \varphi) = \frac{y_1}{\omega c} \end{cases}$$

tapıb, bərabərliyin hər iki tərəfini kvadrata yüksəldib, tərəf-tərəfə toplasaq $y_0^2 + \frac{y_1^2}{\omega^2} = c^2$, bərabərliyin hər iki tərəfini tərəf-tərəfə bölsək

$$\text{alırıq: } \operatorname{tg}(\omega x + \varphi) = \frac{y_0 \omega}{y_1}.$$

$$\text{Onda } c = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{y_1}{\omega}\right)^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y_0 \omega}{y_1} - \omega x_0.$$

Tapılan ifadələri verilən funksiyada yazsaq:

$$y = \frac{1}{\omega} \sqrt{(y_0 \omega)^2 + y_1^2} \sin\left(\omega(x - x_0) + \operatorname{arctg} \frac{y_0 \omega}{y_1}\right).$$

Onda alınan ifadə Koşi məsələsinin həlli olur.

6. Parametrik şəkildə verilmiş $x = c \cos t$, $y = c \sin t$ funksiyasının $x + yy' = 0$ tənliyinin ümumi həlli olduğunu göstərin.

HƏLLİ. $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{c \cos t}{-c \sin t} = -\frac{\cos t}{\sin t}$. x, y, y'_x -in ifadələrini ve-

rilmiş tənlikdə yerinə yazsaq

$$c \cos t + c \sin t \left(-\frac{\cos t}{\sin t} \right) = 0, \quad 0 = 0.$$

Deməli, istənilən c üçün $x = c \cos t$, $y = c \sin t$ funksiyası verilmiş tənliyin həlli olur. Bu funksiya tənliyin ümumi həllidir. Doğrudan da, ixtiyari $y(x_0) = y_0$ şərtini ödəyən həll $c = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, $x_0 =$

$$= \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \cos t_0, \quad t_0 = \arccos \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \text{ götürməklə alınır:}$$

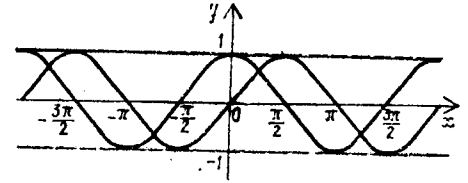
$$\begin{cases} x = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \cos t, \\ y = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \sin t. \end{cases}$$

7. $y' = \sqrt{1 - y^2}$ tənliyinin həllin varlığı və yeganəliyini təmin edən oblastı tapın.

HƏLLİ. Tənliyin sağ tərəfi $f(x, y) = \sqrt{1 - y^2}$ funksiyası $\bar{D} = \{-\infty < x < +\infty, -1 \leq y \leq 1\}$ oblastında kəsilməzdir. Deməli, ixtiyari $(x_0, y_0) \in \bar{D}$ nöqtəsindən keçən integral əyrisi var. $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{1 - y^2}}$

törəməsi $D = \{-\infty < x < +\infty, -1 < y < 1\}$ oblastında kəsilməzdir. Ona görə də $(x_0, y_0) \in D$ nöqtəsindən tənliyin yeganə integral əyrisi keçir. $y = \pm 1$ olduqda törəmə sonsuzluğa çevrilir. Bu, $y = \pm 1$ düz xətləri məxsusi həll üçün şübhəli əyrilər olur. $y = \pm 1$ düz xətləri tənliyi ödəyir. Göstərək ki, bunlar məxsusi həllərdir. Bilavasitə yoxlamaqla göstərmək olar ki, $y = \sin(x + c)$ tənliyin həllidir. $y = 1$ düz xətti üzərində ixtiyari $(x_0, 1)$ nöqtəsi götürək. Onda bu nöqtədən iki $y =$

$= \sin\left(x + \frac{\pi}{2} - x_0\right)$ və $y = 1$ həlləri keçir. Deməli, $y = 1$ düz xətti üzərində həllin yeganəliyi pozulur, yəni $y = 1$ tənliyin məxsusi həlli olur. Eyni qayda ilə göstərmək olar ki, $y = -1$ də məxsusi həldir (şəkil 1).



Şəkil 1.

8. $y' = \sqrt{x^2 - y} - x$ tənliyinin həllinin varlığı və yeganəliyini təmin edən oblastı tapın.

HƏLLİ. Tənliyin sağ tərəfi $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y} - x$ funksiyası $\bar{D} = \{-\infty < x < +\infty, y \leq x^2\}$ oblastında kəsilməzdir. Onda hər bir $(x_0, y_0) \in \bar{D}$ nöqtəsindən tənliyin integral əyrisi keçir. $\frac{\partial f}{\partial y} =$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{x^2 - y}} \text{ törəməsi } D = \{-\infty < x < +\infty, y < x^2\} \text{ oblastında kə-}$$

silməzdir. $y = x^2$ əyrisi üzərində $\frac{\partial f}{\partial y}$ törəməsi sonsuzluğa çevrilir.

Lakin $y = x^2$ funksiyası verilən tənliyi ödəmir: $2x \neq \sqrt{x^2 - x^2} - x$. Ona görə də tənliyin məxsusi həlli yoxdur. Deməli, \bar{D} oblastında həll var və bu həll yeganədir.

9. $y' = x + y^{\frac{7}{3}}$ tənliyinin həllinin koordinat başlanğıcının ətrafında neçə tərtib törəməsi var?

HƏLLİ. Tənliyin sağ tərəfi $f(x, y) = x + y^{\frac{7}{3}}$ funksiyası koordinat başlanğıcının ətrafında kəsilməzdir və x, y dəyişənlərinə görə

$$f'_x(x, y) = 1, \quad f'_y(x, y) = \frac{7}{3} y^{\frac{4}{3}}, \quad f''_{xx}(x, y) = 0, \quad f''_{xy}(x, y) = 0,$$

$f''_{yy}(x, y) = \frac{28}{9} y^{\frac{1}{3}}$ kəsilməz törəmələri var. Aydındır ki,

$$f'''_{yyy}(x, y) = \frac{28}{9} \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} = \frac{28}{27} \frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}$$

törəməsi $y = 0$ olduqda sonsuzluğa çevrilir. Odur ki, $f(x, y)$ funksiyasının $(0, 0)$ nöqtəsi ətrafında x və y dəyişənlərinə nəzərən ikinci tərtibə qədər kəsilməz xüsusi törəmələri olur. Onda baxılan tənliyin həllinin 0 nöqtəsi ətrafında üçüncü tərtibə qədər törəməsi var.

2. İzoklin üsulu

Tutaq ki,

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

tənliyi verilmişdir. Burada $f(x, y)$ funksiyası xoy müstəvisinin D oblastında kəsilməzdir və kəsilməz xüsusi törəmələri var. Verilən $M(x, y) \in D$ nöqtəsində meydanın istiqamətini bu nöqtədən keçən və bucaq əmsalı $k = f(x, y)$ olan düz xətt təyin edir. Meydanın eyni istiqamətli nöqtələrinin həndəsi yerindən ibarət olan əyriyə izoklin deyilir. (1) tənliyinin izoklinləri

$$f(x, y) = k \quad (2)$$

tənliyi ilə təyin olunur. Burada k -parametrdir. k -parametrinin hər bir qiymətində (2) bərabərliyi bir və ya bir neçə əyri verə bilər və bu əyrlər izoklinlər olur. k -parametrinə bir-birinə yaxın qiymətlər verməklə bir-birinə yaxın izoklinlər qurmaq olur. Bu da integral əyrilərinin daha dəqiq təqribi təsvirini verməyə imkan yaradır. $f(x, y) = 0$ bərabərliyi ilə verilən izoklin ekstremal adlanır, çünki integral əyrlər bu izoklin ilə kəsişdiyi nöqtədə maksimum və ya minimum qiymət ala bilər. D oblastının $f(x, y) > 0$ şərtini ödəyən hissəsində (nöqtələr üçün) integral əyrləri artan, $f(x, y) < 0$ olan hissəsində azalan olur.

$y'' = f'_x(x, y) + f'_y(x, y)y' = f'_x(x, y) + f'_y(x, y)f(x, y)$ olduğundan

$$f'_x(x, y) + f(x, y)f'_y(x, y) > 0$$

olduqda, integral əyrləri çökük,

$$f'_x(x, y) + f(x, y)f'_y(x, y) < 0$$

olduğu hissədə qabarıq olur.

$$f'_x(x, y) + f(x, y)f'_y(x, y) = 0$$

tənliyini təyin etdiyi əyri nöqtələri integral əyriləri üçün əylmə nöqtəsi olur (əgər varsa).

1. $y' = y - x$ tənliyinin integral əyrilərinin izoklin üsulu ilə təqribi qrafikini qurun.

HƏLLİ. Tənlikdə $y' = k$ əvəzləməsini aparsaq, $k = y - x$ alırıq.

Deməli, $y = x + k$ tənliyin izoklin əyrilərinin parametrik tənliyi olur.

$k = 0$ olduqda $y = x$ ekstremal izoklin alınır. Bu düz xətt üzərindəki hər bir nöqtədə meydanın istiqaməti ox oxuna paralel olur. Integral əyriləri ekstremal əyrisi ilə kəsişdiyi nöqtədə özünün maksimum və ya minimum qiymətini ala bilər. $k = 1$ olduqda $y = x + 1$ izoklin üzərində meydanın istiqaməti 45° olur, ($k = y' = 1 = \tan 45^\circ$). $k = -1$ olduqda $y = x - 1$ izoklin üzərindəki hər bir nöqtədə meydanın istiqaməti 135° olur. $y > x$ olduqda $y' > 0$, $y < x$ olduqda isə $y' < 0$ olur. Deməli, $y = x$ düz xəttindən yuxarıda integral əyriləri artan, $y = x$ düz xəttindən aşağıda integral əyriləri azalan olur.

Verilmiş tənlikdən

$$y'' = y' - 1 = y - x - 1 > 0,$$

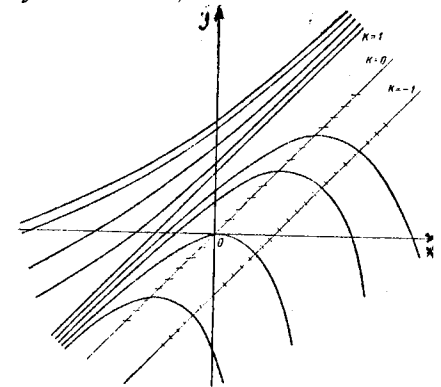
yəni $y > x + 1$ olduqda integral əyriləri çökük,

$$y'' = y - x - 1 < 0,$$

yəni $y < x + 1$ olduqda isə integral əyriləri qabarıq olur.

$y = x + 1$ funksiyası verilən tənliyi ödəyir ($1 = x + 1 - x$), odur ki, tənliyin integral əyrilərinin əylmə nöqtəsi yoxdur.

Yuxarıda deyilənləri nəzərə alaraq verilən tənliyin integral əyrilərinin təqribi qrafikini qurmaq olar. (şəkil 2).



Şəkil 2.

2. İzoklin üsulu ilə $y' = x^2 + y^2$ tənliyinin integral əyrilərinin təqribi qrafikini qurun.

HƏLLİ. $y' = k$ əvəzləməsini aparsaq, $x^2 + y^2 = k$, ($k > 0$) izoklin əyrilərini alırıq. $y' > 0$ olduğundan integral əyriləri həmişə ar-tan olur. $k = 0$ olduqda $x^2 + y^2 = 0$, yəni $(0,0)$ nöqtəsi alınır. De-məli, integral əyrilərinin ekstremumu yoxdur. $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$ olduqda

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ izokli-}$$

ni üzərində meydanın istiqaməti 30° , $k = 1$

olduqda, $x^2 + y^2 = 1$

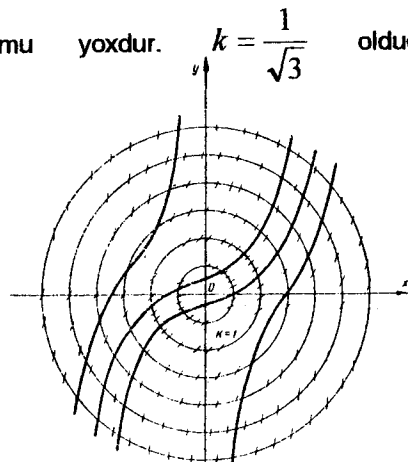
izoklini üzərində meydanın istiqaməti 45° ,

$k = \sqrt{3}$ olduqda isə

$x^2 + y^2 = \sqrt{3}$ izoklini

üzərində meydanın istiqaməti 60° , və s. olur.

Bunları nəzərə alaraq verilən tənliyin integral əyrilərinin təqribi qrafikini qurmaq olar (şəkil 3).



Şəkil 3.

3, $y' = y - x^2$ tənliyinin integral əyrilərinin əyilmə nöqtələrinin həndəsi yerindən ibarət olan əyrini tapın.

HƏLLİ. Əyrinin əyilmə nöqtəsi üçün $y'' = 0$. Verilən tənliyi x -ə nəzərən diferensiallayaq. $y'' = y' - 2x$. Tənlikdən $y' = y - x^2$ qiymətini axırıncı bərabərlikdə yazaq: $y'' = y - x^2 = 2x$.

Buradan $y'' = 0$ olduğunu nəzərə alaq. Alınan $y = x^2 + 2x$ əyrisi verilmiş tənliyin integral əyrilərinin əyilmə nöqtələrinin həndəsi yeridir.

3. Dəyişənlərinə ayrılan diferensial tənliklər

Tutaq ki, törəməyə nəzərən həll olunmuş birtərtibli diferensial tənliyin sağ tərəfi iki funksiyanın hasilidir. Bu funksiyalardan biri yalnız x -dən, o biri yalnız y -dən aslıdır:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y) \quad (1)$$

Onda (1) tənliyinə *dəyişənlərinə ayrılan diferensial tənlik* deyilir.

Bu tənliyin hər iki tərəfini dx -ə vurub $\varphi(y)$ -ə bölsək,

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx \quad (2)$$

dəyişənlərinə ayrılmış diferensial tənlik alırıq. Bu tənliyi integrallayaq

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx + C \quad (3)$$

Bu, verilən tənliyin ümumi integralıdır. Bundan başqa $\varphi(y) = 0$ şərtini ödəyən y_0 üçün $y = y_0$ tənliyin həlli olur. Bu həllin ümumi həlldən alınmayanları məxsusi həll olur.

Dəyişənlərinə ayrılan diferensial tənliklər

$$f_1(x)\varphi_1(y)dx + f_2(x)\varphi_2(y)dy = 0 \quad (4)$$

şəklində də verilə bilər.

(4) tənliyini həll etmək üçün bərabərliyin hər iki tərəfini $\varphi_1(y)f_2(x)$ hasilinə bölsək

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = 0 \quad (5)$$

dəyişənlərinə ayrılmış diferensial tənlik alırıq. Bu tənliyi integrallasaq

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = C \quad (6)$$

(6) ifadəsi (4) tənliyinin ümumi integralıdır. Nəzərə almaq lazımdır ki, (4) tənliyinin hər iki tərəfini $\varphi_1(y)f_2(x)$ hasilinə böldükdə, bu ha-

sili sıfıra çeviren nöqtələrə uyğun $y = y_k$, $x = x_i$ həllər də alın bilər. $\varphi_1(y_k) = 0$, $f_2(x_i) = 0$. Bu həllərdən ümumi həllden alınmayanları məxsusi həll olur.

1. $xyy' = 1 - x^2$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. Tənlik dəyişənlərinə ayrılan diferensial tənlikdir. $y' = \frac{dy}{dx}$ olduğunu nəzərə alsaq və bərabərliyin hər iki tərəfini dx -ə vurub, x -ə bölsək alırıq. $ydy = \frac{1-x^2}{x} dx$.

Bu tənlik dəyişənlərinə ayrılmış tənlikdir. Tənliyi inteqrallasaq

$$\int ydy = \int \frac{dx}{x} - \int xdx + \ln C, \quad y^2 + x^2 = 2 \ln |Cx|.$$

2. $x(1-y^2)dx + y(1-x^2)dy = 0$ tənliyini həll edin və məxsusi həllin olub-olmadığını araşdırın.

HƏLLİ. Tənlik dəyişənlərinə ayrılan diferensial tənlikdir. Bərabərliyin hər tərəfini $(1-y^2)(1-x^2)$ hasilinə bölek və inteqrallayaq.

$$\begin{aligned} \int \frac{xdx}{1-x^2} + \int \frac{ydy}{1-y^2} &= C, \\ -\frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{1-x^2} - \frac{1}{2} \int \frac{d(1-y^2)}{1-y^2} &= -\frac{1}{2} \ln C_1, \quad \left(C = -\frac{1}{2} C_1 \right), \\ -\frac{1}{2} \ln |1-x^2| - \frac{1}{2} \ln |1-y^2| &= -\frac{1}{2} \ln C_1, \quad (1-x^2)(1-y^2) = C_1. \end{aligned}$$

Bu, verilmiş tənliyin ümumi inteqralıdır. İndi məxsusi həlli araşdıraq. Bunun üçün $(1-x^2)(1-y^2) = 0$ tənliyini həll edək. Bu tənliyin bütün köklərini (yəni $x = \pm 1$, $y = \pm 1$) ümumi inteqraldan $C_1 = 0$ götürməklə almaq olar. Deməli, verilmiş tənliyin məxsusi həlli yoxdur.

3. $xydx + (1+y^2)\sqrt{1-x^2}dy = 0$ tənliyini həll edin və məxsusi həllin varlığını araşdırın.

HƏLLİ. Tənliyin hər iki tərəfini $y\sqrt{1-x^2}$ hasilinə bölsək, dəyişənlərinə ayrılmış tənlik alırıq: $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \frac{1+y^2}{y}dy = 0$. Alınan tənliyi inteqrallayaq.

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{1+y^2}{y} dy &= \ln C, \\ -\frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{dy}{y} + \int y dy &= \ln C, \\ -\sqrt{1-x^2} + \ln |y| + \frac{y^2}{2} &= \ln C, \quad y = C e^{\sqrt{1-x^2} - \frac{y^2}{2}}. \end{aligned}$$

Bu, verilmiş tənliyin ümumi həllidir. $y\sqrt{1-x^2} = 0$ tənliyinə baxaq. $y = 0$ həlli ümumi həllden $C = 0$ götürməklə alındığından xüsusi, $x = \pm 1$ həlləri isə C sabitinə ədədi qiymətlər verməklə alınmadığından verilmiş tənliyin məxsusi həlli olur.

4. Radioaktiv maddənin parçalanma sürəti maddənin miqdarı ilə mütləq tənasibdir. Başlangıç $t = 0$ anında maddənin miqdarının m_0 olduğunu bilərək, onun parçalanma qanununu tapın.

HƏLLİ. Tutaq ki, t anında radioaktiv maddənin kütləsi $m(t)$, $t + \Delta t$ anında $m + \Delta m$ (Δm qədər azalır) olur. Δt müddətində ra-

dioaktiv parçalanmanın orta sürəti $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ olar. Ani sürət isə

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{dm}{dt}$ olar. Onda məsələnin şərtinə görə yaza bilərik

$$\frac{dm}{dt} = -km.$$

Burada k -mütənasiblik əmsalıdır (mənfi işarə kütləsinin zaman keçdikcə azalmasını göstərir). Beləliklə, qoyulan məsələni həll etmək üçün alınan tənliyin həllini tapmaq lazımdır.

$$\frac{dm}{m} = -kdt, \quad \int \frac{dm}{m} = -k \int dt + \ln C, \quad \ln m = -kt + \ln C,$$

$$m = Ce^{-kt}.$$

$t = 0$ olduqda $m = m_0$ olduğundan $m_0 = C$ alınır. Beləliklə, verilmiş məsələnin həlli $m = m_0 e^{-kt}$. Mütənasiblik əmsalı k təcrübə yolu ilə təyin olunur, məsələn, radium üçün $k = 0,00044$ götürülür.

5. Əyri üzərində götürülmüş hər bir nöqtə üçün koordinat oxları, əyrinin özü və götürülmüş nöqtənin ordinatı ilə məhdud olan fiqurun sahəsi həmin nöqtənin koordinatları üzərində qurulmuş düzbucaqlının sahəsinin $\frac{1}{3}$ -nə bərabərdir. Bu əyrini tapın.

HƏLLİ. Əyri üzərində götürülmüş nöqtəni $M(x, y)$ qəbul etsək, məsələnin şərtinə görə yazsaq:

$$\int_0^x y(s) ds = \frac{1}{3} xy.$$

Bərabərliyin hər tərəfini x dəyişəninə görə diferensiallayaq:

$$y = \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}xy', \quad \text{Buradan } xy' = 2y. \quad \text{Dəyişənləri ayırıb, tənliyi inteqrallasaq } \frac{dy}{y} = 2 \frac{dx}{x}, \quad \ln|y| = 2\ln|x| + \ln C, \quad y = Cx^2.$$

Deməli, axılan əyri $y = Cx^2$ parabolalar ailəsini verir.

4. Bircins diferensial tənliklər

$f(tx, ty) = t^m f(x, y)$ şərtini ödəyən $f(x, y)$ funksiyasına m

dərəcəli bircins funksiya deyilir. Məsələn, $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ funksiyası ikidərəcəli bircins funksiyadır. Doğrudan da $f(tx, ty) = t^2 x^2 - t^2 xy + t^2 y^2 = t^2 (x^2 - xy + y^2) = t^2 f(x, y)$.

$f(x, y) = \frac{3xy}{x^2 + 2y^2}$ funksiyası isə sıfır dərəcəli bircins funksiyadır:

$$f(tx, ty) = \frac{3txty}{t^2 x^2 + 2t^2 y^2} = \frac{t^2 (3xy)}{t^2 (x^2 + 2y^2)} = t^0 f(x, y).$$

$f(x, y)$ funksiyası sıfır dərəcəli bircins funksiyadırsa $y' = f(x, y)$ diferensial tənliyi *bircins tənlik adlanır*. Bircins tənliyi

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad (1)$$

şəklində göstərmək olar. Bircins tənliyi $\frac{y}{x} = z$ ($y = xz$) əvəzləməsi ilə (z yeni axılan funksiyadır) dəyişənlərinə ayrılan diferensial tənliyinə gətirilir. $y = xz$ ifadəsini diferensiallasaq alırıq: $\frac{dy}{dx} = z +$

$+ x \frac{dz}{dx}$. y və y' -in qiymətlərini (1) tənliyində yerinə yazsaq alırıq:

$$z + x \frac{dz}{dx} = \varphi(z), \quad \frac{dz}{\varphi(z) - z} = \frac{dx}{x} \quad (2)$$

Bu tənliyi həll edib, $z = \frac{y}{x}$ əvəzləməsini nəzərə alsaq, verilən tənliyin həllini tapırıq. z_0 ədədi $\varphi(z) = z$ tənliyinin həlli olduqda $y = z_0 x$ funksiyası da həll olur. Bu həll ümumi həldən alınmadıqda məxsusi həll olur.

$M(x, y)$, $N(x, y)$ funksiyaların *eyni dərəcəli bircins olduqda*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (3)$$

tənliyi bircins olur.

1. $y' = \frac{x+y}{x-y}$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$ funksiyası sıfır dərəcəli bircins funksiya-
dır:

$$f(tx, ty) = \frac{tx+ty}{tx-ty} = \frac{t(x+y)}{t(x-y)} = t^0 \frac{x+y}{x-y} = f(x, y).$$

Verilmiş tənlik bircins diferensial tənlikdir. $y = xz$ əvəzləməsini
aparaq. Onda $y' = z + xz'$. y və y' -in qiymətlərini verilən tənliyində
yerinə yazsaq alırıq:

$$z + xz' = \frac{x+xz}{x-xz}, \quad xz' = \frac{1+z^2}{1-z}, \quad \frac{1+z}{1+z^2} dz = \frac{dx}{x}.$$

Axırncı tənlik dəyişənlərinə ayrılmış tənlikdir. Bu tənliyi inteq-
rallayaq.

$$\int \frac{1+z}{1+z^2} dz = \int \frac{dx}{x} + \ln C, \quad \int \frac{dz}{1+z^2} - \int \frac{zdz}{1+z^2} = \ln|x| + \ln C,$$

$$\arctg z - \frac{1}{2} \ln(1+z^2) = \ln|x| + \ln C, \quad z = \frac{y}{x} \text{ olduğundan}$$

$$\arctg \frac{y}{x} - \ln C \sqrt{x^2 + y^2}.$$

2. $(3y^2 + 3xy + x^2)dx = (x^2 + 2xy)dy$ tənliyini həll edin.

$$\text{HƏLLİ. } M(x, y) = 3(y)^2 + 3(xy) + (x)^2 = t^2 M(x, y)$$

$$N(x, y) = (x)^2 + 2xyt = t^2(x^2 + 2xy) = t^2 N(x, y)$$

olduğundan $M(x, y)$ və $N(x, y)$ ikidərəcəli bircins funksiylərdir.
Deməli, verilən tənlik bircinsdir. $y = xz$ əvəzləməsini aparaq. Onda
 $dy = zdx + xdz$. y -in və dy -in bu qiymətlərini verilmiş tənlikdə yerinə
yazaq.

$$(3x^2z^2 + 3xxz + x^2)dx = (x^2 + 2xxz)(zdx + xdz)$$

Buradan

$$(z^2 + 2z + 1)dx = x(1 + 2z)dz, \quad \int \frac{1+2z}{(1+z)^2} dz = \int \frac{dx}{x} + \ln C,$$

$$\int \left(\frac{2}{1+z} - \frac{1}{(1+z)^2} \right) dz = \ln|x| + \ln C,$$

$$2\ln|1+z| + \frac{1}{1+z} = \ln|x| + \ln C.$$

$$z = \frac{y}{x} \text{ əvəzləməsini nəzərə alsaq } Cx^3 = (x+y)^2 e^{\frac{x}{x+y}}.$$

3. Hər bir nöqtəsində toxunma nöqtəsinin koordinatlarının cəmi toxu-
nanaltının uzunluğuna bərabər olan əyrini tapın.

HƏLLİ. Tutaq ki, $y = y(x)$ əyrisinə $M(x, y)$ nöqtəsində çəkilən
toxunan ox oxunu A nöqtəsində kəsir (şəkil 4). Onda AM parçası-
nın ox oxu üzərində proyeksiyası, yəni AP parçası toxunanaltı olur.

$$\triangle AMP\text{-dən: } \frac{MP}{AP} = \operatorname{tg} \alpha = y', \quad MP = y.$$

$$\text{Onda } AP = \frac{y}{y'}, \quad y' = \frac{y}{AP}.$$

Məsələnin şərtinə görə $AP = x + y$.

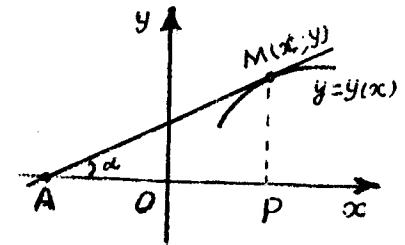
$$\text{Onda } y' = \frac{y}{x+y} \text{ diferensial tənli-}$$

yini alırıq. Alınan tənlik bircins tən-
likdir. $y = xz$ əvəzləməsini və $y' =$
 $z + xz'$ ifadəsini tənlikdə yerinə
yazaq.

$$z + xz' = \frac{xz}{x+xz}, \quad xz' = \frac{z^2}{1+z}, \quad \frac{1+z}{z^2} dz = \frac{dx}{x},$$

$$-\int \frac{dz}{z^2} - \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x} + \ln C, \quad \frac{1}{z} - \ln|z| = \ln|x| + \ln C,$$

$$\frac{1}{z} = \ln|zx| + \ln C, \quad \ln|C| = \frac{x}{y}, \quad x = y \ln|Cy|.$$



Şəkil 4.

5. Bircins tənliyə gətirilə bilən tənliklər

$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}\right)$ şəklində verilmiş diferensial tənlik bircins tənliyə gətirilə bilər. Burada aşağıdakı halları nəzərdən keçirək:

1) $c = c_1 = 0$ olduqda tənlik bircins olur. Oudur ki, a, c_1 ədədlərindən heç olmazsa birinin sıfırdan fərqli halına baxaq.

2) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} \neq 0$ olduqda, $\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \\ a\alpha + b\beta + c = 0 \end{cases}$ sistemini həll edib,

$x = \xi + \alpha, \quad y = \eta + \beta$ əvəzləməsi aparmaqla bircins olan

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a\xi + b\eta}\right) \text{ tənliyini alırıq.}$$

3) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} = 0$ olduqda, $a_1x + b_1y = k(ax + by)$, ($k = \text{const}$) olur

və verilmiş tənlik $y' = F(ax + by)$ şəklinə düşür və $z = ax + by$ əvəzləməsi ilə həll olunur.

1. $(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. Verilmiş tənliyi $\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 4y + 6}{x + y - 3}$ şəklində yazaq. On-

da $c_1 = 6, \quad c = -3$ və $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$ olduğundan

$$\begin{cases} 2\alpha - 4\beta + 6 = 0, \\ \alpha + \beta - 3 = 0 \end{cases}$$

sistemini həll edib $\alpha = 1, \beta = 2$ tapırıq. Onda $x = 1 + \xi, \quad y = 2 + \eta$ əvəzləməsinin köməklili ilə verilmiş tənlik $2(\xi - 2\eta)d\xi + (\xi + \eta)d\eta = 0$ bircins tənliyinə gətirilir. Tənliyini həll etmək üçün $\eta = \xi u$ əvəzləməsini aparaq. Onda tənlik $(2 - 3u + u^2)d\xi + \xi(1 + u)du = 0$ şəklinə düşür. Dəyişənləri ayırıb, həll etsək:

$$\begin{aligned} - \int \frac{1+u}{u^2-3u+2} du &= \int \frac{d\xi}{\xi} + \ln C, \quad 2\ln|u-1| - 3\ln|u-2| = \\ &= \ln|\xi| + \ln C, \quad C\xi = \frac{(u-1)^2}{(u-2)^3}, \quad u = \frac{\eta}{\xi} = \frac{y-2}{x-1}, \end{aligned}$$

$$C(y-2x)^3 = (y-x-1)^2.$$

2. $(2x + y - 1)dx - (4x + 2y - 3)dy = 0$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$ olduğundan (3-cü hal) $z = 2x + y$ əvəzləmə-

sini aparaq. Onda $dy = dz - 2dx$ və əvəzləməni nəzərə alsaq verilmiş tənlik $(z-1)dx - (2z-3)(dz-2dx) = 0, \quad (5z-7)dx = (2z-3)dz$ şəklinə düşür. Dəyişənləri ayırsaq və integrallasaq

$$\frac{2z-3}{5z-7} dz = dx, \quad \int \frac{2z-3}{5z-7} dz = \int dx = \ln C, \quad \frac{2}{5} \int \frac{5z-7}{5z-7} dz -$$

$$- \frac{1}{5} \int \frac{dz}{5z-7} = \int dx = \ln C, \quad \frac{2}{5} \int dz - \frac{1}{5} \int \frac{dz}{5z-7} = x = \ln C,$$

$$\frac{2}{5}z - \frac{1}{25} \ln|5z-7| = x = \ln C, \quad 10z - \ln|5z-7| = 25x - 25\ln C,$$

$$\ln|5z-7| = \ln C_1 = 10z - 25x, \quad (\ln C_1 = 25\ln C).$$

$$\frac{5z-7}{C_1} = e^{5(2y-x)}, \quad 10x + 5y - 7 = C_1 e^{5(2y-x)}.$$

6. Ümumileşmiş biricins diferensial denlikler

$$F(tx, t^k y, t^{k+1} y') = t^m F(x, y, y')$$

beraberiği ödendikde $F(x, y, y') = 0$ ümumileşmiş biricins denlik adlanır ve $y = \pm x^k z$ evezlemesinin köməkliyi ilə dəyişənlərə ayrılan tənliyə gətirilir. Bəzi tənliklər $y = \pm z^m$ evezlemesi ilə biricins tənliyə gətirilir.

1. $2x^2 y' = y^3 + xy$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. $x \rightarrow tx, y \rightarrow t^k y, y' \rightarrow t^{k+1} y'$ evezlemesini aparsaq $2t^2 xt^{k+1} y' = t^{3k} y^3 + tx t^k y = t^m (2x^2 y' - y^3 - xy)$ ödənməsi üçün $2 + k + 1 = 3k = 1 + k$ bərabərlikləri ödənilməlidir. Buradan $k = \frac{1}{2}$

alanıq. Onda $y = x^{\frac{1}{2}} z = \sqrt{xz}$, ($x > 0$) evezləməsi aparsaq: $y' = \frac{z}{2\sqrt{x}} + \sqrt{xz}'$. y və y' -in qiymətlərini verilmiş tənlikdə yerinə yazsaq:

$$2x^2 \left(\frac{z}{2\sqrt{x}} + \sqrt{xz}' \right) = (\sqrt{xz})^3 + x\sqrt{xz}, \quad 2xz' = z^3, \quad \frac{2dz}{z^3} = \frac{dx}{x},$$

$$2 \int \frac{dz}{z^3} = \ln|x| + \ln C, \quad -\frac{x}{y^2} = \ln Cx, \quad y^2 \ln Cx + x = 0.$$

$x < 0$ olduqda, $y = \sqrt{-xz}$ evezləməsi aparmaq lazımdır.

2. $\frac{2}{3} xyy' = \sqrt{x^6 + y^4} + y^2$ tənliyini $x > 0$ üçün həll edin.

HƏLLİ. $y = z^m$ evezləməsi aparaq. Onda verilmiş tənlik

$\frac{2}{3} mxz^{2m-1} z' = \sqrt{x^6 + z^{4m}} + z^{2m}$ şəklinə düşür. Bu tənliyin biricins

olması üçün $1 + 2m - 1 = \frac{6}{2} = \frac{4m}{2} = 2m$ şərti ödənməlidir. Buradan

$m = \frac{3}{2}$. Deməli, $y = z^{\frac{3}{2}}$ evezləməsini aparmaqla $z' = \sqrt{\frac{x^4}{z^4} + \frac{z^2}{x^2}} + \frac{z}{x}$ biricins tənliyini alanıq.

Bu tənlik $z = xt$ evezləməsi ilə dəyişənlərinə ayrılın $xt' = \frac{\sqrt{1+t^6}}{t^2}$

tənliyinə gətirilir. Onun ümumi inteqralı $\frac{1}{3} \ln |t^3 + \sqrt{1+t^6}| = \ln(c_1 x)$

olar. Onda $t = \frac{z}{x} = \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x}$ olduğunu nəzərə alsaq $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{y^2}{x^3} + \sqrt{1 + \frac{y^4}{x^6}} \right| =$

$= \ln(c_1 x), \quad \frac{1}{3} \ln \frac{y^2 + \sqrt{x^6 + y^4}}{x^3} = \ln(c_1 x), \quad y^2 + \sqrt{x^6 + y^4} = cx^6$

$c = c_1^3$.

7. Tam diferensiallı tənliklər

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

tənliyinin sol tərəfi hər hansı $F(x, y)$ funksiyasının tam diferensialı şəklində göstərilə bilərsə, yəni

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = dF(x, y) \quad (1')$$

beraberiği doğrudursa, (1) tənliyi tam diferensiallı tənlik adlanır (burada $M(x, y)$, $N(x, y)$ kəsilməzdir və kəsilməz $\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x}$ törəmələri var). Belə $F(x, y)$ funksiyası üçün

$$dF(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (2)$$

Buradan tənliyin ümumi inteqralı

$$F(x, y) = c \quad (3)$$

şəklində tapılır. Tənliyin tam diferensiallı tənlik olması üçün

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (4)$$

şərti zəruri və kifədir.

Əgər (4) şərti ödənilsə, (1) tənliyinin ümumi inteqralı

$$\int_{x_0}^x M(\xi, y) d\xi + \int_{y_0}^y N(x_0, \eta) d\eta = c \quad (5)$$

və ya

$$\int_{x_0}^x M(\xi, y_0) d\xi + \int_{y_0}^y N(x, \eta) d\eta = c \quad (6)$$

şəklində olar. Burada (x_0, y_0) nöqtəsi $M(x, y)$, $N(x, y)$ funksiyalarının təyin oblastından götürülür. (5) düsturunu almaq üçün

$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y)$ götürülür və x -ə nəzərən inteqrallamaqla alınır.

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x M(\xi, y) d\xi + \varphi(y). \quad (7)$$

Burada y -ə nəzərən törəmə alıb $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ bərabərliyini nəzərə

$$\text{alsaq } \frac{\partial F}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial N(\xi, y)}{\partial \xi} d\xi + \varphi'(y) = N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y).$$

$\varphi'(y) = N(x_0, y)$ götürülərsə, $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y)$ şərti alınır. Deməli,

$$\text{li, } F(x, y) = \int_{x_0}^x M(\xi, y) d\xi + \int_{y_0}^y N(x_0, \eta) d\eta + C \text{ funksiyası üçün (1')} \quad (8)$$

bərabərliyi ödənilir.

1. $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$ tənliyini həll edin.

$$\text{HƏLLİ. } M(x, y) = 2xy, \quad N(x, y) = x^2 - y^2, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

oldugundan, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ alınır. Deməli, verilmiş tənlik tam diferensiallı tənlikdir. Tənliyi həll etmək üçün ələ $F(x, y)$ funksiyası tapmaq lazımdır ki, $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y) = 2xy$ ödənilsin. Bu bərabərliyi x -ə nəzərən

$$\text{inteqrallayaq. } F(x, y) = \int_0^x 2\xi y d\xi + \varphi(y) = x^2 y + \varphi(y).$$

$$\text{Buradan } \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 - y^2 \text{ olması üçün } x^2 + \varphi'(y) = x^2 - y^2,$$

$$\varphi'(y) = -y^2, \quad \varphi(y) = -\frac{y^3}{3}. \text{ Onda } F(x, y) = x^2 y - \frac{y^3}{3} \text{ axtarılan}$$

funksiya və $3x^2 y - y^3 = C$ verilmiş tənliyin ümumi inteqralı olur.

2. $(\sin xy + xy \cos xy)dx + x^2 \cos xy dy = 0$ tənliyini həll edin.

$$\text{HƏLLİ. } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (\sin xy + xy \cos xy) = 2x \cos xy - x^2 y \sin xy,$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 \cos xy) = 2x \cos xy - x^2 y \sin xy. \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \text{ olduğundan}$$

verilmiş tənlik tam diferensiallı tənlikdir. Odu ki, (6) düsturuna əsasən ümumi inteqralı tapırıq:

$$\int_0^x (\sin \xi \cdot 0 + \xi \cdot 0 \cos \xi \cdot 0) d\xi + \int_0^y (x^2 \cos x\eta) d\eta = C, \quad x \sin xy = C.$$

3. $(x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy = 0$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. $\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 2xy$, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan, veril-

miş tənlik tam diferensiallı tənlikdir. Digər tərəfdən, bu tənlik həm də bircins tənlikdir. Bu tip tənlikləri müəyyən qruplaşdırmalar aparmaqla daha asan həll etmək olar. Verilmiş tənliyi $x^3dx + xy(ydx + xdy) + y^3dy = 0$ şəklində yazaq. Onda

$$d\left[\frac{x^4}{4} + \frac{(xy)^2}{2} + \frac{y^4}{4}\right] = 0, \quad \frac{x^4}{4} + \frac{(xy)^2}{2} + \frac{y^4}{4} = C_1,$$

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = C, \quad C = 4C_1.$$

8. İnteqrallayıcı vuruq

Bə'zi hallarda

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

tənliyi tam diferensiallı tənlik olmadıqda, elə sıfırdan fərqli $\mu(x, y)$ funksiyası seçmək olur ki, onu (1) tənliyinin hər tərəfinə vurduqda o tam diferensiallı tənliyə çevrilir:

$$du = \mu M(x, y)dx + \mu N(x, y)dy. \quad (2)$$

Onda $\mu(x, y)$ funksiyasına *inteqrallayıcı vuruq* deyilir. İnteq-

rallayıcı vuruğun tərifinə görə yazı bilərik: $\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$,

$$N \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \quad (3)$$

Bu xüsusi törəməli diferensial tənliyi həll etməklə $\mu(x, y)$ inteqrallayıcı vuruğu tapırıq. Lakin (3) tənliyini həll etmək həmişə mümkün olmur və ya çətin olur. Ona görə də xüsusi hallara baxaq.

1). Tutaq ki, $\mu = \mu(x)$, yəni inteqrallayıcı vuruq x dəyişənindən asılıdır. Onda (3) tənliyi

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \quad (4)$$

şəklinə düşür. Belə vuruğun varlığı üçün (4) bərabərliyinin sağ tərəfi yalnız x -dən asılı funksiya olmalıdır. Onda (4) tənliyini həll etməklə $\mu(x)$ inteqrallayıcı vuruğunu tapırıq.

2). İnteqrallayıcı vuruq ancaq y dəyişənindən asılı olarsa, (3)-dən

$$\frac{d \ln \mu}{dy} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$$

alanıq. Bu bərabərliyin doğru olması üçün, bərabərliyin sağ tərəfi yalnız y dəyişənindən asılı olmalıdır. Buradan inteqrallamaqla $\mu = \mu(y)$ vuruğunu tapırıq.

1. $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. $\frac{\partial M}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial N}{\partial x} = -2y$, $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan veril-

miş tənlik tam diferensiallı deyil. Lakin $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2y + 2y}{-2xy} = -\frac{2}{x}$

olduğundan, onun ancaq x -dən asılı $\mu(x)$ inteqrallayıcı vuruğu var.

Onda (4)-ə əsasən $\frac{d \ln \mu}{dx} = -\frac{2}{x}$, $\ln \mu = -2 \ln |x|$, $\mu = \frac{1}{x^2}$. Veril-

miş tənliyi $\mu = \frac{1}{x^2}$ -na vurmaqla tam diferensiallı

$$\frac{x + y^2}{x^2}dx - 2 \frac{xy}{x^2}dy = 0.$$

tənliyini alırıq. Buradan $\int_1^x \left(\frac{1}{\xi} + 0\right) d\xi - \int_0^y \frac{2\eta}{x} d\eta = \ln C$, $\ln |x| - \frac{y^2}{x} =$

$$= \ln C, \quad y^2 = x \ln C_1 x, \quad C_1 = \frac{1}{C}.$$

2. $2xy \ln y dx + (x^2 + y^2 \sqrt{y^2 + 1}) dy = 0$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. Verilmiş misal üçün alırıq:

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{2x - 2x(\ln y + 1)}{2xy \ln y} = \frac{2x - 2x \ln y - 2x}{2xy \ln y} = -\frac{1}{y}.$$

Deməli, tənliyin yalnız y -dəyişənindən asılı inteqrallayıcı vurucu var:

$$\frac{d \ln \mu}{dy} = -\frac{1}{y}, \quad \ln \mu = -\int \frac{dy}{y} = -\ln y, \quad \mu = \frac{1}{y}.$$

Onda verilmiş tənliyin hər tərəfini $\mu = \frac{1}{y}$ vurucuna vursaq

$$2x \ln y dx + \frac{x^2 + y^2 \sqrt{y^2 + 1}}{y} dy = 0$$

tam diferensiallı tənlik alınar. Bu tənliyi inteqrallasaq

$$\int_0^x 2\xi \ln y d\xi + \int_1^y \eta \sqrt{\eta^2 + 1} d\eta = C, \quad x^2 \ln y + \frac{1}{3}(y^2 + 1)^{\frac{3}{2}} = C.$$

9. Xətti diferensial tənliklər

Axtarılan funksiya və onun törəməsi tənliyə birinci dərəcədən daxildirsə, *bələ tənliyə xətti diferensial tənlik* deyilir.

Xətti diferensial tənliyi belə yazmaq olar:

$$y' + P(x)y = Q(x). \quad (1)$$

Burada $P(x)$ və $Q(x)$ kəsilməz funksiyalardır.

Xətti diferensial tənliklərin Bernulli üsulu ilə həllini tapaq. Tənliyin həllini iki $u(x)$ və $v(x)$ funksiyalarının hasili şəklində axtaraq. Yəni

$y = u(x)v(x)$. Onda $y' = u'v + uv'$ olar. y və y' -in qiymətlərini (1) tənliyində yerinə yazaq.

$$u'v + v'u + P(x)uv = Q(x).$$

Alınan bərabərliyi aşağıdakı kimi yazaq.

$$v[u' + P(x)u] + uv' = Q(x). \quad (2)$$

$u(x)$ və $v(x)$ funksiyalarını

$$u' + P(x)u = 0, \quad uv' = Q(x) \quad (3)$$

şərtləri daxilində seçək.

Birinci tənliyi dəyişənlərinə ayırma üsulu ilə həll edək:

$$\frac{du}{u} = -P(x)dx, \quad \ln|u| = -\int P(x)dx, \quad u = e^{-\int P(x)dx}.$$

$u(x)$ -in bu qiymətini (3) bərabərliyinin ikinci tənliyində nəzərə alsaq

$$e^{-\int P(x)dx} \frac{dv}{dx} = Q(x), \quad dv = Q(x)e^{\int P(x)dx} dx,$$

$$v = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C. \quad (4)$$

$u(x)$ və $v(x)$ -in qiymətlərini $y = u(x)v(x)$ -də nəzərə alsaq (1) tənliyinin ümumi həllini alırıq:

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right]. \quad (5)$$

Xətti diferensial tənliyin sabitin variasiyası (Lagranj üsulu) ilə həllinə baxaq: Əvvəlcə bircins

$$y' + P(x)y = 0 \quad (6)$$

tənliyinin ümumi həllini tapaq:

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}. \quad (7)$$

(1) tənliyinin ümumi həllini

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx} \quad (8)$$

şəklində axlaraq, burada $C(x)$ namə'lum funksiyadır. Bu əvəzləməni və

$$y' = C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}$$

törəməni (1) tənliyində yerinə yazsaq alarıq:

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x), \quad dC(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx} dx.$$

Buradan tapılan

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C$$

(8)-də yerinə yazsaq (1) tənliyinin (5) şəklində ümumi həllini taparıq.

1. $y' - \frac{y}{x} = x$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. Verilmiş xətti tənliyi Bernulli üsulu ilə həll edək. $y = uv$ qəbul edək. Onda $y' = u'v + v'u$ alarıq. y və y' -in qiymətlərini verilmiş tənlikdə yerinə yazsaq

$$v\left(u' - \frac{u}{x}\right) + v'u = x$$

Burada u və v funksiyalarını

$$u' - \frac{u}{x} = 0, \quad v'u = x$$

bərabərliklərinə əsasən təyin edək. Birinci tənliyi həll edək.

$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{x}, \quad \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x}, \quad \ln|u| = \ln|x|, \quad u = x.$$

u -nun bu qiymətini ikinci tənlikdə yazsaq.

$$v'x = x, \quad v' = 1, \quad dv = dx, \quad v = x + C.$$

Beləliklə, verilmiş tənliyin ümumi həlli üçün alırıq:

$$y = x(x + C).$$

2. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ tənliyinin $y(0) = 1$ şərtini ödəyən həllini tapın.

HƏLLİ. $y' + 2xy = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -2xy, \quad \int \frac{dy}{y} = -2 \int x dx + \ln C,$

$\ln|y| = -x^2 + \ln C, \quad y = Ce^{-x^2}.$ Bircins olmayan tənliyin ümumi həlli

lini sabitin variasiyası üsulu ilə taparaq: $y = C(x)e^{-x^2}$ əvəzləməsini və

$y' = C'(x)e^{-x^2} - 2C(x)xe^{-x^2}$ törəməsini verilmiş tənlikdə yazsaq:

$$C'(x)e^{-x^2} - 2C(x)xe^{-x^2} + 2C(x)xe^{-x^2} = xe^{-x^2}.$$

Buradan $C'(x) = x, \quad dC(x) = x dx, \quad C(x) = \frac{x^2}{2} + C.$

Onda əvəzləməyə əsasən $y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)e^{-x^2}$ verilmiş tənliyin

ümumi həlli olur. Burada, başlangıç şərtini nəzərə alsaq $1 = (0 + C) \cdot 1, \quad C = 1.$

Beləliklə, verilmiş tənliyin başlangıç şərtini ödəyən həllini alırıq:

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + 1\right)e^{-x^2}.$$

3. $A(a, a)$ nöqtəsindən keçən ehtə eyni tapın ki, onun ixtiyari nöqtəsində çəkilən toxunan, toxunma nöqtəsinin ordinatı və koordinat oxları ilə əhatə olunmuş trapesiyanın sahəsi sabit olub, a^2 -na bərabər olsun.

HƏLLİ. Əyni üzərində götürülmüş $M(x, y)$ nöqtəsindən keçən toxunanın tənliyini yazsaq: $Y - y = y'(X - x)$. Toxunanın ordinat oxundan ayırdığı OT parçasını (şəkil 5.) tapmaq üçün toxunanın tənliyində $X = 0$ qəbul etmək kifayətdir. Onda $Y = OT = y - y'x$.

$PM = y, \quad OP = x$ olduğundan məsələnin şərtinə əsasən

$$\frac{y - y'x + y}{2} \cdot x = a^2, \quad y' = \frac{2y}{x} - \frac{2a^2}{x^2}.$$

Alınan xətti tənliyi ümumi həll üçün hazır düsturdan istifadə etməklə alırıq:

$$y = e^{2\ln x} \left(-2a^2 \int \frac{e^{-2\ln x}}{x^2} dx + C \right)$$

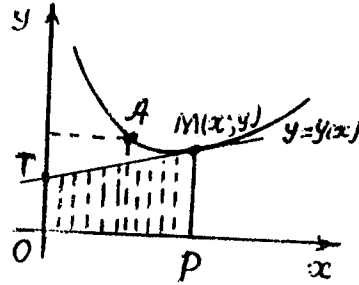
Buradan

$$e^{2\ln x} = x^2, \quad e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2} \quad \text{oldu-}$$

ğunu nəzərə alsaq

$$y = x^2 \left(-2a^2 \int \frac{dx}{x^4} + C \right) = x^2 \left(\frac{2a^2}{3x^3} + C \right) = \frac{2a^2}{3x} + Cx^2. \quad \text{Başlangıç şərtindən istifadə etsək}$$

$$(x = a, \quad y = a) \quad C = \frac{1}{3a}. \quad \text{Beləliklə, } y = \frac{2a^2}{3x} + \frac{x^2}{3a}.$$



Şəkil 5.

4. Sargının müqaviməti R , avtoinduksiya əmsalı L , ilk cərəyan $I_0 = a$ olarsa və elektrik hərəkətdirici qüvvə $E = E_0 \sin \omega t$ qanunu üzrə dəyişərsə, sargıda cərəyanın t zamanından asılı olaraq dəyişməsinə tapın.

HƏLLİ. Özünüinduksiyanın elektrik hərəkətdirici qüvvəsi cərəyan şiddətinin artırma sürəti ilə mütənasıbdır. Mütənasıblıq əmsalı burada L -dir. Şəbəkə qapanarkən iki əks elektrik hərəkətdirici qüvvə: E gərginliyi və özünüinduksiyanın elektrik hərəkətdirici qüvvəsi $E_1 = L \frac{di}{dt}$ yaranır. Kirxhof qanununa əsasən $E - L \frac{di}{dt}$ şəbəkədə yaranan Ri gərginliyinə bərabərdir. Yəni

$$E - L \frac{di}{dt} = Ri, \quad L \frac{di}{dt} + Ri = E.$$

Buradan $L \frac{di}{dt} + Ri = E_0 \sin \omega t$ diferensial tənliyini alırıq.

Əvvəlcə bircins $L \frac{di}{dt} + Ri = 0$ tənliyi həll edək:

$$\int \frac{di}{i} = -\frac{R}{L} \int dt, \quad \ln i = -\frac{R}{L} t + \ln C, \quad i = Ce^{-\frac{R}{L} t}.$$

Bircins olmayan tənliyin həllini $i = C(t)e^{-\frac{R}{L} t}$ şəklində axtaraq. Onda bu əvəzləməni və $i' = C'(t)e^{-\frac{R}{L} t} - \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L} t} C(t)$ törəməsini tənlikdə nəzərə alsaq

$$L \left(C'(t)e^{-\frac{R}{L} t} - \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L} t} C(t) \right) + R e^{-\frac{R}{L} t} C(t) = E_0 \sin \omega t.$$

$$\text{Buradan } C'(t) = \frac{E_0}{L} e^{\frac{R}{L} t} \sin \omega t, \quad C(t) = \frac{E_0}{L} \int e^{\frac{R}{L} t} \sin \omega t dt + C.$$

İki dəfə hissə-hissə integrallama düsturunu tətbiq edərək alırıq:

$$\int e^{\frac{R}{L} t} \sin \omega t dt = \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L} t} \sin \omega t - \frac{L\omega}{R} \left(\frac{L}{R} e^{\frac{R}{L} t} \cos \omega t + \frac{L\omega}{R} \int e^{\frac{R}{L} t} \sin \omega t dt \right);$$

Buradan

$$\left(1 + \frac{L^2 \omega^2}{R^2} \right) \cdot \int e^{\frac{R}{L} t} \sin \omega t dt = \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L} t} \left(\sin \omega t - \frac{L\omega}{R} \cos \omega t \right),$$

$$\int e^{\frac{R}{L} t} \sin \omega t dt = \frac{R^2}{R^2 + L^2 \omega^2} \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L} t} \left(\sin \omega t - \frac{L\omega}{R} \cos \omega t \right).$$

$$\text{Onda } C(t) = \frac{E_0 R}{R^2 + L^2 \omega^2} e^{\frac{R}{L}t} \left(\sin \omega t - \frac{L\omega}{R} \cos \omega t \right) + C.$$

$$\text{Beləliklə, } i = \frac{E_0 R}{R^2 + L^2 \omega^2} \left(\sin \omega t - \frac{L\omega}{R} \cos \omega t \right) + C e^{-\frac{R}{L}t} \text{ verilmiş}$$

məsələnin ümumi həlli olur. $t = 0$ olduqda $i = 0$ olduğundan $C =$

$$= -\frac{E_0 L \omega}{R^2 + L^2 \omega^2}, \quad i(t) = \frac{E_0}{R^2 + L^2 \omega^2} \left(L \omega e^{-\frac{R}{L}t} + R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t \right).$$

10. Bernulli tənliyi

Elə birtərtibli diferensial tənliklər var ki, onlar xətti olmasalar da xətti tənliyə gətirilə bilər. Belə diferensial tənliklərə misal olaraq Bernulli tənliyini göstərmək olar:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \quad (1)$$

$n = 1$ olduqda (1) tənliyi bircins, $n = 0$ olduqda xətti tənliyə çevrilir. n sıfırdan və vahiddən fərqli olduqda (1) tənliyinin hər iki tərəfini y^{-n} -ə vursaq və alınan

$$y^{-n}y' + P(x)y^{1-n} = Q(x) \quad (2)$$

tənliyində $z = y^{1-n}$ əvəzləməsini aparsaq,

$$z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x) \quad (3)$$

tənliyi alınar. (3) tənliyi z -ə nəzərən xətti diferensial tənlikdir. (3) tənliyini həll edib $z(x)$ -i tapırıq. Əvvəlki y dəyişəninə qayıdaraq (1) tənliyinin ümumi həllini alırıq. $0 < n < 1$ olduqda $y = 0$ həlli Bernulli tənliyinin məxsusi həlli olur. Bernulli tənliyini xətti tənliyə gətirmədən də $y = u(x)v(x)$ əvəzləməsi aparmaqla həll etmək olar.

1. $xy' + y = y^2 \ln x$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. Verilmiş tənlik Bernulli tənliyidir. Burada $n = 2$ -dir. Veril-

miş tənliyin hər tərəfini y^{-2} -na vuraq: $xy^{-2}y' + y^{-1} = \ln x$.

$z = y^{-1}$ əvəzləməsini aparaq. Onda $-xz' + z = \ln x$. Bircins tənliyin ümumi həllini tapaq:

$$-xz' + z = 0, \quad \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x} + \ln C, \quad \ln|z| = \ln|x| + \ln C, \quad z = xC.$$

$z = C(x)x$ əvəzləməsi aparaq:

$$-x[C'(x)x + C(x)] + xC(x) = \ln x, \quad x^2 C'(x) = \ln x,$$

$$C'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}, \quad C(x) = -\int \frac{\ln x}{x^2} dx + C.$$

$$\text{Axırıncı inteqralı hissə-hissə inteqrallasaq } \left(u = \ln x, \quad dv = \frac{dx}{x^2} \right)$$

$$C(x) = -\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{1}{x}(\ln x + 1) + C.$$

$C(x)$ -in bu qiymətini $z = C(x)x$ ifadəsində yerinə yazsaq

$$z = \ln x + 1 + Cx.$$

Burada $z = y^{-1}$ olduğunu nəzərə alsaq: $y(\ln x + 1 + Cx) = 1$.

2. $y' + \frac{y}{x} = y^2 \ln x$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. Verilmiş Bernulli tənliyində $y = u(x)v(x)$ əvəzləməsini

$$\text{aparaq. Onda } v \left(u' + \frac{u}{x} \right) + uv' = u^2 v^2 \ln x.$$

Burada $u(x)$ və $v(x)$ funksiyalarını $u' + \frac{u}{x} = 0$, $v' = uv^2 \ln x$ bərabərliklərinə əsasən seçək. Bu tənlikləri həll edək.

$$u' + \frac{u}{x} = 0, \quad \int \frac{du}{u} = -\int \frac{dx}{x}, \quad \ln|u| = -\ln|x|, \quad u(x) = \frac{1}{x}.$$

$$v' = \frac{1}{x} v^2 \ln x, \int \frac{dv}{v^2} = \int \frac{\ln x}{x} dx + \frac{C}{2}, \quad -\frac{1}{v} = \int \ln x d(\ln x) + \frac{C}{2},$$

$$-\frac{1}{v} = \frac{(\ln x)^2}{2} + \frac{C}{2}, \quad v(x) = \frac{-2}{C + (\ln x)^2}.$$

Beləliklə, $y = u(x)v(x) = \frac{-2}{x[C + (\ln x)^2]}$ ümumi həllini alırıq.

3. Elə əyri tapın ki, onun hər bir nöqtəsində çəkilmiş toxunanın ordinat oxundan ayırdığı parçanın uzunluğu, radiusu toxunma nöqtəsinin ordinatı olan dairənin sahəsinə qiymətə bərabər olsun.

HƏLLİ. Tutaq ki, $M(x, y)$ əyrinin ixtiyari nöqtəsidir. Onda həmin nöqtədə əyriyə çəkilən toxunanın tənliyi $Y - y = y'(X - x)$ şəklində olur. Toxunanın ordinat oxundan ayırdığı parça $y - xy'$ və radiusu $|y|$ -ə bərabər olan dairənin sahəsi πy^2 olduğundan, şərte görə $y - xy' = \pi y^2$ Bernulli diferensial tənliyini alırıq. Hər tərəfi y^{-2} -yə vursaq

$$-xy^{-2}y' + y^{-1} = \pi.$$

$z = y^{-1}$ əvəzləməsini aparaq. Onda $xz' + z = \pi$, $x \frac{dz}{dx} = \pi - z$,

$$\int \frac{dz}{\pi - z} = \int \frac{dx}{x} - \ln C, \quad -\ln|\pi - z| = \ln x - \ln C, \quad \ln|\pi - z| = \ln C - \ln x,$$

$$\pi - z = \frac{C}{x}, \quad z = \pi - \frac{C}{x}, \quad z = \frac{\pi x - C}{x}.$$

$$z = y^{-1} \text{ olduğundan } y = \frac{x}{\pi x - C}.$$

11. Rikkati tənliyi

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 + c(x) = 0$$

şəklində tənliyə *Rikkati tənliyi* deyilir. Rikkati tənliyi $b(x) = 0$ olduqda

xətti, $c(x) = 0$ olduqda isə Bernulli tənliyinə çevrilir. Rikkati tənliyinin hər hansı $y_1(x)$ xüsusi həlli mə'lum olduqda, $y(x) = y_1(x) + z(x)$ əvəzləməsi vasitəsilə Bernulli tənliyinə gətirilir. Ümumi halda, Rikkati tənliyi kvadraturaya gətirilə bilmir, yəni həll etmək olmur.

Rikkati tənliyi xüsusi hallarda:

1) $y' + m(x)(Ay + By^2 + C) = 0$ olduqda dəyişənlərinə ayrılır,

2) $y' + A \frac{y}{x} + B \left(\frac{y}{x} \right)^2 + C = 0$ olduqda bircins.

3) $y' + A \frac{y}{x} + By^2 + \frac{C}{x^2} = 0$ olduqda ümumiləşmiş bircins tənliyə çevrilir.

1. $x^2y' + xy + x^2y^2 = 4$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. Bərabərliyin hər tərəfini x^2 -na bölək: $y' + \frac{1}{x}y +$

$+ y^2 = \frac{4}{x^2}$. Bu tənlik Rikkati tənliyinin xüsusi halı (3-cü hal) olub

ümumiləşmiş bircins tənlikdir. Onu həll edək. $x \rightarrow tx$, $y \rightarrow t^k y$, $y' \rightarrow t^{k-1} y'$ əvəzləməsi nəticəsində axırıncı tənlikdən alırıq:

$k-1 = k-1 = 2k = -2$, $k = -1$. Onda $y = \frac{z}{x}$ əvəzləməsi ilə dəyişənlərinə ayrılan tənlik alınır:

$$y' = \frac{z'}{x} - \frac{z}{x^2}, \quad \frac{z'}{x} - \frac{z}{x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{z}{x} + \frac{z^2}{x^2} = \frac{4}{x^2}, \quad \frac{z'}{x} + \frac{z^2}{x^2} =$$

$$= \frac{4}{x^2}, \quad xz' = 4 - z^2, \quad xdz = (4 - z^2)dx, \quad \frac{dz}{4 - z^2} = \frac{dx}{x}.$$

Axırıncı tənliyi integrallayaq.

$$\int \frac{dz}{4 - z^2} = \int \frac{dx}{x} + \ln C, \quad \frac{1}{4} \ln \frac{z+2}{2-z} = \ln x + \ln C,$$

$$\frac{2+z}{2-z} = C_1 x^4, \quad (C_1 = C^4), \quad z = \frac{2(C_1 x^4 - 1)}{C_1 x^4 + 1}.$$

$$z = xy \text{ olduğundan } y = \frac{2(C_1 x^4 - 1)}{x(C_1 x^4 + 1)}.$$

2. $y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x$ Rikkati tənliyini həll edin.

HƏLLİ. $y_1 = e^x$ tənliyin həlli olduğunu bilavasitə yoxlamaq olar.

Onda $y = z + e^x$ əvəzləməsini aparmaqla alınır:

$$z' + e^x + 2(z + e^x)e^x - (z + e^x)^2 = e^{2x} + e^x, \quad z' - z^2 = 0.$$

Alınan tənliyi həll etsək $z = -\frac{1}{x+C}$.

Deməli, $y = e^x - \frac{1}{x+C}$ Rikkati tənliyinin ümumi həlli olur.

12. Töreməyə nəzərən həll olunmamış tənliklər

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1)$$

şəkilə olan tənliyə *töreməyə nəzərən həll olunmamış tənlik* deyilir. Belə tənlikləri həll etmək üçün əvvəlcə həmin tənlikdən töreməyə nəzərən həll olunmuş tənliklərə keçmək lazımdır:

$$y' = f_k(x, y), \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (2)$$

Alınan tənliklərin həllərini tapmaqla (1) tənliyinin həllini tapmış oluruq. (1) tənliyinin

$$y(x_0) = y_0 \quad (3)$$

şərtini ödəyən həllinin tapılmasına *Koşi məsələsi* deyilir. (1) tənliyinin (3) şərtini ödəyən həllərin sayı

$$F(x_0, y_0, z) = 0 \quad (4)$$

cəbri tənliyin həqiqi və müxtəlif köklərinin sayına bərabər olduqda Koşi məsələsinin həlli *yeganə sayılır*. Koşi məsələsinin həlli (2) tənliklərinin (3) şərtini ödəyən həlləri olur. (2) tənliklərinin ümumi həllərinə

birlikdə (1) tənliyinin ümumi həlli deyilir.

(1) tənliyini y' -ə nəzərən həll etmək mümkün olmadıqda həmin tənliyi x və ya y -ə nəzərən həll edib $x = \varphi(y, y')$ və ya $y = \varphi(x, y')$ şəklində tənliklər alırıq. Bu tənliklərdə $y' = p$ əvəzləməsi aparmaqla parametrik şəkildə

$$\begin{cases} x = \varphi(y, p), \\ y' = p \end{cases} \quad \text{və ya} \quad \begin{cases} y = \varphi(x, p), \\ y' = p \end{cases}$$

tənlikləri alınır. Burada $dy = y'dx$ əsas diferensial münasibətindən istifadə etməklə töreməyə nəzərən həll olunmuş tənlik alınır və onu həll etməklə verilən tənliyin həlli tapılır. Məsələn, $x = \varphi(y, p)$, $y' = p$ olduqda $dy = y'dx = p[\varphi'_y dy + \varphi'_p dp]$, $(p\varphi'_y - 1)dy + p\varphi'_p dp = 0$.

Alınan tənlik töreməyə nəzərən həll olunmuş tənlikdir. Tutaq ki, $y = \omega(p, c)$ tənliyin həllidir. Onda

$$\begin{cases} x = \varphi(\omega(p, c), p), \\ y = \omega(p, c) \end{cases}$$

parametrik şəkildə tənliyin ümumi həlli olur.

1. $y'^2 - 2xy' - 8x^2 = 0$ tənliyinin həllərini tapın.

HƏLLİ. Tənliyi y' -ə nəzərən həll edək:

$$y' = x \pm \sqrt{x^2 + 8x^2}, \quad y' = 4x, \quad y' = -2x.$$

Alınan tənlikləri həll etsək $y = 2x^2 + c$, $y = -x^2 + c$.

Onda $(y - 2x^2 - c)(y + x^2 - c) = 0$ verilmiş tənliyin ümumi həlli olur.

2. $y'^2 - 2yy' = y^2(e^x - 1)$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. Tənliyi y' -ə nəzərən həll edək:

$$y' = y \pm \sqrt{y^2 + y^2(e^x - 1)}, \quad y' = y \pm ye^{\frac{x}{2}}. \text{ Alınmış tənlikləri həll}$$

$$\text{edək. } \int \frac{dy}{y} = \int \left(1 \pm e^{\frac{x}{2}} \right) dx - \ln C, \quad \ln|y| = x \pm 2e^{\frac{x}{2}} - \ln C, \quad \ln|Cy| = x \pm 2e^{\frac{x}{2}}.$$

Onda verilmiş tənliyin ümumi həlli

$$\left(\ln|Cy| - x - 2e^{\frac{x}{2}} \right) \left(\ln|Cy| - x + 2e^{\frac{x}{2}} \right) = 0.$$

3. $x = y^3 + y'$ tənliyinin parametrlə daxil etmək üsulu ilə həll edin.

HƏLLİ. $y' = p$ qəbul etsək, $x = p^3 + p$ alanq. $dy = y'dx$ olduğundan yazmaq olar: $dy = p d(p^3 + p)$, $dy = p(3p^2 + 1)dp$.

Axırıncı tənliyi inteqrallayaq $y = \frac{3}{4}p^4 + \frac{p^2}{2} + C$.

Beləliklə, verilən tənliyin $\begin{cases} x = p^3 + p, \\ 4y = 3p^4 + 2p^2 + C \end{cases}$ parametrik şəkildə ümumi həlli alınır.

4. $y = (y' - 1)e^{y'}$ tənliyini parametrlə daxil etməklə həll edin.

HƏLLİ. $y' = p$ qəbul edək. Onda $y = (p - 1)e^p$ olar. $dy = y'dx$ olduğundan alınq: $dy = pe^p dp$, $pe^p dp = p dx$, $p = 0$, $dx = e^p dp$, $x = e^p + C$, $p = 0$, $y = (0 - 1)e^0 = -1$.

Beləliklə, verilən tənliyin $\begin{cases} x = e^p + C, \\ y = (p - 1)e^p \end{cases}$ parametrik şəkildə ümumi həlli və $y = -1$ məxsusi həlli var.

13. Laqranj tənliyi

$$y = x\varphi(y') + \psi(y') \quad (1)$$

şəklində tənliyə *Laqranj tənliyi* deyilir. Laqranj tənliyi $y' = p$ əvəzləməsinin köməkliyi ilə x -ə nəzərən xətti tənliyə gətirilir:

$$\frac{dx}{dp} - \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}. \quad (2)$$

Xətti tənliyin $x = \omega(p, c)$ həllini tapmaqla Laqranj tənliyinin ümumi həllini

$$\begin{cases} x = \omega(p, c), \\ y = \omega(p, c)\varphi(p) + \psi(p) \end{cases} \quad (3)$$

parametrik şəkildə tapırıq. p_0 ədədi $\varphi(p) - p = 0$ tənliyinin həllidirsə, Laqranj tənliyinin $y = p_0 x + \psi(p_0)$ həlli də var. Bu həll məxsusi həll ola bilər.

1. $y = 2xy' + \ln y'$, ($y' > 0$) tənliyini həll edin.

HƏLLİ. Verilmiş tənlik Laqranj tənliyidir. $y' = p$ əvəzləməsini aparaq. Onda verilmiş tənlik $\begin{cases} y = 2xp + \ln p, \\ y' = p \end{cases}$ parametrik şəklinə

düşür. Birinci bərabərliyi diferensiallayaq: $dy = 2p dx + \left(2x + \frac{1}{p} \right) dp$.

Onda $dy = p dx$ münasibətinə əsasən $\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p} x = -\frac{1}{p^2}$. Bu x -ə nəzərən xətti tənlikdir. Onun ümumi həlli $x = \frac{C}{p^2} - \frac{1}{p}$ olduğundan,

$$\text{verilmiş tənliyin ümumi həlli } \begin{cases} x = \frac{C}{p^2} - \frac{1}{p}, \\ y = \ln p + \frac{2C}{p} - 2 \end{cases}$$

2. $y = xy'^2 + y'^2$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. $y' = p$ əvəzləməsini aparaq. Onda verilmiş tənlik

$$y = (x+1)p^2, \quad y' = p$$

parametrik şəklinə düşər. Buradan $dy = p dx$ münasibətinə əsasən alı-

nıq: $\frac{2dp}{1-p} = \frac{dx}{x+1}$. Bu tənliyi inteqrallasaq $-2\ln|1-p| = \ln|x+1| + \ln C$,

$$x+1 = \frac{C}{(1-p)^2}, \quad x = \frac{C}{(1-p)^2} - 1, \quad p = 1.$$

Onda verilmiş tənliyin parametrik şəkildə $x = \frac{C}{(1-p)^2} - 1$, $y =$

$$= \frac{Cp^2}{(1-p)^2}$$
 ümumi həlli və $y = x+1$ həlli alınır.

Buradan p parametrini yox edək. Bunun üçün birinci bərabərlik-

$$\text{den } (1-p)^2 = \frac{C}{x+1} \text{ və } p^2 = \left(1 - \sqrt{\frac{C}{x+1}}\right)^2 \text{ tapıb, ikinci bərabərlikdə}$$

nəzərə alsaq, verilmiş tənliyin ümumi həllini tapırıq: $y = (\sqrt{x+1} - \sqrt{C})^2$.
Burada $C=0$ olduqda $y = x+1$ həlli alınır.

14. Klero tənliyi

$y = xy' + \psi(y')$ şəklində tənliyə *Klero tənliyi* deyilir. Göründüyü kimi Klero tənliyi Laqranj tənliyinin xüsusi halıdır. Həll üsulu isə eynidir.

$y = xp + \psi(p)$, $y' = p$ tənliyin parametrik şəkli olur. Buradan

$$dy = p dx \text{ münasibətinə əsasən } \frac{dp}{dx} [x + \psi'(p)] = 0, \quad \frac{dp}{dx} = 0,$$

$x + \psi'(p) = 0$ tənlikləri alınır. Bu tənliklərin $p = C$ və $x = -\psi'(p)$ həl-

ləri vardır. Onda $y = xC + \psi(C)$ Klero tənliyinin ümumi həlli və $x = -\psi'(p)$, $y = -p\psi'(p) + \psi(p)$ parametrik şəkildə həlli olur. $\psi''(p) \neq 0$ olduqda axırıncı Klero tənliyinin məxsusi həlli olur.

1. $y = xy' + \frac{a}{2y'}$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. $y' = p$ əvəzləməsini aparaq: $y = xp + \frac{a}{2p}$ alınq. Buradan

$$dy = p dx \text{ bərabərliyinə əsasən alınq: } \left(x - \frac{a}{2p^2}\right) \frac{dp}{dx} = 0, \quad \frac{dp}{dx} = 0,$$

$$p = C, \quad x = \frac{a}{2p^2}.$$

Onda verilmiş tənliyin $y = Cx + \frac{a}{2C}$ ümumi və $x = \frac{a}{2p^2}$, $y = \frac{a}{p}$

həlli alınır. Buradan p parametrini yox etsək Klero tənliyinin $y^2 = 2ax$ məxsusi həlli alınır.

2. Əyrinin toxunanlarının koordinat oxları arasında qalan parçalarının orta nöqtələrinin həndəsi yeri $y = kx + \frac{l}{2}$ düz xəttidir. Bu əyrini tapın.

HƏLLİ. Əyriyə $M(x, y)$ nöqtəsində çəkilən toxunanın tənliyi $Y - y = y'(X - x)$ olduğundan toxunanın absis və ordinat oxları ilə

kesişmə nöqtələri uyğun olaraq $\left(x - \frac{y}{y'}, 0\right)$ və $(0, y - xy')$. Buradan

parçanın orta nöqtəsinin koordinatları $\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{y}{y'}\right), \frac{1}{2}(y - xy')\right)$ ol-

duğu alınır. Bu nöqtə $y = kx + \frac{l}{2}$ tənliyini ödədiyindən $\frac{1}{2}(y - xy') =$

$$= \frac{k}{2} \left(x - \frac{y}{y'} \right) + \frac{l}{2}. \text{ Buradan } y = xy' + \frac{ly'}{k+y'}. \text{ Klero tənliyi alınır.}$$

$$\text{Onda } y = xC + \frac{lC}{k+C}. \text{ Klero tənliyinin ümumi həlli, } x = -\frac{kl}{(k+p)^2},$$

$$y = \frac{lp^2}{(k+p)^2} \text{ isə parametrik şəkildə məxsusi həll olur.}$$

15. Əyrilər ailəsinin diferensial tənliyi.

Trayektoriya məsələsi

15.1. Əyrilər ailəsinin diferensial tənliyinin qurulması. Tutaq ki, p parametrindən asılı hamar

$$\Phi(x, y, p) = 0 \quad (1)$$

əyrilər ailəsi verilmişdir. Bu ailənin diferensial tənliyi

$$\begin{cases} \Phi(x, y, p) = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' = 0 \end{cases} \quad (2)$$

sistemindən p parametrini yox etməklə tapılır. Bu zaman alınan $F(x, y, y') = 0$ tənliyi ailənin diferensial tənliyi olur. n parametrdən asılı

$$\Phi(x, y, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0 \quad (3)$$

ailəsinin diferensial tənliyi

$$\begin{cases} \Phi(x, y, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' = 0, \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial^n \Phi}{\partial x^n} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y^{(n)} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

sistemindən p_1, p_2, \dots, p_n parametrlərini yox etməklə alınan

$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ tənliyi olur.

$$1. \frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{1} = 1 \text{ hiperbolalar ailəsinin diferensial tənliyini tapın.}$$

HƏLLİ. Verilmiş bərabərlikdə y -ə x -dən asılı funksiya kimi baxıb

x -ə görə törəmə alsaq: $\frac{x}{p^2} = yy'$. Axırncı bərabərliyin hər tərəfi

ni x -ə vuraq. Onda $\frac{x^2}{p^2} = xyy'$ alınq. $\frac{x^2}{p^2}$ ifadəsini verilmiş ailənin

tənliyində yerinə yazsaq: $xyy' - y^2 = 1$. Bu tənlik verilmiş hiperbolalar ailəsinin diferensial tənliyi.

$$2. y = p \left(1 - e^{-\frac{x}{p}} \right) \text{ əyrilər ailəsinin diferensial tənliyini tapın.}$$

HƏLLİ. Verilmiş tənlikdə y -ə x -dən asılı funksiya kimi baxıb,

hər tərəfi x -ə görə diferensiallayaq: $y' = e^{-\frac{x}{p}}$. Buradan $p = -\frac{x}{\ln y'}$

tapıb, verilmiş tənlikdə yerinə yazsaq, ailənin $y \ln y' + x(1 - y') = 0$ diferensial tənliyini alanq.

$$3. x + c_2 = y^3 + c_1 y \text{ ailəsinin diferensial tənliyini tapın.}$$

HƏLLİ. Verilən bərabərlikdə y -ə x dəyişənin funksiyası kimi

baxıb, ardıcıl olaraq iki dəfə törəmə alağ. $1 = 3y^2 y' + c_1 y'$, $0 = 6yy'' +$

$+ 3y^2 y'' + c_1 y''$. Alınan birinci bərabərlikdən $c_1 = \frac{1}{y'} - 3y^2$ tapıb,

axırncı bərabərlikdə yazsaq: $0 = 6yy'' + 3y^2 y'' + \frac{y''}{y'} - 3y^2 y''$. Bura-

dan $6yy'^3 + y'' = 0$ tənliyi alınır.

15.2. Trayektoriya məsələsi. Tutaq ki, p parametrindən asılı

$$\Phi(x, y, p) = 0 \quad (5)$$

əyrilər ailəsi verilmişdir. Hər bir nöqtəsində ailənin əyrisi ilə eyni bir α

bucağı altında kəsişən əyriyə *trayektoriya* deyilir. $\alpha = \frac{\pi}{2}$ olarsa, belə

trayektoriya *ortoqonal*, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ olduqda isə *izoqonal* trayektoriya adlanır.

a) *Ortoqonal trayektoriya*. Ailənin trayektoriyyalarını tapmaq üçün, əvvəlcə onun $F(x, y, y') = 0$ diferensial tənliyi tapılır. Bu tən-

likdə $y' \rightarrow -\frac{1}{y'}$ əvəz etməklə alınan $F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0$ tənliyi

ailənin *ortoqonal trayektoriyyasının diferensial tənliyi* olur. Onu həll etməklə ailənin ortoqonal trayektoriyyaları tapılır.

b) *Izoqonal trayektoriya*. Izoqonal trayektoriyyaları tapmaq üçün ailənin diferensial tənliyində $y' \rightarrow \frac{y' - k}{1 + ky'}$, $k = \operatorname{tg} \alpha$ əvəz edilir. Alın-

nan $F\left(x, y, \frac{y' - k}{1 + ky'}\right) = 0$ tənliyi *izoqonal trayektoriyyaların diferensial*

tənliyi olur. Bu tənliyi həll etməklə ailənin izoqonal trayektoriyyalarını tapırıq.

4. $y = kx$ əyrilər ailəsinin ortoqonal trayektoriyyalarını tapın.

HƏLLİ. $y = kx$ koordinat başlanğıcından keçən düz xəttlər ailəsinin tənliyidir. Bu ailənin diferensial tənliyini tapmaq üçün verilən tənliyi x -ə görə diferensiallayaq. $y' = k$. Onda verilmiş ailənin diferensial tənliyini alırıq. $xy' = y$. Buradan ortoqonal trayektoriyanın dife-

rensial tənliyini tapmaq üçün $y' \rightarrow -\frac{1}{y'}$ əvəzləməsini aparmalıyıq.

Onda $yy' + x = 0$ tənliyini alırıq. Bu tənlik ortoqonal trayektoriyyaların

diferensial tənliyidir. Onu həll etsək (dəyişənlərinə ayrılan tənlikdir) alırıq: $x^2 + y^2 =$

$= C^2$. Ortoqonal trayektoriyyalar radiusu C , mərkəzi koordinat başlanğıcında olan çevrələrdir (şəkil 6).

5. $x^2 + y^2 = 2px$ əyrilər ailəsinin ortoqonal trayektoriyyalarını tapın.

HƏLLİ. Verilmiş əyrilər ailəsi mərkəzi ox oxu üzərində olub, oy oxuna toxunan çevrələrdir. Tənliyi x -ə görə diferensiallayaq: $x + yy' = p$. Verilmiş ailənin diferensial tənli-

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2px, \\ x + yy' = p \end{cases}$$

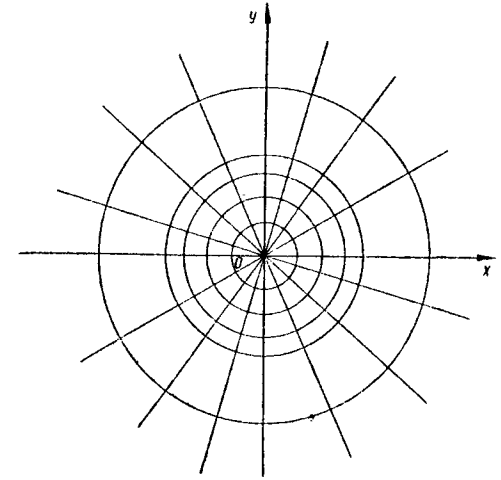
sistemindən p parametrini yox etməklə ala bilərik. $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$.

Ortoqonal əyrilər ailəsinin diferensial tənliyini tapmaq üçün bu tənlikdə $y' \rightarrow -\frac{1}{y'}$ əvəzləməsi etmək lazımdır: $y' = -\frac{2xy}{x^2 - y^2}$. Bu, ortoqonal əyrilər ailəsinin diferensial tənliyidir. Tənlik bircinsdir. Onu inteqrallasaq alırıq: $x^2 + y^2 = Cy$.

Bu, əyrilər ailəsi mərkəzi oy oxu üzərində olub, ox oxuna toxunan çevrələrdir.

6. $\rho^2 = a \cos 2\varphi$ lemniskatlar ailəsinin ortoqonal trayektoriyyalarını tapın.

HƏLLİ. ρ -ya φ -dən asılı funksiya kimi baxıb törəmə alaq:



Şəkil 6.

$$pp' = -a \sin 2\varphi. \text{ Onda } \begin{cases} \rho^2 = a \cos 2\varphi, \\ pp' = -a \sin 2\varphi \end{cases} \text{ sistemindən } a \text{ paramet-}$$

rini yox etməklə ailənin $\rho' = -\rho \operatorname{tg} 2\varphi$ diferensial tənliyini alırıq. Bura-

da $\rho' \rightarrow -\frac{\rho^2}{\rho'}$ ilə əvəz etsək ortoqonal trayektoriyaların $-\frac{\rho^2}{\rho'}$

$= -\rho \operatorname{tg} 2\varphi$ və ya $\frac{d\rho}{\rho} = \operatorname{tg} 2\varphi d\varphi$ diferensial tənliyini alırıq. Axırncı

tənliyi integrallasaq $\rho^2 = C \sin 2\varphi$ ortoqonal trayektoriyaların tənliyini alırıq.

7. $y = kx$ ailəsini 60° bucaq altında kəsən izoqonal trayektoriyasını tapın.

HƏLLİ. $k = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$ olduğundan ailənin $xy' = y$ diferensial tənliyində $y' \rightarrow \frac{y' - \sqrt{3}}{1 + y'\sqrt{3}}$ əvəzləməsi aparsaq, $x \frac{y' - \sqrt{3}}{1 + y'\sqrt{3}} = y$ tən-

liyi alınır. Buradan alınan $y' = \frac{x\sqrt{3} + y}{x - y\sqrt{3}}$ birinci tənliyin ümumi həlli:

$\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{\frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{y}{x}}$ izoqonal trayektoriyaları verir.

$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$ polyar koordinat sistemində keçsək, onda izoqonal trayektoriya $\rho = Ce^{\frac{\varphi}{\sqrt{3}}}$ loqarifmik spirallar ailəsi olar.

8. $\rho = a \sin \varphi$ ailəsinin 45° bucaq altında kəsən izoqonal trayektoriyasının diferensial tənliyini yazmalı.

HƏLLİ. $\rho = a \sin \varphi, \rho' = a \cos \varphi$ bərabərliklərindən a paramet-rini yox etsək, alınan $\frac{\rho'}{\rho} = \operatorname{ctg} \varphi$ tənliyi ailənin diferensial tənliyi olur.

Burada $\frac{\rho'}{\rho} \rightarrow \frac{1 + \frac{\rho}{\rho'}}{\frac{\rho}{\rho'} - 1}$ əvəzləməsi aparsaq $\frac{1 + \frac{\rho}{\rho'}}{\frac{\rho}{\rho'} - 1} = \operatorname{ctg} \varphi, \rho' + \rho =$

$$= (\rho - \rho') \operatorname{ctg} \varphi, \rho' = \rho \frac{\operatorname{ctg} \varphi - 1}{1 + \operatorname{ctg} \varphi}, \rho' = \rho \operatorname{ctg} (\varphi + 45^\circ).$$

Beləliklə, $\rho' = \rho \operatorname{ctg} (\varphi + 45^\circ)$ ailənin izoqonal trayektoriyasının diferensial tənliyi.

16. Birtərtibli diferensial tənliyin Eyler və ardıcıl yaxınlaşma üsulu ilə təqribi həlli

16.1. Eyler üsulu. Tutaq ki,

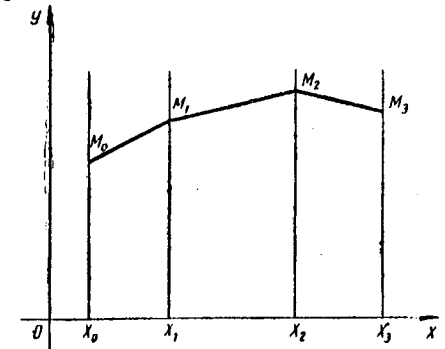
$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

diferensial tənliyin $y(x_0) = y_0$ şərtini ödəyən həllini tapmaq tələb olunur. Həndəsi olaraq, bu $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsindən keçən integral əyrisini tapmaq deməkdir. Eyler üsulunun mahiyyəti integral əyrisinə sıniq xətlər vasitəsilə yaxınlaşmaqdan ibarətdir. Bu sıniq xəttin $[x_0, b]$ parçasında qurulmasına baxaq (şəkil 7).

$[x_0, b]$ parçasını

$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ nöqtə-

ləri ilə $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, b]$ hissələrə bölək. Bucaq əmsali $k_0 = f(x_0, y_0)$ olan və M_0 nöqtəsindən keçən düz xətt tənliyini yazsaq, $y - y_0 = k_0(x - x_0)$. Burada $x = x_1$ yazıb $y_1 = y_0 + k_0(x_1 - x_0)$ hesablayaq. Onda $M_1(x_1, y_1)$ nöqtəsindən keçən və bucaq əmsali $k_1 = f(x_1, y_1)$ olan $y - y_1 = k_1(x - x_1)$ düz xətt tənli-



Şəkil 7.

yini qurmaq olar. Prosesi bu qayda ilə davam etdirsək, $[x_0, b]$ parçası üçün $M_0M_1M_2 \dots$ sınıq xətti alırıq. Bu sınıq xəttə Eyler sınıq xətti deyilir. $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsi Eyler sınıq xətti və axtarılan integral əyrisi üçün orta nöqtədir. Bu nöqtədən aralandıqca sınıq xətt integral əyrisindən daha çox fərqlənir. Əgər $[x_0, b]$ parçasını n bərabər

hissəyə bölsək, onda $h = \frac{b - x_0}{n}$ hesablama addımı olur. Aydındır ki,

bu addım nə qədər kiçik olarsa, sınıq xətt integral əyrisinə bir o qədər yaxın olar. Tənliyin həlli yeganə olduqda $h \rightarrow 0$ şərtində Eyler sınıq xətti dəqiq həllə yaxınlaşır. Sınıq xəttin təpə nöqtələrinin ordinantları diferensial tənliyin axtarılan həllinin təqribi qiymətləri kimi qəbul edilir:

$$y_i = y_{i-1} + f(x_{i-1}, y_{i-1})h, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Göstərmək olur ki, $f(x, y)$ funksiyası kəsilməz olduqda qurulan Eyler sınıq xətləri ya özü, ya da ondan seçilmiş alt ardıcılığın limiti Koşi məsələsinin həlli olur.

1. $[0, 1]$ parçasını 5 bərabər hissəyə bölərək $y' = xy^2 + 1$ tənliyinin $y(0) = 0$ şərtini ödəyən təqribi həllini tapın.

HƏLLİ. $[0, 1]$ parçasını 5 bərabər hissəyə bölək ($n = 5$). Onda

alanq: $h = \frac{1 - 0}{5} = 0,2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $x_1 = 0,2$, $x_2 = 0,4$,

$x_3 = 0,6$, $x_4 = 0,8$, $x_5 = 1,0$.

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h = 0 + 1 \cdot 0,2 = 0,2,$$

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)h = 0,2 + (0,2 \cdot 0,2^2 + 1)0,2 = 0,4016,$$

$$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)h = 0,4016 + (0,4 \cdot 0,4016^2 + 1)0,2 \approx 0,6145,$$

$$y_4 = y_3 + f(x_3, y_3)h = 0,6145 + (0,6 \cdot 0,6145^2 + 1)0,2 \approx 0,8598,$$

$$y_5 = y_4 + f(x_4, y_4)h = 0,8598 + (0,8 \cdot 0,8598^2 + 1)0,2 \approx 1,1781.$$

Cədvəl düzəldək.

No	x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$	$f(x_i, y_i)h$	$y_i + f(x_i, y_i)h$
$i = 0$	0	0	1	0,2	0,2
$i = 1$	0,2	0,2	1,008	0,2016	0,4016
$i = 2$	0,4	0,4016	1,0645	0,2119	0,6145
$i = 3$	0,6	0,6145	1,2266	0,2453	0,8598
$i = 4$	0,8	0,8598	1,5914	0,3183	1,1781
$i = 5$	1,0	1,1781			

Cədvəlin axırıncı sütunundakı qiymətlər tənliyin həllinin təqribi ədədi qiymətləridir.

2. $y' = x^2y + 2$ tənliyinin $y(0) = 0$ şərtini ödəyən həllinin $h = 0,2$ addımına uyğun $x = 1$ nöqtəsindəki qiymətini tapın.

HƏLLİ. $[0, 1]$ parçası $h = 0,2$ addıma uyğun hissələrə bölündüyündən

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0,2, \quad x_2 = 0,4, \quad x_3 = 0,6, \quad x_4 = 0,8, \quad x_5 = 1,$$

$y_k = y_{k-1} + f(x_{k-1}, y_{k-1})(x_k - x_{k-1})$ düsturuna əsasən

$$y_k = y_{k-1} + (x_{k-1}^2 y_{k-1} + 2)h, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5, \quad y_0 = 0.$$

Buradan ardıcıl olaraq tapırıq:

$$y_1 = y_0 + (x_0^2 y_0 + 2)0,2 = (0^2 \cdot 0 + 2)0,2 = 0,4,$$

$$y_2 = y_1 + (x_1^2 y_1 + 2)0,2 = 0,4 + (0,2^2 \cdot 0,4 + 2)0,2 =$$

$$\begin{aligned}
&= 0,4 + 2,016 \cdot 0,2 = 0,8032, \\
y_3 &= y_2 + (x_2^2 y_2 + 2) 0,2 = 0,8032 + (0,16 \cdot 0,8032 + 2) 0,2 = \\
&= 0,8032 + 2,1289 \cdot 0,2 = 1,2289, \\
y_4 &= y_3 + (x_3^2 y_3 + 2) 0,2 = 1,2289 + (0,36 \cdot 1,2289 + 2) 0,2 = \\
&= 1,2289 + 0,4885 = 1,7174, \\
y_5 &= y_4 + (x_4^2 y_4 + 2) 0,2 = 1,7174 + (0,64 \cdot 1,7174 + 2) 0,2 = \\
&= 1,7174 + (1,0901 + 2) 0,2 = 1,7174 + 0,6198 = 2,3372.
\end{aligned}$$

Tələb olunan qiymət 2,3372 olur.

16.2. Ardıcıl yaxınlaşma üsulu. TEOREM: Tutaq ki, $f(x, y)$ funksiyası $D = \{x_0 - a \leq x \leq x_0 + a; y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}$ düzbucaqlısında kəsilməzdir və y arqumentinə nəzərən Lipsiz şərtini ödəyir:

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq K |y_2 - y_1|. \quad (1)$$

Onda

$$y' = f(x, y) \quad (2)$$

tənliyinin $y(x_0) = y_0$ başlanğıc şərtini ödəyən və $[x_0 - h, x_0 + h]$ parçasında təyin olunan yeganə $y = y(x)$ həlli var, burada $h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$, $M = \sup_D |f(x, y)|$. Bu həll

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt, \quad y_0(x) = y_0 \quad (3)$$

rekurrent düsturları ilə təyin olunan $\{y_n(x)\}$ ardıcılığının müntəzəm limiti olur. Bu zaman $y(x)$ həlli ilə $y_n(x)$ ardıcıl yaxınlaşmalar ara-

sındakı xəta

$$|y(x) - y_n(x)| \leq b K^n \frac{h^n}{n!}, \quad x \in [x_0 - h, x_0 + h] \quad n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

bərabərsizliyi ilə təyin olunur.

3. $y' = x^2 + y^2$ tənliyinin $y(0) = 0$ başlanğıc şərtini ödəyən həlli üçün $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ ardıcıl yaxınlaşmaları tapın.

HƏLL. D -oblastı olaraq $\{ -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1 \}$ düzbucaqlını götürək. Onda $M = \sup_D |f(x, y)| = 2$, $h = \min \left\{ 1, \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
|f(x, y_2) - f(x, y_1)| &= |y_2^2 - y_1^2| = |y_2 + y_1| |y_2 - y_1| \leq \\
&\leq 2 |y_2 - y_1|,
\end{aligned}$$

Sıfırıncı yaxınlaşma olaraq $y_0(x) = 0$ qəbul edib, aşağıdakı yaxınlaş-

$$\text{maları tapaq: } y_1(x) = \int_0^x (t^2 + 0^2) dt = \frac{x^3}{3},$$

$$y_2(x) = \int_0^x (t^2 + y_1^2(t)) dt = \int_0^x \left(t^2 + \frac{t^6}{9} \right) dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63},$$

$$\begin{aligned}
y_3(x) &= \int_0^x (t^2 + y_2^2(t)) dt = \int_0^x \left(t^2 + \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{63} \right)^2 \right) dt = \\
&= \int_0^x \left(t^2 + \frac{t^6}{9} + \frac{2}{3 \cdot 63} t^{10} + \frac{t^{14}}{3969} \right) dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535}.
\end{aligned}$$

4. $y' = y^2 + 3x^2 - 1$, $y(1) = 1$ məsələsi üçün $y_0(x)$, $y_1(x)$,

$y_2(x)$ ardıcıl yaxınlaşmalarını tapın.

HƏLLİ. Sıfırıncı yaxınlaşma olaraq $y_0(x) = 1$ götürək. Onda

$$y_1(x) = y_0 + \int_1^x (y_0^2(t) + 3t^2 - 1) dt = 1 + \int_1^x (1^2 + 3t^2 - 1) dt = \\ = 1 + \int_1^x 3t^2 dt = 1 + x^3 - 1 = x^3,$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_1^x (y_1^2(t) + 3t^2 - 1) dt = 1 + \int_1^x (t^6 + 3t^2 - 1) dt = \\ = 1 + \frac{x^7}{7} - \frac{1}{7} + x^3 - 1 - x + 1 = 1 + x^3 - x + \frac{1}{7}(x^7 - 1).$$

YOXLAMA SUALLARI

1. Diferensial tənlik nəyə deyilir?
2. Diferensial tənliyin tərtibi nəyə deyilir?
3. Diferensial tənliyin ümumi, xüsusi və məxsusi həlləri nəyə deyilir?
4. İzoklin nədir? İzoklin üsulunun mahiyyəti nədən ibarətdir?
5. Birtərtibli diferensial tənlik üçün Koşi məsələsi necə qoyulur?
6. Koşi məsələsinin varlığı və yeganiliyi haqqında şərtlər necədir?
7. Dəyişənlərinə ayrılan diferensial tənlik nəyə deyilir?
8. Bircins diferensial tənlik nəyə deyilir və necə həll olunur?
9. Bircins tənliyə gətirilən tənliklərə misal göstərin.
10. Ümumiləşmiş bircins tənliklər nəyə deyilir?
11. Tam diferensiallı tənlik nəyə deyilir? Onun həll üsulu. İnteqrallayıcı vuruq nəyə deyilir və necə tapılır?
12. Xətti diferensial tənliklər nəyə deyilir?
13. Xətti tənliklərin həlli üçün Bernulli və Laqranj (sabitin variasiyası) üsullarının mahiyyəti nədən ibarətdir?
14. Bernulli tənliyi necə yazılır və xətti tənliyə necə gətirilir?
15. Rikatti tənliyi nəyə deyilir və onu hansı hallarda həll etmək olur?
16. Töreməyə nəzərən həll olunmamış diferensial tənlik hansı üsullarla həll olunur?

17. Parametr daxil etmək üsulunun mahiyyəti nədən ibarətdir?
18. Hansı hallarda parametr daxil etmək əlverişli olur?
19. Laqranj tənliyi nəyə deyilir və necə həll olunur?
20. Klero tənliyi nəyə deyilir və necə həll olunur?
21. Əyilər ailəsinin diferensial tənliyi necə tapılır?
22. Trayektoriya məsələsi nəyə deyilir?
23. Ortoqonal trayektoriya nəyə deyilir?
24. İzokonal trayektoriya nəyə deyilir?
25. Diferensial tənliklərin təqribi həlli üçün Eyler və ardıcıl yaxınlaşma üsulunun mahiyyəti nədən ibarətdir?

MÜSTƏQİL HƏLL ETMƏK ÜÇÜN MİSALLAR

1. Verilmiş funksiyaların verilmiş tənliyin həlli olduğunu göstərin

$$1. y = \frac{\sin x}{x}; \quad xy' + y = \cos x. \quad 2. y = \frac{1}{3}e^x; \quad y' + 2y = e^x.$$

$$3. y = e^x \int_0^x e^{t^2} dt + Ce^x; \quad y' - y = e^{x+x^2}.$$

$$4. x = \cos t, \quad y = \sin t; \quad x + yy' = 0.$$

$$5. y = C_1 \sin x + C_2 \cos x; \quad y'' + y = 0.$$

2. Verilən funksiyaların tənliyin ümumi həlli olduğunu göstərin

$$1. y = \frac{C}{\cos x}; \quad y' - y \tan x = 0. \quad 2. y = \ln(C + e^x); \quad y' = e^{x-y}.$$

$$3. x = y \ln Cy; \quad y'(x + y) = y.$$

$$4. y^2 + 2Cx = C^2; \quad yy'^2 + 2xy' = y.$$

3. Həllin varlığı və yeganəliyi oblastını tapın

1. $y' = \sqrt{x-y}$, CAVAB: $[x \geq y]$.
2. $y' = \sqrt[3]{3x-y-1}$, [bütün müstəvi].
3. $y' = 2 + \sqrt[3]{y-2x}$, [$y \neq 2x$].
4. $y' = \sqrt[3]{y^2}$, [$y \neq 0$].
5. $y' = 1 + \sqrt{y-x}$, [$y > x$].
6. $y' = \sqrt{4y^2-1}$, [$|y| > \frac{1}{2}$].

4. İzoklin üsulu ilə tənliklərin integral əyrilərini təqribi qurun

1. $y' = y + x$.
2. $y' = y - x$.
3. $y' = 2x - y$.
4. $y' = y - x^2$.
5. $y' = y + x^2$.
6. $y' = y - x^2 + 2x$.

5. Həll edin

5.1. Dəyişənlərinə aynla bilən tənliklər

1. $(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0$, [$\arctg x + \arctg y = C$].
2. $\sqrt{y^2+1}dx - xydy = 0$, [$\sqrt{y^2+1} = \ln xC$].
3. $xydx + (x+1)dy = 0$, [$y = C(x+1)e^{-x}$].
4. $y' = 10^{x+y}$, [$10^x + 10^{-y} = C$].

5. $(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0$, [$y \ln C(x^2-1) = 1$].
6. $y' = \sin(x-y)$, [$x + C = \operatorname{ctg}\left(\frac{y-x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$].

5.2. Bircins tənliklər

1. $(x+2y)dx - xdy = 0$, [$x+y = Cx^2, x=0$].
2. $(x-y)dx + (x+y)dy = 0$, [$\ln(x^2+y^2) = C - 2\arctg \frac{y}{x}$].
3. $(x-2y)y' = x-y$, [$xy - y^2 - \frac{x^2}{2} = C$].
4. $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$, [$x(y-x) = Cy, y=0$].
5. $4x - 3y + (2y - 3x)y' = 0$, [$y^2 - 3xy + 2x^2 = C$].
6. $xy' = \sqrt{y^2 - x^2}$, [$y + \sqrt{y^2 - x^2} = Cx^3 e^{\frac{y(\sqrt{y^2-x^2})}{x^2}}$].

5.3. Bircins tənliyə gətirilən tənliklər

1. $(6x+y-1)dx + (4x+y-2)dy = 0$, [$(y+2x-3)^2 =$
 $= C\left(y+3x-\frac{5}{2}\right)$].

$$2. y' = 2 \left(\frac{y+2}{x+y-1} \right)^2, \quad \left[y+2 = Ce^{-2 \operatorname{arctg} \frac{y+2}{x-3}} \right]$$

$$3. (x-y-1)dx + (y-x+2)dy = 0, \quad [y-x+2]^2 + 2x = C]$$

$$4. (x+4y)y' = 2x+3y-5, \quad [(y-x+5)^5(x+2y-2) = C]$$

$$5. (2x-4y+6)dx + (x+y-3)dy = 0, \quad [y-2x]^3 = \\ = C(y-x-1)^2, \quad y = x+1]$$

$$6. (3y-7x+7)dx - (3x-7y-3)dy = 0, \\ [(x+y+1)^5(x-y-1)^2 = C]$$

5.4. Ümumileşmiş biricins tenlikler

$$1. 2y' + x = 4\sqrt{y}, \quad [(2\sqrt{y}-x) \ln C(2\sqrt{y}-x) = x, \quad 2\sqrt{y} = x]$$

$$2. y' = y^2 - \frac{2}{x^2}, \quad [1-xy = Cx^3(2+xy), \quad xy = -2]$$

$$3. x^3(y'-x) = y^2, \quad [x^2 = (x^2-y) \ln Cx, \quad y = x^2]$$

$$4. 2x^2y' = y^3 + xy, \quad [x = -y^2 \ln Cx, \quad y = 0]$$

5.5. Xətti və Bernulli tenlikləri

$$1. y' + 2y = e^{-x}, \quad [y = Ce^{-2x} + e^{-x}]$$

$$2. xy' - 2y = x^3 \cos x, \quad [y = Cx^2 + x^2 \sin x]$$

$$3. y' \lg x - y = a, \quad [y = C \sin x - a]$$

$$4. y' + y \lg x = \sin 2x, \quad [y = -2 \cos^2 x + C \cos x]$$

$$5. y' - y \cos x = \sin 2x, \quad [y = Ce^{\sin x} - 2 \sin x - 2]$$

$$6. y' - \frac{2y}{x} = x^2 e^x, \quad y(1) = 0, \quad [y = x^2(e^x - e)]$$

$$7. xy' - y = x^2 y^2, \quad \left[y = -\frac{3x}{(x^3 + C)^2} \right]$$

$$8. xy' - 4y = 2x^2 \sqrt{y}, \quad [y = x^4 \ln^2 Cx, \quad y = 0]$$

$$9. y' - y \lg x + y^2 \cos x = 0, \quad \left[y = \frac{1}{(x+C) \cos x} \right]$$

$$10. y' + 2y = y^2 e^x, \quad [y(e^x + Ce^{2x}) = 1, \quad y = 0]$$

5.6. Rikkati tənliyi

$$1. y' - 2xy + y^2 = 1 - x^2, \quad y_1 = x, \quad \left[y = x + \frac{1}{x-C} \right]$$

$$2. xy' - (2x+1)y + y^2 = -x^2, \quad y_1 = x, \quad \left[y = x + \frac{x}{x+C} \right]$$

$$3. y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2, \quad y = x+2, \quad \left[y = x+2 + \frac{4}{Ce^{4x} - 1} \right]$$

5.7. Tam diferensiallı tenliklər

$$1. 2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0, \quad [3x^3y - y^3 = C]$$

$$2. e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0, \quad [xe^{-y} - y^2 = C]$$

$$3. (3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0, \quad [x^2 + 3x^2y^2 + y^4 = C]$$

$$4. \frac{y}{x} dx + (y^3 + \ln x) dy = 0, \quad [4y \ln x + y^4 = C]$$

$$5. \left(\frac{\sin 2x}{y} + x \right) dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2} \right) dy = 0, \quad \left[\frac{\sin^2 x}{y} + \frac{x^2 + y^2}{2} = C \right]$$

$$6. (3x^2 - 2x - y) dx + (2y - x + 3y^2) dy = 0, \quad [x^3 + y^3 - x^2 - xy + y^2 = C]$$

5.8. İnteqrallayıcı vuruc

$$1. (x^2 + y^2 + 1) dx - 2xy dy = 0, \quad \mu = \varphi(x), \quad \left[1 + y^2 - x^2 = Cx, \right. \\ \left. \mu = \frac{1}{x^2} \right]$$

$$2. (2xy^2 - 3y^3) dx + (7 - 3xy^2) dy = 0, \quad \mu = \varphi(y), \quad \left[x^2 - \frac{7}{y} - 3xy = C, \right. \\ \left. \mu = \frac{1}{y^2} \right]$$

$$3. (x^2 + y) dx - x dy = 0, \quad \mu = \varphi(x), \quad \left[x - \frac{y}{x} = C, \quad \mu = \frac{1}{x^2} \right]$$

$$4. 2xy dx - (x^2 + y) dy = 0, \quad \mu = \varphi(y), \quad \left[y \ln|y| - x^2 = Cy, \right. \\ \left. \mu = \frac{1}{y^2} \right]$$

$$5. (x + \sin x + \sin y) dx + \cos y dy = 0, \quad \mu = \varphi(x), \\ [2e^x \sin y + e^x(x-1) + e^x(\sin x - \cos x) = C, \quad \mu = e^x]$$

5.9. Töreməyə nəzərən həll olunmamış tənliklər

$$1. y'^2 - y^2 = 0, \quad [y = Ce^{\pm x}]$$

$$2. 8y'^3 = 27y, \quad [y^2 = (x+C)^3, \quad y=0]$$

$$3. y'^2 - 2xy' = 8x^2, \quad [y = 2x^2 + C, \quad y = -x^2 + C]$$

$$4. xy'^2 + 2xy' - y = 0, \quad [(y-C)^2 = 4Cx]$$

$$5. 4y'^2 - 9x = 0, \quad [(y-C)^2 = x^3]$$

$$6. xy'^2 - 2yy' + x = 0, \quad [x^2 + C^2 = 2Cy, \quad y = \pm x]$$

5.10. Parametr daxil etmə

$$1. x = y' + y'^3, \quad [x = p + p^3, \quad 4y = 3p^4 + 2p^2 + C]$$

$$2. y = y'^2 + 2y'^3, \quad [x = 3p^2 + 2p + C, \quad y = p^2 + 3p^2, \quad y=0]$$

$$3. x = y' \sqrt{y'^2 + 1}, \quad [x = p \sqrt{p^2 + 1}, \quad 3y = (2p^2 - 1) \sqrt{p^2 + 1} + C]$$

$$4. y = xy' - x^2 y'^3, \quad [xp^2 = C \sqrt{|p|} - 1, \quad y = xp - x^2 p^3, \quad y=0]$$

$$5. y = \ln(1 + y'^2), \quad [x = \operatorname{arctg} p + C, \quad y = \ln(1 + p^2), \quad y=0]$$

$$6. y = (y' - 1)e^{y'}, \quad [x = e^p + C, \quad y = (p-1)e^p, \quad y=1]$$

5.11. Laqranj və Klero tənlikləri

$$1. y = xy' - y'^2, \quad [y = Cx - C^2, \quad 4y = x^2]$$

$$2. y = -xy' + 4\sqrt{y'}, \quad [x\sqrt{p} = \ln p + C, \quad y = \sqrt{p}(4 - \ln p - C); \quad y = 0].$$

$$3. y = 2xy' - 4y'^3, \quad [x = 3p^2 + Cp^{-2}, \quad y = 2p^3 + 2Cp^{-1}; \quad y = 0].$$

$$4. y = xy' + \frac{9}{y'}, \quad \left[y = Cx + \frac{9}{C}; \quad y^2 = 36x \right].$$

$$5. y = xy' - (2 + y'), \quad [y = Cx - C - 2].$$

$$6. y'^3 = 3(xy' - y), \quad [C^3 = 3(Cx - y); \quad 9y^2 = 4x^3].$$

Ailələrin diferensial tənliklərini qurun

$$1. y = Cx^3, \quad [xy' = 3y].$$

$$2. y = (x - C)^3, \quad \left[y' = 3y^{\frac{2}{3}} \right].$$

$$3. y = \sin(x + C), \quad [y^2 + y'^2 = 1].$$

$$4. y = C_1x^2 + C_2e^x, \quad [x(x-2)y'' - (x^2-2)y' + 2(x-1)y = 0].$$

$$5. (x - C_1)^2 + C_2y^2 = 1, \quad [(yy'' + y'^2)^2 = -y^3y''].$$

$$6. y = C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x, \quad [x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0].$$

Ailələrin göstərilən φ bucağı altında kəsilən trayektoriyalarının diferensial tənliyini qurun

$$1. x^2 = y + Cx, \quad \varphi = 90^\circ, \quad [(x^2 + y)y' = -x].$$

$$2. x^2 + y^2 = a, \quad \varphi = 45^\circ, \quad [(x+y)y' = y-x; \quad (x-y)y' = x+y].$$

$$3. y = kx, \quad \varphi = 60^\circ, \quad [(x \mp y\sqrt{3})y' = y \pm x\sqrt{3}].$$

$$4. y^2 = 2px, \quad \varphi = 60^\circ, \quad [(2x \mp y\sqrt{3})y' = y \pm 2x\sqrt{3}].$$

$$5. r = a \cos^2 \theta, \quad \varphi = 90^\circ, \quad \left[r' = \frac{1}{2} r \operatorname{ctg} \theta \right].$$

$$6. r = a \sin \theta, \quad \varphi = 45^\circ, \quad [r' = r \operatorname{ctg}(\theta \pm 45^\circ)].$$

7. $xy = C$ hiperbolalar ailəsinin ortoqonal trayektoriyasını tapın.

$$[y^2 - x^2 = C].$$

Verilmiş parça və addıma əsasən Eyler üsulu ilə həll edin

$$1. y' = \frac{1}{2}xy, \quad y(0) = 1, \quad [0, 1], \quad h = 0,1,$$

$$2. y' = 1 + xy^2, \quad y(0) = 0, \quad [0, 1], \quad h = 0,1,$$

$$3. y' = x + y, \quad y(1) = 2, \quad [1, 3], \quad h = 0,2, \quad y(3) = ?,$$

$$4. y' = x^2y^3 + x^3, \quad y(0) = 0, \quad [0, 1], \quad h = 0,1,$$

Verilmiş məsələlərin həlli üçün $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$ ardıcıl yaxınlaşmalarını tapın

$$1. y' = x + y^2, \quad y(0) = 0, \quad \left[y_0 = 0, \quad y_1 = \frac{x^2}{2}, \quad y_2 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20} \right].$$

$$2. y' = x - y^2, \quad y(0) = 0, \quad \left[y_0 = 0, \quad y_1 = \frac{x^2}{2}, \quad y_2 = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20} \right].$$

$$2. \quad y' = x - y^2, \quad y(0) = 0, \quad \left[y_0 = 0, \quad y_1 = \frac{x^2}{2}, \quad y_2 = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20} \right].$$

$$3. \quad y' = 1 + x \sin y, \quad y(\pi) = 2\pi, \quad [y_0 = 2\pi, \quad y_1 = \pi + x, \\ y_2 = 2\pi + x + x \cos x - \sin x].$$

II FƏSİL

YÜKSƏK TƏRTİBLİ TƏNLİKLƏR

1. İkitərtibli diferensial tənliklər. Koşi məsələsi

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (1)$$

tənliyinə *ikitetərtibli diferensial tənlik*,

$$y'' = f(x, y, y') \quad (2)$$

tənliyinə isə *yüksək tərtib törəməyə nəzərən həll olunmuş tənlik* deyilir. İkitərtibli diferensial tənliyin ümumi həlli elə $y = \varphi(x, c_1, c_2)$ funksiyasına deyilir ki, c_1 və c_2 sabitlərinin mümkün qiymətlərində həmin tənliyin həllərini almaq mümkün olsun. İkitərtibli diferensial tənliyin *xüsusi həlli* c_1 və c_2 sabitlərinin mümkün qiymətlərində $y = \varphi(x, c_1, c_2)$ ümumi həllindən alınan həllə deyilir. İkitərtibli diferensial tənliyin

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0 \quad (3)$$

başlanğıc şərtlərini ödəyən həllinin tapılmasına *Koşi məsələsi* deyilir. Hər bir nöqtəsində Koşi məsələsinin həllinin yeganəliyi pozulan həllə məxsusi həll deyilir. İkitərtibli diferensial tənliklər üçün Koşi məsələsinin həlli həndəsi olaraq, verilmiş $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsindən keçən və bu nöqtədə y'_0 toxunanına malik integral əyrisinin tapılmasıdır.

$f(x, y, y')$ funksiyası (x_0, y_0, y'_0) nöqtəsinin müəyyən ətrafında kəsilməzdirsə, (2) tənliyinin (3) şərtlərini ödəyən həlli var. Əlavə olaraq $\frac{\partial f}{\partial y}$ və $\frac{\partial f}{\partial y'}$ xüsusi törəmələri də kəsilməzdirsə, onda bu həll yeganədir.

2. Tərtibi aşağı salına bilən diferensial tənliklər

2.1. $y'' = f(x)$ şəklində tənliklər. Bu tənlikdə $f(x)$ funksiyası (a, b) intervalında kəsilməz olduqda ümumi həlli tapmaq. Verilən tənliyi $dy' = f(x)dx$ şəklində yazıb, integrallayaq:

$$y' = \int_{x_0}^x f(t)dt + C_1, \quad x_0 \in (a, b), \quad x \in (a, b).$$

Buradan alarıq: $dy = \left[\int_{x_0}^x f(t)dt + C_1 \right] dx$. Hər tərəfi integrallasaq:

$$y = \int_{x_0}^x \left[\int_{x_0}^{\xi} f(t)dt \right] d\xi + C_1(x - x_0) + C_2.$$

Axırıncı bərabərliyi $y = \int_{x_0}^x (x-t)f(t)dt + C_1(x - x_0) + C_2$ şəklində

yazmaq olar.

1. $y'' = x + \sin x$ tənliyinin $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$ başlangıç şərtlərini ödəyən həllini tapın.

HƏLLİ. Tənliyi $dy' = (x + \sin x)dx$ şəklində yazıb, integrallayaq:

$$y' = \frac{x^2}{2} - \cos x + C_1. \text{ Buradan } dy = \left(\frac{x^2}{2} - \cos x + C_1 \right) dx \text{ yazıb, in-}$$

teqrallasaq verilmiş tənliyin ümumi həllini $y = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1x + C_2$ şəklində alırıq.

Başlangıç şərtlərdən istifadə edək. Ümumi həldə $x = 0$, $y = 2$ yazsaq $C_2 = 2$ alarıq, $x = 0$, $y' = 3$ yazsaq, $C_1 = 4$ alarıq.

Onda $y = \frac{x^3}{6} - \sin x + 4x + 2$ funksiyası Koşi məsələsinin həlli olur.

2.2. $y'' = f(x, y')$ şəklində tənliklər. Tənliyin sağ tərəfinə axtarılan y funksiyası aşkar şəkildə daxil olmur. Verilmiş tənliyi həll et-

mək üçün $y' = z$ əvəzləməsini aparaq. Onda, verilmiş tənlik $z' = f(x, z)$ şəklinə düşər. Bu tənliyin ümumi həlli $z = \varphi(x, C_1)$ olarsa, onda $y' = \varphi(x, C_1)$ tənliyi alınar. Buradan integrallamaqla verilmiş tənliyin $y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2 = \Phi(x, C_1, C_2)$ ümumi həllini alırıq.

2. $y'' = \frac{y'}{3-x}$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

HƏLLİ. $y' = z(x)$ əvəzləməsini aparsaq, onda verilmiş tənlik

$$z' = \frac{z}{3-x} \text{ şəklinə düşər. Buradan alarıq. } \frac{dz}{z} = \frac{dx}{3-x}, \quad \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{3-x} + \ln C_1, \quad \ln|z| = -\ln|3-x| + \ln C_1, \quad z = \frac{C_1}{3-x}.$$

$$z = y' \text{ əvəzləməsinə əsasən alırıq: } y' = \frac{C_1}{3-x}, \quad dy = \frac{C_1}{3-x} dx,$$

$$\int dy = C_1 \int \frac{dx}{3-x} + C_2, \quad y = -C_1 \ln|3-x| + C_2.$$

Beləliklə, $y = -C_1 \ln|3-x| + C_2$ verilmiş tənliyin ümumi həlli olur.

2.3. Sərbəst dəyişən aşkar daxil olmayan tənliklər. x dəyişəni aşkar şəkildə daxil olmayan

$$y'' = f(y, y') \quad (1)$$

tənliyində $y' = p(y)$ əvəzləməsini aparaq. Onda alarıq. $y'' = \frac{dy'}{dx}$

$$= \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}. \quad y' \text{ və } y'' \text{-in qiymətlərini tənlikdə nəzərə alsaq birtərtibli}$$

$$p \frac{dp}{dy} = f(y, p) \quad (2)$$

diferensial tənliyi alınar. Burada y sərbəst dəyişən, $p = p(y)$ axtarı-

nlən funksiyadır.

Tutaq ki, bu tənliyin ümumi həlli $p = \varphi(y, C_1)$ şəklindədir. Onda $dy = \varphi(y, C_1) dx$ dəyişənlərinə ayrılan tənlik alınır:

$$\frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = dx, \quad \int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = \int dx + C_2,$$

Buradan verilmiş tənliyin $\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2$ şəklində ümumi həlli tapılır.

3. $(3 + y)y'' + y'^2 = 0$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

HƏLLİ. Verilən tənliyə x dəyişəni aşkar şəkildə daxil olmur. $y' = p(y)$ əvəzləməsini aparaq. Onda $y'' = p \frac{dp}{dy}$ olar. y' və y'' -in qiymətlərini tənlikdə yerinə yazsaq. $(3 + y)p \frac{dp}{dy} + p^2 = 0$. Buradan $p = 0$ və $(3 + y) \frac{dp}{dy} + p = 0$ bərabərlikləri alınır.

Onda $p = 0$ tənliyindən $y' = 0$, $y = C$ alınır. İkinci tənliyi dəyişənlərinə ayıraq və inteqrallayaq: $\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{3 + y}$, $\int \frac{dp}{p} = -\int \frac{dy}{3 + y} + \ln C_1$, $\ln|p| = -\ln|3 + y| + \ln C_1$, $p = \frac{C_1}{3 + y}$.

$p = y'$ olduğunu nəzərə alsaq yazı bilərik: $y' = \frac{C_1}{3 + y}$, $(3 + y)dy = C_1 dx$, $\int (3 + y)dy = C_1 \int dx + C_2$, $3y + \frac{y^2}{2} = C_1 x + C_2$.

Beləliklə, $3y + \frac{y^2}{2} = C_1 x + C_2$ verilmiş tənliyin ümumi inteqralı olur.

2.4. Axtarılan funksiya və onun törəmələrinə nəzərən bircins

tənliklər. Tutaq ki,

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (1)$$

tənliyi verilmişdir. $F(x, ty, ty', ty'') = t^m(x, y, y', y'')$ şərti ödənərsə, (1) tənliyinə axtarılan funksiya və onun törəmələrinə nəzərən bircins

tənlik deyilir. $y' = yz$ əvəzləməsini aparaq. Onda alanq: $y'' = (y')' = (yz)' = y'z + yz' = yz^2 + yz' = y(z^2 + z')$.

Bu əvəzləməni tənlikdə yazsaq alanq:

$$F[x, y, 1, yz, y(z^2 + z')] = y^m F(x, 1, z, z^2 + z') = 0.$$

Buradan birtərtibli

$$F(x, 1, z, z^2 + z') = 0 \quad (2)$$

tənliyi alınır.

4. $xyy'' - xy'^2 - yy' = 0$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. Verilən tənlik axtarılan funksiya və onun törəmələrinə nəzərən bircinsdir. Odur ki, $y' = yz$, $y'' = y(z^2 + z')$, $xy^2(z^2 + z') - xy^2z^2 - y^2z = 0$. Buradan $y = 0$, $x(z^2 + z') - xz^2 - z = 0$, $xz' - z = 0$, $xz' = z$, $\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}$, $\int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x} + \ln C_1$, $\ln|z| = \ln|x| + \ln C_1$, $z = C_1 x$.

$z = \frac{y'}{y}$ olduğunu nəzərə alsaq $\frac{y'}{y} = C_1 x$ tənliyi alınır. $\frac{dy}{y} = C_1 x dx$,

$$\int \frac{dy}{y} = C_1 \int x dx + \ln C_2, \quad \ln|y| = C_1 \frac{x^2}{2} + \ln C_2, \quad y = C_2 e^{C_1 x^2}.$$

Deməli, $y = C_2 e^{C_1 x^2}$ verilmiş tənliyin ümumi həlli olur.

2.5. Sol tərəfi tam diferensial olan tənliklər. Tutaq ki,

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (1)$$

tənliyinin sol tərəfi hər hansı $\Phi(x, y, y')$ funksiyasının tam diferensialıdırsa, yəni

$$F(x, y, y', y'') = \frac{d}{dx} [\Phi(x, y, y')] = \Phi'_x(x, y, y') +$$

$+ \Phi'_y(x, y, y')y' + \Phi'_{y'}(x, y, y')y''$, onda onu $\frac{d}{dx}\Phi(x, y, y') = 0$ şeklinde yazmaq olar. Buradan birtertibli $\Phi(x, y, y') = C_1$ tenliyi alınar.

5. $xy'' + (1 + 2y)y' = 0$ tenliyini həll edin.

HƏLLİ. Verilmiş tenliyin sol tərəfi $\Phi(x, y, y') = xy' + y^2$ funksiyanın tam diferensial şəklində göstərilə bilər. Odur ki, $\frac{d}{dx}(xy' + y^2) = 0$,

$$xy' + y^2 = C_1, \quad xy' = C_1 - y^2, \quad \frac{dy}{C_1 - y^2} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dy}{C_1 - y^2} = \int \frac{dx}{x} + \ln C_2. \quad C_1 > 0 \text{ olduqda } \int \frac{dy}{C_1 - y^2} = \frac{1}{2\sqrt{C_1}} \ln \left| \frac{\sqrt{C_1} + y}{\sqrt{C_1} - y} \right|$$

olduğundan yazı bilərik. $\frac{1}{2\sqrt{C_1}} \ln \left| \frac{\sqrt{C_1} + y}{\sqrt{C_1} - y} \right| = \ln x + \ln C_2. \quad C_1 < 0$

$$\text{olduqda } \int \frac{dy}{C_1 - y^2} = - \int \frac{dy}{y^2 - C_1} = -\sqrt{-C_1} \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{-C_1}} \text{ olduqun-}$$

dan alınq: $\sqrt{-C_1} \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{-C_1}} = \ln|x| + \ln C_2.$

2.6. Ümumiləşmiş bircins tenliklər. $F(x, y, y', y'')$ funksiyası üçün

$$F(tx, t^k y, t^{k-1} y', t^{k-2} y'') = t^m F(x, y, y', y'') \quad (1)$$

berabərliyi ödənilədikdə

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (2)$$

tenliyinə ümumiləşmiş bircins tenlik deyilir. Belə tenliyi həll etmək üçün $x = e^t, \quad y = ze^{kt} \quad (x > 0)$ əvəzləməsi aparmaq lazımdır. Burada t yeni sərbəst dəyişən, z isə yeni axtarılan funksiya olur. $y' =$

$$= \frac{dy}{dx} = e^{(k-1)t} \left(\frac{dz}{dt} + kz \right), \quad y'' = e^{(k-2)t} \left(\frac{d^2 z}{dt^2} + (2k-1) \frac{dz}{dt} + k(k-1)z \right).$$

Bunları tenlikdə yerinə yazıb, (1) bərabərliyini nəzərə alsaq, (2) tenliyi

$$F \left(1, z, \frac{dz}{dt} + kz, \frac{d^2 z}{dt^2} + (2k-1) \frac{dz}{dt} + k(k-1)z \right) = 0 \quad (3)$$

şəklinə düşür. Alınan tenliyə sərbəst dəyişən aşkar şəkildə daxil olmur.

6. $4x^2 y^3 y'' = x^2 - y^4$ tenliyinin ümumi həllini tapın.

HƏLLİ. Verilən tenliyin ümumiləşmiş bircins olduğunu yoxlayaq: $x \rightarrow tx, \quad y \rightarrow t^k y, \quad y' \rightarrow t^{k-1} y', \quad y'' \rightarrow t^{k-2} y''$ əvəzləməsini aparsaq, alınan bərabərlikdə t -nin dərəcələri eyni olması üçün

$$2 + 3k + k - 2 = 2 = 4k. \quad \text{Buradan } 4k = 2, \quad k = \frac{1}{2}. \quad \text{Tenliyi həll}$$

etmək üçün $x = e^t, \quad y = ze^{\frac{t}{2}}$ əvəzləməsi aparaq. Onda

$$y' = e^{\left(\frac{1}{2}-1\right)t} \left(\frac{dz}{dt} + \frac{1}{2}z \right), \quad y'' = e^{\left(\frac{1}{2}-2\right)t} \left(\frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{z}{4} \right). \quad \text{Bunları verilən}$$

tenlikdə yerinə yazmaqla alınq.

$$4z^3 \left(\frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{z}{4} \right) = 1 - z^4, \quad 4z^3 \frac{d^2 z}{dt^2} = 1$$

tenliyi alınar. Bu tenliyi həll etmək üçün onu $\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{1}{4z^3}$ şəklində yazıb

$$\text{her tərəfi } 2 \frac{dz}{dt} \text{ -ə vuraq: } 2 \frac{dz}{dt} \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{1}{2z^3} \frac{dz}{dt}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2z^3} \frac{dz}{dt}. \quad \text{Buradan}$$

$$\left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = C_1 - \frac{1}{4z^2}, \quad \frac{dz}{dt} = \sqrt{C_1 - \frac{1}{4z^2}}. \quad \text{Alınan dəyişənlərə aynla}$$

bilən tənlikdir. $\frac{2zdz}{\sqrt{C_1 z^2 - 1}} = dt$, $\int \frac{2zdz}{\sqrt{C_1 z^2 - 1}} = t + \ln C_2$,

$$\frac{2}{C_1} \sqrt{C_1 z^2 - 1} = t + \ln C_2.$$

Əvəzləməyə əsasən $t = \ln x$, $z = \frac{y}{\sqrt{x}}$ olur. Onda ki,

$$\frac{2}{C_1} \sqrt{C_1 \frac{y^2}{x} - 1} = \ln x + \ln C_2; \quad 2\sqrt{\frac{C_1 y^2 - x}{x}} = C_1 \ln C_2 x.$$

Hər tərəfi kvadrata yüksəldək: $4(C_1 y^2 - x) = x(C_1 \ln C_2 x)^2$. Bu, verilən tənliyin ümumi həlli olur.

3. İkitərtibli xətti tənliklər

3.1. Ümumi anlayışlar. Qeyd edək ki,

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (1)$$

tənliyi *ikitetərtibli xətti*,

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (2)$$

tənliyi isə *ikitetərtibli xətti bircins tənlik* adlanır. $y_1(x)$ və $y_2(x)$ xətti bircins tənliyinin iki həllidirsə, onda ixtiyari C_1 və C_2 sabitləri üçün

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \quad (3)$$

tənliyin həlli olur. Tənliyin $y_1(x)$ və $y_2(x)$ həllərinin nisbəti sabit bir

ədədə bərabər deyilsə (yə'ni $\frac{y_2(x)}{y_1(x)} \neq \text{const}$), onda həmin həllər *xət-ti*

li asılı olmayan həllər olur. Əks halda, yə'ni $\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = \text{const}$ olduqda

xətli asılı həllər olur. $y_1(x)$ və $y_2(x)$ funksiyaları (2) tənliyinin xətti asılı olmayan həllədirsə, onlara *fundamental həll* deyirlər və (3) həmin tənliyin ümumi həlli olur. (2) tənliyinin ümumi həllini tapmaq üçün həmin tənliyin xətti asılı olmayan iki həllini tapmaq kifayətdir. Tutaq

$y_1(x)$ və $y_2(x)$ funksiyaları (a, b) intervalında diferensiallanırlar. Onda

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

determinantına bu funksiyalardan düzəldilmiş Vronski determinantı deyilir. $W(x) \neq 0$, $x \in (a, b)$ olduqda verilmiş funksiyalar xətti asılı olmur. $W(x) = 0$, $x \in (a, b)$ olarsa, verilmiş funksiyaların xətti asılı olub-olmaması haqqında fikir söyləmək olmur. Lakin $y_1(x)$, $y_2(x)$ funksiyaları (2) bircins tənliyin həlləri olarsa,

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int p(x) dx}$$

Ostrogradski-Liuvill düsturuna əsasən bu həllərin xətti asılı olmaması üçün onlardan düzəldilmiş Vronski determinantının $W(x) \neq 0$, $x \in (a, b)$ olması zəruri və kifidir.

Qeyd edək ki, ümumi halda (2) tənliyini həll etmək mümkün olmur. Lakin bu tənliyin hər hansı bir həlli mə'lum olarsa, onun ümumi həllini tapmaq olur. Tutaq ki, $y_1(x)$ funksiyası (2) tənliyinin həllidir. Onda

$y = y_1(x) \int u(x) dx$ əvəzləməsi vasitəsilə o, birtərtibli xətti tənliyə gətirməklə həll olunur. Bu halda ümumi həlli Ostrogradski-Liuvill düsturuna əsasən də tapmaq olar. Tənliyin ixtiyari həlli $y(x)$ olarsa,

Ostrogradski-Liuvill düsturuna əsasən

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = C e^{-\int p(x) dx}$$

Buradan $\left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{C_1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(x) dx}$ yazıb, integrallasaq alırıq:

$$y = y_1(x) \left\{ C_1 \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(x) dx} dx + C_2 \right\}.$$

Bircins olmayan (1) tənliyinin ümumi həlli ona uyğun (2) bircins

tənliyin (3) ümumi həlli ilə verilmiş tənliyin hər hansı bir $\tilde{y}(x)$ xüsusi həllinin cəminə bərabərdir:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \tilde{y}(x) \quad (4)$$

1. $y'' - 5y' + 6y = 0$ tənliyi üçün e^{2x} , e^{3x} funksiyalarının fundamental həll olduğunu göstərin.

HƏLLİ. Bilavasitə yoxlamaqla göstərmək olar ki, e^{2x} , e^{3x} funksiyaların hər biri verilmiş tənliyin həllidir. Bu həllər üçün

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = \frac{e^{3x}}{e^{2x}} = e^x \neq \text{const} \text{ və ya } W(x) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = e^{5x} \neq 0$$

olduğundan xətti asılı deyil. Onda $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$ verilmiş tənliyin ümumi həlli olar. Burada C_1 və C_2 ixtiyari sabitlərdir.

2. $(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0$ tənliyinin bir xüsusi həllini çoxhədli şəklində tapıb, həll edin.

HƏLLİ. Tənliyin həllini $y = x^n + ax^{n-1} + \dots$ şəklində axtaraq.

Onda $(2x+1)(n(n-1)x^{n-2} + \dots) + 4x(nx^{n-1} + \dots) - 4(x^n + \dots) = 0$.

Buradan aydındır ki, $y_1 = x$ götürsək, bu verilən tənliyin həlli olur.

Onda tənlikdə $y = y_1 \int u dx = x \int u dx$ əvəzləməsi aparmaq lazımdır.

$$y' = \int u dx + xu, \quad y'' = xu' + 2u.$$

Bunları verilən tənlikdə yerinə yazsaq:

$$(2x+1)(xu' + 2u) + 4x \left(\int u dx + xu \right) - 4x \int u dx = 0.$$

Buradan birtərtibli xətti bircins $(2x+1)xu' + (4x^2 + 4x + 2)u = 0$ tən-

liyi alınır. Alınan tənliyi həll edək: $\frac{du}{u} + \frac{4x^2 + 4x + 2}{x(2x+1)} dx = 0$, $\frac{du}{u} +$

$$+ \left(2 + \frac{2}{x} - \frac{2}{2x+1} \right) dx = 0, \quad \ln u + 2x + 2 \ln x - \ln(2x+1) = \ln C.$$

$$u = C \frac{2x+1}{x^2} e^{-2x} = C \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right) e^{-2x} = C \left(-\frac{e^{-2x}}{x} \right)'$$

Əvəzləməyə əsasən

$$y = x \int u dx = Cx \int \left(-\frac{e^{-2x}}{x} \right) dx = -Cx \frac{e^{-2x}}{x} = -Ce^{-2x}, \quad C = -1$$

qəbul etsək, $y_2 = e^{-2x}$ verilən tənliyin həlli olur. Onda x , e^{-2x} funksiyalara verilən tənlik üçün fundamental həllər təşkil edir. Onda ki, $y = C_1 x + C_2 e^{-2x}$ tənliyin ümumi həllini verir.

Həlli Vronski determinatından istifadə etməklə tapaq. x və y həlləri üçün Vronski determinatının ostrogradski-Liuvill düsturuna əsasən

$$\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & y' \end{vmatrix} = C_1 e^{-\int p(x) dx} = C_1 e^{-\int \frac{4x dx}{2x+1}} = C_1 e^{-\int \left(2 - \frac{2}{2x+1} \right) dx} =$$

$$= C_1 e^{-2x + \ln(2x+1)} = C_1 e^{-2x} e^{\ln(2x+1)} = C_1 (2x+1) e^{-2x}.$$

$$\text{Buradan } \left(\frac{y}{x} \right)' = C_1 \frac{2x+1}{x^2} e^{-2x} = C_1 \left(-\frac{e^{-2x}}{x} \right)', \quad \frac{y}{x} = -C_1 \frac{e^{-2x}}{x} + C_2,$$

$$y = C_2 x - C_1 e^{-2x}.$$

3.2. İkitərtibli sabit əmsallı xətti bircins tənliklər. Tutaq ki,

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (1)$$

tənliyində p və q sabit ədədlərdir. Bu tənliyin xüsusi həllini

$$y = e^{kx} \quad (2)$$

şəklində axtaraq. Burada k namə'lum həqiqi və ya kompleks ədəddir.

Əvəzləməyə əsasən $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$. Bunları (1) tənliyində nəzərə alsaq $e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$. Buradan $e^{kx} \neq 0$ olduğuna görə

$$k^2 + pk + q = 0 \quad (3)$$

cəbri tənliyi alınır. Buna xarakteristik tənlik deyilir. Göründüyü kimi, xarakteristik tənliyi almaq üçün (1) tənliyində funksiyanın törəməsini k -nin uyğun dərəcələri ilə əvəz etmək kifayətdir.

1-ci hal: Xarakteristik tənliyinin kökləri k_1, k_2 həqiqi və müxtəlifdir. Onda $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$ xətti asılı olmayan həllərdir. Doğrudan da $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_2 x}}{e^{k_1 x}} = e^{(k_2 - k_1)x} \neq \text{const.}$

Deməli, $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$ tənliyinin ümumi həlli olur.

2-ci hal: Xarakteristik tənliyin kökləri bərabərdir: $k_1 = k_2 = \alpha$.

Onda $e^{\alpha x}$, $x e^{\alpha x}$ tənliyin xətti asılı olmayan həlləri olur. Odur ki, $y = e^{\alpha x} (C_1 + x C_2)$ tənliyinin ümumi həlli olur.

3-cü hal: Xarakteristik tənliyinin kökləri kompleks ədədlərdir: $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$. Onda

$$e^{k_1 x} = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

$$e^{k_2 x} = e^{(\alpha - \beta i)x} = e^{\alpha x} \cos \beta x - i e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

olduğundan $e^{\alpha x} \cos \beta x$, $e^{\alpha x} \sin \beta x$ funksiyaları tənliyin xətti asılı olmayan həlləridir. Ona görə $y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$ tənliyin ümumi həlli olur.

3. $y'' + 2y' - 15y = 0$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

HƏLLİ. Verilmiş tənlik ikitərtibli, sabit əmsallı xətti bircins tənlikdir. Ona uyğun xarakteristik tənliyi yazaq. $k^2 + 2k - 15 = 0$. Buradan $k_1 = -5$, $k_2 = 3$ alınır. Köklər həqiqi və müxtəlif olduğundan (1-ci hal) $y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{3x}$ tənliyin ümumi həlli olur.

4. $y'' - 6y' + 9y = 0$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

HƏLLİ. $k^2 - 6k + 9 = 0$ xarakteristik tənliyin kökləri $k_1 = k_2 = 3$,

yə'ni bərabər olduğundan (2-ci hal) $y = e^{3x} (C_1 + C_2 x)$ verilmiş tənliyin ümumi həlli olur.

5. $y'' - 4y' + 20y = 0$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

HƏLLİ. $k^2 - 4k + 20 = 0$ xarakteristik tənliyin kökləri: $k_1 = 2 + 4i$, $k_2 = 2 - 4i$. Yə'ni köklər kompleks ədədlərdir (3-cü hal). Onda $y = e^{2x} (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$ verilmiş tənliyin ümumi həllidir.

3.3. İkitərtibli sabit əmsallı xətti bircins olmayan tənliklər.

Yuxarıda göstərdiyimiz kimi ikitərtibli sabit əmsallı xətti bircins olmayan

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (1)$$

tənliyinin ümumi həlli

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (2)$$

bircins tənliyinin y_0 ümumi həlli ilə (1) tənliyinin hər hansı \tilde{y} xüsusi həllinin cəminə bərabərdir:

$$y = y_0 + \tilde{y}. \quad (3)$$

Bircins tənliyin ümumi həllinin tapılması yollarını yuxarıda göstərdik. Əvvəlcə $f(x)$ funksiyanın verilməsindən asılı olaraq bir xüsusi həlli qeyri-müəyyən əmsallar üsulu ilə tapmaq qaydasına baxaq. Qeyd edək ki, $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funksiyaları sağ tərəfi uyğun olaraq $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ olan tənliyin həlləri isə, onda $y_1(x) + y_2(x) + \dots + y_n(x)$ funksiyası sağ tərəfi $f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$ olan tənliyin həlli olur.

1-ci hal: (1) tənliyinin sağ tərəfi $f(x)$ n dərəcəli çoxhədlidirsə və n (sıfır) xarakteristik tənliyin kökü deyildirsə, onda xüsusi həlli dərəcəsi həmin çoxhədlinin dərəcəsinə bərabər olan və əmsalları namə'lum çoxhədli şəklində axtarmaq lazımdır. Xarakteristik tənliyin köklərindən sıfıra bərabər olanı varsa, onda xüsusi həlli götürülmüş çoxhədlinin x -ə hasili şəklində axtarılır.

6. $y'' + 5y' + 6y = 6x^2 + 4x + 3$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. $y'' + 5y' + 6y = 0$ bircins tənliyin $k^2 + 5k + 6 = 0$ xarakteristik tənliyinin kökləri $k_1 = -3$, $k_2 = -2$ həqiqi, müxtəlif olduğundan onun ümumi həlli $y_b = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x}$. Sıfır xarakteristik tənliyin kökü olmadığından bircins olmayan tənliyin xüsusi həllini $\tilde{y} = Ax^2 + Bx + C$ şəklində axtaraq. Burada A, B, C -nəmə'lum əmsallardır. Onda alırıq:

$$\tilde{y}' = 2Ax + B, \quad \tilde{y}'' = 2A.$$

\tilde{y}, \tilde{y}' və \tilde{y}'' -in qiymətlərini verilmiş tənlikdə yazsaq alırıq:

$$2A + 5(2Ax + B) + 6(Ax^2 + Bx + C) = 6x^2 + 4x + 3,$$

$$6Ax^2 + (10A + 6B)x + 2A + 5B + 6C = 6x^2 + 4x + 3.$$

Buradan x dəyişəninin eyni dərəcəli əmsalları bərabərləşdirməklə alırıq:

$$\begin{cases} 6A = 6, \\ 10A + 6B = 4, \\ 2A + 5B + 6C = 3, \end{cases} \quad A = 1, \quad B = -1, \quad C = 1.$$

Onda $\tilde{y} = x^2 - x + 1$ bircins olmayan tənliyin xüsusi həlli, $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x} + x^2 - x + 1$ isə ümumi həlli olur.

7. $y'' + 4y' = 12x^2 - 2x + 2$ tənliyinin $y(0) = y'(0) = 0$ şərtini ödəyən həllini tapın.

HƏLLİ. Bircins $y'' + 4y' = 0$ tənliyinə uyğun $k^2 + 4k = 0$ xarakteristik tənliyin kökləri $k_1 = 0$, $k_2 = -4$ olduğundan onun ümumi həlli $y = C_1 + C_2 e^{-4x}$ olur. İndi verilmiş tənliyin hər hansı xüsusi həllini tapaq. Tənliyin sağ tərəfi kvadrat üçhədlidir və $k_1 = 0$ xarakteristik tənliyin köküdür. Onda xüsusi həlli $\tilde{y} = x(Ax^2 + Bx + C)$ şəklində

lində axtarmaq lazımdır. Burada A, B, C -nəmə'lum əmsallardır. Buradan $\tilde{y}' = Ax^2 + Bx + C + x(2Ax + B) = 3Ax^2 + 2Bx + C$, $y' = 6Ax + 2B$. Bunları verilmiş tənlikdə yerinə yazsaq.

$$6Ax + 2B + 4(3Ax^2 + 2Bx + C) = 12x^2 - 2x + 2$$

Bərabərliyin hər iki tərəfində eyni dərəcədən olan x dəyişəninin əmsallarını bərabərləşdirsək

$$\begin{cases} 12A = 12, \\ 2(3A + 4B) = -2, \\ 2B + 4C = 2 \end{cases}$$

Buradan $A = 1$, $B = -1$, $C = 1$, onda $\tilde{y} = x(x^2 - x + 1)$ tənliyin xüsusi, $y = C_1 + C_2 e^{-4x} + x(x^2 - x + 1)$ isə ümumi həlli olur.

İndi isə tənliyin başlanğıc şərtlərini ödəyən həllini tapaq. Başlanğıc şərtlərə əsasən $C_1 + C_2 = 0$, $-4C_2 + 1 = 0$. Buradan $C_2 = \frac{1}{4}$, $C_1 = -\frac{1}{4}$. Deməli, $y = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-4x} + x(x^2 - x + 1)$ başlanğıc şərtlərini ödəyən həll olur.

2-ci hal: Tənliyin sağ tərəfi üstlü funksiya-dırsa, yəni $f(x) = ae^{mx}$ və m xarakteristik tənliyin kökü deyildirsə, onda xüsusi həlli $\tilde{y} = Ae^{mx}$ şəklində axtarmaq lazımdır. Burada A -nəmə'lum əmsal-dır. Xarakteristik tənliyin köklərindən biri m -ədədinə bərabərdirsə ($k_1 = m$), onda xüsusi həll $\tilde{y} = Axe^{mx}$ şəklində, hər iki kökü m -ədədinə bərabər olduqda isə $\tilde{y} = Ax^2 e^{mx}$ şəklində axtarılır.

8. $y'' + 3y' + 2y = 3e^{2x}$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

HƏLLİ. Bircins tənliyin $k^2 + 3k + 2 = 0$ xarakteristik tənliyinin kökləri $k_1 = -1$, $k_2 = -2$. Onda $y_b = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$ bircins tənliyin ümumi həlli olar. $m = 2$ xarakteristik tənliyin kökü olmadığı üçün xüsusi həll $\tilde{y} = Ae^{2x}$ şəklində axtarılmalıdır. Buradan törəmə-

lər alıb, \tilde{y} , \tilde{y}' , \tilde{y}'' -in qiymətlərini verilmiş tənlikdə nəzərə alsaq $12Ae^{3x} = 3e^{3x}$, $A = \frac{1}{4}$ tapanq. Onda $\tilde{y} = \frac{1}{4}e^{2x}$ tənliyin xüsusi,

$y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + \frac{1}{4}e^{2x}$ ümumi həlli olur.

9. $y'' - y' - 2y = 9e^{2x}$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

HƏLLİ. Bircins tənliyə uyğun $k^2 - k - 2 = 0$ xarakteristik tənliyin kökləri $k_1 = -1$, $k_2 = 2$ olduğundan $y_b = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$ onun ümumi həlli olur. $m = 2$ xarakteristik tənliyin köklərindən birinə ($k_2 = 2$) bərabər olduğundan xüsusi həlli $\tilde{y} = Axe^{2x}$ şəklində axtarmaq lazımdır. Buradan $\tilde{y}' = Ae^{2x} + 2Axe^{2x}$, $\tilde{y}'' = 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}$ törəmələrini tapıb, onları və \tilde{y} -in qiymətlərini verilmiş tənlikdə yazsaq alırıq: $3Ae^{2x} = 9e^{2x}$, $A = 3$. Deməli, $\tilde{y} = 3xe^{2x}$ tənliyin xüsusi həlidir. Onda $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} + 3xe^{2x}$ verilmiş tənliyin ümumi həlli olur.

10. $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

HƏLLİ. $k^2 - 6k + 9 = 0$, $k_1 = k_2 = 3$ olduğundan $y_b = (C_1 + xC_2)e^{3x}$ bircins tənliyin ümumi həlli olur. $m = 3$ ədədi iki dəfə xarakteristik tənliyin kökü olduğundan xüsusi həll $\tilde{y} = Ax^2e^{3x}$ şəklində axtarılmalıdır. Onda yuxarıda göstərilən qayda ilə alırıq: $2Ae^{3x} = e^{3x}$, $A = \frac{1}{2}$. Deməli, $\tilde{y} = \frac{1}{2}x^2e^{3x}$ xüsusi həll, $y = e^{3x}\left(C_1 + xC_2 + \frac{1}{2}x^2\right)$ isə ümumi həll olur.

3-cü hal: Tənliyin sağ tərəfi $f(x) = e^{\alpha x}(a \cos \beta x + b \sin \beta x)$ şəklində funksiyadır və $\alpha \pm \beta i$ xarakteristik tənliyin kökü olmadıqda, on-

da xüsusi həlli $\tilde{y} = e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)$ şəklində, $\alpha \pm \beta i$ xarakteristik tənliyin kökü olduqda isə $\tilde{y} = xe^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)$ şəklində axtarılır.

11. $y'' + 6y' + 9y = 10 \sin x$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

HƏLLİ. Bircins tənliyə uyğun $k^2 + 6k + 9 = 0$ xarakteristik tənliyin kökləri $k_1 = k_2 = -3$ olduğundan $y_b = (C_1 + C_2x)e^{-3x}$ onun ümumi həlli olur. Verilmiş tənliyin sağ tərəfi üçün $\alpha \pm \beta i = \pm i$ ($\alpha = 0$, $\beta = 1$) xarakteristik tənliyin kökü olmadığından xüsusi həll $\tilde{y} = A \cos x + B \sin x$ şəklində axtarılır. Buradan $\tilde{y}' = -A \sin x + B \cos x$, $\tilde{y}'' = -A \cos x - B \sin x$. Bunları tənlikdə yazsaq, $(8B - 6A) \sin x + (8A + 6B) \cos x = 10 \sin x$. Buradan $\sin x$ və $\cos x$ əmsalları bərabərləşdirməklə alırıq:

$$\begin{cases} 8A + 6B = 0, \\ 8B - 6A = 10, \end{cases} A = -\frac{3}{5}, B = \frac{4}{5}$$

Onda verilmiş tənliyin $\tilde{y} = -\frac{3}{5} \cos x + \frac{4}{5} \sin x$, xüsusi və $y = (C_1 + C_2x)e^{-3x} - \frac{3}{5} \cos x + \frac{4}{5} \sin x$ ümumi həlli olur.

12. $y'' - y' = -5e^{-x}(\cos x + \sin x)$ tənliyinin $y(0) = 4$, $y'(0) = 5$ başlangıç şərtlərini ödəyən həllini tapın.

HƏLLİ. $k^2 - k = 0$ xarakteristik tənliyinin kökləri $k_1 = 0$, $k_2 = 1$ olduğundan $y_b = C_1 + C_2e^x$ bircins tənliyin ümumi həlli olur. Baxılan misal üçün $\alpha = -1$, $\beta = 1$ olduğundan $\alpha \pm \beta i = -1 \pm i$ ədədi xarakteristik tənliyin kökü olmadığından, xüsusi həll $\tilde{y} = e^{-x}(A \cos x + B \sin x)$ şəklində axtarılır. Buradan \tilde{y}' , \tilde{y}'' törəmələrini tapıb verilmiş tənlik-

de yerine yazsaq alarıq:

$$e^{-x}(3A+B)\sin x + e^{-x}(-3B+A)\cos x = -5e^{-x}\cos x - 5e^{-x}\sin x.$$

Buradan e^{-x} ixtisar edib, $\sin x$ və $\cos x$ əmsalları bərabərləşdirsek:

$$\begin{cases} 3A+B=-5, \\ -3B+A=-5, \end{cases} \quad A=-2, \quad B=1$$

Onda $\tilde{y} = e^{-x}(-2\cos x + \sin x)$ verilmiş tənliyin xüsusi, $y = C_1 + C_2e^x + e^{-x}(-2\cos x + \sin x)$ isə ümumi həlli olur. Başlangıç şərtləri nəzərə alsaq

$$\begin{cases} 4 = C_1 + C_2 - 2, & C_1 + C_2 = 6 \\ 5 = C_2 + 3, & C_2 = 2, \quad C_1 = 4 \end{cases}$$

Beləliklə, $y = 4 + 2e^x + e^{-x}(-2\cos x + \sin x)$ verilmiş tənliyin başlangıç şərtləri ödəyən həlli olur.

13. $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}(\sin 2x - \cos 2x)$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. Bircins tənliyə uyğun $k^2 - 4k + 8 = 0$ xarakteristik tənliyinin kökləri $k_1 = 2 - 2i$, $k_2 = 2 + 2i$ olduğundan $y_b = e^{2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$ bircins tənliyin ümumi həlli olur. Baxılan misalda $\alpha \pm \beta i = 2 \pm 2i$ olduğu üçün bircins olmayan tənliyin xüsusi həlli $\tilde{y} = xe^{2x}(A \sin 2x + B \cos 2x)$ şəklində axtarılır. Buradan

$$\tilde{y}' = e^{2x}[(A + 2Ax - 2Bx)\sin 2x + (B + 2Ax + 2Bx)\cos 2x],$$

$$\tilde{y}'' = e^{2x}[(4A - 4B - 8Bx)\sin 2x + (4B + 4A + 8Ax)\cos 2x].$$

tapıb, tənlikdə yerine yazsaq:

$$e^{2x}[-4B \sin 2x + 4A \cos 2x] = e^{2x}(\sin 2x - \cos 2x).$$

Hər tərəfi e^{2x} -ə bölüb, $\sin 2x$ və $\cos 2x$ əmsalları bərabərləşdir-

sek, $4A = -1$, $-4B = 1$, $A = B = -\frac{1}{4}$. Tapılmış qiymətləri xüsusi həllin ifadəsində yerine yazsaq $\tilde{y} = -\frac{x}{4}e^{2x}(\sin 2x + \cos 2x)$ tənliyinin xüsusi, $y = e^{2x}\left[\left(C_1 - \frac{x}{4}\right)\cos 2x + \left(C_2 - \frac{x}{4}\right)\sin 2x\right]$ isə ümumi həlli olur.

4-cü hal: Tənliyin sağ tərəfi $f(x) = e^{\alpha x}[P(x)\cos \beta x + Q(x)\sin \beta x]$ şəklində verilsə və $\alpha \pm \beta i$ xarakteristik tənliyin kökü olmadıqda, xüsusi həlli $\tilde{y} = e^{\alpha x}[\tilde{P}(x)\cos \beta x + \tilde{Q}(x)\sin \beta x]$ şəklində axtarmaq lazımdır. Burada $\tilde{P}(x)$, $\tilde{Q}(x)$ əmsalları naməlum və dərəcəsi $P(x)$, $Q(x)$ çoxhədlilərinin dərəcələrinin ən böyüyünə bərabər olan çoxhədlilərdir. $\alpha \pm \beta i$ xarakteristik tənliyin köküdürsə, onda xüsusi həlli $\tilde{y} = xe^{\alpha x}[\tilde{P}(x)\cos \beta x + \tilde{Q}(x)\sin \beta x]$ şəklində götürmək lazımdır.

14. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(x^2 + x)$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. Bircins tənliyin $k^2 - 3k + 2 = 0$ xarakteristik tənliyinin kökləri $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ olduğundan $y_b = C_1e^x + C_2e^{2x}$ onun ümumi həlli olur. $\alpha \pm \beta i$ xarakteristik tənliyin kökü olmadığından xüsusi həlli $\tilde{y} = e^{3x}(Ax^2 + Bx + C)$ şəklində axtarmalıyıq. Buradan alırıq. $\tilde{y}' = e^{3x}[3Ax^2 + (3B + 2A)x + 3C + B]$, $\tilde{y}'' = 9e^{3x}(Ax^2 + Bx + C) + 3e^{3x}(2Ax + B) + 3e^{3x}(2Ax + B) + 2Ae^{3x}$.

Bunları verilən tənlikdə yazıb, hər tərəfdən e^{3x} -i ixtisar edib, x dəyişəninə eyni dərəcəli əmsalları tutuşdursaq alarıq:

$$\begin{cases} 2A = 1, \\ 2B + 6A = 1, \\ 2A + 3B + 2C = 0, \end{cases} \quad A = \frac{1}{2}, \quad B = -1, \quad C = 1$$

Beləliklə, $\tilde{y} = e^{3x} \left(\frac{x^2}{2} - x + 1 \right)$ verilən tənliyin xüsusi həlli, $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + e^{3x} \left(\frac{x^2}{2} - x + 1 \right)$ isə ümumi həlli olur.

15. $y'' - 2y' + y = xe^{-x} \cos x$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. $k^2 - 2k + 1 = 0$, $(k - 1)^2 = 0$, $k_1 = k_2 = 1$ olduğundan, $y_b = (C_1 + C_2 x)e^x$ bircins tənliyin ümumi həlli olur. $\alpha \pm \beta i = -1 \pm i$ karakteristik tənliyin kökü olmadığından xüsusi həlli $\tilde{y} = e^{-x} [(Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x]$ şəklində axtarmaq lazımdır. Buradan tapırıq: $\tilde{y}' = e^{-x} \{[(A - B + D) - (A + C)x] \cos x + [(C - B - D) - (A + C)x] \sin x\}$, $\tilde{y}'' = e^{-x} \{[(2C - 2A - 2D) - 2Cx] \cos x + [(2B - 2A - 2C) + 2Ax] \sin x\}$.

Bunları tənlikdə yerinə yazıb, hər tərəfdən e^{-x} ixtisar etsək, sağ və sol tərəfdə alınan $\cos x$ və $\sin x$ əmsalları tutuşdursaq alarıq:

$$A = \frac{3}{25}, \quad B = \frac{4}{125}, \quad C = -\frac{4}{25}, \quad D = \frac{22}{125}.$$

Onda $\tilde{y} = \frac{1}{125} e^x [(15x + 4) \cos x - (20x + 22) \sin x]$ verilmiş tənliyin

xüsusi həlli, $y = (C_1 + C_2 x)e^x + \frac{1}{125} e^x [(15x + 4) \cos x - (20x + 22) \sin x]$ isə ümumi həlli olur.

5-ci hal: Tənliyin sağ tərəfi yuxarıda göstərilən funksiyaların cəmi şəklində olan hal.

16. $y'' - 3y' + 2y = x + 1 - e^{-2x}$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. Verilmiş tənliyin sağ tərəfi $f_1(x) = x + 1$, $f_2(x) = -e^{-2x}$

funksiyalarının cəmidir. Əvvəlcə bircins tənliyin ümumi həllini tapaq. $k^2 - 3k + 2 = 0$ karakteristik tənliyin kökləri $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ olduğundan $y_b = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ bircins tənliyin ümumi həlli olur. $y'' - 3y' + 2y = x + 1$ tənliyinin xüsusi həllini tapaq. Sıfır karakteristik tənliyin kökü olmadığından xüsusi həlli $\tilde{y}_1 = Ax + B$ şəklində axtaraq. Yuxarıdakı qayda ilə $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{5}{4}$. Deməli, $\tilde{y}_1 = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$ sağ tərəfi $x + 1$ olan tənliyin xüsusi həlli olur.

İndi isə $y'' - 3y' + 2y = -e^{-2x}$ tənliyinin xüsusi həllini tapaq. $x = -2$ karakteristik tənliyin kökü olmadığından, xüsusi həll $\tilde{y}_2 = Ae^{-2x}$ şəklində axtarılır. Onda $A = -\frac{1}{12}$. Deməli, $\tilde{y}_2 = -\frac{1}{12}e^{-2x}$ funksiyası sağ tərəfi $-e^{-2x}$ olan tənliyin xüsusi həlidir. Onda $\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4} - \frac{1}{12}e^{-2x}$ verilmiş tənliyin xüsusi, $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - \frac{1}{12}e^{-2x} + \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$ isə ümumi həlli olur.

17. $2y'' - 3y' + y = 2x + \sin x$ tənliyinin $y(0) = 0$, $y'(0) = \frac{1}{2}$ başlangıç şərtlərini ödəyən həllini tapın.

HƏLLİ. Verilmiş tənliyin sağ tərəfi $f_1(x) = 2x$, $f_2(x) = \sin x$ funksiyalarının cəmidir. Əvvəlcə bircins tənliyin ümumi həllini tapaq. $2k^2 - 3k + 1 = 0$ karakteristik tənliyinin kökləri $k_1 = 1$, $k_2 = \frac{1}{2}$ ol-

duğundan $y_b = C_1 e^x + C_2 e^{\frac{x}{2}}$ bircins tənliyin ümumi həlli olur.

İndi sağ tərəfi $f_1(x) = 2x$ olan tənliyin xüsusi həllini $\tilde{y}_1 = Ax + B$ şəklində axtaraq. (Sıfır karakteristik tənliyin həlli deyil). Onda $Ax - 3A +$

$+B = 2x$ bərabərliyinə əsasən $A = 2$, $B = 6$. Onda $\tilde{y}_1 = 2x + 6$ sağ tərəfi $2x$ olan tənliyin xüsusi həlli olur.

İndi də sağ tərəfi $f_2(x) = \sin x$ olan tənliyinin xüsusi həllini tapaq. $\alpha \pm \beta i = i$ ($\alpha = 0$, $\beta = 1$) xarakteristik tənliyin kökü olmadığından, xüsusi həlli $\tilde{y}_2 = A \cos x + B \sin x$ şəklində axtarmaq lazımdır. Bu funksiyanın sağ tərəfi $\sin x$ olan tənlikdə yerinə yazsaq: $(-B + 3A) \sin x - (A + 3B) \cos x = \sin x$.

$$\text{Buradan } \begin{cases} -B + 3A = 1, \\ A + 3B = 0, \end{cases} \quad A = -\frac{3}{10}, \quad B = \frac{1}{10}.$$

Onda $\tilde{y}_2 = \frac{3}{10} \cos x - \frac{1}{10} \sin x$ sağ tərəfi $\sin x$ olan tənliyin xüsusi həlli olur.

Beləliklə, $\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 = 2x + 6 + \frac{3}{10} \cos x - \frac{1}{10} \sin x$, verilmiş

tənliyin xüsusi, $y = C_1 e^x + C_2 e^{\frac{x}{2}} + 2x + 6 + \frac{3}{10} \cos x - \frac{1}{10} \sin x$ isə

ümumi həlli olur. İndi də başlanğıc şərtləri ödəyən həlli tapaq. Onda başlanğıc şərtləri nəzərə alaq:

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 + 6 + \frac{3}{10}, \\ \frac{1}{2} = C_1 + \frac{1}{2} C_2 + 2 - \frac{1}{10}, \end{cases} \quad C_1 = 3,5, \quad C_2 = -9,8$$

Beləliklə, $y = 3,5e^x - 9,8e^{\frac{x}{2}} + 0,3 \cos x - 0,1 \sin x + 2x + 6$ verilmiş məsələnin həlli olur.

18. $y'' - 4y' + 5y = \sin x$ tənliyinin $x \rightarrow +\infty$ şərtində məhdud olan həllini tapın.

HƏLLİ. $k^2 + 4k + 5 = 0$ xarakteristik tənliyin kökləri $k_{1,2} = 2 \pm i$ ol-

duğundan $y_h = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ bircins tənliyin ümumi həlli olur. Verilən tənliyin xüsusi həlli $y = A \cos x + B \sin x$ şəklində olur. Bu funksiyaları və onun törəmələrini tənlikdə yazsaq $(4A + 4B) \cos x + (4B - 4A) \sin x = \sin x$.

Buradan alıq:

$$\begin{cases} 4A + 4B = 0, \\ 4B - 4A = 1, \end{cases} \quad A = -\frac{1}{8}, \quad B = \frac{1}{8}$$

Beləliklə, $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{1}{8}(\sin x - \cos x)$ verilmiş tənliyin ümumi həlli olur. Bu həllin $x \rightarrow +\infty$ şərtində məhdud olması üçün $C_1 = C_2 = 0$ götürmək lazımdır. Onda $y(x) = \frac{1}{8}(\sin x - \cos x)$ axtarılan həll olur.

3.4. Sabitlərin variasiyası üsulu. Tənliyin sağ tərəfi yuxarıda göstərilən hallardan fərqli olduqda, xüsusi həlli qeyri-müəyyən əmsallar üsulunun köməkliyi ilə tapmaq mümkün olmur. Belə hallarda sabitlərin variasiyası üsulu tətbiq olunur.

Bircins olmayan

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (1)$$

tənliyinin həllini tapmaq üçün sabitlərin variasiyası üsulunu tətbiq edək. Tutaq ki,

$$y_b = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \quad (2)$$

(1) tənliyinə uyğun bircins tənliyin ümumi həllidir. Burada C_1 və C_2 ixtiyari sabitlər, $y_1(x)$ və $y_2(x)$ xətti asılı olmayan həllərdir. (1) tənliyinin həllini

$$y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) \quad (3)$$

şəklində axtaraq. Burada $C_1(x)$, $C_2(x)$ -nəmə'lum funksiyalardır.

$y' = [C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x)] + C_1(x) y_1'(x) + C_2(x) y_2'(x)$. $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ -funksiyalarını elə seçək ki, $C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) \times y_2(x) = 0$.

Onda $y' = C_1(x) y_1'(x) + C_2(x) y_2'(x)$, $y'' = C_1'(x) y_1'(x) +$

$$+ C_2'(x)y_2'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x).$$

(3) əvəzləməsini və ondan tapılan törəmələri (1) tənliyində yazıb, $C_1(x)$ və $C_2(x)$ -nəzərən qruplaşdıraraq:

$$C_1(x)[y_1''(x) + py_1'(x) + qy_1(x)] + C_2(x)[y_2''(x) + py_2'(x) + qy_2(x)] + C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x).$$

Buradan $y_1(x)$, $y_2(x)$ bircins tənliyin həlli olduğundan

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x).$$

Beləliklə, $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ funksiyalarını tapmaq üçün

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

sistemini həll etmək lazımdır. Buradan $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ tapıb, inteqrallayaq və alınan ifadələri (3)-də yerinə yazsaq, onda (1) tənliyinin ümumi həllini alırıq.

19. $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. Verilmiş tənliyin sağ tərəfi $f(x) = \frac{1}{\cos 2x}$ funksiyası yuxarıda göstərilən halların heç birinə uyğun gəlmir. Ona görə də sabitlərin variasiyası üsulunu tətbiq etmək lazımdır. $k^2 + 4 = 0$ xarakteristik tənliyin kökləri $k_{1,2} = \pm 2i$ olduğundan $y_h = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ bircins tənliyin ümumi həlli olur.

Bircins olmayan tənliyin həllini $y = C_1(x) \cos 2x + C_2(x) \sin 2x$ şəklində axtaraq. Bu həlli verilmiş tənlikdə yerinə yazsaq, $C_1(x)$ və $C_2(x)$ funksiyaların tapmaq üçün

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos 2x + C_2'(x) \sin 2x = 0, \\ -2C_1'(x) \sin 2x + 2C_2'(x) \cos 2x = \frac{1}{\cos 2x} \end{cases}$$

sistemini alırıq. Buradan

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2(\cos^2 2x + \sin^2 2x) = 2.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ 1 & 2\cos 2x \end{vmatrix} = -\frac{\sin 2x}{\cos 2x}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2\sin 2x & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\cos 2x}.$$

olduğundan Kramer üsuluna görə

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{\sin 2x}{2\cos 2x}, \quad C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{2}.$$

Buradan

$$C_1(x) = -\frac{1}{2} \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x} dx + C_1 = -\frac{1}{4} \ln |\cos 2x| + C_1,$$

$$C_2(x) = \frac{1}{2} \int dx + C_2 = \frac{x}{2} + C_2.$$

Onda $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4} \ln |\cos 2x| \cos 2x + \frac{x}{2} \sin 2x$ verilmiş tənliyin ümumi həlli olur.

4. Yüksək tərtibli sabit əmsallı xətti tənliklər

Tutaq ki, n tərtibli sabit əmsallı bircins

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0 \quad (1)$$

tənliyi verilmişdir. Burada $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ sabit ədədlərdir. Verilmiş tənlik üçün

$$k^n + p_1 k^{n-1} + p_2 k^{n-2} + \dots + p_{n-1} k + p_n = 0 \quad (2)$$

xarakteristik tənlik olur. Xarakteristik tənliyin kökləri həqiqi və müxtəlifdirsə, onda (1) tənliyinin ümumi həlli aşağıdakı kimi yazılır:

$$y_h = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \dots + C_n e^{k_n x}. \quad (3)$$

Burada k_1, k_2, \dots, k_n xarakteristik tənliyinin kökləri, C_1, C_2, \dots, C_n ixtiyari sabitlərdir.

Tutaq ki, xarakteristik tənliyinin kökləri heqiqi, k_1 -kökü m -dəfə təkrarlanan ($m < n$) və qalan $k_{m+1}, k_{m+2}, \dots, k_n$ kökləri müxtəlifdirsə, onda

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_m x^{m-1}) e^{k_1 x} + C_{m+1} e^{k_{m+1} x} + C_{m+2} e^{k_{m+2} x} + \dots + C_n e^{k_n x} \quad (4)$$

tənliyin ümumi həlli olur.

Xarakteristik tənliyin kompleks $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$ köklərinə uyğun tənliyin xətti asılı olmayan $e^{\alpha x} \cos \beta x$, $e^{\alpha x} \sin \beta x$ həlləri var. Xarakteristik tənliyin m dəfə təkrarlanan $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$ kompleks köklərinə uyğun $2m$ sayda $e^{\alpha x} \cos \beta x$, $x e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$ xətti asılı olmayan həlləri uyğun gəlir. Bu halda tənliyin ümumi həllini $y = \sum_k e^{\alpha_k x} (P_k(x) \cos \beta_k x + Q_k(x) \sin \beta_k x)$ şəklində yazmaq olar,

burada $P_k(x)$ və $Q_k(x)$ dərəcəli xarakteristik tənliyin $\lambda_k = \alpha_k + i\beta$ kökünün təkrarlanma sayından bir vahid aşağı olan ixtiyari əmsallidir.

1. $y''' - 7y'' + 10y' = 0$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. Verilmiş tənliyə uyğun xarakteristik tənliyi yazaq: $k^3 - 7k^2 + 10k = 0$. Buradan $k_1 = 0$, $k^2 - 7k + 10 = 0$, $k_2 = 2$, $k_3 = 5$.

Xarakteristik tənliyin kökləri heqiqi və müxtəlifdir. Onda $y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{5x}$ verilmiş tənliyin ümumi həlli olur.

2. $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

HƏLLİ. Xarakteristik tənliyi yazaq və həll edək: $k^3 + 2k^2 - k - 2 = 0$, $k^2(k+2) - (k+2) = 0$, $(k+2)(k^2 - 1) = 0$, $k_1 = -2$, $k_2 = -1$, $k_3 = 1$.

Onda $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^x$ ümumi həll olur.

3. $y''' - 7y'' + 19y' - 13y = 0$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. $k^3 - 7k^2 + 19k - 13 = 0$, $(k-1)(k^2 - 6k + 13) = 0$, $k-1 = 0$, $k_1 = 1$, $k^2 - 6k + 13 = 0$, $k_{2,3} = 3 \pm 2i$.

Onda $y = C_1 e^x + e^{3x} (C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x)$ verilmiş tənliyin ümumi həlli olur.

4. $y^{IV} - 16y = 0$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. $k^4 - 16 = 0$, $(k^2 - 4)(k^2 + 4) = 0$, $k^2 = 4$, $k_{1,2} = \pm 2$, $k^2 = -4$, $k_{3,4} = \pm 2i$. Onda $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$ ümumi həll olur.

5. $y''' - y = 0$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

HƏLLİ. $k^3 - 1 = 0$, $(k-1)(k^2 + k + 1) = 0$, $k-1 = 0$, $k_1 = 1$, $k^2 + k + 1 = 0$, $k_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$. Onda ümumi həll $y = C_1 e^x + e^{-\frac{x}{2}} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$.

6. $y''' - y'' - 4y' + 4y = x^2 + 3$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. Verilmiş tənlik sabit əmsallı bircins olmayan xətti diferensial tənlikdir. Onun ümumi həlli bircins tənliyin ümumi həlli (y_b) ilə

bircins olmayan tənliyin bir xüsusi həllinin (\tilde{y}) cəminə bərabərdir:
 $y = y_b + \tilde{y}$.

Uyğun bircins tənliyin xarakteristik tənliyini həll etsək:

$$k^3 - k^2 - 4k + 4 = 0, \quad k^2(k-1) - 4(k-1) = 0, \quad (k-1) \times$$

$$\times (k^2 - 4) = 0, \quad k-1=0, \quad k_1=1, \quad k^2-4=0, \quad k_{2,3} = \pm 2.$$

Onda $y_b = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{2x}$ uyğun bircins tənliyin ümumi həlli olur. Bircins olmayan tənliyin sağ tərəfi ikidərəcəli çoxhədli olduğundan və sıfır xarakteristik tənliyin kökü olmadığından, xüsusi həlli $\tilde{y} = Ax^2 + Bx + C$ şəklində axtarırıq. Bunu verilən tənlikdə yazmaq-la alırıq:

$$4Ax^2 - (8A - 4B)x - 2A - 4B + 4C = x^2 + 3$$

Buradan

$$\begin{cases} 4A = 1, \\ 8A - 4B = 0, \\ -2A - 4B + 4C = 3 \end{cases}, \quad A = \frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{11}{8}$$

Deməli, $\tilde{y} = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{11}{8}$ verilmiş tənliyin xüsusi, $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{2x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{11}{8}$ isə ümumi həlli olur.

5. Yüksək tərtibli tənliklər haqqında

1. İkitərtibli tənliklər üçün göstərilən həll üsulla tərtibi ikidən böyük olan

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

tənliyinə də tətbiq olunur. Belə tənliklər tərtibi aşağı salmaq yolu ilə həll edilir.

2. (a, b) -intervalında təyin olunan $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$

funksiyaları üçün

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \dots + \lambda_n y_n(x) = 0, \quad x \in (a, b)$$

bərabərliyi ancaq $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_n = 0$ olduqda ödənərsə, onlara *xətti asılı olmayan* funksiyalar deyilir.

3. Tutaq ki, $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funksiyalarının (a, b) intervalında n tərtibə qədər törəmələri var. Bu funksiyalardan düzəldilmiş

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

determinantına Vronski determinantı deyilir. Vronski determinantı sıfırdan fərqli olduqda $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funksiyaları (a, b) intervalında xətti asılı olmur. Lakin determinant sıfır olduqda bu funksiyaların xətti asılı olub-olmaması haqqında fikir söyləmək olmur.

4. $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funksiyaları

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0 \quad (2)$$

tənliyinin həlli olduqda, bu həllərin xətti asılı olmaması üçün zəruri və kafi şərt onlardan düzəldilmiş Vronski determinantının sıfırdan fərqli olmasıdır. (2) tənliyinin xətti asılı olmayan n sayda $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ həllərinə *fundamental həllər* deyilir. $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ fundamental həllər olduqda

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) \quad (3)$$

tənliyin *ümumi həlli* olur. Burada c_1, c_2, \dots, c_n ixtiyari sabitlərdir.

5. $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funksiyalarından düzəldilmiş $W(x)$ Vronski determinantı sıfırdan fərqli olduqda, bu funksiyalar

$$\begin{vmatrix} z_1 & z \\ z_1' & z' \end{vmatrix} = C_1 e^{-\int \frac{2}{x} dx};$$

Buradan

$$\begin{vmatrix} z_1 & z \\ z_1' & z' \end{vmatrix} = C_1 e^{-2 \ln x}, \quad \begin{vmatrix} z_1 & z \\ z_1' & z' \end{vmatrix} = C_1 x^{-2};$$

Axırıncı bərabərliyi

$$\left(\frac{z}{z_1}\right)' = \frac{C_1}{z_1^2} x^{-2}; \quad \left(\frac{z}{z_1}\right)' = -\frac{C_1}{\sin^2 x}$$

şəklində yazıb, integrallayaq. Onda

$$\frac{z}{z_1} = C_1 \int \frac{dx}{\sin^2 x} + C_2; \quad \frac{z}{z_1} = -C_1 \operatorname{ctgx} + C_2.$$

$$\text{Buradan } z = C_2 z_1(x) - C_1 z_1(x) \operatorname{ctgx} = C_2 \frac{\sin x}{x} - C_1 \frac{\cos x}{x}.$$

$$\text{Deməli, } y' = C_2 \frac{\sin x}{x} - C_1 \frac{\cos x}{x}.$$

Onda $y = C_2 \int \frac{\sin x}{x} dx - C_1 \int \frac{\cos x}{x} dx + C_3$ verilən tənliyin ümumi həlli olar.

3 $xy''' + 2y'' + xy' = 1$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

HƏLLİ. Bircins tənliyin ümumi həlli mə'lum olduğundan bircins olmayan tənliyin həllini sabitlərin variasiyası üsulu ilə tapaq. Ümumi həlli

$$y = C_1(x) \int \frac{\sin x}{x} dx + C_2(x) \int \frac{\cos x}{x} dx + C_3(x)$$

şəklində axtaraq. Onda $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, $C_3'(x)$ üçün

$$\begin{cases} C_1'(x) \int \frac{\sin x}{x} dx + C_2'(x) \int \frac{\cos x}{x} dx + C_3'(x) = 0, \\ C_1'(x) \frac{\sin x}{x} + C_2'(x) \frac{\cos x}{x} = 0, \\ C_1'(x) \left(\frac{\sin x}{x}\right)' + C_2'(x) \left(\frac{\cos x}{x}\right)' = \frac{1}{x} \end{cases}$$

cəbri tənliklər sistemi alınır. Buradan alırıq:

$$C_1'(x) = \cos x, \quad C_2'(x) = -\sin x,$$

$$C_3'(x) = -\cos x \int \frac{\sin x}{x} dx + \sin x \int \frac{\cos x}{x} dx$$

Alınan bərabərlikləri integrallayaq:

$$C_1(x) = \sin x + C_1, \quad C_2(x) = \cos x + C_2,$$

$$\begin{aligned} C_3(x) &= -\int \cos x \left(\int \frac{\sin x}{x} dx \right) dx + \int \sin x \left(\int \frac{\cos x}{x} dx \right) dx + C_3 = \\ &= -\sin x \int \frac{\sin x}{x} dx - \cos x \int \frac{\cos x}{x} dx + \ln|x| + C_3 \end{aligned}$$

(hissə-hissə integrallama düsturuna əsasən).

Bunları həllin ifadəsində yazsaq, alınan

$$y = C_1 \int \frac{\sin x}{x} dx + C_2 \int \frac{\cos x}{x} dx + \ln|x| + C_3$$

funksiyası verilən tənliyin ümumi həlli olur.

4. Fundamental həlləri e^x , e^{-x} olan tənliyi tapın.

HƏLLİ. Bu həllərdən düzəldilmiş Vronski determinantı

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

olduğundan uyğun tənlik üçün alırıq:

$$-\frac{1}{2} \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & y \\ e^x & -e^{-x} & y' \\ e^x & e^{-x} & y'' \end{vmatrix} = 0.$$

Buradan $y'' - y = 0$ tənliyi alınır.

5. Fundamental həlləri x , x^2 , e^x olan xətti bircins tənliyi tapın.

HƏLLİ. Bu funksiyalardan düzəldilmiş Vronski determinanı

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & e^x \\ 1 & 2x & e^x \\ 0 & 2 & e^x \end{vmatrix} = e^x (x^2 - 2x + 2) \neq 0,$$

olduğundan verilmiş funksiyalar xətti asılı olmur. Fundamental həlləri x , x^2 , e^x olan tənliyi

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & e^x & y \\ 1 & 2x & e^x & y' \\ 0 & 2 & e^x & y'' \\ 0 & 0 & e^x & y''' \end{vmatrix} = 0,$$

şəklində yazaq. buradan determinanı axırıncı sütun elementlərinə nəzərən açsaq:

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & e^x \\ 1 & 2x & e^x \\ 0 & 2 & e^x \end{vmatrix} y''' - \begin{vmatrix} x & x^2 & e^x \\ 1 & 2x & e^x \\ 0 & 0 & e^x \end{vmatrix} y'' + \begin{vmatrix} x & x^2 & e^x \\ 0 & 2 & e^x \\ 0 & 0 & e^x \end{vmatrix} y' - \begin{vmatrix} 1 & 2x & e^x \\ 0 & 2 & e^x \\ 0 & 0 & e^x \end{vmatrix} y = 0,$$

Hər tərəfi e^x -ə ixtisar edib, sadələşdirsək, onda

$$(x^2 - 2x + 2)y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$$

tələb olunan tənliyi alırıq.

6. 1, $\sin^2 x$, $\cos 2x$ funksiyalarının xətti asılı olub-olmamasını araşdırın.

HƏLLİ. Bu funksiyalardan düzəldilmiş Vronski determinanı sıfır olur:

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin^2 x & \cos 2x \\ 0 & \sin 2x & -2\sin 2x \\ 0 & 2\cos 2x & -4\cos 2x \end{vmatrix} = 0,$$

Deməli, Vronski determinantının köməyi ilə verilən funksiyaların xətti asılı olub-olmaması fikir söyləmək olmur.

$$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \sin^2 x + \lambda_3 \cos 2x = 0$$

bərabərliyinə baxaq.

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

olduğundan

$$\lambda_1 \cdot 1 + (\lambda_2 - \lambda_3) \sin^2 x + \lambda_3 \cos^2 x = 0.$$

Burada $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -1$ götürək, bərabərlik istənilən x üçün ödənilir. Deməli, verilən funksiyalar xətti asılı olur.

6. Eyler tənliyi

$$a_0(\alpha x + \beta)^n y^{(n)} + a_1(\alpha x + \beta)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots +$$

$$+ a_{n-1}(\alpha x + \beta) y' + a_n y = 0 \quad (1)$$

şəklində olan tənliyə *Eyler tənliyi* deyilir, burada a_0, a_1, \dots, a_n ,

$\alpha \neq 0$, β sabit ədədlərdir. $\alpha = 1$, $\beta = 0$ olduqda (1) tənliyi

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0 \quad (2)$$

şəklinə düşür. Eyler tənliyi

$$\alpha x + \beta = e^t \quad (3)$$

əvəzləməsi vasitəsilə sabit əmsallı bircins

$$b_0 z^{(n)} + b_1 z^{(n-1)} + \dots + b_{n-1} z' + b_n z = 0$$

tənliyinə gətirilir, Burada t yeni sərbəst dəyişən, z isə t dəyişənin-

dən asılı axtarılan funksiya.

1. $x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. Verilən tənlik Eyler tənliyidir. Bu tənliyi həll etmək üçün $x = e^t$ əvəzləməsi aparaq. $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = e^{-t} \frac{dy}{dt}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} =$

$$\frac{dy'}{dx} = e^{-t} \frac{d}{dt} \left[e^{-t} \frac{dy}{dt} \right] = e^{-2t} \left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right]$$

Əvəzləməni və tapılan törəmələri verilən tənlikdə yerinə yazaq:

$$(e^t)^2 e^{-2t} \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) + 2e^t e^{-t} \frac{dy}{dt} - 6y = 0.$$

Buradan $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y = 0$. Alınan sabit əmsallı tənliyin həllini taparaq. $k^2 + k - 6 = 0$ xarakteristik tənliyin kökləri $k_1 = -3$, $k_2 = 2$ olduğundan alınan tənliyin ümumi həlli $y = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t}$. Buradan $x = e^t$ əvəzləməsinə əsasən alınan $y = C_1 x^{-3} + C_2 x^2$ verilmiş tənliyin ümumi həlli olur.

2. $(2x+3)^3 y''' + 3(2x+3)y' - 6y = 0$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. Tənlik Eyler tənliyi olduğundan $2x+3 = e^t$ əvəzləməsi aparmaq lazımdır. $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = 2e^{-t}$ olduğundan $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} =$

$$= 2e^{-t} \frac{dy}{dt}, \quad y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt} \frac{dt}{dx} = 4e^{-t} \frac{d}{dt} \left[e^{-t} \frac{dy}{dt} \right] = 4e^{-2t} \left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right],$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dt} \frac{dt}{dx} = 2e^{-t} \frac{d}{dt} \left[4e^{-2t} \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \right] = 8e^{-3t} \left[\frac{d^3y}{dt^3} - \right]$$

$$- 3 \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} \Bigg].$$

Bunları tənlikdə yerinə yazsaq alırıq:

$$8 \frac{d^3y}{dt^3} - 24 \frac{d^2y}{dt^2} + 22 \frac{dy}{dt} - 6y = 0.$$

Alınan sabit əmsallı tənliyin $8k^3 - 24k^2 + 22k - 6 = 0$ xarakteristik tənliyinin $k_1 = 1$, $k_2 = \frac{1}{2}$, $k_3 = \frac{3}{2}$ köklərinə uyğun $y = C_1 e^t + C_2 e^{\frac{1}{2}t} + C_3 e^{\frac{3}{2}t}$ ümumi həlli alınır. Buradan $2x+3 = e^t$ əvəzləməsinə əsasən

$$y = (2x+3)C_1 + (2x+3)^{\frac{1}{2}}C_2 + (2x+3)^{\frac{3}{2}}C_3$$

verilmiş tənliyin ümumi həllini alırıq.

3. $x^2 y'' - xy' + 2y = x \ln x$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. Verilən tənlikdə $x = e^t$ əvəzləməsi aparaq. $y' = \frac{dy}{dx} =$

$$= \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = e^{-t} \frac{dy}{dt}, \quad y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt} \frac{dt}{dx} = e^{-t} \frac{d}{dt} \left[e^{-t} \frac{dy}{dt} \right] =$$

$$= e^{-2t} \left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right].$$

Bunları verilən tənlikdə yerinə yazsaq. Onda

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} + 2y = te^t.$$

Uyğun bir cins tənliyin $k^2 - 2k + 2 = 0$ xarakteristik tənliyinin $k_1 = 1+i$, $k_2 = 1-i$ köklərinə əsasən $y = e^t (C_1 \cos t + C_2 \sin t)$ bir cins tənliyin ümumi həlli olur. Bircins olmayan tənliyin bir xüsusi həlli-

ni $\tilde{y} = e^t (at + b)$ şəklində axtaraq. Bu əvəzləməni və $\tilde{y}' = e^t (at + a + b)$, $\tilde{y}'' = e^t (at + 2a + b)$ törəmələrini bircins olmayan tənlikdə yazaq:

$$e^t (at + 2a + b) - 2e^t (at + a + b) + 2e^t (at + b) = te^t$$

Buradan e^t -yə ixtisar etsək, alırıq: $at + b = t$, $a = 1$; $b = 0$; $\tilde{y} = te^t$.

Onda $y = e^t (C_1 \cos t + C_2 \sin t + t)$ alınan sabit əmsallı, bircins olmayan tənliyin ümumi həlli olur. $e^t = x$, $t = \ln x$ olduğundan $y = x(C_1 \cos \ln x + C_2 \sin \ln x + \ln x)$ verilmiş tənliyin ümumi həlli olur.

7. Diferensial tənliklər sistemi

t sərbəst dəyişən x, y, z axtarılan funksiyalar və onların $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ törəmələri arasında verilmiş

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(t, x, y, z), \\ \frac{dy}{dt} = f_2(t, x, y, z), \\ \frac{dz}{dt} = f_3(t, x, y, z) \end{cases} \quad (1)$$

münasibətinə *üçtərtibli normal diferensial tənliklər sistemi* deyilir.

Sistemin

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0 \quad (2)$$

şərtlərini ödəyən $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ həllinin tapılmasına *Koşi məsələsi* deyilir. Bəzi hallarda sistemi yüksək tərtibli tənliyə gətirmək yolu ilə həll etmək elverişli olur. Sistemin birinci tənliyini diferensiallayaq:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

Buradan (1) sistemine əsasən alırıq:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x} f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y} f_2 + \frac{\partial f_1}{\partial z} f_3 = g(t, x, y, z).$$

Axırıncı bərabərliyi diferensiallayıb, sistemi nəzərə almaqla alırıq.

$$\frac{d^3 x}{dt^3} = \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x} f_1 + \frac{\partial g}{\partial y} f_2 + \frac{\partial g}{\partial z} f_3 = \phi(t, x, y, z). \quad (3)$$

Tutaq ki,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(t, x, y, z), \\ \frac{d^2 x}{dt^2} = g(t, x, y, z). \end{cases} \quad (4)$$

sistemi y, z dəyişənlərinə nəzərən həll olunandır:

$$y = \Phi\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2 x}{dt^2}\right), \quad z = \Psi\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2 x}{dt^2}\right). \quad (5)$$

Bunları (3) bərabərliyində yerinə yazsaq üçtərtibli

$$\frac{d^3 x}{dt^3} = F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2 x}{dt^2}\right)$$

tənliyi alınar. Bu tənliyin $x = \omega(t, C_1, C_2)$ həllini (5) bərabərliklərində yazmaqla (1) sisteminin həlli tapılır.

Sabit əmsallı bircins tənliklər sistemine baxaq:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ \frac{dz}{dt} = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{cases} \quad (6)$$

Sistemin sıfırdan fərqli xüsusi həllərini

$$x = k_1 e^{rt}, \quad y = k_2 e^{rt}, \quad z = k_3 e^{rt} \quad (7)$$

şəklində axtaraq. Burada r, k_1, k_2, k_3 sabitləri elə seçilməlidir ki, (7) funksiyaları (6) sisteminin sıfırdan fərqli həlli olsun. (7) funksiyalarını və onların törəmələrini (6) sistemində yazsaq:

$$\begin{cases} rk_1 e^{rt} = a_{11}k_1 e^{rt} + a_{12}k_2 e^{rt} + a_{13}k_3 e^{rt}, \\ rk_2 e^{rt} = a_{21}k_1 e^{rt} + a_{22}k_2 e^{rt} + a_{23}k_3 e^{rt}, \\ rk_3 e^{rt} = a_{31}k_1 e^{rt} + a_{32}k_2 e^{rt} + a_{33}k_3 e^{rt} \end{cases}$$

Buradan alırıq.

$$\begin{cases} (a_{11} - r)k_1 + a_{12}k_2 + a_{13}k_3 = 0, \\ a_{21}k_1 + (a_{22} - r)k_2 + a_{23}k_3 = 0, \\ a_{31}k_1 + a_{32}k_2 + (a_{33} - r)k_3 = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Bu xətti biricins cəbri tənliklər sistemidir. Belə sistemin sıfırdan fərqli həllinin varlığı üçün əsas determinantın sıfıra bərabər olması zəruri və kafi şərtir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - r & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - r & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - r \end{vmatrix} = 0. \quad (9)$$

Determinantı açsaq, r -ə nəzərən üç dərəcəli cəbri tənlik alırıq. Həmin tənliyə *sistemin xarakteristik tənliyi* deyilir. Bu tənliyi həll edib, r_1, r_2, r_3 köklərini tapırıq. Bu kökləri (8)-də yazıb k_1, k_2, k_3 -ü tapmaq üçün sistem alırıq. Həmin sistemdən sıfırdan fərqli k_1, k_2, k_3 həlləri tapılır və (7) bərabərliklərində yazılır.

(9) tənliyinin kökləri həqiqi və müxtəlifdirsə, onda r_1, r_2, r_3 köklərinin hər bir qiymətinə (7)-şəklində xüsusi həlləri uyğun gəlir. Xüsusi həlləri ixtiyari C_1, C_2, C_3 sabitlərlə vurub, tolasaq sistemin ümumi həllini alırıq.

Xarakteristik tənliyin $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$ qoşma kompleks köklərinə uyğun (8) cəbri tənliklər sisteminin sıfırdan fərqli qoşma kompleks həlləri tapılır. Onda bu köklərə uyğun (7) şəklində həllərin həqiqi və xəyali hissələri sistemin həlli olur. Bu qayda ilə sistemin ümumi həlli tapılır.

Tutaq ki, r_1 ədədi xarakteristik tənliyin iki dəfə təkrarlanan köküdür. Bu kökə uyğun (8) cəbri tənliklər sisteminin iki k_1^1, k_2^1, k_3^1 və

k_1^2, k_2^2, k_3^2 xətti asılı olmayan həlləri varsa, onda $k_1^1 e^{r_1 t}$, $k_2^1 e^{r_1 t}$, $k_3^1 e^{r_1 t}$ və $k_1^2 e^{r_1 t}$, $k_2^2 e^{r_1 t}$, $k_3^2 e^{r_1 t}$ sistemin xətti asılı olmayan həlləri olur. r_1 kökünə uyğun (8) cəbri tənliklər sisteminin sıfırdan fərqli xətti asılı olmayan ancaq bir həlli varsa, sistemin həllini $e^{r_1 t}(a_1 + tb_1)$, $e^{r_1 t}(a_2 + tb_2)$, $e^{r_1 t}(a_3 + tb_3)$ şəklində axtarmaq lazımdır. Onda $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ ədədləri

$$\begin{cases} (a_{11} - r_1)a_1 + a_{12}b_2 + a_{13}b_3 = 0, \\ a_{21}b_1 + (a_{22} - r_1)b_2 + a_{23}b_3 = 0, \\ a_{31}b_1 + a_{32}b_2 + (a_{33} - r_1)b_3 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_{11} - r_1)a_1 + a_{12}a_2 + a_{13}a_3 = b_1, \\ a_{21}a_1 + (a_{22} - r_1)a_2 + a_{23}a_3 = b_2, \\ a_{31}a_1 + a_{32}a_2 + (a_{33} - r_1)a_3 = b_3 \end{cases}$$

sistemlərini ardıcıl olaraq həll etməklə tapılır.

$$1. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y + z, \\ \frac{dy}{dt} = x - y + z, \\ \frac{dz}{dt} = x + y + z \end{cases} \text{ sistemin həllini tapın.}$$

HƏLLİ. Sistemin həllini $x = k_1 e^{rt}$, $y = k_2 e^{rt}$, $z = k_3 e^{rt}$ şəklində axtaraq. Bunları verilmiş sistemdə yerinə yazıb, e^{rt} -yə ixtisar etməklə,

$$\begin{cases} (-1 - r)k_1 + k_2 + k_3 = 0, \\ k_1 + (-1 - r)k_2 + k_3 = 0, \\ k_1 + k_2 + (1 - r)k_3 = 0 \end{cases}$$

cəbri tənliklər sistemi və

$$\begin{vmatrix} -1-r & 1 & 1 \\ 1 & -1-r & 1 \\ 1 & 1 & -1-r \end{vmatrix} = (1+r)^2(1-r) + 3 + 3r = 0$$

xarakteristik tənliyi alınır. Buradan

$$r^3 + r^2 - 4r - 4 = 0, \quad r^2(r+1) - 4(r+1) = 0,$$

$$(r+1)(r^2 - 4) = 0, \quad r+1 = 0, \quad r_1 = -1, \quad r^2 - 4 = 0, \quad r_{2,3} = \pm 2.$$

$r_1 = -1$ kökü üçün cəbri tənliklər sistemini həll edək:

$$\begin{cases} 0 + k_2 + k_3 = 0, \\ k_1 + 0 + k_3 = 0, \\ k_1 + k_2 + 2k_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_2 = -k_3, \\ k_1 = -k_3, \\ -2k_3 + 2k_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 = -k_3, \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$k_3 = -1$ qəbul etsək $k_1 = k_2 = 1$ alırıq. Onda $r_1 = -1$ kökü üçün

$x_1 = e^{-t}$, $y_1 = e^{-t}$, $z_1 = e^{-t}$ həlli alınır.

$r_2 = -2$ kökü üçün cəbri tənliklər sistemini yazaq:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 0, \\ k_1 + k_2 + k_3 = 0, \\ k_1 + k_2 + 3k_3 = 0 \end{cases}$$

Buradan $k_3 = 0$, $k_1 + k_2 = 0$, $k_1 = -k_2$ alırıq. $k_2 = -1$ qəbul etsək, $k_1 = 1$ alırıq. Beləliklə, $k_1 = 1$, $k_2 = -1$, $k_3 = 0$ üçün

$x_2 = e^{-2t}$, $y_2 = -e^{-2t}$, $z_2 = 0$ həlli alınır.

$r_3 = 2$ kökü üçün

$$\begin{cases} -3k_1 + k_2 + k_3 = 0, \\ k_1 - 3k_2 + k_3 = 0, \\ k_1 + k_2 - k_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2k_1 + 2k_2 = 0, \\ 2k_1 - 2k_2 = 0, \\ k_1 = k_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_3 = 2k_2, \\ k_1 = k_2 \end{cases}$$

$k_2 = 1$ qəbul etsək, $k_1 = 1$, $k_3 = 2$ alırıq. Onda $r_3 = 2$ -yə uyğun $x_3 = e^{2t}$, $y_3 = e^{2t}$, $z_3 = 2e^{2t}$ həlli alınır.

Sistemin ümumi həllini tapmaq üçün tapılan xüsusi həlləri uyğun olaraq C_1, C_2, C_3 sabitlərinə vurub, toplamaq lazımdır. Onda

$$\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + C_3 e^{2t}, \\ y = C_1 e^{-t} - C_2 e^{-2t} + C_3 e^{2t}, \\ z = -C_1 e^{-t} + 0 \cdot e^{-2t} + 2C_3 e^{2t} \end{cases}$$

verilmiş sistemin ümumi həlli olur.

Aşağıda bu sistemin yüksək tərtibli tənliyə gətirmək yolu ilə həlli tapılır.

$$2. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y + z, \\ \frac{dy}{dt} = x - y + z, \\ \frac{dz}{dt} = x + y + z \end{cases} \text{ sistemin yüksək tərtibli tənliyə gətirib, həllini}$$

tapın.

HƏLLİ. Verilmiş sistemi üçtərtibli xətti bircins sabit əmsalli tənliyə gətirək. Sistemin birinci tənliyinin hər tərəfini t arqumentinə görə dife-

rensiallayaq: $\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt}$. Burada $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ -ni sis-

temdə verilmiş qiymətlərlə əvəz edək:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -(-x + y + z) + (x - y + z) + (x + y + z) = 3x - y + z.$$

Deməli, $\frac{d^2x}{dt^2} = 3x - y + z$. Alınmış tənliyi t -yə görə bir də diferensiallayaq:

$$\frac{d^3x}{dt^3} = 3 \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt}.$$

Yenə də $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ -nin sistemdəki qiymətlərini burada yerinə yazaq:

$$\frac{d^3x}{dt^3} = 3(-x + y + z) - (x - y + z) + (x + y + z) = -3x + 5y + 3z.$$

$$\text{Onda } \frac{d^3x}{dt^3} = -3x + 5y + 3z.$$

$$\begin{cases} y + z = x + \frac{dx}{dt}, \\ z - y = -3x + \frac{d^2x}{dt^2} \end{cases}$$

$$\text{sistemdən } y = 2x + \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2} \right), \quad z = -x + \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2} \right) \text{ tapıb,}$$

$$\text{axırıncı tənlikdə yerinə yazaq: } \frac{d^3x}{dt^3} = -3x + 10x + \frac{5}{2} \left(\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2} \right) -$$

$$-3x + \frac{3}{2} \left(\frac{dx}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2} \right). \text{ Buradan } \frac{d^3x}{dt^3} + \frac{d^2x}{dt^2} - 4 \frac{dx}{dt} - 4x = 0 \text{ tənliyi}$$

alınır. Beləliklə, verilmiş sistem sabit əmsallı üçtərblili bircins tənliyə gətirildi. Bu tənliyi həll edək. Xarakteristik tənliyi yazıb, həllini tapaq:

$$k^3 + k^2 - 4k - 4 = 0, \quad k^2(k+1) - 4(k+1) = 0, \quad (k+1)(k^2 - 4) = 0,$$

$$k+1=0, \quad k_1=-1, \quad k^2-4=0, \quad k_{2,3}=\pm 2. \text{ Deməli, } x = C_1 e^{-t} +$$

$$+ C_2 e^{2t} + C_3 e^{-2t} \text{ alınmış tənliyin ümumi həlli olur. Bu həlli } y \text{ və } z$$

$$\text{üçün tapılan ifadələrdə yazaq: } y = 2(C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-2t}) +$$

$$+ \frac{1}{2} (-C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} - 2C_3 e^{-2t} - C_1 e^{-t} - 4C_2 e^{2t} - 4C_3 e^{-2t}) =$$

$$C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} - C_3 e^{-2t}, \quad z = -(C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-2t}) +$$

$$+ \frac{1}{2} (-C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} - 2C_3 e^{-2t} + C_1 e^{-t} + 4C_2 e^{2t} + 4C_3 e^{-2t}) =$$

$$= -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t}.$$

$$\text{Beləliklə, } x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-2t}, \quad y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} - C_3 e^{-2t},$$

$$z = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} \text{ verilən sistemin ümumi həlli olur.}$$

$$3. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 3y \end{cases} \text{ sistemi həll edin.}$$

HƏLLİ. Sistemin həllini $x = k_1 e^{rt}$, $y = k_2 e^{rt}$ şəklində axtaraq.

Onda

$$\begin{cases} (1-r)k_1 + k_2 = 0, \\ -2k_1 + (3-r)k_2 = 0 \end{cases}$$

cəbri tənliklər sistemi və

$$\begin{vmatrix} 1-r & 1 \\ -2 & 3-r \end{vmatrix} = r^2 - 4r + 5 = 0$$

xarakteristik tənliyi alınır. Xarakteristik tənliyin $r_{1,2} = 2 \pm i$ kökünə uyğun

$$\begin{cases} (-1 \mp i)k_1 + k_2 = 0, \\ -2k_1 + (-1 \mp i)k_2 = 0 \end{cases}$$

sistemin $k_1 = 1$, $k_2 = 1 \pm i$ həllərinə baxaq. Onda sistemin

$$e^{(2 \pm i)t} = e^{2t} \cos t \pm i e^{2t} \sin t, \quad (1 \pm i)e^{(2 \pm i)t} = e^{2t} (\cos t \mp \sin t) \pm$$

1. $ie^{2t}(\cos t + \sin t)$ həllərinə uyğun $x_1 = e^{2t} \cos t$, $y_1 = e^{2t}(\cos t - \sin t)$ və $x_2 = e^{2t} \sin t$, $y_2 = e^{2t}(\cos t + \sin t)$ xətti asılı olmayan həlləri alınır. Odur ki, $x = e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$, $y_2 = e^{2t}[(C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t]$ sistemin ümumi həlli olur.

4.
$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = x - y + 2z \end{cases}$$
 sistemini həll edin.

HƏLLİ. Baxılan sistemin $x = k_1 e^{rt}$, $y = k_2 e^{rt}$, $z = k_3 e^{rt}$ həlli üçün

$$\begin{cases} (4-r)k_1 - k_2 - k_3 = 0, \\ k_1 + (2-r)k_2 - k_3 = 0, \\ k_1 - k_2 + (2-r)k_3 = 0 \end{cases}$$

cəbri tənliklər sistemi və

$$\begin{vmatrix} 4-r & -1 & -1 \\ 1 & 2-r & -1 \\ 1 & -1 & 2-r \end{vmatrix} = (2-r)(r^2 - 6r + 9) = 0, \quad r_1 = 2, \quad r_2 = r_3 = 3$$

alınır. Xarakteristik tənliyin $r_1 = 2$ kökünə uyğun

$$\begin{cases} 2k_1 - k_2 - k_3 = 0, \\ k_1 - k_3 = 0, \\ k_1 - k_2 = 0 \end{cases}$$

cəbri sisteminin $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ həllini götürək. Onda $x_1 = e^{2t}$, $y_1 = e^{2t}$, $z_1 = e^{2t}$ sistemin həlli olur. Xarakteristik tənliyin

$r_2 = r_3 = 3$ kökünə uyğun

$$\begin{cases} k_1 - k_2 - k_3 = 0, \\ k_1 - k_2 - k_3 = 0, \\ k_1 - k_2 - k_3 = 0 \end{cases}$$

sisteminin iki $k_1 = 1$, $k_2 = 1$, $k_3 = 0$ və $k_1 = 1$, $k_2 = 0$, $k_3 = 1$ xətti asılı olmayan həllərinə baxaq. Onda sistemin $x_2 = e^{3t}$, $y_2 = e^{3t}$, $z_2 = 0$ və $x_3 = e^{3t}$, $y_3 = 0$, $z_3 = e^{3t}$ xətti asılı olmayan həlləri alınır. Beləliklə,

$x = C_1 e^{2t} + (C_2 + C_3) e^{3t}$, $y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$, $z = C_1 e^{2t} + C_3 e^{3t}$ sistemin ümumi həlli olur.

5.
$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + z, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = -y + 2z \end{cases}$$
 sistemini həll edin.

HƏLLİ. Bu sistemin $x = k_1 e^{rt}$, $y = k_2 e^{rt}$, $z = k_3 e^{rt}$ həlli üçün

$$\begin{cases} (1-r)k_1 - k_2 + k_3 = 0, \\ k_1 + (1-r)k_2 - k_3 = 0, \\ 0 \cdot k_1 - k_2 + (2-r)k_3 = 0 \end{cases}$$

cəbri tənliklər sistemi və

$$\begin{vmatrix} 1-r & -1 & 1 \\ 1 & 1-r & -1 \\ 0 & -1 & 2-r \end{vmatrix} = (1-r)^2(2-r) = 0, \quad r_1 = 2, \quad r_2 = r_3 = 1$$

Tutaq ki,

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1)$$

tənliyində $p(x)$ və $q(x)$ əmsalları x_0 nöqtəsi ətrafında yığılan

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (x - x_0)^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k (x - x_0)^k$$

qüvvət sıralarına aynılır. Onda x_0 nöqtəsi tənliyin requlyar və ya adi nöqtəsi adlanır. Əks halda x_0 məxsusi nöqtə adlanır. x_0 nöqtəsi tənliyin adi nöqtəsi olduqda tənliyin $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$ şərtlərini ödəyən və x_0 nöqtəsi ətrafında analitik olan həlli, yəni yığılan

$$y = y_0 + y_1(x - x_0) + \sum_{k=2}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$$

qüvvət sırası şəklində göstərilən həlli var. Sadəlik üçün $x_0 = 0$ qəbul edək. Onda (1) tənliyini

$$y'' + y' \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k + y \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k = 0, \quad (1')$$

həlli isə

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m, \quad c_0 = y_0, \quad c_1 = y_1 \quad (2)$$

şəklində yazmaq olar.

$$y' = \sum_{m=1}^{\infty} m c_m x^{m-1}, \quad y'' = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) c_m x^{m-2}$$

töremələrini tapıb, (1') tənliyində nəzərə alsaq:

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) c_m x^{m-2} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} m p_k c_m x^{k+m-1} + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} m q_k c_m x^{k+m-1} = 0$$

$$\text{alınır. Xarakteristik tənliyin } r_1 = 2 \text{ kökünə uyğun } \begin{cases} -k_1 - k_2 + k_3 = 0, \\ k_1 - k_2 - k_3 = 0, \\ -k_2 = 0 \end{cases}$$

sistemin $k_1 = 1$, $k_2 = 0$, $k_3 = 1$ həllinə baxaq. Bu həllə uyğun sistemin $x_1 = e^{2t}$, $y_1 = 0$, $z_1 = e^{2t}$ həlli alınır. Xarakteristik tənliyin $r_2 = r_3 = 1$ kökünə uyğun alınan

$$\begin{cases} -k_2 + k_3 = 0, \\ k_1 - k_3 = 0, \\ -k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$$

sistemin ancaq bir $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ xətti asılı olmayan həlli vardır.

Odur ki, $r_2 = r_3 = 1$ kökünə uyğun həlli $x = (a_1 + tb_1)e^t$, $y = (a_2 + tb_2)e^t$, $z = (a_3 + tb_3)e^t$ şəklində axtarmaq lazımdır. Bu zaman $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ ədədlərini tapmaq üçün

$$\begin{cases} -b_2 + b_3 = 0, \\ b_1 - b_3 = 0, \\ -b_2 + b_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -a_2 + a_3 = b_1, \\ a_1 - a_3 = b_2, \\ -a_2 + a_3 = b_3 \end{cases}$$

sistemləri alınır. Birinci sistemin $b_1 = b_2 = b_3 = C_2$ həllinə uyğun ikinci sistemin $a_1 = C_1$, $a_2 = C_1 - 2C_2$, $a_3 = C_1 - C_2$ həlləri uyğun gəlir, burada C_1 və C_2 ixtiyari ədədlərdir. Onda

$$x = (C_1 + tC_2)e^t + C_3e^{2t}, \quad y = (C_1 - 2C_2 + tC_2)e^t + C_3e^{2t},$$

$$z = (C_1 - C_2 + tC_2)e^t + C_3e^{2t} \text{ sistemin ümumi həlli olur.}$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} q_k c_m x^{k+m} = 0.$$

Buradan x dəyişəninə eyni dərəcəli əmsalları cəmini sıfıra bərabər etməklə alırıq:

$$\begin{array}{l|l} x^0 & 2 \cdot 1 c_2 + 1 \cdot p_0 c_1 + q_0 c_0 = 0, \\ x^1 & 3 \cdot 2 c_3 + 1 p_1 c_1 + 2 p_0 c_2 + q_1 c_0 + q_0 c_1 = 0, \\ \dots & \dots \\ x^{k-2} & k(k-1)c_k + \sum_{m=0}^{k-2} p_{k-m-2}(m+1)c_{m+1} + \sum_{m=0}^{k-2} q_{k-m-2}c_m = 0, \\ \dots & \dots \end{array}$$

Alınan bərabərliklərdən c_0, c_1 ədədlərini ixtiyari götürüb, ardıcıl olaraq $c_2, c_3, \dots, c_k, \dots$ əmsallarını yeganə qayda ilə tapmaq olur. Tənliyin $y(0) = 1, y'(0) = 0$ başlanğıc şərtlərini ödəyən həlli üçün $c_0 = 1, c_1 = 0$ götürməklə

$$y_1(x) = 1 + \sum_{m=2}^{\infty} c_m x^m$$

həlli və $y(0) = 0, y'(0) = 1$ həlli üçün $c_0 = 0, c_1 = 1$ götürməklə

$$y_2(x) = x + \sum_{m=2}^{\infty} c_m x^m$$

həlli alınır. Bunlar xətti asılı olmayan həllər olur. Onda $y = Ay_1(x) + By_2(x)$ tənliyin ümumi həlli olur, burada A, B ixtiyari sabitlərdir.

$x_0 = 0$ nöqtəsi tənliyin məxsusi nöqtəsi olduqda həlli yuxarıda göstərilən qayda ilə tapmaq olmur. Tutaq ki, tənliyin əmsalları

$$p(x) = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k, \quad q(x) = \frac{1}{x^2} \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k$$

şəklindədir. Onda tənliyin həlli

$$y(x) = x^p \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \quad (c_0 \neq 0)$$

ümumiləşmiş qüvvət sırası şəklində axtarılır, burada p ədədi $p(p-1) + p_0 p + q_0 = 0$ tənliyinin həllidir, $p_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x p(x), q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 q(x).$

1. $y'' - xy' - 2y = 0$ tənliyinin həllini qüvvət sırası şəklində tapın.

HƏLLİ. Baxılan misal üçün $p(x) = -x, q(x) = -2$ olduğundan

$x = 0$ nöqtəsi tənliyin adi nöqtəsi olur. Odur ki, həlli $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$

sırası şəklində axtarmaq lazımdır. Buradan $y' = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1},$

$y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2}$ olduğunu nəzərə alıb, verilən tənlikdə yazmaqla alırıq.

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} - \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} 2 c_k x^k = 0.$$

Əvvəlcə tənliyin $y(0) = 1, y'(0) = 0$ başlanğıc şərtlərini ödəyən $y_1(x)$ həllini tapmaq. Bu həll üçün $c_0 = 1, c_1 = 0$. Alınan bərabərlikdə x dəyişəninə eyni dərəcəli əmsallarının cəmi sıfır olduğundan aşağıdakı cədvəli düzəldək:

$$\begin{array}{lcl}
x^0 & 2 \cdot 1c_2 - 2c_0 = 0, & \text{buradan } c_2 = c_0 = 1, \\
x^1 & 3 \cdot 2c_3 - 1c_1 - 2c_1 = 0, & \text{buradan } c_3 = \frac{1}{2}c_1 = 0, \\
x^2 & 4 \cdot 3c_4 - 2c_2 - 2c_2 = 0, & \text{buradan } c_4 = \frac{1}{3}, \\
x^3 & 5 \cdot 4c_5 - 3c_3 - 2c_3 = 0, & \text{buradan } c_5 = 0, \\
x^4 & 6 \cdot 5c_6 - 4c_4 - 2c_4 = 0, & \text{buradan } c_6 = \frac{1}{5}c_4 = \frac{1}{15}, \\
\ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Deməli, $y_1(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{15} + \dots$ axtarılan həll olur. $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ şərtlərini ödəyən həll üçün $c_0 = 0$, $c_1 = 1$ olduğunu nəzərə alsaq

$$\begin{array}{lcl}
x^0 & 2 \cdot 1c_2 - 2c_0 = 0, & \text{buradan } c_2 = c_0 = 0, \\
x^1 & 3 \cdot 2c_3 - 1c_1 - 2c_1 = 0, & \text{buradan } c_3 = \frac{1}{2}c_1 = \frac{1}{2}, \\
x^2 & 4 \cdot 3c_4 - 2c_2 - 2c_2 = 0, & \text{buradan } c_4 = \frac{1}{3}c_2 = 0, \\
x^3 & 5 \cdot 4c_5 - 3c_3 - 2c_3 = 0, & \text{buradan } c_5 = \frac{1}{4}c_3 = \frac{1}{8}, \\
x^4 & 6 \cdot 5c_6 - 4c_4 - 2c_4 = 0, & \text{buradan } c_6 = \frac{1}{5}c_4 = 0, \\
x^5 & 7 \cdot 6c_7 - 5c_5 - 2c_5 = 0, & \text{buradan } c_7 = \frac{1}{6}c_5 = \frac{1}{48}, \\
\ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\text{Onda } y_2(x) &= x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{2 \cdot 4} + \frac{x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots = x \left[1 + \left(\frac{x^2}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3!} \left(\frac{x^2}{2} \right)^3 + \dots \right] = x e^{\frac{x^2}{2}}.
\end{aligned}$$

Alınan $y_1(x)$ və $y_2(x)$ həlləri xətti asılı olmadığından $y = Ay_1(x) + By_2(x)$ verilən tənliyin ümumi həlli olur, burada A , B ixtiyari sabitlərdir.

2. $4xy'' + 2y' + y = 0$ tənliyin həllini qüvvət sırasının köməyi ilə tapın.

HƏLLİ. Tənliyi $y'' + \frac{1}{2x}y' + \frac{1}{4x}y = 0$ şəklində yazsaq, $p(x) = \frac{1}{2x}$,

$q(x) = \frac{1}{4x}$ olduğundan $x = 0$ tənliyin məxsusi nöqtəsi olur. Odur ki,

həlli $y = x^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ ($c_0 \neq 0$) ümumiləşmiş qüvvət sırası şəklində

axtarmaq lazımdır. Burada $p_0 = \lim_{x \rightarrow 0} xp(x) = \frac{1}{2}$, $q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 q(x) = 0$ olduğundan ρ ədədi

$$\rho(\rho - 1) + \frac{1}{2}\rho + 0 = 0$$

tənliyinin həlli götürülür. Buradan $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = \frac{1}{2}$ olduğunu nəzərə alsaq həlləri

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad y_2(x) = x^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad (x \geq 0, \quad c_0 \neq 0),$$

sıraları şəklində axtarmaq lazımdır. Birinci sıradan törəmələr alıb, tənlikdə yerinə yazsaq:

$$\sum_{k=2}^{\infty} 4k(k-1)c_k x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} 2kc_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$$

Bu bərabərliyi sadələşdirsək alarıq:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2k(2k-1)c_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0.$$

Alınan bərabərlikdə x dəyişəninin eyni dərəcəli əmsallarının cəmi sıfır olduğundan alırıq:

$$\begin{array}{l} x^0 \quad 2c_1 + c_0 = 0, \quad c_0 = A, \quad c_1 = -\frac{A}{2} \\ x^1 \quad 4 \cdot 3c_2 + c_1 = 0, \quad c_2 = -\frac{c_1}{3 \cdot 4} = \frac{A}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{A}{4!}, \\ x^2 \quad 6 \cdot 5c_3 + c_2 = 0, \quad c_3 = -\frac{c_2}{5 \cdot 6} = -\frac{A}{4! \cdot 5 \cdot 6} = -\frac{A}{6!}, \\ \dots \\ x^{k-1} \quad 2k(2k+1)c_k + c_{k-1} = 0, \quad c_k = -\frac{c_{k-1}}{(2k-1)2k} = (-1)^k \frac{A}{(2k)!}, \\ \dots \end{array}$$

Deməli,

$$y_1(x) = A \left(1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \dots + (-1)^k \frac{x^k}{(2k)!} + \dots \right) = A \cos \sqrt{x}.$$

$$y_2(x) = x^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\frac{1}{2}}$$

sırasından törəmələr alıb, verilən tənlikdə yazmaqla alırıq.

$$\sum_{k=0}^{\infty} 4 \left(k + \frac{1}{2} \right) \left(k - \frac{1}{2} \right) c_k x^{k-\frac{1}{2}} + \sum_{k=0}^{\infty} 2 \left(k + \frac{1}{2} \right) c_k x^{k-\frac{1}{2}} +$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\frac{1}{2}} = 0.$$

Bu bərabərliyi $x^{\frac{1}{2}}$ ixtisar edib sadələşdirək:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2k(2k+1)c_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0.$$

Buradan

$$\begin{array}{l} x^0 \quad 2 \cdot 3c_1 + c_0 = 0, \quad c_0 = B, \quad c_1 = -\frac{B}{3!} \\ x^1 \quad 4 \cdot 5c_2 + c_1 = 0, \quad c_2 = -\frac{c_1}{4 \cdot 5} = \frac{B}{3! \cdot 4 \cdot 5} = \frac{B}{5!}, \\ x^2 \quad 6 \cdot 7c_3 + c_2 = 0, \quad c_3 = -\frac{c_2}{6 \cdot 7} = -\frac{B}{5! \cdot 6 \cdot 7} = -\frac{B}{7!}, \\ \dots \\ x^{k-1} \quad 2k(2k+1)c_k + c_{k-1} = 0, \quad c_k = -\frac{c_{k-1}}{(2k+1)2k} = (-1)^k \frac{B}{(2k+1)!}, \\ \dots \end{array}$$

$$\text{Onda } y_2(x) = B \sqrt{x} \left(1 - \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \frac{x^3}{7!} + \dots + (-1)^k \frac{x^k}{(2k+1)!} + \dots \right) =$$

$$= B \left(\sqrt{x} - \frac{(\sqrt{x})^3}{3!} + \frac{(\sqrt{x})^5}{5!} - \frac{(\sqrt{x})^7}{7!} + \dots + (-1)^k \frac{(\sqrt{x})^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots \right) =$$

$= B \sin \sqrt{x}$. $y_1(x) = \cos \sqrt{x}$ və $y_2(x) = \sin \sqrt{x}$ həlləri xətti asılı olmadığından $y = A \cos \sqrt{x} + B \sin \sqrt{x}$ verilən tənliyin ümumi həlli olur, A , B ixtiyari sabitlərdir.

9. Həllin dayanıqlığı

Tutaq ki, $x = \varphi(t)$, $t \in [t_0, +\infty)$ funksiyası

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (1)$$

sisteminin

$$x(t_0) = x^0 \quad (2)$$

başlangıç şərtini ödəyən həllidir. Burada $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$$f(t, x) = (f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)),$$

$$x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0), \quad \varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)).$$

Sistemin

$$x(t_0) = \xi, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \quad (3)$$

başlangıç şartını ödəyən həllini $x = \varphi(t, \xi)$ ilə işarə edək.

$\forall \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$ ədədi üçün $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ədədi var ki,

$\|\xi - x^0\| < \delta$ olduqda $t \geq t_0$ üçün $\|\varphi(t, \xi) - \varphi(t)\| < \varepsilon$. Onda

$x = \varphi(t)$ həlli *Lyapunov mə'nada dayanıqlı* adlanır. Burada

$$\|\xi - x^0\| = \|\xi_1 - x_1^0\| + \|\xi_2 - x_2^0\| + \dots + \|\xi_n - x_n^0\|.$$

Əlavə olaraq, $\sigma > 0$ ($\sigma \leq \delta$) ədədi var ki, $\|\xi - x^0\| < \sigma$ ol-

duqda $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\varphi(t, \xi) - \varphi(t)\| = 0$ olarsa $x = \varphi(t)$ *Lyapunov mə'nada asimptotik dayanıqlı həll* adlanır.

Ayandır ki, $f(t, a) = 0$ olduqda $x = a$ sistemin həlli olur. Bu həll sistemin *tarazlıq vəziyyəti* adlanır. Sistemin hər hansı həllinin dayanıqlığı əvəzləmə vasitəsilə tarazlıq vəziyyətinin dayanıqlığına gətirilir.

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (4)$$

xətti bircins sistemi üçün $x = 0$ tarazlıq halıdır. Burada $A(t)$ elementləri $a_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ olan $n \times n$ ölçülü matrisdir. (4) sisteminin hər hansı həllinin dayanıqlığından onun istənilən həllinin dayanıqlığı alınır. Bütün həlləri dayanıqlı (və ya asimptotik dayanıqlı) olan sisteme dayanıqlı (və ya asimptotik dayanıqlı) sistem deyilir. Belə sistemlərin dayanıqlığı haqqında aşağıdakı teorem doğrudur:

TEOREM 1. (I) *Xətti bircins sistemin dayanıqlı olması üçün onun hər bir həllinin $t \rightarrow +\infty$ şərtində məhdud olması zəruri və kifədir.*

(II) *Xətti bircins sistemin asimptotik dayanıqlı olması üçün onun hər bir həllinin $t \rightarrow +\infty$ şərtində limitinin sıfır olması zəruri və kifədir.*

A sabit matris olduqda

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (5)$$

sisteminde *sabit əmsallı xətti bircins sistem* adlanır. Tutaq ki, A matrisi a_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$ ədədlərindən düzəldilmişdir. Onda

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = (-1)^n \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

çoxhədli (5) sisteminin və ya A matrisinin xarakteristik çoxhədli, $f(\lambda) = 0$ isə xarakteristik tənliyi adlanır. Xarakteristik tənliyin köklərinə (5) sisteminin və ya A matrisinin xarakteristik ədədləri deyilir. (5) sisteminin dayanıqlığı haqqında aşağıdakı teorem doğrudur.

TEOREM 2. (I) *Sabit əmsallı xətti bircins sistemin dayanıqlı olması üçün zəruri və kifə şərt A matrisinin bütün xarakteristik ədədlərinin həqiqi hissələri müsbət olmamaqla, həqiqi hissəsi sıfır olan xarakteristik ədədlərinə uyğun Jordan hücrələrinin bircinsli olmasıdır.*

(II) *Sabit əmsallı xətti bircins sistemin asimptotik dayanıqlı olması üçün A matrisinin xarakteristik ədədlərinin hamısının həqiqi hissələrinin mənfə olması zəruri və kifədir.*

Xüsusi halda, $n = 2$ olduqda $-\alpha = a_{11} + a_{22}$, $\beta = \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ işarə edək. Onda teorem 2-ni aşağıdakı kimi ifadə etmək olar.

TEOREM 2'. (I)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y. \end{cases} \quad (5')$$

sisteminin dayanıqlı olması üçün $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta > 0$ şərtlərinin ödənilməsi zəruri və kifədir.

(II) sisteminin asimptotik dayanıqlı olması üçün $\alpha > 0$, $\beta > 0$ şərtləri zəruri və kifədir.

Köklərin həqiqi hissəsi mənfə olan çoxhədliyə *Curviç çoxhədli* deyilir.

TEOREM (Qurviç). $f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$ çoxhədlisinin Qurviç çoxhədlisi olması üçün $a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0$ zəruri şərtir. $n \leq 2$ olduqda bu şərt həm də kifayət şərtdir.

TEOREM (Rauss-Qurviç). $f(\lambda)$ çoxhədlisinin Qurviç çoxhədlisi olması üçün

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

matrisinin baş diaqonal minorlarının $\Delta_1 = a_1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0,$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \dots, \Delta_n > 0 \text{ olması zəruri və kifayətdir.}$$

Qeyri-xətti sistemlərin dayanıqlığı iki üsulla: birinci yaxınlaşmalar və Lyapunov funksiyalar üsulu ilə araşdırılır.

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t, x) \quad (6)$$

sistem üçün

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|f(t, x)\|}{\|x\|} = 0$$

olduqda

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

sistemine (6) sisteminin birinci yaxınlaşmalar sistemi deyilir.

Sağ tərəfi sərbəst dəyişəndən asqar asılı olmayan

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (7)$$

sistemine avtonom sistem deyilir. Tutaq ki, $x = 0$ avtonom sistemin tarazlıq vəziyyətidir, yəni $f(0) = 0$. Onda

$$a_{i,j} = \frac{\partial f_i(0)}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

ədədlərindən düzəldilmiş A matrisi üçün (5) sistemi (7) avtonom sistemi üçün birinci yaxınlaşmalar sistemi olur.

TEOREM (Birinci yaxınlaşmalar üsulu). (5) sistemi asimptotik dayanıqlı olduqda (6), (və ya (7)) sisteminin $x = 0$ tarazlıq vəziyyəti asimptotik dayanıqlı olur.

Sadelik üçün avtonom sistemlərin $x = 0$ tarazlıq vəziyyətinin dayanıqlığını Lyapunov funksiyalar üsulu ilə araşdırılması məsələsinə baxaq. Tutaq ki, koordinat başlanğıcını öz daxilində saxlayan D oblastında kəsilməz və kəsilməz xüsusi törəmələri olan $v(x) = v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyası üçün $v(0) = 0, v(x) > 0, x \neq 0$ ($v(x) < 0, x \neq 0$) şərtləri ödənilir. Onda $v(x)$ funksiyası müsbət-müəyyən (mənfi-müəyyən) adlanır. $v(x) \geq 0, x \in D$ ($v(x) \leq 0, x \in D$) olduqda $v(x)$ funksiyası işarəsi müsbət (mənfi) olan adlanır.

(7) sisteminin ixtiyari $x(t)$ həlli üçün $v = v(x(t))$ funksiyasından t -yə nəzərən törəmə alaq:

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(x) = \langle \text{grad} v(x), f(x) \rangle.$$

Onda $\frac{dv}{dt} = \langle \text{grad} v(x), f(x) \rangle$ bərabərliyinə $v(x)$ funksiyasının

(7) sistemine nəzərən törəməsi deyilir. Burada $\text{grad} v(x) = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \right.$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n} \right), \quad \langle \cdot, \cdot \rangle \text{-skalyar hasilidir.}$$

TEOREM (Lyapunov funksiyalar üsulu) (I) Müsbət-müəyyən olan $v(x)$ funksiyası var ki, onun (7) sistemine nəzərən törəməsi $\frac{dv}{dt}$

işaresi mənfi olan funksiya olur. Onda (7) sisteminin $x = 0$ tarazlıq vəziyyəti dayanıqlıdır.

(II) Özü müsbət-müəyyən olan $v(x)$ funksiyası var ki, onun (7) sistemine nəzərən törəməsi $\frac{dv}{dt}$ mənfi müəyyən olur. Onda (7) sisteminin $x = 0$ tarazlıq vəziyyəti asimptotik dayanıqlı olur.

1. $x^{IV} + 5x''' + 13x'' + 19x' + 10x = 0$ tənliyinin $x = 0$ həllinin asimptotik dayanıqlı olduğunu araşdırın.

HƏLLİ. Tənliyin $f(\lambda) = \lambda^4 + 5\lambda^3 + 13\lambda^2 + 19\lambda + 10$ xarakteristik çoxhədli üçün Qurviç matrisi

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 19 & 13 & 5 & 1 \\ 0 & 10 & 19 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

olduğundan bu matrisin baş diaqonal minorlarını hesablayaq:

$$\Delta_1 = 5 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 19 & 13 \end{vmatrix} = 46 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 19 & 13 & 5 \\ 0 & 10 & 19 \end{vmatrix} =$$

$$= 624 > 0, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 19 & 13 & 5 & 1 \\ 0 & 10 & 19 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 10\Delta_3 = 6240 > 0.$$

Buradan Rauss-Qurviç teoreminə əsasən baxılan həlli asimptotik dayanıqlı olur.

2. α ədədinin hansı qiymətlərində $y''' + 2y'' + \alpha y' + 3y = 0$ tənliyinin $y = 0$ həlli asimptotik dayanıqlı olur?

HƏLLİ. Tənliyin $f(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + \alpha\lambda + 3$ xarakteristik çoxhədli üçün Qurviç matrisi

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & \alpha & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

olduğundan, bu matrisin baş diaqonal minorlarının

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & \alpha \end{vmatrix} = 2\alpha - 3 > 0, \quad \Delta_3 = 3\Delta_2 > 0$$

olması üçün $\alpha > \frac{3}{2}$ olmalıdır. Deməli, $\alpha > \frac{3}{2}$ üçün baxılan həll asimptotik dayanıqlı olur.

3. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \ln(4y + e^{-3x}), \\ \frac{dy}{dt} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1 - 6x} \end{cases}$ sisteminin $(0, 0)$ tarazlıq vəziyyətinin birinci yaxınlaşmalar üsulu ilə asimptotik dayanıqlı olduğunu göstərin.

HƏLLİ. Baxılan sistem üçün

$$f_1(x, y) = \ln(4y + e^{-3x}), \quad f_2(x, y) = 2y - 1 + \sqrt[3]{1 - 6x},$$

$$a_{11} = \frac{\partial f_1(0, 0)}{\partial x} = -3, \quad a_{12} = \frac{\partial f_1(0, 0)}{\partial y} = 4,$$

$$a_{21} = \frac{\partial f_2(0, 0)}{\partial x} = -2, \quad a_{22} = \frac{\partial f_2(0, 0)}{\partial y} = 2.$$

Onda

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + 4y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 2y \end{cases}$$

sistemi verilən sistemin birinci yaxınlaşmalar sistemi olur. Bu sistemin xarakteristik çoxhədlisi

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 2$$

olduğundan köklərin həqiqi hissələri mənfi olur. Yəni $\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$, $\lambda_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}$. Odur ki, verilən sistemin $(0, 0)$ tarazlıq vəziyyəti asimptotik dayanıqlı olur. (Teorem 2 (II)).

4. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 3y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + y \end{cases}$ sisteminin dayanıqlılığını araşdırın.

HƏLLİ. Baxılan sistemdə

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha = -(-1+1) = 0, \quad \beta = -1+3 = 2,$$

olduğundan teorem 2'-yə əsasən verilmiş sistem dayanıqlı olur. Lakin bu sistem asimptotik dayanıqlı deyil. Doğrudan da, sistemin $x(0) = \xi$, $y(0) = \eta$ başlanğıc şərtlərini ödəyən həlli

$$\begin{cases} x(t) = \xi \cos \sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}}(3\eta - \xi) \sin \sqrt{2}t, \\ y(t) = \eta \cos \sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta - \xi) \sin \sqrt{2}t \end{cases}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} |x(t)| + |y(t)| &\leq |\xi| + \frac{1}{\sqrt{2}}|3\eta - \xi| + |\eta| + \frac{1}{\sqrt{2}}|\eta - \xi| \leq |\xi| + \\ &+ \frac{3}{\sqrt{2}}|\eta| + \frac{1}{\sqrt{2}}|\xi| + |\eta| + \frac{1}{\sqrt{2}}|\eta| + \frac{1}{\sqrt{2}}|\xi| = (1 + \sqrt{2})|\xi| + (1 + \sqrt{2})|\eta|. \end{aligned}$$

İxtiyari $\varepsilon > 0$ ədədinə qarşı $\delta = \frac{\varepsilon}{2(1 + \sqrt{2})}$ götürsək, onda

$|x(t)| + |y(t)| < \varepsilon$, $t \in [0, +\infty)$. Deməli, sistemin $(0, 0)$ tarazlıq vəziyyəti dayanıqlı olur. Lakin göstərilən həllərin $t \rightarrow +\infty$ şərtində limiti sıfıra yaxınlaşmır (limiti yoxdur). Odur ki, $(0, 0)$ həlli asimptotik dayanıqlı olmur.

5. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3 - \sqrt{4 + x^2 + y}, \\ \frac{dy}{dt} = \ln(x^2 - 3) \end{cases}$ sisteminin tarazlıq vəziyyətlərini tapın və onların dayanıqlılığını araşdırın.

HƏLLİ. Baxılan sistem üçün $f_1(x, y) = 3 - \sqrt{4 + x^2 + y}$, $f_2(x, y) = \ln(x^2 - 3)$. Sistemin tarazlıq vəziyyətləri üçün

$$\begin{cases} 3 - \sqrt{4 + x^2 + y} = 0, \\ \ln(x^2 - 3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 + x^2 + y = 9, \\ x^2 - 3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y = 5, \\ x^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 5 - x^2, \\ x = \pm 2, \quad y = 1. \end{cases}$$

Deməli, baxılan sistemin iki $(2; 1)$ və $(-2; 1)$ tarazlıq vəziyyəti var. $(2; 1)$ tarazlıq vəziyyətinin dayanıqlılığını öyrənmək məqsədilə bu nöqtəyə uyğun sistemin birinci yaxınlaşmalarını tapmaq:

$$a_{11} = \frac{\partial f_1(2, 1)}{\partial x} = -\frac{2}{3}, \quad a_{12} = \frac{\partial f_1(2, 1)}{\partial y} = -\frac{1}{6},$$

$$a_{21} = \frac{\partial f_2(2, 1)}{\partial x} = 4, \quad a_{22} = \frac{\partial f_2(2, 1)}{\partial y} = 0.$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{2}{3}(x-2) - \frac{1}{6}(y-1), \\ \frac{dy}{dt} = 4(x-2) + 0(y-1) \end{cases}$$

sistemi (2; 1) tarazlıq vəziyyəti üçün birinci yaxınlaşmalar olur. Xarakteristik çoxhədli

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} -\frac{2}{3} - \lambda & -\frac{1}{6} \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda + \frac{2}{3}$$

olduğundan Qurviç teoreminə əsasən bu, Qurviç çoxhədlisidir. Deməli, (2; 1) tarazlıq vəziyyəti asimptotik dayanıqlıdır.

İndi (-2; 1) tarazlıq vəziyyəti üçün birinci yaxınlaşmalar sistemini tapaq.

$$a_{11} = \frac{\partial f_1(-2, 1)}{\partial x} = \frac{2}{3}, \quad a_{12} = \frac{\partial f_1(-2, 1)}{\partial y} = -\frac{1}{6},$$

$$a_{21} = \frac{\partial f_2(-2, 1)}{\partial x} = -4, \quad a_{22} = \frac{\partial f_2(-2, 1)}{\partial y} = 0.$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{2}{3}(x+2) - \frac{1}{6}(y-1), \\ \frac{dy}{dt} = -4(x+2) + 0(y-1) \end{cases}$$

sistemi (-2; 1) nöqtəsi üçün birinci yaxınlaşmalar sistemi olur. Bu sistemin xarakteristik çoxhədli

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} - \lambda & -\frac{1}{6} \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda - \frac{2}{3}$$

Qurviç teoreminə əsasən Qurviç çoxhədli ola bilməz. Deməli, (-2; 1) tarazlıq vəziyyəti dayanıqlı deyil.

$$6. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x + xy, \\ \frac{dy}{dt} = x - y - x^2 - y^3 \end{cases} \quad \text{sisteminin } (0, 0) \text{ tarazlıq vəziyyətinin}$$

Lyapunov funksiyalar üsulu ilə dayanıqlığını araşdırın.

HƏLLİ. $v(x, y) = x^2 + y^2$ funksiyası müsbət-müəyyəndir. Bu funksiyanın verilən sistmə nəzərən törəməsini hesablayaq:

$$\frac{dv}{dt} = 2x(y - x + xy) + 2y(x - y - x^2 - y^3) = -2(x - y)^2 -$$

$$-2y^4 < 0, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Onda Lyapunov funksiyalar üsulu teoreminin (II) hissəsinə görə (0, 0) tarazlıq vəziyyəti asimptotik dayanıqlı olur.

Baxılan misala birinci yaxınlaşmalar üsulunu tətbiq etsək

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$$

sistemin birinci yaxınlaşmaları olur. Bu sistemin xarakteristik çoxhədli

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 1 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda$$

olduğundan Qurviç çoxhədli olmur və deməli, birinci yaxınlaşmalara nəzərən (0, 0) tarazlıq vəziyyətinin dayanıqlığı haqqında fikir söyləmək olmur.

$$7. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x^3 + 3y, \\ \frac{dy}{dt} = -x - 4y^5 \end{cases} \text{ sisteminin } (0, 0) \text{ tarazlıq vəziyyətinin dayanıqlıq-}$$

lığını araşdırın.

HƏLLİ. Baxılan sistem üçün

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3y, \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

birinci yaxınlaşmalar sistemi olur. Bu sistemin xarakteristik tənliyini yazaq.

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3 = 0.$$

$\lambda^2 + 3$ çoxhədlişi Qurviç çoxhədlişi olmur. Odur ki, birinci yaxınlaşmalara nəzərən verilən sistemin $(0, 0)$ tarazlıq vəziyyətinin dayanıqlığı haqqında fikir söyləmək mümkün olmur.

İndi Lyapunovun funksiyalar üsulu ilə sistemin $(0, 0)$ tarazlıq vəziyyətinin dayanıqlığını araşdıraraq. Lyapunov funksiyası olaraq $v(x, y) = x^2 + 3y^2$ götürək. Bu müsbət-müəyyən funksiyanın verilən sisteme nəzərən törəməsini hesablayaq:

$$\frac{dv}{dt} = 2x(-2x^3 + 3y) + 6y(-x - 4y^5) = -4(x^4 + 6y^6) < 0,$$

$(x, y) \neq (0, 0)$. Onda Lyapunovun funksiyalar üsulu teoreminin (II) hissəsinə əsasən $(0, 0)$ tarazlıq vəziyyəti asimptotik dayanıqlı olur. Çünki $v(x, y)$ - funksiyasının özü müsbət müəyyən, sisteme nəzərən törəməsi $\frac{dv}{dt} = -4(x^4 + 6y^6)$ isə mənfi-müəyyəndir.

10. Məxsusi nöqtə

$P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = 0$ şərtlərini ödəyən (x, y) nöqtəsinə

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases} \text{ sisteminin və ya } \frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \text{ tənliyinin məxsusi}$$

nöqtəsi deyilir.

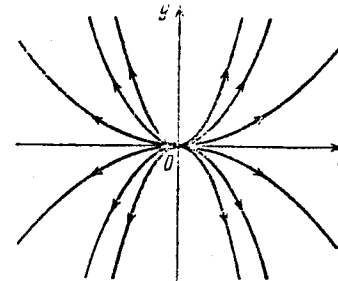
Xüsusi halda, $(0, 0)$ nöqtəsi

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by, \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases} \text{ sisteminin və ya } \frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + dx} \text{ tənliyinin məxsusi}$$

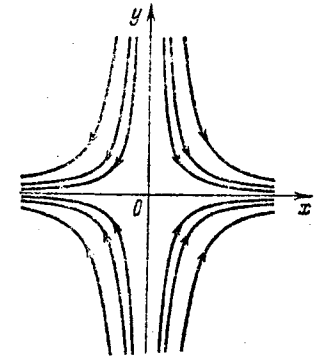
nöqtəsi olur.

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - cb = 0 \text{ tənliyin kökləri həqiqi,}$$

müxtəlif və eyni işarəli və ya köklər bərabər və sıfırdan fərqli olduqda $(0, 0)$ məxsusi nöqtəsi *düyün* (şəkil 8), köklər həqiqi və müxtəlif işarəli olarsa $(0, 0)$ məxsusi nöqtəsi



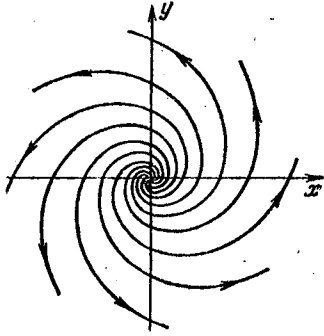
Şəkil 8.



Şəkil 9.

yəhərvəri (şəkil 9), köklərin həqiqi hissəsi sıfırdan fərqli kompleks

ədədlər olarsa $(0, 0)$ nöqtəsi *foks* (şəkil 10), köklər xəyali ədədlər olarsa $(0, 0)$ məxsusi nöqtəsi *mərkəz* (şəkil 11) adlanır.



Şəkil 10.

1. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x, \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$ sisteminin $(0, 0)$ məxsusi nöqtəsinin tipini təyin edin.

HƏLLİ. $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1.$

Köklər həqiqi, müxtəlif və eyni işarəli olduğundan $(0, 0)$ nöqtəsi düyün nöqtəsi olur.

2. $y' = \frac{2x+y}{3x+4y}$ tənliyinin $(0, 0)$ məxsusi nöqtəsinin tipini təyin edin.

HƏLLİ. $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0, \quad \lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = -1.$

Köklər həqiqi və müxtəlif işarəli olduğundan $(0, 0)$ nöqtəsi yəhərvəri

olur.

3. $y' = \frac{y-2x}{y}$ tənliyinin $(0, 0)$ məxsusi nöqtəsinin tipini təyin edin.

HƏLLİ. $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda + 2 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{11}}{2}.$

Köklər kompleks, həqiqi hissəsi sıfırdan fərqli olduğu üçün $(0, 0)$ nöqtəsi foks olur.

4. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$ sisteminin $(0, 0)$ məxsusi nöqtəsinin tipini təyin edin.

HƏLLİ. $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm i.$

Köklər xəyali olduğundan $(0, 0)$ nöqtəsi mərkəz olur.

11. Sərhəd məsələsi

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \quad (1)$$

tənliyinin

$$\begin{cases} \alpha y'(a) + \beta y(a) = 0, \\ \gamma y'(b) + \delta y(b) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

şərtlərini ödəyən həllinin tapılması məsələsinə *sərhəd məsələsi*, (2) şərtlərinə isə *sərhəd şərtləri* deyilir.

Tutaq ki, $y_1(x)$, $y_2(x)$ funksiyaları bircins

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad (3)$$

tənliyinin fundamental həlləri, $\tilde{y}(x)$ isə (1) tənliyinin bir xüsusi həlli-dir. Onda (1) tənliyinin ümumi həlli

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \tilde{y}(x). \quad (4)$$

Sərhəd məsələsinin həllini tapmaq üçün (4) ümumi həllini (2) sərhəd şərtlərində yerinə yazıb, C_1 və C_2 sabitlərinə nəzərən qruplaşdırıq. Onda C_1 , C_2 sabitlərini tapmaq üçün

$$\begin{cases} A_{11}C_1 + A_{12}C_2 = B_1, \\ A_{21}C_1 + A_{22}C_2 = B_2 \end{cases} \quad (5)$$

sistemi alınır. Alınan (5) sistemi uyuşan olduqda (1), (2) sərhəd məsələsinin həlli olur. Bu həlli tapmaq üçün (5) sisteminde $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0$ ədədlərini tapıb, (4) ümumi həllində yerinə yazmaq lazımdır.

(1), (2) sərhəd məsələsinin $G(x, s)$ Qrin funksiyası aşağıdakı şərtləri ödəyir:

(I). $G(x, s)$ funksiyası $D = \{a \leq x \leq b, a \leq s \leq b\}$ oblastında kəsilməzdir.

(II). Hər bir $a < s < b$ üçün $G(x, s)$ funksiyası x dəyişəninə nəzərən (a, s) və (s, b) intervallarında (3) bircins tənliyinin həlli olur.

(III). $G(x, s)$ funksiyasının x arqumentinə nəzərən $G'_x(x, s)$ törəməsi $x = s$ nöqtəsində kəsilməzdir və $G'_x(s+0, s) - G'_x(s-0, s) = 1$.

(IV). $G(x, s)$ funksiyası x dəyişəninə nəzərən (2) sərhəd şərtlərini ödəyir.

(1), (2) sərhəd məsələsinin $G(x, s)$ Qrin funksiyası məlum olduqda onun həlli

$$y(x) = \int_a^b G(x, s) f(s) ds \quad (6)$$

Qrin düsturu ilə təyin olunur.

λ ədədinin

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = \lambda y, \quad (7)$$

$$\begin{cases} \alpha y'(a) + \beta y(a) = 0, \\ \gamma y'(b) + \delta y(b) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

sərhəd məsələsinin sıfırdan fərqli həllinin varlığını təmin edən qiymət-

lərinə *məxsusi ədəd*, sıfırdan fərqli həllə isə *məxsusi funksiya* deyilir. Məsələnin özünə isə *məxsusi ədəd* və *məxsusi funksiya haqqında məsələ* deyilir.

1. $y'' - y = 2x$ tənliyinin $y(0) = 0$, $y(1) = -1$ sərhəd şərtlərini ödəyən həllini tapın.

HƏLLİ. $y'' - y = 0$ tənliyinin xarakteristik tənliyi $k^2 - 1 = 0$ və onun kökləri $k_1 = 1$, $k_2 = -1$ olur. Onda bircins tənliyin ümumi həlli $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$, bircins olmayan tənliyin xüsusi həlli $\tilde{y}(x) = -2x$ olur. Odur ki, $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 2x$ verilmiş tənliyin ümumi həlli olur. Bu həlli sərhəd şərtlərində nəzərə alaq.

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ eC_1 + e^{-1}C_2 = 1 \end{cases}$$

Sistemin $C_1 = \frac{1}{e - e^{-1}}$, $C_2 = -\frac{1}{e - e^{-1}}$ həllini ümumi həldə yerinə

$$\text{yazaq. } y(x) = \frac{e^x}{e - e^{-1}} - \frac{e^{-x}}{e - e^{-1}} - 2x, \quad y(x) = \frac{\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})}{\frac{1}{2}(e^1 - e^{-1})} - 2x =$$

$$= \frac{\sinh x}{\sinh 1} - 2x. \text{ Beləliklə, } y(x) = \frac{\sinh x}{\sinh 1} - 2x \text{ sərhəd məsələsinin həlli olur.}$$

2. $y'' - y' = 0$ tənliyinin $y(0) = -1$, $y'(1) - y(1) = 2$ sərhəd şərtlərini ödəyən həllini tapın.

HƏLLİ. Tənliyin ümumi həlli $y(x) = C_1 + C_2 e^x$ olar. Bu həlli sərhəd şərtlərində yerinə yazaraq alırıq.

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -1, \\ -C_1 = 2 \end{cases}$$

Buradan $C_1 = -2$, $C_2 = 1$. Onda $y(x) = e^x - 2$ sərhəd məsələsi-

nin həlli olar.

3. $y'' - y = f(x)$, $y'(0) = 0$, $y'(2) + y(2) = 0$ sərhəd məsələsinin Qrin funksiyasını tapın.

HƏLLİ. $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{-x}$ funksiyaları biricins $y'' - y = 0$ tənliyinin fundamental həlləri olur. Onda

$$G(x, s) = \begin{cases} C_1 e^x + C_2 e^{-x}, & 0 \leq x \leq s, \\ C_3 e^x + C_4 e^{-x}, & s \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Qrin funksiyasının kəsilməzliyindən və $G'_x(x, s)$ törəməsi $x = s$ nöqtəsində $G'_x(s+0, s) - G'_x(s-0, s) = 1$ şərtini ödəməsindən alınır:

$$\begin{cases} (C_3 - C_1)e^s + (C_4 - C_2)e^{-s} = 0, \\ (C_3 - C_1)e^s - (C_4 - C_2)e^{-s} = 1 \end{cases}$$

$$\text{Buradan } C_3 - C_1 = \frac{1}{2}e^{-s}, \quad C_4 - C_2 = -\frac{1}{2}e^s.$$

Deməli,

$$G(x, s) = \begin{cases} C_1 e^x + C_2 e^{-x}, & 0 \leq x \leq s, \\ \left(C_1 + \frac{1}{2}e^{-s}\right)e^x + \left(C_2 - \frac{1}{2}e^s\right)e^{-x}, & s \leq x \leq 2. \end{cases}$$

$G(x, s)$ funksiyası $x \rightarrow 0$ nəzərən sərhəd şərtlərini ödəyir:

$$\begin{cases} C_1 - C_2 = 0, \\ C_1 + \frac{1}{2}e^{-s} = 0. \end{cases}$$

Buradan alınır: $C_1 = -\frac{1}{2}e^{-s}$, $C_2 = -\frac{1}{2}e^{-s}$. Bu qiymətləri $G(x, s)$

funksiyasının axırıncı ifadəsində yerinə yazırıq:

$$G(x, s) = \begin{cases} -e^{-s} \cosh x, & 0 \leq x \leq s, \\ -e^{-s} \cosh s, & s \leq x \leq 2. \end{cases}$$

4. λ ədədinin hansı qiymətlərində $y'' - \lambda y = 0$ tənliyinin $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$ sərhəd şərtlərini ödəyən və sıfırdan fərqli həlli var?

HƏLLİ. λ ədədinin $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ və $\lambda > 0$ qiymətlərinə baxaq. $\lambda < 0$ olduqda $y'' - \lambda y = 0$ tənliyinin ümumi həlli $y = C_1 \sin \sqrt{-\lambda}x + C_2 \cos \sqrt{-\lambda}x$ olur. Sərhəd şərtlərini ödəyən həlli tapırıq: $y(0) = C_2 = 0$, $y(\pi) = C_1 \sin \sqrt{-\lambda}\pi = 0$. Deməli, $C_2 = 0$, C_1 ədədini sıfırdan fərqli götürmək lazımdır, əks halda tənliyin sıfır həlli alınır. Ona görə $\sin \sqrt{-\lambda}\pi = 0$ olar. Buradan $\sqrt{-\lambda}\pi = k\pi$, $k \neq 0$ $-\lambda_k = k^2$, $\lambda_k = -k^2$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Bu qiymətləri ümumi həldə yerinə yazırıq. $y_k(x) = C_k \sin kx$, $C_k \neq 0$, $k = 1, 2, \dots$

$C_k = 1$ qəbul etsək $y_k(x) = \sin kx$ funksiyası $\lambda_k = -k^2$ məxsusi ədədinə uyğun həll olur. Beləliklə, sonsuz sayda məxsusi ədədlər və sonsuz sayda məxsusi funksiyalar var. $\lambda = 0$ olduqda tənlik $y'' = 0$ şəklinə düşür. Buradan alınır. $y(x) = C_1 x + C_2$. Sərhəd şərtlərinə əsasən $y(0) = C_2 = 0$, $y(\pi) = C_1 \pi = 0$. Deməli, $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ olur. Yəni $y(x) = 0$ həlli alınır. Bu halda $\lambda = 0$ məxsusi ədəd olmur.

$\lambda > 0$ olduqda $y'' - \lambda y = 0$ tənliyin ümumi həlli $y(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$ olur. Sərhəd şərtlərinə əsasən alınır.

$$y(0) = C_1 + C_2 = 0, \quad y(\pi) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}\pi} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}\pi} = 0.$$

Buradan alınır. $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Deməli, bu halda məxsusi ədəd yoxdur. Beləliklə, baxılan məsələ üçün $-1, -4, -9, \dots, -k^2, \dots$ ədədləri məxsusi ədədlər, $\sin x$, $\sin 2x$, $\sin 3x, \dots, \sin kx, \dots$ məxsusi funksiyalar olur.

YOXLAMA SUALLARI

1. İkitərtibli diferensial tənliklərin ümumi həlli, xüsusi həlli nəyə

- deyilir?
2. İkitertibli diferensial tənliklər üçün Koşi məsələsi necə qoyulur? Həllin varlığı və yeganəliyi haqqında hansı teoremi bilirsiniz?
 3. Tərtibi aşağı salına bilən diferensial tənliklər hansılardır?
 4. Sərbəst dəyişən aşkar şəkildə daxil olmayan tənliyi həll etmək üçün hansı əvəzləmə aparılır?
 5. Axtarılan funksiya və onun törəmələrinə nəzərən bircins tənlik nəyə deyilir və həll etmək üçün hansı əvəzləmə aparılır?
 6. Ümumiləşmiş bircins tənliklər nəyə deyilir və necə həll edilir?
 7. İkitertibli xətti tənlik hansı hallarda həll edilir?
 8. Xətti asılı və xətti asılı olmayan funksiyalar nəyə deyilir? Vronski determinantı necə düzəldilir?
 9. Fundamental həllər nəyə deyilir?
 10. Sabit əmsallı ikitertibli xətti bircins tənliyin ümumi həlli necə tapılır?
 11. Tənliyə uyğun xarakteristik tənlik necə yazılır?
 12. Bircins olmayan sabit əmsallı ikitertibli diferensial tənliklərin xüsusi həlləri hansı hallarda qeyri-müəyyən əmsallar üsulu ilə tapılır?
 13. Sabitlərin variasiyası üsulu hansı hallarda tətbiq olunur?
 14. n tərtibli sabit əmsallı bircins xətti tənliklər necə həll edilir?
 15. n tərtibli xətti diferensial tənliklər ümumi şəkildə necə yazılır? Onlar necə həll edilir?
 16. n tərtibli xətti diferensial tənliklər üçün Vronski determinantı necə yazılır? Vronski determinantının köməkliliyilə tənlik necə qurulur?
 17. Eyler tənliyi necə yazılır? Onun həlli üçün hansı əvəzləmə aparılır?
 18. Diferensial tənliklər sistemi nəyə deyilir? Sistem necə həll edilir?
 19. Sabit əmsallı bircins tənliklər sistemi nəyə deyilir? Sistemin xarakteristik tənliyi necə yazılır?
 20. Diferensial tənliklər hansı hallarda qüvvət sıralarının köməkliliyi ilə həll edilir?
 21. Həllin dayanıqlığı nəyə deyilir?
 22. Asimptotik dayanıqlıq həll dedikdə nə başa düşülür?
 23. Xətti diferensial tənliklərin dayanıqlığı və asimptotik dayanıqlığı haqqında teoremlər necədir?
 24. Sabit əmsallı xətti bircins tənliyin dayanıqlı olması üçün zəruri və kafi şərtlər nədən ibarətdir?
 25. Qırıq xətdəli nəyə deyilir?
 26. Xətdəlinin Qırıq xətdəli olması üçün hansı zəruri və kafi şərtlər vardır?
 27. Birinci yaxınlaşmalar üsulunun mahiyyəti nədən ibarətdir?
 28. Müsbət-müəyyən funksiya nəyə deyilir?
 29. Lyapunov funksiyalar üsulunun mahiyyəti nədən ibarətdir?
 30. Məxsusi nöqtə nəyə deyilir?

31. Məxsusi nöqtənin hansı tipləri var?
32. Sərhəd məsələsi nəyə deyilir?
33. Qrin funksiyası nəyə deyilir və necə tapılır?
34. Məxsusi ədəd və məxsusi funksiya haqqında məsələ nəyə deyilir?

MÜSTƏQİL HƏLL ETMƏK ÜÇÜN MİSALLAR

Tərtibini aşağı salmaq yolu ilə həll edin

a). Axtarılan funksiya və onun müəyyən tərtibə qədər törəmələri daxil olmayan tənliklər

1. $y'' = x - \sin x$, CAVAB: $\left[y = \frac{x^3}{6} + \sin x + C_1x + C_2 \right]$.
2. $y'' = \arctg x$, $\left[y = \frac{1}{2}(x^2 - 1)\arctg x - \frac{x}{2}\ln(x^2 + 1) + C_1x + C_2 \right]$.
3. $xy'' = y'$, $[y = C_1x^2 + C_2]$.
4. $y'' = \frac{y'}{x} + xe^x$, $[y = (x - 1)e^x + C_1x^2 + C_2]$.
5. $x^2y'' = y'^2$, $\left[y = \frac{x}{C_1} - \frac{\ln(C_1x + 1)}{C_1^2} + C_2 \right]$.
6. $2xy'y'' = y'^2 + 1$, $\left[y = \pm \frac{2}{3C_1}(C_1x - 1)^{\frac{3}{2}} + C_2 \right]$.
7. $xy'' = y' - xy'$, $[y = C_1(x + 1)e^{-x} + C_2]$.
8. $y'' = y'^2$, $[y = -\ln(x + C_1) + C_2]$.

b). Sərbəst dəyişən aşkar şəkildə daxil olmayan tənliklər

1. $y^3y'' = 1$, $[C_1y^2 - 1 = (C_1x + C_2)^2]$.

$$2. y'' = 2yy', \quad \left[y = C_1 \operatorname{tg} x (C_1 x + C_2), \quad \ln \left| \frac{y - C_1}{y + C_1} \right| = 2C_1 x + C_2, \quad y(C - x) = 1, \quad y = C \right].$$

$$3. y'' = \frac{1}{4\sqrt{y}}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad \left[y = \left(1 - \frac{3}{4}x \right)^{\frac{4}{3}} \right].$$

$$4. yy'' + y = y'^2, \quad [C_1^2 y + 1 = \pm \operatorname{ch}(C_1 x + C_2), \quad C_1^2 y - 1 = \sin(C_1 x + C_2), \quad 2y = (x + C)^2, \quad y = 0].$$

$$5. y'' = e^y, \quad [e^y \sin^2(C_1 x + C_2) = 2C_1^2, \quad e^y \operatorname{sh}^2(C_1 x + C_2) = 2C_1^2, \quad e^y (x + C)^2 = 2].$$

$$6. yy' + 1 = y'^2, [C_1 y = \pm \sin(C_1 x + C_2), \quad C_1 y = \pm \operatorname{sh}(C_1 x + C_2), \quad y = C \pm x].$$

c). Axtarılan funksiya və onun törəmələrinə nəzərən bircins olan tənliklər

$$1. xyy'' - xy'^2 = yy', \quad [y = C_2 e^{C_1 x^2}].$$

$$2. yy'' = y'^2 + 15y^2 \sqrt{x}, \quad \left[\ln C_2 y = 4x^{\frac{5}{2}} + C_1 x, \quad y = 0 \right].$$

$$3. xyy'' + xy'^2 = 2yy', \quad [y^2 = C_1 x^3 + C_2].$$

$$4. (x^2 + 1)(y'^2 - yy'') = xyy', \quad \left[y = C_2 \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)^{C_1} \right].$$

$$5. x^2 yy'' = (y - xy')^2, \quad \left[y = C_2 x e^{\frac{-C_1}{x}} \right].$$

$$6. x^2 yy'' + y'^2 = 0, \quad \left[|y|^{C_1^2 + 1} = C_2 \left(x - \frac{1}{C_1} \right) |x + C_1|^{C_1^2}, \quad y = C \right].$$

d). Ümumiləşmiş bircins tənliklər

$$1. \frac{y^2}{x^2} + y'^2 = 3xy'' + \frac{2yy'}{x}, \quad \left[\frac{y}{x} = C_2 - 3 \ln \left| \frac{1}{x} - C_1 \right|, \quad y = Cx \right].$$

$$2. x^2 (2yy'' - y'^2) = 1 - 2xyy', \quad [4(C_1 y - 1) = C_1^2 \ln^2 C_2 x]$$

$$3. y'' = \left(2xy - \frac{5}{x} \right) y' + 4y^2 - \frac{4y}{x^2}, \quad [x^2 y = C_1 \operatorname{tg}(C_1 \ln C_2 x)$$

$$C_2 (x^2 y + C_1) |x|^{2C_1} = x^2 y - C_1, \quad x^2 y \ln Cx = -1].$$

$$4. x^4 (y'^2 - 2yy'') = 4x^3 yy' + 1, \quad [2C_2 x^2 y = (C_2 x - C_1)^2 - 1, \quad xy = \pm 1].$$

e). Çevirmələr aparmaqla tənliyin hər tərəfini tam diferensial şəklinə salın və həll edin

$$1. yy'' = y'(y' + 1), \quad [C_1 y - 1 = C_2 e^{C_1 x}, \quad y = C - x, \quad y = 0].$$

$$2. y'' = xy' + y + 1, \quad \left[y = e^{\frac{x^2}{2}} \left(C_1 \int e^{-\frac{x^2}{2}} dx + C_2 \right) - 1 \right].$$

$$3. yy' + y'^2 = 1, \quad [y^2 = x^2 + C_1 x + C_2].$$

$$4. xy'' = 2yy' - y', \quad \left[y = C_1 \lg(C_1 \ln C_2 x), \quad C_2(y + C_1)|x|^{2C_1} = \right. \\ \left. = y - C_1, y \ln Cx = -1 \right].$$

Verilmiş bir xüsusi həllinə əsasən ümumi həllini tapın

$$1. x^2(x+1)y'' - 2y = 0, \quad y_1(x) = 1 + \frac{1}{x}, \quad \left[y = C_1 \left(1 + \frac{1}{x} \right) + \right. \\ \left. + C_2 \left(\frac{x}{2} + 1 - \frac{x+1}{x} \ln|x+1| \right) \right].$$

$$2. xy'' + 2y' - xy = 0, \quad y_1(x) = \frac{e^x}{x}, \quad [yx = C_1 e^{-x} + C_2 e^x].$$

$$3. y'' - 2(1 + \lg^2 x)y = 0, \quad y_1(x) = \lg x, \quad [y = C_1 \lg x + C_2(1 + x \lg x)].$$

$$4. y'' - y' \lg x + 2y = 0, \quad y_1(x) = \sin x, \quad [y = C_1 \sin x + \\ + C_2 \left(2 - \sin x \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right)].$$

Sabit əmsallı xətti bircins tənliklərin ümumi həllini tapın

$$1. y'' + y' - 2y = 0, \quad [y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}].$$

$$2. y'' - 4y' + 5y = 0, \quad [y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)].$$

$$3. y'' + 6y' + 13y = 0, \quad [y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)].$$

$$4. y'' - 7y' + 10y = 0, \quad [y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x}].$$

$$5. y^{IV} - y = 0, \quad [y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \sin x + C_4 \cos x].$$

$$6. y''' - 13y' + 12y = 0, \quad [y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + C_3 e^{-4x}].$$

kiçikdir. Əyrinin $(-3; 4)$ nöqtəsindən keçdiyini bilərək, onun tənliyini tapın.

HƏLLİ. Əyrinin ixtiyari $M(x, y)$ nöqtəsinin radius-vektorunun uzunluğu $\sqrt{x^2 + y^2}$ bərabərdir. Toxunanaltının uzunluğunun $\left| \frac{y}{y'} \right|$ oldu-

ğunu nəzərə alsaq, məsələnin şərtinə görə yazı bilərik: $\sqrt{x^2 + y^2} = \left| \frac{y}{y'} \right| - x$.

Burada $\left| \frac{y}{y'} \right| = \frac{y}{y'}$ qəbul etsək alırıq: $(\sqrt{x^2 + y^2} + x)dy - ydx = 0$.

Tənlik bircins olduğundan $x = zy$ əvəzləməsi aparaq. Onda

$$dx = zdy + ydz, \quad \sqrt{z^2 + 1}dy - ydz = 0, \quad \frac{dy}{y} - \frac{dz}{\sqrt{z^2 + 1}} = 0,$$

$$\int \frac{dy}{y} - \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + 1}} = -\ln C, \quad \ln|y| = \ln|z + \sqrt{z^2 + 1}| - \ln C,$$

$$Cy = z + \sqrt{z^2 + 1}, \quad Cy^2 = x + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Buradan $y(-3) = 4$ şərtinə əsasən $16C = -3 + \sqrt{9 + 16}$, $C = \frac{1}{8}$.

$\frac{y^2}{8} - x = \sqrt{x^2 + y^2}$ bərabərliyin hər tərəfini kvadrata yüksəldib sadələşdirsək $y^2 = 16x + 64$ parabolası alınır.

$\left| \frac{y}{y'} \right| = -\frac{y}{y'}$ götürsək $(\sqrt{x^2 + y^2} + x)y' + y = 0$ tənliyi alınır. Bu tənliyi $y(-3) = 4$ şərtini ödəyən həllini yuxarıda göstərilən qayda ilə tapmaq olar.

9. Biri sabit, o biri dəyişən ordinatlarla absis oxu və əyri ilə məhdud olan fiqurun sahəsi, dəyişən ordinatın kubunun dəyişən absisinə olan

nisbətine bərabərdir. Bu əyrinin tənliyini tapın.

HƏLLİ. Tutaq ki, $M(x, y)$ əyrinin ixtiyari nöqtəsidir (şəkil 13). $x = 0$ uyğun ordinatı sabit qəbul etsək, məsələnin şərtinə görə

$$\int_0^x y(s) ds = \frac{y^3}{x}.$$

Buradan y -ə x dəyişəninin funksiyası kimi baxıb törəmə alsaq

$$y = \frac{3y^2 y' x - y^3}{x^2}.$$

Bu bərabərlikdən $y' = \frac{x^2 + y^2}{3xy}$ birincis

tənliyini alırıq. Bu tənliyi həll edək.

$$y = ux, \quad dy = udx + xdu, \quad \frac{dx}{x} = \frac{3udu}{1-2u^2}, \quad \int \frac{dx}{x} =$$

$$= 3 \int \frac{udu}{1-2u^2}, \quad \ln x = -\frac{3}{4} \ln(2u^2 - 1) + \frac{\ln C}{4}, \quad 4 \ln x +$$

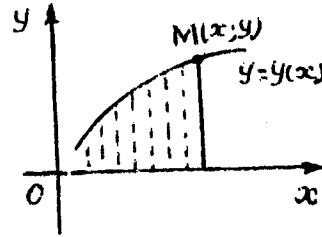
$$+ 3 \ln(2u^2 - 1) = \ln C, \quad x^4(2u^2 - 1)^3 = C.$$

Burada $u = \frac{y}{x}$ əvəzləməsini nəzərə alaq.

$$x^4 \left(\frac{2y^2 - x^2}{x^2} \right)^3 = C, \quad (2y^2 - x^2)^3 = Cx^2.$$

10. Verilmiş $M_1(-a; 0)$ və $M_2(a; 0)$ nöqtələrindən əyrinin ixtiyari toxunanına qədər olan məsafələrin hasilı sabit olub, b^2 -na bərabərdir. Bu əyrini tapın.

HƏLLİ. Əyrinin $M(x, y)$ nöqtəsində çəkilən toxunanın $Y - y =$



Şəkil 13.

$y'(X - x)$ tənliyini $y'X - Y - xy' + y = 0$ şəklində yazaq. Verilmiş $M_1(-a; 0)$ və $M_2(a; 0)$ nöqtələrindən bu düz xəttə qədər məsafə uyğun olaraq

$$\delta_1 = \frac{|-ay' - xy' + y|}{\sqrt{1 + y'^2}}, \quad \delta_2 = \frac{|ay' - xy' + y|}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

olar. Onda məsələnin şərtinə görə yazmaq olar:

$$\delta_1 \delta_2 = \frac{|(xy' - y)^2 - a^2 y'^2|}{1 + y'^2} = b^2.$$

Buradan $|(xy' - y)^2 - a^2 y'^2| = (xy' - y)^2 - a^2 y'^2$ olan hala baxaq. Onda törəməyə nəzərən həll olunmamış

$$y^2 - 2xy'y + (x^2 - a^2 - b^2)y'^2 - b^2 = 0$$

tənliyi alınır. Bu bərabərliyi y -ə nəzərən kvadrat tənlik kimi həll edək:

$$y = xy' \pm \sqrt{(a^2 + b^2)y'^2 + b^2}$$

Alınan Klero tənliyini həll etsək

$$y = Cx \pm \sqrt{(a^2 + b^2)C^2 + b^2}$$

ümumi və

$$\begin{cases} x = \mp \frac{(a^2 + b^2)p}{\sqrt{(a^2 + b^2)p^2 + b^2}}, \\ y = \pm \frac{b^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)p^2 + b^2}} \end{cases}$$

parametrik şəkildə məxsusi həlli alınır. $a^2 + b^2 = k^2$ işarə edib, məxsusi həlli

$$\begin{cases} x = \mp \frac{kp}{\sqrt{k^2 p^2 + b^2}}, \\ y = \pm \frac{b}{\sqrt{k^2 p^2 + b^2}} \end{cases}$$

şəklində yazıb, hər iki bərabərliyi kvadrata yüksəldib, tərəf-tərəfə toplasaq,

$$\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ellipsi alınar. $|(xy' - y)^2 - a^2 y'^2| = -(xy' - y)^2 + a^2 y'^2$ olan halda

yuxarıda göstərilən qayda ilə $\frac{x^2}{k^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $k^2 = a^2 - b^2$, ($a > b$)

hiperbolası alınır.

11. Əyrinin ixtiyari nöqtəsində əyrilik radiusu həmin nöqtəyə çəkilmiş normalın absis oxu arasında qalan hissəsinin kubuna bərabərdir. Əyrinin $(0; 1)$ nöqtəsindən keçdiyini və həmin nöqtədə toxunanı absis oxuna paralel olduğunu bilərək, onun tənliyini tapın.

HƏLLİ. Normalın uzunluğu $|y\sqrt{1+y'^2}|$, əyrilik radiusu $R =$

$\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$ olduğundan məsələnin şərtinə görə yazmaq olar.

$$\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|} = \left(|y\sqrt{1+y'^2}|\right)^3$$

Buradan alırıq: $|y''y^3| = 1$, $y''y^3 = \pm 1$.

Onda, verilmiş məsələnin həlli $y''y^3 = \pm 1$ diferensial tənliyinin $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ başlangıç şərtlərini ödəyən həllinin tapılmasına gətirilir. $y' = p(y)$ əvəzləməsini aparaq:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}, \quad p dp = \pm \frac{dy}{y^3},$$

$$\frac{p^2}{2} = \mp \frac{y^{-2}}{2} + \frac{C_1}{2}, \quad p^2 = C_1 \mp y^{-2}, \quad y'^2 = C_1 \mp y^{-2},$$

Burada başlangıç şərtləri nəzərə alsaq $C_1 = \pm 1$, $yy' = \pm \sqrt{\pm y^2 \mp 1}$,

$$\pm \frac{y dy}{\sqrt{\pm y^2 \mp 1}} = dx, \quad \pm \sqrt{\pm y^2 \mp 1} = x + C, \quad y(0) = 1,$$

$$\pm \sqrt{\pm y^2 \mp 1} = x, \quad y^2 \pm x^2 = 1.$$

12. $(1; -2)$ nöqtəsində əyriyə çəkilən toxunan absis oxuna paraleldir. Əyrinin ixtiyari nöqtəsində əyrilik radiusu nöqtənin absisinin kvadratına bərabərdir. Əyrinin tənliyini tapın.

HƏLLİ. Əyrinin əyrilik radiusu $R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$ düsturu ilə tapılır.

Onda məsələnin şərtinə görə yazmaq olar: $\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|} = x^2$, $y'' > 0$

olan halına baxsaq, $y' = p(x)$ qəbul edək. Onda $y'' = p'(x)$ oldu

gundan tənlik $x^2 p' = (1+p^2)^{3/2}$ şəklinə düşər. Buradan alırıq,

$$\frac{dp}{\sqrt{(1+p^2)^3}} = \frac{dx}{x^2}, \quad \int \frac{dp}{\sqrt{(1+p^2)^3}} = \int \frac{dx}{x^2} + C_1, \quad \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = C_1 \frac{1}{x}.$$

Əyri $(1; -2)$ nöqtəsindən keçdiyindən və həmin nöqtədə toxunan absis oxuna paralel olduğundan, yəni $x = 1$ olduqda $y' = p = 0$ oldu

gu üçün axırıncı bərabərlikdən $C_1 = 1$ alırıq. Onda $\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{x}$

Buradan alırıq,

$$p = \pm \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}, \quad y' = \pm \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}, \quad \int dy = \pm \int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}} dx, \\ y + C_2 = \pm \frac{1}{6}(2x-1)^{3/2} \mp \frac{1}{2}(2x-1)^{1/2},$$

$$y + C_2 = \pm \frac{1}{6} \sqrt{2x-1} [(2x-1) - 3], \quad y + C_2 = \pm \frac{1}{3} \sqrt{2x-1} (x-2).$$

Bu həllərdən $y'' > 0$ şərtini ödəyən həll $y + C_2 = \frac{1}{3} \sqrt{2x-1} (x-2)$

olduğundan və əyri $(1; -2)$ nöqtəsindən keçdiyindən, yəni $x = 1$ ol-

duqda $y = -2$ olduğu üçün $C_2 = \frac{5}{3}$, $3y = \sqrt{2x-1} (x-2) - 5$,

$y'' < 0$ üçün $3y = -\sqrt{2x-1} (x-2) - 7$ axtanılan əyrinin tənliyi olur.

13. Əyrinin ixtiyari nöqtəsindən çəkilmiş normalın absis oxundan ayırdığı parça həmin nöqtənin radius-vektorunun kvadratına bərabərdir. Əyrinin $(0; 3)$ nöqtəsindən keçdiyini bilərək əyrini tapın.

HƏLLİ. Əyrinin ixtiyari $M(x, y)$ nöqtəsindən əyriyə çəkilən normalın tənliyi: $Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$. Normalın absis oxundan ayırdığı

parçanı X_0 qəbul etsək, bu parça normalın Ox oxu ilə kəsişmə nöqtəsinin absisinə bərabər olar. Həmin nöqtənin koordinatları

$$\begin{cases} Y_0 - y = -\frac{1}{y'}(X_0 - x), \\ Y_0 = 0 \end{cases}$$

sistemindən tapılır: $X_0 = x + y \frac{dy}{dx}$, $Y_0 = 0$. Əyrinin ixtiyari $M(x, y)$

nöqtəsinin radius vektorunun kvadratı $x^2 + y^2$ olduğundan məsələ-

nin şərtinə görə yazıla bilər: $x + y \frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$.

Buradan alırıq: $y \frac{dy}{dx} - y^2 = x^2 - x$. Bu tənlik Bernulli tənliyidir. Onu

həll etsək alırıq: $x^2 + y^2 = Ce^{2x}$.

Əyrinin $(0; 3)$ nöqtəsindən keçdiyini nəzərə alsaq tapırıq: $C = 9$.

Onda $x^2 + y^2 = 9e^{2x}$ axtanılan əyri olur.

14. Əyriyə ixtiyari nöqtədə çəkilən toxunanın toxunma nöqtəsinin koordinatlarının həndəsi ortası toxunanın ordinat oxundan ayırdığı parça ilə toxunma nöqtəsinin ordinatının iki mislinə olan nisbətində bərabərdir. Əyrinin $(1; 1)$ nöqtəsindən keçdiyini bilərək, onun tənliyini tapın.

HƏLLİ. Əyrinin ixtiyari toxunma $M(x, y)$ nöqtəsinin koordinatlarının həndəsi ortası \sqrt{xy} olar. Toxunanın ordinat oxundan ayırdığı parça toxunanın Oy oxu ilə kəsişmə nöqtəsinin ordinatına bərabərdir. Bu nöqtənin koordinatları toxunanın tənliyi ilə Oy oxunun tənliyindən ibarət sistemdən tapılır:

$$\begin{cases} Y - y = y'(X - x), \\ X = 0. \end{cases}$$

Sistemi həll etsək alırıq: $Y = y - x \frac{dy}{dx}$, $X = 0$. Məsələnin şərtinə

göhr yazmaq olar: $\frac{y - x \frac{dy}{dx}}{2y} = \sqrt{xy}$. Buradan alırıq: $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y =$

$= -2x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}$. Bu, Bernulli tənliyidir. Onu həll etsək alırıq: $x - y(C + x)^2 = 0$ Əyri $(1; 1)$ nöqtəsindən keçdiyindən yazmaq olar. $C_1 = 0$, $C_2 = -2$. C_1 və C_2 -nin qiymətlərini axırıncı tənlikdə yerinə yazaq. Onda alırıq: $xy = 1$, $x = y(x-2)^2$.

15. $y = y(x)$ əyrisi ilə $(y(x) \geq 0, y(0) = 0, y(1) = 1)$ məhdud olan əyrixətli trapesin oturacağı $[0, x]$ -dir, sahəsi isə y -in $(n+1)$ -ci qüvvəti ilə mütənasibdir. Bu əyrini tapın.

HƏLLİ. Axtarılan əyrini $y = y(x)$ olduğundan tələb olunan əyri-

xətli trapesin sahəsi $S = \int_0^x y(x) dx$ düsturu ilə təyin olunur.

$$\int_0^x y dx: x = ky.$$
$$\int_0^x y dx = kxy$$
$$y = ky + kxy', \quad kxy' = (1 - k)y.$$

21. Əyri koordinat oxları və əyrinin hər bir nöqtəsindən koordinat oxlarına paralel çəkilmiş düz xətlərin əmələ gətirdiyi düzbucaqlını iki hissəyə ayırır. Bu hissələrdən birinin sahəsi o birindən iki dəfə böyükdür. Əyrinin $M_0(3, 3)$ nöqtəsindən keçdiyini bilərək onun tənliyini tapın.

ise $S_1 = \int_0^x y dx$

$$S_2 = 2S_1, \quad S_{OPM} = S_2.$$

The left graph shows a budget line with a kink at point $M_0(x_0, y_0)$. The budget line is labeled $y = y_0$ for the upper segment and $M(x, y_0)$ for the lower segment. The area under the budget line is divided into two regions: S_1 (the area under the lower segment) and S_2 (the area under the upper segment). The axes are labeled x and y , with the origin O and a point p on the y -axis.

The right graph shows a similar budget line with a kink at point $M_0(x_0, y_0)$. The budget line is labeled $M(x, y)$ for the upper segment and $y = y_0$ for the lower segment. The area under the budget line is divided into two regions: S_1 (the area under the lower segment) and S_2 (the area under the upper segment). The axes are labeled x and y , with the origin O and a point p on the y -axis.

Şekil 15.

$$xy = \int_0^y x dx = 2 \int_0^y x dx, \quad uv = 3 \int_0^y x dx.$$

$$y + xv' = 3y, \quad xv' = 2y,$$
$$3 = 9C, \quad C = \frac{1}{3}, \quad P = \frac{x^2}{3}$$

əfəridən x dəyişəninə nəzərən törəmə alsaq $2xy' = y$ tənliyini alarıq. Bu tənliyi həll etsək alarıq, $y = C\sqrt{x}$.

$$3: \sqrt{3}, 0, \sqrt{3}, \sqrt{3}.$$

2. Fiziki məsələlər

1) Hansı kəmiyyəlin sərbəst dəyişən, hansının axtarılan funksiya kimi qəbul etmək lazım olduğunu müəyyənləşdirmək, sərbəst dəyişən x kəmiyyəti Δx qədər dəyişdikdə axtarılan $y(x)$ funksiyaının $y(x + \Delta x) - y(x)$ fərqini məsələnin şərtlərinə əsasən ifadə etmək lazımdır. Alınan bərabərliyin hər tərəfini Δx -ə bölüb, $\Delta x \rightarrow 0$ şərtində limiti tapılır.

de edilir. Məsələn, t -zaman, $S'(t)$ -gedilən yol olduqda $\frac{ds}{dt}$ hərə-

kətin sür'ətini, $\frac{d^2 s}{dt^2}$ isə tə'cili verir.

3. Bir çox məsələləri həll edərkən fiziki və başqa təbiət elmlərinin qanunlarını tətbiq etmək lazım gəlir. Bu qanunların bəziləri məsələnin şərtində verilir.

4. Hərəkət zamanı cismin kütləsi $m(t)$ dəyişən olursa, tə'sir edən qüvvə $\frac{d(mv)}{dt}$ -yə bərabər götürülür.

5. Qabda olan maye h səviyyəsindən aşağıda yerləşən kiçik deşikdən axma sür'əti Toricelli qanununa əsasən $v = \mu\sqrt{2gh}$ düsturu ilə verilir. Burada g -sərbəstdüşmə tə'cili, μ -ixrac əmsəlidir. Su üçün $\mu = 0,62$, neft üçün $\mu = 0,6$ -dır.

1. Həcmi 100 m^3 olan otaq havasının $0,14$ faizi karbon qazıdır. Otağa fasiləsiz olaraq hər dəqiqə tərkibində $0,05$ faiz karbon qazı olan 10 m^3 hava vurulur və həmin sür'ətlə otaqdan qanşiq çıxır. Ne qədər vaxtdan sonra karbon qazının miqdarı iki dəfə azalır?

HƏLLİ. t anında otaqda olan karbon qazının miqdarını x ilə işarə edək. Δt zamanda otağa $10\Delta t \text{ m}^3$ qanşiq vurulur. Bunun da tərkibində $\frac{10 \cdot 0,05\%}{100\%} \Delta t = 0,005\Delta t$ qədər karbon qazı var. Deməli, Δt müddətdə otağa $0,005\Delta t$ miqdarda karbon qazı daxil olur. Δt müddətdə otaqdan çıxarılan $10\Delta t$ miqdarda qanşiqin tərkibində $\frac{10}{100}(x + \alpha)\Delta t = 0,1(x + \alpha)\Delta t$ qədər karbon qazı var. Onda karbon qazının miqdarının Δt müddətində dəyişməsi

$$x(t + \Delta t) - x(t) = 0,005\Delta t - 0,1(x + \alpha)\Delta t, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \alpha = 0$$

şəklində olar. Bərabərliyin hər tərəfini Δt -yə bölüb, $\Delta t \rightarrow 0$ şərtində limite keçsək alarıq:

$$\frac{dx}{dt} = 0,005 - 0,1x.$$

Tənliyi dəyişənlərinə ayırıb, integrallasaq alarıq:

$$\int \frac{dx}{0,005 - 0,1x} = \int dt + \ln C, \quad 0,1x - 0,005 = Ce^{-0,1t}.$$

Beləliklə, otaqda karbon qazının miqdarının t zamanından asılı olaraq dəyişməsi $x(t) = 0,05 + Ce^{-0,1t}$ tənliyi ilə müəyyənləşir. Məsələnin şərtinə görə $x(0) = 0,14$ olduğundan yazı bilərik:

$$0,14 = 0,05 + C \cdot 1, \quad C = 0,09, \quad x(t) = 0,05 + 0,09e^{-0,1t}.$$

Otaqda karbon qazının iki dəfə azalması üçün tələb olunan T zamanı üçün $x(T) = x(0) : 2 = 0,07$ olmalıdır. Onda alarıq: $0,07 = 0,05 + 0,09e^{-0,1T}$, $e^{-0,1T} = \frac{2}{9}$, $T = 10 \ln \frac{9}{2}$.

Deməli, $T = 10 \ln \frac{9}{2}$ dəqiqədən sonra otaqda karbon qazının miqdarı iki dəfə azalır.

2. Tutumu 3000 litr olan çəndə tərkibində 10 kq duz olan 100 litr su məhlulu var. Çəndə fasiləsiz olaraq hər dəqiqədə 30 litr təmiz su vurulur, məhlul ilə qanşidılır və dəqiqədə 20 litr məhlul axıdılır. Çən yarıya qədər dolduqda alınan məhlulda olan duzun miqdarını tapın.

HƏLLİ. t anında çəndə $100 + (30 - 20)t = 100 + 10t$ məhlul olur. t anında məhlulda olan duzun miqdarını $x(t)$ ilə işarə edək. Δt müddətində məhlulda olan duzun miqdarının dəyişməsinə baxaq.

Aşkardır ki, $x(t) - x(t + \Delta t)$ fərqi Δt zamanda çəndən çıxan duzun miqdarıdır. Bu müddət ərzində məhlulun qatılığı (konsentrasiyası) $\frac{x(t)}{100 + 10t}$ -dən $\frac{x(t + \Delta t)}{100 + 10(t + \Delta t)}$ -ə qədər azalır. Odur ki,

$$\frac{x(t + \Delta t)}{100 + 10(t + \Delta t)} - 20\Delta t \leq x(t) - x(t + \Delta t) \leq \frac{x(t)}{100 + 10t} - 20\Delta t.$$

Buradan $\Delta t > 0$ olduğundan

$$\frac{x(t + \Delta t)}{100 + 10(t + \Delta t)} - 20 \leq \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \leq \frac{x(t)}{100 + 10t} - 20.$$

Proses kəsilməz olduğu üçün $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} x(t + \Delta t) = x(t)$. Onda axırıncı bə-

rabərsizlikdə $\Delta t \rightarrow 0$ şərtində limitə keçsək alırıq:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{20x(t)}{100t + 10t}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{2x}{10 + t}$$

Alınan tənliyin $x(0) = 10$ başlangıç şərtini ödəyən həlli

$$x(t) = \frac{1000}{(10 + t)^2}$$

Çənin yarıyı qədər (1500l) dolma müddəti: $1500 = 100 + 107'$,
 $T = 140$ dəqiqə. Onda həmin andı ($T = 140$) məhlulda olan duzun
 miqdar

$$x(140) = \frac{1000}{(10 + 140)^2} = \frac{2}{45} \text{ kq.}$$

3. Kütləsi m olan maddi nöqtə h yüksəklikdən ağırlıq qüvvəsinin təsiri altında yerə düşür (müqavimət qüvvəsi nəzərə alınmır). Düşmə qanununu tapın.

HƏLLİ. $y(t)$ ilə maddi nöqtənin t anında yer səviyyəsindən olan məsafəsini işarə edək. Nyutonun ikinci qanununa əsasən

$$F = ma, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -g.$$

Axırıncı tənliyi həll edək.

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d(y')}{dt} = -g, \quad d(y') = -g dt, \quad \int d(y') = -g \int dt + C_1,$$

$$y' = -gt + C_1, \quad \frac{dy}{dt} = -gt + C_1, \quad \int dy = -g \int t dt + C_1 \int dt + C_2,$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Beləliklə, $y = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2$ verilmiş məsələnin ümumi həlli olur.

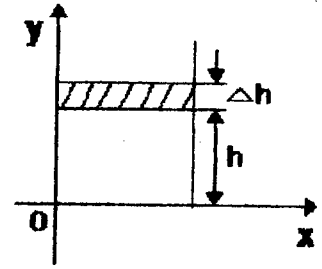
C_1 və C_2 ixtiyari sabitləri tapmaq üçün başlangıç şərtlərdən istifadə edək. Tutaq ki, $t = 0$ olduqda nöqtə yerdən h məsafədə olub, sürəti sıfıra bərabərdir: $y(0) = h$, $y'(0) = 0$. Onda yazmaq olar: $y' = -gt +$

$$+ C_1, \quad 0 = 0 + C_1, \quad C_1 = 0, \quad h = 0 + 0 + C_2, \quad h = C_2. \quad y = h - \frac{gt^2}{2}$$

verilmiş məsələnin həlli olur.

4. Boyle-Mariott qanununa əsasən atmosfer təzyiqi havanın sıxlığı ilə mütənəsbir. Dəniz səviyyəsində təzyiqin 1 kq/sm^2 , sıxlığın $0,0012 \text{ q/sm}^3$ olduğunu bilərək atmosfer təzyiqinin dəniz səviyyəsindən olan yüksəklikdən asılılığını tapın.

HƏLLİ. Dəniz səviyyəsindən olan yüksəkliyi h ilə, atmosfer təzyiqini $P(h)$ işarə edək. Dəniz səviyyəsində ölçüsü 1 m^2 olan sahə və bu sahə üzərində prizmatik hava sütunu götürək. Bu sütunun h hündürlüyündə kəsiyinə baxaq (şəkil 16). $h + \Delta h$ hündürlüyündə hava sütunun ikinci bir kəsiyini keçirək. h hündürlükdə atmosfer təzyiqini $P(h)$, $h + \Delta h$ hündürlükdə isə $P(h + \Delta h)$ olar. Göstərilən hündürlükdə təzyiqin fərqi $\Delta P(h) = P(h + \Delta h) - P(h) < 0$ (azalan proses olduğu üçün) ədədi qiymətcə kəsiklər arasında qalan havanın çəkisinə bərabərdir. $\Delta P(h) = -\Delta mg$.



Şəkil 16.

Burada Δm -havanın kütləsi, g -sərbəstdüşmə təcilidir. Kəsiyin həcmi $\Delta v = S \Delta h = \Delta h$, ($S = 1 \text{ m}^2$) olduğundan $\Delta m = \rho_0 \Delta h$ olar. Burada ρ_0 -götürülən Δh kəsiyində havanın orta sıxlığıdır. Deməli, $\Delta p(h) = -g \rho_0 \Delta h$ olur. Bu bərabərliyin hər tərəfini Δh bölüb, $\Delta h \rightarrow 0$ şərtində limit alsaq, $\frac{dp}{dh} = -g \rho(h)$ tənliyi alınar, burada $\rho(h)$

ile h hündürlüyündə havanın sıxlığı işarə olunmuşdur. Boyl-Mariott qanununa görə təzyiq havanın sıxlığı ilə mütənasibdir: $p(h) = b\rho(h)$. Buradan

$$\frac{dp}{dh} = -\frac{g}{b} p(h).$$

Bu, dəyişənlərinə ayrılan tənliyi həll etsək alarıq:

$$\int \frac{dp}{p} = -\frac{g}{b} \int dh + \ln C, \quad \ln p = -\frac{g}{b} h + \ln C, \quad p(h) = Ce^{-\frac{g}{b}h}.$$

$p(0) = 1 \text{ kq/sm}^2$, $\rho(0) = 0,0012 \text{ q/sm}^3$, $p(0) = b\rho(0)$ şərtlərinə əsasən

$$C = 1, \quad \frac{g}{b} = \frac{gp(0)}{p^2(0)} = \frac{g \cdot 0,0012 \text{ q/sm}^3}{g \cdot 100 \text{ q/sm}^2} = \frac{0,0012}{1000 \text{ sm}} = 0,12 \frac{1}{\text{km}}.$$

Beləliklə, $h \text{ km}$ hündürlükdə atmosfer təzyiqi $p(h) = e^{-0,12h}$ düsturu ilə təyin olunur.

5. Qatar 90 km/saat sürətlə hərəkət edir. Tormozlanma zamanı müqavimət qüvvəsinin onun çəkisinin $0,3$ -nə bərabər olduğunu bilərək qatarın hansı vaxta və hansı məsafədə dayanacağını təyin edin.

HƏLLİ. Qatarın kütləsi m , çəkisi $P = mg$, tormozlanmadan sonrakı t zamanda gedilən yol $S(t)$ olarsa, Nyutonun ikinci qanununa görə

$$m \frac{d^2 S}{dt^2} = -0,3mg.$$

Buradan alarıq: $\frac{d^2 S}{dt^2} = -0,3g$, $\frac{dS}{dt} = -0,3gt + C_1$, $S(t) =$

$$= -0,3 \frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2, \quad S(t) = -0,15gt^2 + C_1 t + C_2.$$

Şərtə görə $S(0) = 0$, $S'(0) = 90 \frac{\text{km}}{\text{saat}}$. Onda alarıq.

$$C_2 = 0, \quad C_1 = 90 \frac{\text{km}}{\text{saat}} = 25 \frac{\text{m}}{\text{san}}, \quad S(t) = -0,15gt^2 + 25t.$$

Qatarın tormozlanmadan sonra dayanması vaxtını $S'(T) = 0$ tənliyindən tapmaq olar: $S'(T) = -0,3Tg + 25 = 0$, $T = \frac{25}{0,3g} \approx 8,5 \text{ san}$.

Tormozlanmadan sonra gedilən yolu tapmaq üçün qatarın hərəkət qanununda $t = T = 8,5 \text{ san}$ götürmək lazımdır:

$$S = -0,15 \cdot 9,81(8,5)^2 + 25 \cdot 8,5 \approx 106,3 \text{ m}.$$

6. Güllə $V_0 = 400 \frac{\text{m}}{\text{san}}$ sürətlə $h = 20 \text{ sm}$ qalınlığında divara daxil

olur və $V_1 = 100 \frac{\text{m}}{\text{san}}$ sürətlə oradan çıxır. Divarın müqavimət qüvvəsinin güllənin hərəkət sürətinin kvadratı ilə mütənasib olduğunu qəbul edərək, güllənin divarı deşmə müddətini tapın.

HƏLLİ. Tutaq ki, güllənin kütləsi m , t anında divarda keçdiyi yol $S = S(t)$ -dir. Burada t -güllənin divara daxil olduğu vaxtdan hesablanır. Onda güllənin divarda hərəkət tənliyi Nyutonun ikinci qanununa görə tapılır:

$$m \frac{d^2 S}{dt^2} = -k \left(\frac{dS}{dt} \right)^2.$$

Buradan alarıq:

$$\frac{d^2 S}{dt^2} = -a \left(\frac{dS}{dt} \right)^2, \quad a = \frac{k}{m}, \quad v = \frac{dS}{dt}, \quad \frac{d^2 S}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \text{ olduğunu nəzərə}$$

alsaq axırıncı tənliyi $\frac{dv}{dt} = -av^2$ şəklində yazmaq olar. Tənliyi dəyişənlərinə ayıraraq inteqrallasaq alarıq:

$$\int \frac{dv}{v^2} = -a \int dt - C_1, \quad -\frac{1}{v} = -at - C_1, \quad v = \frac{1}{at + C_1}.$$

$t = 0$ olduqda $v = 400 \frac{\text{m}}{\text{san}}$ olduğundan axırıncı bərabərlikdən

$$C_1 = \frac{1}{400}, \quad v(t) = \frac{400}{1+400at}, \quad v = \frac{dS}{dt} \text{ olduğundan yazmaq olar:}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{400}{1+400at}. \text{ Dəyişənləri ayırıb integrallasaq alarıq:}$$

$$S(t) = \frac{1}{a} \ln(1+400at) + C_2.$$

Məsələnin şərtinə görə yazı bilərik. $S(0) = 0, \quad v(0) = 400, \quad S(T) = 20 \text{ sm} = 0,2 \text{ m}, \quad v(T) = 100 \frac{\text{m}}{\text{san}}$. Burada T güllənin divarda

hərəkət müddətidir. Onda $1 + 400 aT = 4, \quad aT = \frac{3}{400}, \quad 0,2 =$

$$= \frac{1}{a} \ln \left(1 + 400 \cdot \frac{3}{400} \right), \quad a = 10 \ln 2. \quad T = \frac{3}{4000 \ln 2} \approx 0,001 \text{ san.}$$

Beləliklə, güllə divarı $T = 0,001 \text{ san}$ müddətdə dəşib keçir.

7. Çənin en kəsiyinin $S = s(h)$ sahəsi h hündürlüyünün məlum funksiyasıdır. Çən H səviyyəsinə qədər su ilə doldurulmuşdur. Çənin dibində sahəsi S_0 olan deşikdən çəndəki su axıdılır. Çəndəki suyun H səviyyəsindən $0 \leq h \leq H$ səviyyəsinə qədər enmə və tam boşalma vaxtını tapın. Suyun azalma sürətinin $v(h) = \mu \sqrt{2gh}$ olduğunu nəzərə alın.

HƏLLİ. Tutaq ki, t anında çəndə olan suyun səviyyəsi h -dir. Δt zaman müddətində, yəni t anından $t + \Delta t$ anına qədər çəndən axıdılan suyun miqdarını Δv ilə işarə edək. Onda çəndən axan suyun miqdarı hər an oturacağı sahəsi S_0 , hündürlüyü $v(h)$ olan silindrin həcminə bərabər olduğunu qəbul edərək yazmaq olar: $\Delta v = S_0 v(h) \Delta t$. Digər tərəfdən, su çəndən axıldığı Δt müddətində suyun h səviyyəsi $\Delta h < 0$ qədər aşağı düşür. Ona görə də Δt müddətində çəndən $\Delta v = -s(h) \Delta h$ qədər su axıdılır. Deməli, $-s(h) \Delta h = S_0 v(h) \Delta t$. Bərabərliyin hər tərəfini Δt -yə bölüb, $\Delta t \rightarrow 0$ şərtində limitə keçsək

alırıq:

$$-s(h) \frac{dh}{dt} = S_0 v(h)$$

Toriçelli qanununa əsasən $v(h) = \mu \sqrt{2gh}$, $\mu = 0,62$ olduğundan yazı bilərik:

$$dt = -\frac{s(h)}{S_0 \mu \sqrt{2gh}} dh, \quad t = -\frac{1}{S_0 \mu \sqrt{2g}} \int_H^h \frac{s(x)}{\sqrt{x}} dx.$$

Beləliklə, alırıq ki, çəndə suyun səviyyəsinin $0 \leq h \leq H$ olması üçün keçən vaxt

$$t = -\frac{1}{S_0 \mu \sqrt{2g}} \int_H^h \frac{s(x)}{\sqrt{x}} dx$$

ilə təyin olunur. Çəndə su qurtarıqda $h = 0$ olur. Bu hala uyğun T vaxtı

$$T = -\frac{1}{S_0 \mu \sqrt{2g}} \int_0^H \frac{s(x)}{\sqrt{x}} dx$$

bərabərliyi ilə müəyyənləşir.

Bu düsturlardan istifadə edərək aşağıdakı məsələni həll edək:

Oturacağının diametri 4m, hündürlüyü 6m olan dairəvi silindrik çən şaquli vəziyyətdə qoyulmuşdur. Çənin dibində radiusu $r = \frac{1}{12} \text{ m}$ olan

deşik açılmışdır. Çənin su ilə dolu olduğunu nəzərə alaraq, suyun həmin deşikdən axıb qurtarması müddətini tapın.

$$\text{HƏLLİ. Baxılan hal üçün } S(h) = \pi \frac{D^2}{4} = 4\pi, \quad S_0 = \pi r^2 = \frac{\pi}{144},$$

$$\mu = 0,62, \quad H = 6, \quad g = 9,81 \text{ olduğundan}$$

$$T = -\frac{4\pi}{\frac{\pi}{144} \cdot 0,62 \sqrt{19,62}} \int_0^6 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{4 \cdot 144}{0,62 \sqrt{19,62}} \cdot 2\sqrt{x} \Big|_0^6 =$$

$$= \frac{576 \cdot 2\sqrt{6}}{2,746} \approx 1028 \text{ san} = 17,13 \text{ dəq.}$$

8. Kütləsi m olan cisim düz xətt boyunca hərəkət edir. Cismə hərəkət istiqamətinin əksinə yönəlmiş və qiyməti gedilən məsafə ilə mütənəsb qüvvə təsir edir. Mütənəsblik əmsalını ω^2 qəbul edərək, cismin hərəkət qanununu tapın.

HƏLLİ. Cismin t anında qət etdiyi məsafəni $S(t)$ ilə işarə edək.

Nyutonun ikinci qanununa görə $F = ma$. Digər tərəfdən $a =$

$$= \frac{d^2 S}{dt^2} \text{ və şərtə görə } F = -\omega^2 S \text{ olduğundan yazı bilərik:}$$

$$m \frac{d^2 S}{dt^2} + \omega^2 S = 0.$$

Bu sabit əmsallı xətti bircins diferensial tənlikdir. Onun xarakteristik tənliyini yazıb həll edək:

$$mk^2 + \omega^2 = 0, \quad k_{1,2} = \pm \frac{\omega}{\sqrt{m}} i, \quad S(t) = C_1 \cos \frac{\omega}{\sqrt{m}} t + C_2 \sin \frac{\omega}{\sqrt{m}} t.$$

9. Bircins ip masa üzərinə qoyulmuşdur. İpin bir ucu masadan a məsafə hündürlükdə yerləşən blokdan keçirilib, uzunluğu $2a$ -ya bərabər olan hissəsi şaquli aşağı yönəlmişdir. İpin bu ucu sıfır başlanğıc sürəti ilə öz ağırlıq qüvvəsinin təsiri altında aşağıya sürüşür. Sürüşmə qüvvəsinin hərəkət sürətinin kvadratına bərabər olduğunu bilərək sürüşmə sürətinin gedilən yoldan asılılığını tapın. İpin vahid uzunluğunun kütləsini vahid qəbul edin.

HƏLLİ. Tutaq ki, t anında ipin hərəkət edən ucunun blokdan olan məsafəsi $s(t)$ -dir. İpə $s(t)$ uzunluğunun ağırlıq qüvvəsi, hərəkətin əksinə yönəlmiş a uzunluğunda ipin ağırlıq qüvvəsi və v^2

$$\left(v = \frac{ds}{dt} \right) \text{ müqavimət qüvvəsi təsir edir. İpin hərəkətdə olan hissəsi}$$

$s + a$ olduğundan $m(t) = s(t) + a$ kütləsi zamandan asılı dəyişir. Odur ki, hərəkətin diferensial tənliyi üçün alırıq:

$$\frac{d(mv)}{dt} = (s - a)g - v^2, \quad (s + a) \frac{dv}{dt} + 2v^2 = (s - a)g.$$

Alınan tənliyi $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds}$, $(s + a)v \frac{dv}{ds} + 2v^2 = (s - a)g$ şəklində yazaq. Bu tənlik Bernulli tənliyidir. Onu həll etsək alırıq:

$$(s + a)^4 v^2 = C + \frac{2g}{5} (s + a)^5 - ag(s + a)^4.$$

Buradan $v(2a) = 0$ şərtini nəzərə alsaq, $C = -\frac{81ga^5}{5}$,

$$v = \frac{1}{(s + a)^2} \sqrt{\frac{g}{5} [(2s - 3a)(s + a)^4 - 81a^5]}.$$

10. Hamar qarmaqdan asılmış zəncir aşağıya sürüşür. Hərəkət başlayan anda qarmağın bir tərəfində zəncirin uzunluğu 10m, o biri tərəfdə isə 8m-dir. Müqavimət qüvvəsini nəzərə almadan aşağıdakıları tapın.

- 1) hansı vaxtdan sonra zəncir sərbəst düşməyə başlayır?
- 2) zəncir sərbəst düşməyə başlayanda onun sürəti nəyə bərabərdir?

HƏLLİ. Tutaq ki, t anında zəncirin sürüşən hissəsinin uzunluğu $S(t)$ -yə bərabərdir. Zəncirə, sürüşməsinə səbəb olan, zəncirin $S(t)$ uzunluğunun ağırlıq qüvvəsi və əks istiqamətə yönəlmiş $(18 - S(t))$ uzunluğunun ağırlıq qüvvəsi təsir edir. Ona görə Nyutonun ikinci qanununa əsasən hərəkətin diferensial tənliyi üçün yazmaq olar:

$$18\delta \frac{d^2 S}{dt^2} = \delta g S - \delta g(18 - S).$$

Burada δ - zəncirin 1m uzunluqda olan hissəsinin kütləsidir. Diferensial tənliyi

$$9 \frac{d^2 S}{dt^2} = g(S - 9)$$

şəklində yazıb həll edək. $\frac{dS}{dt} = v$, $\frac{d^2 S}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dS} \frac{dS}{dt} = v \frac{dv}{dS}$ nə-

zərə alsaq $9v \frac{dv}{dS} = g(S - 9)$, $9v dv = g(S - 9) dS$.

$$\frac{9}{2}v^2 = \frac{g}{2}(S-9)^2 + \frac{C_1}{2}, \quad 9v^2 = g(S-9)^2 + C_1.$$

Başlangıç anda $v(10) = 0$, $g + C_1 = 0$, $C_1 = -g$ olur. Onda yaz-

$$\text{maq olar: } 9v^2 = g(S-9)^2 - g, \quad v = \frac{\sqrt{g}}{3} \sqrt{(S-9)^2 - 1}.$$

$S = 18\text{ m}$ olduqda zəncir sərbəst düşməyə başlayır. Onda

$$v(18) = \frac{\sqrt{g}}{3} \sqrt{80} \approx 9,3 \text{ m/san}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\sqrt{g}}{3} \sqrt{(S-9)^2 - 1}, \quad \frac{dS}{\sqrt{(S-9)^2 - 1}} = \frac{\sqrt{g}}{3} dt,$$

$$\int \frac{dS}{\sqrt{(S-9)^2 - 1}} = \frac{\sqrt{g}}{3} \int dt + C_2, \quad \ln \left| S-9 + \sqrt{(S-9)^2 - 1} \right| = \frac{\sqrt{g}}{3} t + C_2$$

$t = 0$, $S(0) = 10$ olduğundan $C_2 = 0$ alinq. Onda yazmaq olar:

$$t = \frac{3}{\sqrt{g}} \ln \left(S-9 + \sqrt{(S-9)^2 - 1} \right).$$

$S = 18\text{ m}$ olduqda zəncir qarmaqdan sürüşmüş olur. Onda axırncı bərabərlikdən alinq:

$$T = \frac{3}{\sqrt{g}} \ln(9 + \sqrt{80}) \approx 2,9 \text{ san.}$$

11. $v_0 = 5 \text{ m/san}$ sürətlə hərəkət edən motorlu qayığın motoru söndürülür. Hərəkət zamanı qayığa onun sürətinin kvadratı ilə mütənəsis olan müqavimət qüvvəsi təsir edir (mütənəsislik əmsalı $k = \frac{m}{50}$ -dir.

Burada m qayığın kütləsidir). Hansı vaxtdan sonra qayığın sürəti iki dəfə azalır və bu müddət ərzində qayıq nə qədər yol geder?

HƏLLİ. Motor söndəndən sonrakı t anında qayığın getdiyi yolu $S(t)$ ilə işarə edək. Onda Nyutonun ikinci qanununa görə yaza bilərik:

$$m \frac{d^2 S}{dt^2} = -k \left(\frac{dS}{dt} \right)^2, \quad \frac{d^2 S}{dt^2} = -\frac{1}{50} \left(\frac{dS}{dt} \right)^2.$$

Burada $\frac{dS}{dt} = v$ qəbul edib, tənliyi həll edək: $\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{50} v^2, \quad \frac{dv}{v^2} =$

$$= -\frac{dt}{50}, \quad \int \frac{dv}{v^2} = -\frac{1}{50} \int dt - C, \quad -\frac{1}{v} = -\frac{1}{50} t - C, \quad v = \frac{50}{t+C}.$$

Şərtə görə $v(0) = 5$ olduğundan $C = 10$, $v(t) = \frac{50}{t+10}$.

Qayığın sürətinin iki dəfə azalması üçün lazım olan vaxtı T ilə işarə etsək yaza bilərik. $v(T) = \frac{1}{2} v(0)$, $v(T) = 2,5$, $2,5 = \frac{50}{T+10}$,

$T = 10 \text{ san}$. Deməli, $T = 10 \text{ san}$ müddətində qayığın sürəti iki dəfə azalır. Bu müddət ərzində qayığın getdiyi yolu tapaq:

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{50}{t+10}, \quad \int dS = 50 \int \frac{dt}{t+10}, \quad S = 50 \ln(t+10) + C_2.$$

$S(0) = 0$ başlangıç şərtini nəzərə alsaq $C_2 = -50 \ln 10$,

$$S(t) = 50 \ln(t+10) - 50 \ln 10 = 50 \ln \left(1 + \frac{t}{10} \right).$$

$$S(10) = 50 \ln \left(1 + \frac{10}{10} \right) = 50 \ln 2 \approx 34,66 \text{ m.}$$

12. Paraşütlə birlikdə çəkisi P olan paraşütçü h hündürlükdən sərbəst düşür. Havanın müqavimət qüvvəsi $F_1 = -v^2(t)$ olduğunu bilərək, paraşütçünün $v(t)$ sürətinin t zamanından asılılığını və yere

düşmə vaxtını tapın.

HƏLLİ. t anda düşmə məsafəsinə $S(t)$ ilə işarə etsək, paraşütçünün paraşütlə birlikdə çəkisi $P = mg$ olduğundan Nyutonun ikinci qanununa əsasən yazıb bilərik:

$$m \frac{d^2 S}{dt^2} = mg - \left(\frac{dS}{dt} \right)^2, \quad \frac{dv}{dt} = g - kv^2, \quad k = \frac{1}{m}.$$

Tənliyi dəyişənlərinə ayıraraq inteqrallasaq alırıq:

$$\int \frac{dv}{g - kv^2} = \int dt + \ln C, \quad \frac{1}{2\sqrt{kg}} \ln \frac{\sqrt{g} + \sqrt{kv}}{\sqrt{g} - \sqrt{kv}} = t + \ln C,$$

$$\frac{\sqrt{g} + \sqrt{kv}}{\sqrt{g} - \sqrt{kv}} = C e^{2\sqrt{kg}t}, \quad v(t) = \sqrt{\frac{g}{k}} \frac{C e^{2\sqrt{kg}t} - 1}{C e^{2\sqrt{kg}t} + 1}.$$

$v(0) = 0$ başlangıç şərtini nəzərə alsaq yazıb bilərik:

$$0 = \sqrt{\frac{g}{k}} \frac{C - 1}{C + 1}, \quad C = 1, \quad v(t) = \sqrt{\frac{g}{k}} \frac{e^{2\sqrt{kg}t} - 1}{e^{2\sqrt{kg}t} + 1} = \sqrt{\frac{g}{k}} \frac{1}{2} \left(\frac{e^{\sqrt{kg}t} - e^{-\sqrt{kg}t}}{e^{\sqrt{kg}t} + e^{-\sqrt{kg}t}} \right) = \sqrt{\frac{g}{k}} \operatorname{th}(\sqrt{kg}t).$$

Axırıncı bərabərlikdən $v = \frac{dS}{dt}$ olduğundan yazıb bilərik:

$$\frac{dS}{dt} = \sqrt{\frac{g}{k}} \operatorname{th}(\sqrt{kg}t), \quad \int dS = \sqrt{\frac{g}{k}} \int \operatorname{th}(\sqrt{kg}t) dt + C_2,$$

$$S(t) = \sqrt{\frac{g}{k}} \frac{1}{\sqrt{kg}} \ln [ch(\sqrt{kg}t)] + C_2 = \frac{1}{k} \ln [ch(\sqrt{kg}t)] + C_2$$

$S(0) = 0$ şərtini burada nəzərə alsaq $C_2 = 0$, $S(t) =$

$= \frac{1}{k} \ln [ch(\sqrt{kg}t)]$. T düşmə vaxtını $S(T) = h$ şərtindən tapılır:

$$h = \frac{1}{k} \ln [ch(\sqrt{kg}T)], \quad ch(\sqrt{kg}T) = e^{hk}, \quad e^{\sqrt{kg}T} + e^{-\sqrt{kg}T} = 2e^{hk},$$

$e^{\sqrt{kg}T} = \lambda$ işarə etsək alırıq:

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} = 2e^{hk}, \quad \lambda^2 - 2e^{hk}\lambda + 1 = 0, \quad \lambda_{1,2} = e^{hk} \pm \sqrt{e^{2hk} - 1}.$$

$$e^{\sqrt{kg}T} = e^{hk} + \sqrt{e^{2hk} - 1}, \quad \sqrt{kg}T = \ln(e^{hk} + \sqrt{e^{2hk} - 1}),$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{kg}} \ln(e^{hk} + \sqrt{e^{2hk} - 1}).$$

Beləliklə, $v(t) = \sqrt{\frac{g}{k}} \operatorname{th}(\sqrt{kg}t)$ paraşütçünün düşmə sür'əti, $T =$

$= \frac{1}{\sqrt{kg}} \ln(e^{hk} + \sqrt{e^{2hk} - 1})$ düşmə vaxtı olur.

$t \rightarrow \infty$ şərtində $\operatorname{th}(\sqrt{kg}t) \rightarrow 1$ olduğundan $t \rightarrow \infty$ şərtində

$v(t) = \sqrt{\frac{g}{k}} = \operatorname{const}$ alırıq. Başqa sözlə, müəyyən bir müddətdən sonra paraşütçünün sür'ətini sabit qəbul etmək olar.

13. Kütləsi m olan maddi nöqtə şaquli ox ətrafında sabit ω bucaq sür'ətilə fırlanan AB əyrisi üzərindən yerləşmişdir. Maddi nöqtənin əyrinin ixtiyari nöqtəsində tarazlıqda olduğunu bilərək AB əyrisinin tənliyini tapın.

HƏLLİ. Tutaq ki, maddi nöqtə əyrinin $M(x, y)$ nöqtəsində yerləşir (şəkil 17). Reaksiya qüvvəsi AB əyrisinə $M(x, y)$ nöqtəsində çəkilmiş normal istiqamətdə yönəldiyindən mərkəzeqəçmə qüvvəsinin və ağırlıq qüvvəsinin əvəzləyici qüvvəsi \vec{R} də normal boyunca yönəlmiş-

dir. Maddi nöqtəyə M nöqtəsində $\vec{P} = mg$ ağırlıq qüvvəsi və $\vec{F} = m\omega^2 x$ mərkəzəqaçma qüvvəsi tə'sir edir. Burada m -kütlə, g -sərbəstdüşmə tə'cilidir. Tutaq ki, AB əyrisinin tənliyi $y = y(x)$ şəklindədir. Onda $\operatorname{tg} \varphi = y'$, $\varphi + \alpha =$

$$= \frac{\pi}{2}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{1}{y'}.$$

$$\Delta MKN \text{ -dən } \operatorname{tg} \alpha = \frac{P}{F} = \frac{mg}{m\omega^2 x},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{g}{\omega^2 x}. \text{ Onda yazı bilərik.}$$

$$\frac{1}{y'} = \frac{g}{\omega^2 x}, \quad gy' = \omega^2 x. \text{ Axırncı tənliyi inteqrallasaq } y = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + C$$

parabolalar ailəsi alınır.

14. Maddi nöqtə sabit a tə'cili ilə düz xətt boyunca hərəkət edir. Nöqtənin hərəkət qanununu tapın.

HƏLLİ. Tutaq ki, t anında nöqtə $S = S(t)$ məsafəsini qət edir. Onda

$$\frac{d^2 S}{dt^2} = a, \quad \frac{dS}{dt} = at + C_1, \quad S = \frac{a^2 t}{2} + C_1 t + C_2.$$

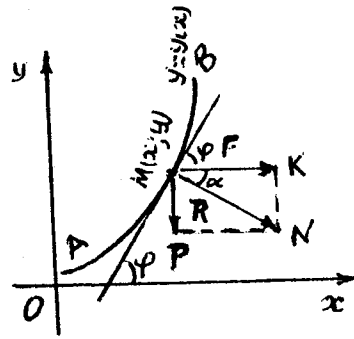
$$S(0) = S_0, \quad S'(0) = v_0 \text{ qəbul etsək axırncı bərabərlikdən } C_2 = S_0.$$

$$C_1 = v_0 \text{ alanq. Onda hərəkət qanunu } S(t) = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + S_0 \text{ şəklində düşər.}$$

Bu, maddi nöqtənin hərəkət qanunudur. Bu tənlikdə $S_0 = 0$, $v_0 = 0$, $a = g$, $S = h$ qəbul etsək boşluqda sərbəst düşən cismin hərəkət qanununu alanq.

$$v = gt, \quad h = \frac{1}{2} gt^2$$

15. En kəsiyinin sahəsi F , uzunluğu L_0 olan polad məftil P qiymə-



Şəkil 17.

tinə qədər artan qüvvənin tə'siri altında dartılır. Dartılma vaxtı görülən işi tapın.

HƏLLİ. $P(kq)$ qüvvəsinin tə'siri altında dartılan məftilin uzanması

$\Delta L(m)$ Huk qanununa görə hesablanır: $\Delta L = k \frac{\Delta P}{F} L_0$. Burada k -uzanma əmsali, L_0 -məftilin əvvəlki uzunluğudur.

$$\text{Dartılmanın elementar prosesini belə yazı bilərik. } dL = k \frac{L_0}{F} dP.$$

Onda həmin qüvvənin bu uzanma vaxtı gördüyü iş $dA = PdL$ olduğundan $dA = \frac{kL_0}{F} P dP$ tənliyi alınır. Tənliyi inteqrallasaq alanq:

$$A = \frac{kL_0}{2F} P^2 + C. \text{ Burada } P = 0 \text{ olduqda } A = 0 \text{ olduğunu nəzərə}$$

$$\text{alsaq } C = 0, \quad A = \frac{kL_0}{2F} P^2.$$

16. Uzunluğu $L(m)$ olan polad məftil bir ucundan bərkidilmişdir və öz ağırlığının tə'siri altında müvazinətdədir. Məftilin nə qədər uzandığını tapın. Poladın xüsusi çəkisi $\gamma(T/m^3)$.

HƏLLİ. Dartılma T qüvvəsinin qiyməti məftilin hər bir kəsiyinin yerindən asılıdır. Bu dartılma qüvvəsi məftilin kəsikdən aşağıda qalan hissəsinin çəkisinə bərabərdir. Məftilin ucunun bərkidildiyi nöqtədən x məsafəsində olan nöqtədə

$$\frac{T}{P} = \frac{L-x}{L}$$

tənasübündən tapılan T dartılma qüvvəsi tə'sir edir. Burada P məftilin çəkisidir. Buradan alanq.

$$T = \frac{P}{L}(L-x)$$

Məftilin ΔL uzanması üçün yazmaq olar (Huk qanunu):

$$\Delta L = k \frac{T}{F} L$$

Burada k -uzanma əmsalı, F -mətilin en kəsiyidir (sm^2). dx elementinin dartılması üçün

$$dl = k \frac{l}{F} dx, \quad dl = \frac{kP}{LF} (L-x) dx.$$

Digər tərəfdən $P = \frac{\gamma LF}{1000}$ (kq), L (sm) qəbul etsək

$$dl = \frac{k\gamma}{1000} (L-x) dx$$

yazmaq olar. Bu tənliyi inteqrallasaq mətilin tam uzanmasını alarıq.

$$l = \frac{k\gamma}{1000} \int_0^L (L-x) dx, \quad l = \frac{k\gamma}{2000} L^2.$$

17. Həcmi $v_0 = 0,1 \text{ m}^3$ olan silindrik qabda hava porşen vasitəsilə adiabatik (ətraf mühitə istilik ötürmür) olaraq $v_1 = 0,01 \text{ m}^3$ həcmə qədər sıxılır. Sıxılma vaxtı görülən işi tapın.

HƏLLİ. Tutaq ki, S -porşenin sahəsi, v -qazın həcmi, P -porşen x yüksəklikdə olduğu vaxt qazın təzyiqidir. dx -sıxılma vaxtı porşenin elementar yerdəyişməsi, dA -elementar iş, dv -elementar həcm, P_0 -qazın başlanğıc təzyiqi, v_0 -qazın başlanğıc həcmidir. Porşen aşağı düşərkən görülən elementar iş $dA = -PSdx$ olar. Digər tərəfdən $Sdx = dv$. Onda $dA = -Pdv$.

Qaz öz halını adiabatik halda dəyişərsə, onun təzyiqi və həcmi Puasson tənliyi ilə ifadə olunur.

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{v_0}{v} \right)^k$$

Burada k -hər bir qaz üçün sabit olan kəmiyyətdir. Hava üçün $k = 1,4$ -dür. $P_0 = 1030 \text{ kq/m}^2$ -atmosfer təzyiqidir. Puasson tənliyində əsasən

$$P = P_0 \left(\frac{v_0}{v} \right)^k, \quad dA = -P_0 \left(\frac{v_0}{v} \right)^k dv.$$

Axırncı tənliyi inteqrallasaq alarıq: $A = \frac{P_0 v_0^k}{(k-1)v^{k-1}} + C.$

$v = v_0$ olduqda $A = 0$ başlanğıc şərtini nəzərə alsaq $C = -\frac{P_0 v_0}{k-1}$.

Beləliklə, qazın sıxılmasından görülən iş

$$A = \frac{P_0 v_0}{k-1} \left[\left(\frac{v_0}{v} \right)^{k-1} - 1 \right].$$

Burada $P_0 = 1030 \text{ kq/m}^2$, $k = 1,4$, $v_0 = 0,1 \text{ m}^3$. $v = v_1 = 0,01 \text{ m}^3$ yazsaq, $A \approx 3904,4 \text{ kqm}$.

18. Peçdən çıxarılan çörəyin temperaturu 20 dəqiqə ərzində 100° -dən 60° -yə enir. Havanın temperaturu 25° -dir. Soyumaga başlayan andan nə qədər vaxt keçməlidir ki, çörəyin temperaturu 30° olsun.

HƏLLİ. t anda çörəyin temperaturunu $T(t)$ ilə işarə edək. Nyutonun qanununa görə cismin soyumasının sür'əti cismin temperaturu ilə mühitün temperaturu fərqi ilə mütənasibdir. Çörəyin soyuması sür'əti $\frac{dT}{dt}$ olsa, onda soyumanın diferensial tənliyi $\frac{dT}{dt} = k[T(t) - 25]$ olar. Burada k -mütənasiblik əmsalındır. Bu tənliyi həll etsək alarıq:

$$\frac{dT}{T-25} = kdt, \quad \int \frac{dT}{T-25} = k \int dt + \ln C,$$

$$\ln|T-25| = kt + \ln C, \quad T(t) = Ce^{kt} + 25.$$

$T(0) = 100$, $T(20) = 60$ olduğunu nəzərə alsaq: $C = 75$, $60 =$

$$= 75e^{20k} + 25, \quad 75e^{20k} = 35, \quad e^{20k} = \frac{7}{15}, \quad e^k = \left(\frac{7}{15} \right)^{\frac{1}{20}}.$$

Deməli, $T(t) = 75 \left(\frac{7}{15} \right)^{\frac{t}{20}} + 25$. Tələb olunan vaxt $T(t_1) = 30$ şərti

indən tapılır.

$$30 = 75 \left(\frac{7}{15} \right)^{\frac{t_1}{20}} + 25, \quad 75 \left(\frac{7}{15} \right)^{\frac{t_1}{20}} = 5, \quad \left(\frac{7}{15} \right)^{\frac{t_1}{20}} = \frac{1}{15},$$

$$t_1 = \frac{20 \ln 15}{\ln 15 - \ln 7} \approx 71 \text{ dəqiqə.}$$

Beləliklə, çörəyin temperaturunun 30^0 -yə enməsi üçün $t_1 = 71$ dəqiqə keçməlidir.

18. İstilik magistralının borusu ($D = 20 \text{ sm}$) qalınlığı 10 sm olan izolyasiya ilə örtülmüşdür. İstilikkeçirmə əmsalı $k \approx 0,00017$ -dir. Borunun temperaturu 160^0 , xarici mühitün temperaturu 30^0 -dir. Temperaturun izolyasiyanın daxilində yayılması qanununu və borunun bir metrinin ($l = 100 \text{ sm}$) verdiyi istiliyin miqdarını təyin edin.

HƏLLİ. Cisim stasionar istilik vəziyyətindədirsə və onun hər bir nöqtəsinin T temperaturu yalnız bir x koordinatından asılıdırsa, onda Furiyenin istilikkeçirmə qanununa əsasən bir saniyədə verilən istiliyin miqdarı

$$Q = -kF(x) \frac{dT}{dx} = \text{const.}$$

Burada $F(x)$ borunun x məsafəsindəki Ox kəsiyinin sahəsidir. k - istilikkeçirmə əmsalıdır. Boru üçün $F(x) = 2\pi x l$, l - borunun uzunluğudur. x - borunun radiusudur. Alınan tənliyi dəyişənləri ayıraraq integrallasaq alarıq:

$$dT = -\frac{Q}{kF(x)} dx, \quad \int_{160}^T dT = -\frac{Q}{k 2\pi l} \int_{10}^x \frac{dx}{x}, \quad T = 160 - \frac{Q}{2k\pi l} \ln \frac{x}{10}.$$

$$\text{Burada } x = 20, \quad T = 30 \text{ yazsaq, } 130 = \frac{Q}{2k\pi l} \ln 2, \quad \frac{Q}{2k\pi l} = \frac{130}{\ln 2},$$

$$Q = \frac{130 \cdot 2k\pi l}{\ln 2}, \quad T = 160 - \frac{130}{\ln 2} \ln \frac{x}{10}. \text{ Bu, istiliyin izolyasiya daxi-}$$

lində yayılması qanunudur. $Q = \frac{130 \cdot 2k\pi l}{\ln 2}$ bərabərliyində $k = 0,00017$,

$$l = 100 \text{ sm götürsək } Q = \frac{130 \cdot 0,00017 \cdot 2\pi \cdot 100}{\ln 2}. \text{ Onda bir sutka}$$

$$(24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ san}) \text{ ərzində ayrılan istilik miqdarı } 24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot Q = 1730600 \text{ kalori.}$$

20. Motorlu qayığın durğun sudakı sürəti $v = 20 \text{ km/saat}$ olduqda motoru söndürülmüş və 40san sonra onun sürəti $v_1 = 8 \text{ km/saat}$ olmuşdur. Suyun müqaviməti qayığın hərəkət sürəti ilə mütənas olduğunu bilərək motor söndükdən 2 dəqiqə sonra qayığın sürətini tapın.

HƏLLİ. Qayığın t andakı sürətini $v(t)$ ilə işarə edək. Qayığa $F = -kv$ müqavimət qüvvəsi təsir edir. Burada k - mütənasıblıq əmsalıdır. Nyutonun II qanununa əsasən

$$m \frac{dv}{dt} = -kv.$$

Bu tənliyi dəyişənlərinə ayıraraq həll etsək

$$\int \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} \int dt + \ln C, \quad \ln|v| = -\frac{k}{m} t + \ln C, \quad v(t) = C e^{-\frac{k}{m} t}.$$

$$t = 0 \text{ olduqda } v = 20 \text{ km/saat olduğundan: } C = 20, \quad v(t) = 20 e^{-\frac{k}{m} t}.$$

$$\text{Şərtə görə } t_1 = 40 \text{ san} = \frac{1}{90} \text{ saat olduqda qayığın sürəti } v_1 = 8 \text{ km/saat}$$

$$\text{olur: } 8 = 20 e^{-\frac{k}{m} \frac{1}{90}}, \quad e^{-\frac{k}{m}} = \left(\frac{2}{5} \right)^{90}, \quad v(t) = 20 \left(\frac{2}{5} \right)^{90t}.$$

$$t = 2 \text{ dəqiqə} = \frac{1}{30} \text{ saat keçdikdən sonra qayığın sürəti } v(2)$$

$$= 20 \left(\frac{2}{5} \right)^3 = 1,28 \text{ km/saat.}$$

21. Su tutumu 12000 ton olan gəmi $v = 18$ km/saat sür'ətlə düzxətli hərəkət edir. Suyun müqaviməti gəminin sür'ətinin kvadratı ilə mütənasibdir və 1m/san sür'ətdə 36 tona bərabərdir. Motor dayanandan sonra gəminin sür'ətinin 2,5m/san qədər azalması üçün gəmi nə qədər yol getməlidir və bu yolu nə qədər vaxta geder?

HƏLLİ. Nyutonun ikinci qanununa əsasən motor dayandıqdan sonra gəminin hərəkətinin diferensial tənliyi $m \frac{d^2 S}{dt^2} = -kv^2$ olur.

Şərtə görə $k = 36$, $mg = 12000$. Bu tənliyi dəyişənlərinə ayırıb inteqrallayaq.

$$\int \frac{dv}{v^2} = -0,03 \int dt + C_1, \quad -\frac{1}{v} = -0,03t + C_1, \quad v = \frac{1}{0,03t - C_1}$$

$t = 0$ olduqda $v = 18$ km/saat = 5m/san başlanğıc şərtini burada nəzərə alsaq $C_1 = -\frac{1}{5}$, $v = \frac{5}{0,15t + 1} = \frac{100}{3t + 20}$. Sür'ətin 2,5 m/san-ə

qədər azalması üçün tələb olunan vaxt: $2,5 = \frac{100}{3t + 20}$, $3t + 20 = 40$,

$t \approx 6,7$ san.

İndi də $t = 6,7$ san müddətində gəminin getdiyi yolu tapaq:

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{100}{3t + 20}, \quad \int dS = 100 \int \frac{dt}{3t + 20} + C_1,$$

$$S(t) = \frac{100}{3} \ln(3t + 20) + C_2.$$

Başlanğıc şərt: $t = 0$ olduqda $S = 0$. Onda axıncı bərabərlikdən

$$C_1 = -\frac{100}{3} \ln 20, \quad S = \frac{100}{3} \ln \left(\frac{3}{20} t + 1 \right). \text{ Buradan } t = 6,7 \text{ san üçün}$$

$$\text{alanq: } S \approx \frac{100}{3} \ln 2 \approx 23,1 \text{ m.}$$

22. Külək meşədən keçərək ağacların müqavimətinə rast gəlir və sür'ətini azaldır. Küləyin sür'ətinin azalması sür'ətlə və getdiyi yolun

uzunluğu ilə mütənasibdir. Meşənin başlanğıcında küləyin sür'ətinin $v_0 = 12$ m/san və $S = 1$ m yol keçdikdən sonra isə $v_1 = 11,8$ m/san olduğunu nəzərə alaraq meşədə 150m yol keçdikdən sonra onun sür'ətini tapın.

HƏLLİ. Tutaq ki, $v(S)$ meşənin başlanğıcından S məsafədə küləyin sür'əti, dS yolunda sür'ətin itkisi $-dv$ -dir (mənfi işarə prosesin azalan olduğu üçün götürülür). Şərtə görə $-dv$ -sür'ət itkisi v sür'əti və dS yolu ilə mütənasibdir: $-dv = kv dS$. Alınan tənliyi dəyişənlərə ayırısaq və inteqrallasaq alanq:

$$\int \frac{dv}{v} = -k \int dS + \ln C, \quad \ln|v| = -kS + \ln C, \quad v = Ce^{-kS}.$$

$S = 0$ olduqda $v = v_0$ olduğundan: $C = v_0$, $v = v_0 e^{-kS}$.

$S = 1$ m olduqda $v = v_1 = 11,8$ m/san olduğunu nəzərə alsaq:

$$v_1 = v_0 e^{-k}, \quad e^{-k} = \frac{v_1}{v_0} = 0,983, \quad v = v_0 (0,983)^S.$$

Onda küləyin $S = 150$ m məsafədə sür'əti

$$v = v_0 (0,983)^{150} = 12(0,983)^{150} = 0,93 \text{ m/san.}$$

23. $t = 0$ anında gəmi O nöqtəsindən çıxıb Oy düz xətti istiqamətində sabit v sür'ətilə hərəkət edir. $t = 0$ anında gemidən $OA = a$ məsafəsində olan kater, gəmiyə çatmaq üçün onun sür'ətindən iki dəfə böyük sür'ətlə A nöqtəsindən çıxır. Katerin hər bir nöqtədə istiqamətinin gəmiyə yönəldiyini bilərək, onun cızdığı əyrini və gəmiyə çatması üçün lazım olan vaxtı tapın.

HƏLLİ. Tutaq ki, t anında kater $C(x, y)$ nöqtəsində, gəmi isə B nöqtəsindədir (şəkil 18). Bu vaxt ərzində gəmi $OB = vt$ qədər yol geder. Hər bir nöqtədə katerin istinaməti gəmiyə yönəldiyindən $C(x, y)$ nöqtəsində katerin cızdığı əyrinə çəkilən toxunanın bucaq

$$\text{əmsalı } k = y' = \tan \alpha = -\tan \beta = -\frac{BD}{CD} = -\left(\frac{vt - y}{x} \right) = \frac{y - vt}{x}, \quad y'x =$$

$y = y - vt$. Digər tərəfdən, katerin t müddətdə gətirdiyi yolun uzunluğu

$S = 2vt$ olduğundan $xy' = y - \frac{S}{2}$ olar.

Burada S ilə AC qövsünün uzunluğu işarə olunmuşdur. Ona görə də yazı bilərik:

$$S(x) = - \int_a^x \sqrt{1+y'^2} dx, \quad \frac{dS}{dx} = -\sqrt{1+y'^2}.$$

$xy' = y - \frac{S}{2}$ bərabərliyinin hər tərəfindən

x -ə görə törəmə alaq:

$$\frac{dy}{dx} + x \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{dS}{dx}, \quad x \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1+y'^2}.$$

Bu, katerin hərəkətinin diferensial tənliyidir. $y' = z$ əvəzləməsi apar-saq:

$$x \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2} \sqrt{1+z^2}, \quad \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{1}{2} \frac{dx}{x},$$

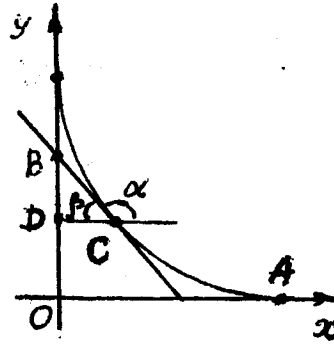
$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} + \ln C_1, \quad \ln|z + \sqrt{1+z^2}| = \frac{1}{2} \ln|x| + \ln C_1$$

$$z + \sqrt{1+z^2} = C_1 \sqrt{x}, \quad y' + \sqrt{1+y'^2} = C_1 \sqrt{x}.$$

$y'(a) = 0$ olduğundan axırıncı bərabərlikdən: $C_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}$,

$$y' + \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{\frac{x}{a}}, \quad y' = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{a}{x}} \right),$$

$$y = \frac{1}{2} \int \left(\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{a}{x}} \right) dx + C_2, \quad y = \frac{x}{3} \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{ax} + C_2.$$



Şəkil 18.

$y(a) = 0$ olduğundan axırıncı bərabərlikdən $C_2 = \frac{2a}{3}$,

$$y = \frac{x}{3} \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{ax} + \frac{2a}{3}.$$

Bu, katerin cızdığı əyridir. Kater gəmiyə $x=0$ olduqda çatır. Onda

axırıncı bərabərlikdən $y = \frac{2a}{3}$ gəminin gətirdiyi yolu tapırıq. Gəmi bə-

rabersür'ətli hərəkət etdiyindən bu yola sərf olunan vaxt $t = \frac{y}{v} = \frac{2a}{3v}$.

24. Vaqonun yedekçi ilə birlikdə çəkisi $Q = 40$ ton, yedəkçinin dartma qüvvəsi $F = 200$ kq, hərəkətə mane olan qüvvə $G = 10^{-3} (2,5 + 0,05v)Q$ (kq), (v -vaqonun sür'ətidir) olduğunu bilərək,

vaqonun sıfır başlanğıc sür'əti ilə hərəkətə başlayıb $12 \frac{\text{km}}{\text{saat}}$ sür'ət al-

ması üçün hansı yolu keçdiyini və bərabersür'ətlə hərəkət zamanı yedəkçinin N dartma qüvvəsini tapın.

HƏLLİ. Nyutonun ikinci qanununa əsasən $m \frac{d^2S}{dt^2} = F -$

$-10^{-3} \left(2,5 + 0,05 \frac{dS}{dt} \right) Q$ vaqonun hərəkət tənliyi olur. Buradan

$Q = mg$, $\frac{dS}{dt} = v$, $\frac{d^2S}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$ olduğunu nəzərə alsaq yazı bilərik:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{g}{1000} (2,5 + 0,05v) - \frac{Fg}{Q} = 0, \quad g = 9,81 \text{ m/san}^2.$$

Məsələdə verilənləri tənlikdə nəzərə alaq:

$$\frac{dv}{dt} + 0,49 \cdot 10^{-3} v - 24,5 \cdot 10^{-3} = 0.$$

Dəyişənləri ayırısaq və inteqrallasaq:

$$\int \frac{1000 dv}{24,5 - 0,49v} = \int dt + \ln C, \quad -\frac{1000}{0,49} \ln C |24,5 - 0,49v| = t.$$

$$t = 0 \text{ olduqda } v = 0 \text{ olduğundan buradan } C_1 = \frac{1}{24,5}, \quad t =$$

$$= -\frac{1000}{0,49} \ln(1 - 0,02v) \text{ tapırıq. Vaqonun } 12 \text{ km/saat} = 3,33 \text{ m/san}$$

$$\text{sür'et aldığı vaxtı tapıq: } t = -\frac{1000}{0,49} \ln(1 - 0,02 \cdot 3,33) \approx 140 \text{ san.}$$

İndi isə vaqonun 12 km/saat sür'ətlə çatması üçün qət etdiyi yolu tapıq.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dS} \frac{dS}{dt} = \frac{dv}{dS} v, \quad \frac{1000v dv}{24,5 - 0,49v} = dS.$$

Axırıncı tənliyi inteqrallayaq:

$$-\frac{1000}{0,49} \left[v + \frac{24,5}{0,49} \ln(24,5 - 0,49v) + C \right] = S.$$

$t = 0$ olduqda $S = 0$, $v = 0$ olduğunu burada nəzərə alsaq:

$$C = \frac{24,5}{0,49} \ln 24,5, \quad S = \frac{1000}{0,49} \left(50 \ln \frac{24,5}{24,5 - 0,49v} - v \right),$$

$$S = \frac{1000}{0,49} \left(50 \ln \frac{24,5}{24,5 - 0,49 \cdot 3,33} - 3,33 \right) \approx 105 \text{ m.}$$

Vaqonun bərabərsür'ətli hərəkətə başlayandan sonra ($v = 12$ km/saat = 3,33 m/san) dartma qüvvəsi:

$$N = 10^{-3} Q [2,5 + 0,5 \cdot 3,33] = 106,6 \text{ kq}$$

25. Oturacaqlarının sahəsi S və $S = S_1 = 100 \text{ m}^2$ olan iki birləşmiş qab paralelepiped formasındadır. Qablardakı suyun səviyyə fərqinin $h = 2,5 \text{ m}$, qablar arasındakı deşiyin sahəsinin $\omega = 0,5 \text{ m}^2$, hidravlik müqavimət əmsalının $\delta = 0,6$ olduğunu bilərək, qablarda suyun səviyyəsinin eyni olması üçün lazım olan vaxtı təyin edin.

HƏLLİ. Qablarda olan suyun səviyyələrini uyğun olaraq z və z_1 ($z > z_1$) ilə işarə edək. Tutaq ki, dt -zaman müddətində birinci qabda suyun səviyyəsi $dz < 0$ qədər azalır, ikinci qabda isə $dz_1 > 0$ qədər artır. Bu zaman birinci qabın itirdiyi suyun miqdarı ikinci qabın qəbul etdiyi suyun miqdarına bərabərdir (şəkil 19):

$$-Sdz = S_1 dz_1, \quad dz - dz_1 = \frac{S + S_1}{S_1} dz.$$

Digər tərəfdən, Toriçelli qanununa əsasən dt vaxtında sahəsi ω olan AB deşiyindən keçən suyun həcmi $\delta \omega \sqrt{2g(z - z_1)} dt$ olduğundan alırıq:

$$\delta \omega \sqrt{2g(z - z_1)} dt = -Sdz,$$

$$\frac{\delta \omega}{S} \sqrt{2g} dt = -\frac{dz}{\sqrt{z - z_1}}.$$

$z - z_1 = u$ qəbul etsək,

$$dz - dz_1 = du = \frac{S + S_1}{S_1} dz,$$

$$dz = \frac{S_1 du}{S + S_1}, \quad \frac{\delta \omega}{S} \sqrt{2g} dt = -\frac{S_1}{S + S_1} \frac{du}{\sqrt{u}}.$$

Buradan inteqrallamaqla alırıq:

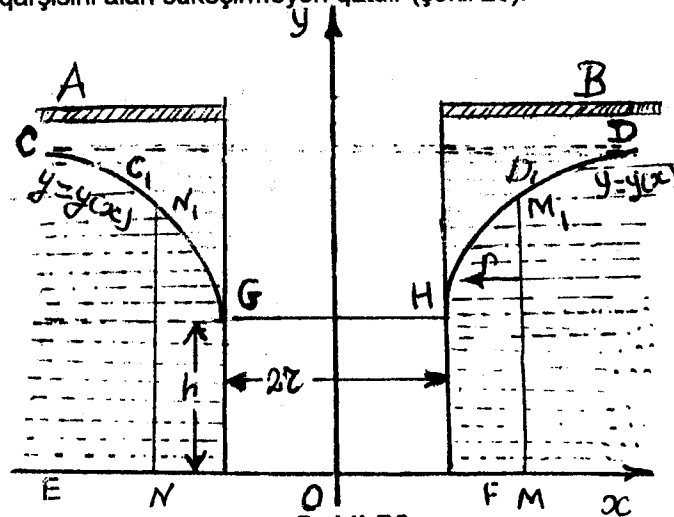
$$\frac{\delta \omega}{S} \sqrt{2g} \int_0^t dt = -\frac{S_1}{S + S_1} \int_h^u \frac{du}{\sqrt{u}}, \quad \frac{\delta \omega}{S} \sqrt{2g} t = \frac{2S_1}{S + S_1} (\sqrt{h} - \sqrt{u}).$$

Buradan məsələnin mə'lumlarını yerinə yazıb, qablarda suyun səviyyələri eyni, yəni $z - z_1 = u = 0$ olan vaxtı tapırıq:

$$t = \frac{SS_1}{\omega \delta (S + S_1)} \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx \frac{100 \cdot 100}{0,6 \cdot 0,5 \cdot 200} \sqrt{\frac{2 \cdot 2,5}{9,8}} = \frac{5000}{42} \approx 119 \text{ san.}$$

26. Su keçirməyən qata qədər qazılmış quyunun ətrafında yığılmış qrunut sularının səviyyələrini müəyyən edən səthi tapın. Bu səthin quyunun oxu ətrafında fırlanma səthi olduğu məlumdur, səthin mailliyi bu səthdən axan suyun sür'ətilə mütənasibdir.

HƏLLİ. Quyunun OX kəsiyinə baxaq. Tutaq ki, AB yer səthi, CD-qrunut sularının quyu qazılmamışdan qabaqkı səviyyəsi, EF-aşağıdan su axınının qarşısını alan sukeçirməyən qatdır (şəkil 20).



Şəkil 20.

Əgər quyuda yığılan qrunut suların müntəzəm çıxarılmaqla eyni GH səviyyəsində (h) saxlanılsa, qrunut suları quyunun yaxın ətrafında hər hansı $y = y(x)$ qanunu ilə azalır. Bu əyri simmetrik iki qola ayrılan GC_1 və HD_1 əyrilərindən ibarətdir.

Qrunut sularının səviyyəsinin səthi $y = y(x)$ əyrisinin oy oxu ətrafında fırlanmasından alınır. $y = y(x)$ əyrisi təcrübi qayda ilə təyin olunur. Bu qaydaya əsasən su buraxan qrunutun P nöqtəsində suyun axma v sür'əti P nöqtəsindən keçən şaquli düz xəttin əyrini kəsdiyi M_1 nöqtəsində əyrinin mailliyi ilə mütənasibdir. Əyrinin mailliyi onun toxunanının bucaq əmsalı kimi təyin olunur. Əgər mütənasiblik əmsalını k qəbul etsək alırıq: $v = k \frac{dy}{dx}$. v sür'ətilə $N_1 N M M_1$ silindrinin

daxilinə radial axan suyun miqdarı $Q = 2\pi r y v$ məlumdur. Odur ki,

$$Q = 2\pi r y k \frac{dy}{dx}. \text{ Alınan tənliyi həll edək.}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{2\pi k}{Q} \int y dy + C, \quad \ln|x| = \frac{2\pi k}{Q} \frac{y^2}{2} + C, \quad \ln|x| = \frac{\pi k}{Q} y^2 + C.$$

C ixtiyari sabiti aşağıdakı şərtəndən tapılır. Əgər quyunun diametri $2r$, quyuda suyun səviyyəsi h -olarsa, $x = r$ olduqda $y = h$ olar:

$$\ln r = \frac{\pi k}{Q} h^2 + C, \quad C = \ln r - \frac{\pi k}{Q} h^2, \quad \ln|x| = \frac{\pi k}{Q} y^2 + \ln r - \frac{\pi k}{Q} h^2 = \frac{\pi k}{Q} (y^2 - h^2) + \ln r, \quad \ln \frac{|x|}{r} = \frac{\pi k}{Q} (y^2 - h^2), \quad y^2 = \frac{Q}{\pi k} \ln \frac{|x|}{r} + h^2.$$

Buradan quyu ətrafında qrunut sularının səviyyə səthini tapırıq:

$$y^2 = \frac{Q}{\pi k} \ln \frac{x^2 + z^2}{r^2} + h^2.$$

27. Qabda tərkibində γ miqdarda duz olan a litr məhlul vardır, Fasiləsiz olaraq vahid zamanda qaba b litr təmiz su dolur və həmin miqdarda məhlul qabdan axıdılır. Qabdakı duzun miqdarının axma vaxtından asılı olaraq dəyişmə qanununu tapın.

HƏLLİ. t anında qabdakı duzun miqdarını $x(t)$ ilə işarə edək.

Onda hər litr məhlulda $\frac{x}{a}$ qədər duz, b litr məhlulda isə $\frac{bx}{a}$ qədər duz olar. Odur ki, Δt zamanda qabdakı duzun dəyişməsi

$$x(t) - x(t + \Delta t) = \frac{b}{a} [x(t) + \alpha] \Delta t$$

bərabərliyi ilə xarakterizə olunur. Buradan hər tərəfi Δt -yə bölüb,

$$\Delta t \rightarrow 0 \text{ şərtində limit alsaq: } -\frac{dx}{dt} = \frac{bx}{a} \text{ tənliyi alınır. Tənliyi həll}$$

edək:

$$\int \frac{dx}{x} = -\frac{b}{a} \int dt + \ln C, \quad \ln|x| = -\frac{b}{a}t + \ln C, \quad x = Ce^{-\frac{b}{a}t}.$$

Burada $x(0) = \gamma$ şərtini nəzərə alsaq $C = \gamma$, $x = \gamma e^{-\frac{b}{a}t}$.

28. Elektrik şəbəkəsində gərginlik $E = 300$ v, müqavimət $R = 150$ Om, özünüinduksiya əmsalı $L = 30$ henridir. Şəbəkənin qapandığı andan nə qədər vaxt keçməlidir ki, cərəyan i özünün maksimum qiymətinin 99%-ni alsın?

HƏLLİ. Özünüinduksiyanın elektrik hərəkətdirici qüvvəsi cərəyan şiddətinin artırma sürəti ilə mütənasibdir. Mütənasiblik əmsalı burada L -dir. Şəbəkə qapanarkən onda iki əks elektrik hərəkətdirici qüvvə: E gərginliyi və özünüinduksiyanın hərəkətdirici qüvvəsi

$E_1 = -L \frac{di}{dt}$ yaranır və Kirxhof qanununa əsasən onların cəbri cəmi

şəbəkədə yaranan Ri gərginliyinə bərabərdir. Yə'ni

$$E - L \frac{di}{dt} = Ri, \quad L \frac{di}{dt} + Ri = E.$$

Alınan tənliyi dəyişənlərinə ayırıb inteqrallasaq alarıq:

$$\int \frac{L di}{E - Ri} = \int dt + \ln C, \quad \ln(E - Ri) = -\frac{R}{L}t + \ln C,$$

$$E - Ri = Ce^{-\frac{R}{L}t}, \quad i = \frac{E}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t}$$

$i(0) = 0$ şərtini burada nəzərə alsaq taparıq: $C = -\frac{E}{R}$,

$$i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

Buradan cərəyan şiddətinin maksimum qiyməti $i_{\max} = \frac{E}{R}$ olduğu alı-

na. Məsələnin şərtinə görə yazı bilərik:

$$0,99 \frac{E}{R} = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right), \quad e^{-\frac{R}{L}t} = 0,01, \quad \frac{R}{L}t = \ln 100,$$

$$t = \frac{L}{R} \ln 100 = \frac{30}{150} \ln 100 \approx 0,92 \text{ san.}$$

29. Naqilə $Q_0 = 1000$ vahid yük verilmişdir. İzolyator pis olduğundan naqıl öz yükünü tədricən itirir. Naqılın öz yükünü itirməsi sürəti onda olan yükün miqdarı ilə mütənasibdir. Əgər birinci dəqiqədə naqıl 100 vahid yük itiribse, $t = 10$ dəqiqədən sonra naqilda nə qədər yük qalar?

HƏLLİ. t anında naqilda olan yük Q olsun. Onda yükün itirilməsi sürəti bu an üçün $\left(-\frac{dQ}{dt} \right)$ olar. Minus işarəsi prosesin azalmağa getdiyini göstərir. Bu sürət Q ilə mütənasib olduğundan

$$-\frac{dQ}{dt} = kQ$$

diferensial tənliyini alarıq. Burada k -mütənasiblik əmsalıdır. Bu tənliyi dəyişənlərinə ayırıb, inteqrallasaq alarıq.

$$\int \frac{dQ}{Q} = -k \int dt + \ln C, \quad \ln Q = -kt + \ln C, \quad Q = Ce^{-kt}.$$

$t = 0$ olduqda $Q = Q_0 = 1000$ olduğundan axırıncı bərabərlikdən alarıq: $C = Q_0 = 1000$, $Q = 1000e^{-kt}$.

Əlavə şərtlərdən istifadə edərək k əmsalını tapa bilərik. $t = 1$ olduqda $Q = 1000 - 100 = 900$ vahid olduğundan: $900 = 1000e^{-k}$, $e^{-k} = 0,9$, $Q = 1000(0,9)^t$.

$t = 10$ olduqda buradan alarıq: $Q = 1000(0,9)^{10} \approx 348,7$.

30. Tutumu C olan kondensator gərginliyi E , müqaviməti R olan şəbəkəyə qoşulur. Kondensatorun q yükünün t zamanından asılılığı-

nı təyin edin.

HƏLLİ. Tutaq ki, t anında kondensatorun yükü q , cərəyan şiddəti $i = \frac{dq}{dt}$ -dir. Bu müddət ərzində şəbəkədə onun E gərginliyi ilə

kondensatorun gərginliyi $\frac{q}{C}$ fərqiə bərabər olan v elektrikhərəkətdirici qüvvəsi yaranır: $v = E - \frac{q}{C}$. Oni qanununa əsasən

$$i = \frac{v}{R}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{E - \frac{q}{C}}{R}. \text{ Buradan } R \frac{dq}{dt} = E - \frac{q}{C}, \quad \int \frac{dq}{EC - q} = -\frac{1}{RC} \int dt = -\ln A, \quad \ln|EC - q| = -\frac{1}{RC}t + \ln A, \quad EC - q = Ae^{-\frac{t}{RC}},$$

$$q = EC - Ae^{-\frac{t}{RC}}.$$

$t = 0$ olduqda $q = 0$ olduğunu burada nəzərə alaraq: $A = EC$,

$$q = CE \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right).$$

31. Maye ilə dolu silindirik çənin dibində yarıq əmələ gəlmişdir. Mayenin axma sürətinin çəndəki mayenin səviyyəsi ilə mütenasib olduğunu və bir sutkada mayenin 10 faizinin axdığını bilərək, nə qədər vaxtdan sonra çəndəki mayenin yarısının axdığını təyin edin.

HƏLLİ. Çənin oturacağıın radiusunu R , hündürlüyünü h ilə işarə edək. Tutaq ki, t anında çəndə qalan mayenin hündürlüyü x -ə bərabərdir. Onda t anında çəndə olan mayenin miqdan $\pi R^2 x$ olar.

Mayenin həcmnin dəyişmə sürəti isə $\pi R^2 \frac{dx}{dt}$ olar. Məsələnin şərtinə görə bu sürət x -lə mütenasibdir: $-\pi R^2 \frac{dx}{dt} = kx$. Burada k -mü-

tənasiblik əmsəlidir. Bu tənlik verilmiş məsələnin diferensial tənliyidir. Onu dəyişənlərinə ayırıb inteqrallasaq alırıq.

$$\int \frac{dx}{x} = -\frac{k}{\pi R^2} \int dt + \ln C, \quad \ln x = -\frac{k}{\pi R^2}t + \ln C, \quad x = Ce^{-\frac{kt}{\pi R^2}}.$$

$t = 0$ olduqda $x = h$ (çən doludur) başlangıç şərtini nəzərə alsaq:

$$C = h, \quad x(t) = he^{-\frac{k}{\pi R^2}t}. \text{ Əlavə şərtə görə } t = 1 \text{ olduqda } x = \frac{h}{10},$$

$$\frac{h}{10} = h e^{-\frac{k}{\pi R^2}}, \quad e^{-\frac{k}{\pi R^2}} = \frac{1}{10}, \quad x(t) = h \left(\frac{1}{10} \right)^t.$$

Çəndə mayenin yarısının qalması T vaxtı:

$$\frac{h}{2} = h \left(\frac{1}{10} \right)^T, \quad T = \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln \frac{1}{10}} = \frac{\ln 2}{\ln 10 - \ln 9} \approx 6,58.$$

32. Çən tərkibində 3 kq çənd həll olmuş 75 litr maye ilə doldurulmuşdur. Çənə bir dəqiqədə 4 litr su vurulur və 2 litr məhlul axıdılır (müntəzəm qarışdırılmaqla çəndə məhlulun qatılığı sabit saxlanılır) 25 dəqiqədən sonra məhlulda qalan çəndin miqdarını tapın.

HƏLLİ. Tutaq ki, t anında çəndə olan məhlulda çəndin miqdan $x(t)$ -dir. dt müddətdə çəndən axan çəndin miqdarını $-dx$ (minus işarəsi prosesin azalan olduğunu göstərir) işarə edək. t anına qədər çənə $4t$ litr su daxil olub, $2t$ litr məhlul axıdılır. Beləliklə, t anında mayenin ümumi həcmi $75 + 2t$ litr və onda x kq çənd həll olunubdur. Məhlulun qatılığını sabit qəbul etsək bir litr məhlulda olan çəndin

miqdan $\frac{x}{75 + 2t}$ kq olduğundan dt müddətində axıdılan məhlulda

$\frac{2xdt}{75 + 2t}$ kq çənd olar. Prosesin diferensial tənliyi aşağıdakı kimi olur:

$$-dx = \frac{2xdt}{75 + 2t}, \quad \int \frac{dx}{x} = -2 \int \frac{dt}{75 + 2t}, \quad \ln|x| = -\ln|75 + 2t| + \ln C,$$

$$x(t) = \frac{C}{75 + 2t}$$

$$t = 0 \text{ olduqda } x = 3 \text{ kq olduğundan: } C = 225, \quad x(t) = \frac{225}{75 + 2t}$$

25 dəqiqədən sonra mehlulda qalan qəndin miqdarını tapmaq üçün axırıncı bərabərlikdə $t = 25$ yazmaq lazımdır:

$$x = \frac{225}{75 + 50} = 1,8, \quad x = 1,8 \text{ kq.}$$

33. Çənin en kəsiyi tərəfi 6 m olan kvadratdır, hündürlüyü isə 4 m-dir.

Çən dəqiqədə 10 m^3 su ilə doldurulur. Çənin dibində tərəfi $\frac{1}{12}$ m

olan kvadrat deşikdən suyun axdığını və dərinliyinin 4 m olduğunu nəzərə alaraq onun doldurulması vaxtını təyin edin.

HƏLLİ. Tutaq ki, t müddətində çəndəki suyun səviyyəsi h -dir və dt müddətində suyun səviyyəsi dh , suyun həcmi isə $6 \cdot 6dh =$

$= 36dh$ qədər artır. Şərtə görə çənə su $10 \text{ m}^3/\text{dəq}$ sürətlə dolur. Ona görə də çəndə suyun səviyyəsinin artma sürəti $\frac{10}{36} \text{ m/dəq} = \frac{1}{216} \text{ m/san}$

olar. dt müddətində suyun həcmi $\frac{1}{216} \cdot 36dt = \frac{1}{6} dt$ olar. Bu müddət

ərzində çəndən $\mu d^2 \sqrt{2gh} dt$ qədər su axar. Burada su üçün $\mu = 0,6$,

$d^2 = \frac{1}{12^2} = \frac{1}{144}$. Beləliklə, prosesin diferensial tənliyi

$$36dh = \left(\frac{1}{6} - \frac{0,6}{144} \sqrt{2gh} \right) dt$$

olar. Dəyişənlərə ayırıb integrallasaq və başlangıç şərtləri nəzərə alsaq yazı bilərik.

$$\int \frac{36dh}{\frac{1}{6} - \frac{0,6}{144} \sqrt{2gh}} = \int dt + C,$$

$$t = \frac{12}{\left(\frac{0,6}{144} \sqrt{2g} \right)^2} \ln \frac{1}{1 - \frac{0,6}{144} \sqrt{2gh}} - \frac{72}{144} \sqrt{2g} \sqrt{h} + C.$$

$t = 0$ olduqda $h = 0$ olduğundan axırıncı bərabərlikdən:

$$C = - \frac{12 \ln 6}{\left(\frac{0,6}{144} \sqrt{2g} \right)^2}.$$

$$t = \frac{12}{\left(\frac{0,6}{144} \sqrt{2g} \right)^2} \ln \frac{1}{1 - \frac{1}{40} \sqrt{2gh}} - \frac{72}{240} \sqrt{2g} \sqrt{h}.$$

$h = 4 \text{ m}$ olduqda axırıncı bərabərlikdən $t \approx 20$ dəq alaraq.

34. Tutumu 1 litr olan qab tərkibində 21 faiz oksigen olan hava ilə doldurulmuşdur. Qaba en kəsiyi eyni olan iki boru birləşdirilmişdir. Borulardan biri ilə fasiləsiz olaraq qaba təmiz oksigen vurulur, digərindən qarışıq çıxır. Qabdan nə qədər qarışıq hava çıxarmaq lazımdır ki, onda yalnız təmiz oksigen qalsın. 10 litr qarışıq hava çıxardandan sonra qabda olan havanın tərkibində neçə faiz oksigen olacaq?

HƏLLİ. Tutaq ki, qabdan x litr qaz keçdiyi vaxt onda olan oksigen $a(x)$ faiz təşkil edir, yəni qabda $\frac{a(x)}{100}$ litr oksigen var. Onda

Δx litr qabda oksigen daxil olduqda, $\frac{a(x)}{100} \Delta x$ litr xaric olur. Qabda olan oksigenin miqdar

$$\frac{a(x)}{100} + \left[\Delta x - \frac{a(x + \Delta x)}{100} \Delta x \right] = \frac{a(x) + [100 - a(x + \Delta x)] \Delta x}{100}$$

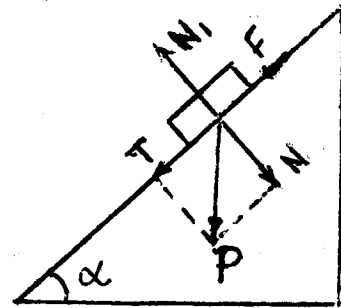
Bu oksigenin həcmi qazın ümumi həcmindən $a(x) + [100 - a(x + \Delta x)] \Delta x$ faizini təşkil edir. $a(x + \Delta x) - a(x) = [100 - a(x + \Delta x)] \Delta x$. Buradan Δx -ə bölüb $\Delta x \rightarrow 0$ şərtində limite keçsək alırıq:

$\frac{da}{dx} = 100 - a$, $\int \frac{da}{100 - a} = \int dx - \ln C$, $-\ln|100 - a| = x - \ln C$,
 $a = 100 - Ce^{-x}$. $x = 0$ olduqda $a = 21$ olduğunu axırıncı bərabər-
 likdə nəzərə alsaq: $C = 79$, $a(x) = 100 - 79e^{-x}$. $x = 10$ olduqda
 buradan alırıq: $a = 100 - 79e^{-10} \approx 99,9964\%$

Lakin qabda yalnız təmiz oksigen qalması, yəni $a = 100\%$ olma-
 sı üçün $100 = 100 - 79e^{-x}$, $e^{-x} = 0$. Bu bərabərlik $x \rightarrow \infty$ şərtin-
 də yerinə yetir.

35. Uzunluğu $L = 10$ m olan mail müstəvi üzəri ilə A cismi sürüşür.
 Müstəvinin maillik bucağı $\alpha = 45^\circ$ -dir. Sürtünmə əmsalı $k = 0,5$ -dir.
 Cismın hərəkət qanununu və cismın bütün yolu keçmək üçün lazım
 olan vaxtı təyin edin. Cismın başlanğıc anda müstəvinin yuxarı hissə-
 sində sakit dayanmışdır.

HƏLLİ. İstenilən t anında cismə üç qüvvə: şaquli aşağı yönəl-
 miş cismın ağırlıq qüvvəsi P , hərəkətin əksinə yönəlmiş sürtünmə
 qüvvəsi F və mail müstəviyə per-
 pendikulyar olan reaksiya qüvvəsi
 N_1 təsir edir (şəkil 21). P qüvvə-
 sinin normal və tangensial topla-
 nanlarını N və T ilə işarə etsək,
 $N = P \cos \alpha$, $T = P \sin \alpha$ yazı-
 bilərik. N və N_1 qüvvələri qiymət-
 cə bərabər, istiqamətə əks yönəl-
 mişdir. Sürtünmə qüvvəsi ədədi
 qiymətə N qüvvəsi ilə mütənəsi-
 bdir: $F = kN = kP \cos \alpha$. Cismə hər-
 rəkətinə səbəb olan qüvvə $R = T - F = P(\sin \alpha - k \cos \alpha)$ olur.
 Odur ki, Nyutonun ikinci qanununa əsasən cismın hərəkətinin dife-
 rensial tənliyi



Şəkil 21.

$$\frac{d^2 S}{dt^2} = g(\sin \alpha - k \cos \alpha), \quad S = \frac{g}{2}(\sin \alpha - k \cos \alpha)t^2 + C_1 t + C_2.$$

$t = 0$ olduqda $S = 0$, $v = \frac{dS}{dt} = 0$ başlanğıc şərtlərinə əsasən:
 $C_1 = C_2 = 0$,

$$S = \frac{g}{2}(\sin \alpha - k \cos \alpha)t^2 = \frac{g}{2}\left(\sin 45^\circ - \frac{1}{2} \cos 45^\circ\right)t^2 =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}gt^2, \quad S = \frac{\sqrt{2}}{8}gt^2$$

Cismın mail müstəvi üzərində yola sərf etdiyi vaxtı tapırıq:

$$t^2 = \frac{8S}{\sqrt{2}g} = \frac{4\sqrt{2}S}{g}, \quad t = 2\sqrt{\frac{S\sqrt{2}}{g}} = 2\sqrt{\frac{10\sqrt{2}}{10}} \approx 2,37 \text{ san.}$$

36. Elektrovoz üfüqi dəmir yolu ilə 72 km/saat sür'ətlə hərəkət edir.
 Sürücü elektrovozu tormozlayır. Tormozlanma başlanan andan hərə-
 kətə elektrovozun çəkisinin 0,2 hissəsi qədər müqavimət qüvvəsi tə-
 sir edir. Tormozlama başlanan andan elektrovoz dayanana qədər olan
 vaxt və bu vaxtda gedilən yolu tapın.

HƏLLİ. Elektrovozun çəkisini $P = mg$ ilə işarə edək. Məsələnin
 şərtinə görə müqavimət qüvvəsi $F_{\mu} = -0,2P = -0,2mg$. Onda Nyu-
 tonun ikinci qanununa görə

$$m \frac{d^2 S}{dt^2} = -0,2P, \quad \frac{d^2 S}{dt^2} = -0,2g.$$

Alınan tənliyi həll edib, onun $S(t) = -0,1gt^2 + C_1 t + C_2$ ümumi həl-
 lini tapırıq. Burada $S(0) = 0$, $S'(0) = 72 \text{ km/saat} = 20 \text{ m/san}$
 olduğundan $C_2 = 0$, $C_1 = 20$, $S(t) = -0,1gt^2 + 20t$.

Elektrovozun dayanma T vaxtı üçün $S'(T) = 0$ olmalıdır: yəni
 $-0,2gT + 20 = 0$, $T \approx 10,2 \text{ san}$. Elektrovozun bu müddətdə getdi-
 yi yolun uzunluğu

$$S(10,2) = -0,1 \cdot 9,8(10,2)^2 + 20 \cdot 10,2 \approx 102 \text{ m.}$$

37. Cisim başlangıç v_0 sür'etile şaquli istiqamətdə yuxarı atılmışdır. Cismin yalnız ağırlıq qüvvəsinin tə'siri altında hərəkət etdiyini bilərək, onun hərəkət qanununu tə'yin edin.

HƏLLİ. Cismin hərəkət tənliyi Nyutonun II qanununa əsasən $\frac{d^2S}{dt^2} = -g$ olduğundan $\frac{dS}{dt} = -gt + C_1$, $S = -\frac{gt^2}{2} + C_1t + C_2$.
 $S(0) = 0$, $S'(0) = v_0$ olduğundan alırıq: $C_1 = v_0$, $C_2 = 0$.

$$S = v_0t - \frac{gt^2}{2}$$

38. Kütləsi m_0 , başlangıç sür'əti v_0 olan cismi O nöqtəsindən a məsafədə yerləşən A nöqtəsindən OA istiqamətində hərəkət edir. Ona hər an O nöqtəsindən olan məsafənin kubu ilə tərs mütənasib olan qüvvə tə'sir edir. Nöqtənin hərəkət qanununu tapın.

HƏLLİ. Tutaq ki, $t = 0$ anında maddi nöqtə A nöqtəsində, t anında isə O nöqtəsindən $x(t)$ qədər məsafədə yerləşir. Onda

Nyutonun ikinci qanununa görə $m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{x^3}$ hərəkətin diferensial tənliyi olur, burada k mütənasiblik əmsəlidir.

$v^2 = \frac{k}{m}$ götürsək və tənliyin hər tərəfini $2x'dt$ -yə vurub inteqrallayaq:

$$d(\dot{x})^2 = \gamma^2 d\left(-\frac{1}{x^2}\right), \quad \dot{x}^2(t) = \gamma^2 \left(C_1 - \frac{1}{x^2(t)}\right).$$

Burada, $x(0) = a$, $x'(0) = v_0$ olduğundan:

$$C_1 = \frac{(av_0)^2 + \gamma^2}{(\alpha\gamma)^2} = \frac{1}{b^2}, \quad \dot{x} = \frac{\gamma}{bx} \sqrt{x^2 - b^2}.$$

Alınan tənliyi dəyişənlərinə ayıraraq inteqrallayaq:

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - b^2}} = \frac{\gamma}{b} \int dt + C_2, \quad \sqrt{x^2 - b^2} = \frac{\gamma}{b} t + C_2.$$

Buradan $x(0) = a$ şərtinə əsasən $C_2 = \sqrt{a^2 - b^2}$, $\sqrt{x^2 - b^2} = \frac{\gamma}{b} t + \sqrt{a^2 - b^2}$,
 $x(t) = \sqrt{\left(\frac{\gamma}{b} t + \sqrt{a^2 - b^2}\right)^2 + b^2} = \sqrt{\frac{\gamma^2}{b^2} t^2 + 2\frac{\gamma}{b} t \sqrt{a^2 - b^2} + a^2}.$

39. Başlangıç sür'əti sıfır, çəkisi $Q = 9216$ kq olan vagon üfüqü yol boyunca mütləq sür'əti $\omega = 12$ m/san olan küləyin tə'siri altında hərəkətə gəlir. Küləyin təzyiq qüvvəsi $P = kSu^2$ kq və hərəkətə müqavimət qüvvəsinin vagonun çəkisinin $\frac{1}{200}$ -ə bərabər olduğunu bilərək

aşağıdakıları tapın, burada $S = 6$ m² vagonun küləyin istiqamətinə perpendikulyar kəsiyinin sahəsi, u -isə küləyin vagona nəzərən sür'əti, $k = 0,12$.

- 1). Vagonun ən böyük sür'ətini tapın.
- 2). Bu sür'əti almaq üçün lazım olan T vaxtını tapın.
- 3). 3 m/san sür'ət almaq üçün vagonun keçdiyi x yolunu tapın.

HƏLLİ. Tutaq ki, t zamanında vagon $x(t)$ m yol gedir. Onda \dot{x} vagonun sür'əti, $u = \omega - \dot{x}$ isə küləyin vagona nəzərən sür'əti olur. Odur ki,

$$m\ddot{x} = kS(\omega - \dot{x})^2 - \frac{Q}{200}$$

vagonun hərəkət tənliyi olur. Tənlikdə $u(t) = \omega - \dot{x}(t)$ əvəzləməsini apararaq və dəyişənlərinə ayıraraq bilən

$$\dot{u} = \frac{kS}{m} \left[\frac{Q}{200kS} - u^2 \right]$$

tənliyin $u(0) = \omega$ başlangıç şərtini ödəyən həllini tapmaq:

$$u = \frac{a[\omega - a + (a + \omega)e^{bt}]}{a - \omega + (a + \omega)e^{bt}}, \quad a = \sqrt{\frac{Q}{200kS}} = 8,$$

$$b = \sqrt{\frac{gkS}{50m}} = 12,25 \cdot 10^{-3}, \quad \dot{x} = \omega - a \frac{\omega - a + (a + \omega)e^{bt}}{a - \omega + (a + \omega)e^{bt}}$$

Göstərmək olar ki, t artdıqca sür'ət artır. Axırını bərabərliyi aşağıdakı kimi yazaq:

$$\dot{x}(t) = \omega - a \frac{(a + \omega)e^{\frac{1}{2}bt} - (a - \omega)e^{-\frac{1}{2}bt}}{(a + \omega)e^{\frac{1}{2}bt} + (a - \omega)e^{-\frac{1}{2}bt}},$$

$$dx(t) = \omega - \frac{2a}{b} \ln \frac{d[(a + \omega)e^{\frac{1}{2}bt} + (a - \omega)e^{-\frac{1}{2}bt}]}{(a + \omega)e^{\frac{1}{2}bt} + (a - \omega)e^{-\frac{1}{2}bt}}, \quad x(0) = 0.$$

Burada hər tərəfi $[0, t]$ parçasında integrallayaq. Onda

$$x(t) = \omega t - \frac{2a}{b} \ln \frac{(a + \omega)e^{\frac{1}{2}bt} + (a - \omega)e^{-\frac{1}{2}bt}}{2a}$$

1). t artdıqca sür'ət artdığından sür'ət ən böyük qiymətini $t \rightarrow +\infty$ şərtində alır.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{x}(t) = \omega - a \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\omega - a + (a + \omega)e^{bt}}{a - \omega + (a + \omega)e^{bt}} = \omega - a = 12 - 8 = 4 \frac{\text{m}}{\text{san}}$$

2). Vaqonun ən böyük 4m/san sür'ətinə çatması üçün tələb olunan vaxt $T \rightarrow \infty$ şərtində mümkündür.

3). Sür'ətin 3m/san çatması üçün sərf olunan vaxtı tapaq. $\dot{x}(t)$ üçün alınmış ifadədə $\dot{x}(t) = 3$, $\omega = 12$, $a = 8$, $b = 12,25 \cdot 10^{-3}$ qiymətlərini yerinə yazıb, e^{bt} -tapaq. Onda $e^{12,25 \cdot 10^{-3}t} = 3,4$, $12,25 \cdot 10^{-3}t = \ln 3,4$, $12,25 \cdot 10^{-3}t \approx 1,2238$, $t \approx \frac{1,224 \cdot 10^3}{12,25} = 99,9 \text{ san.}$

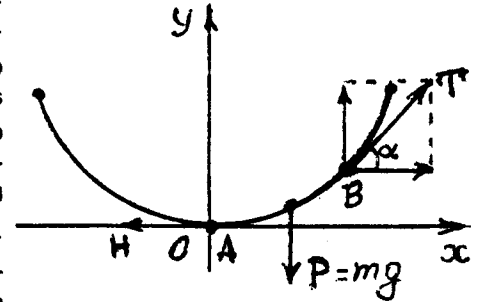
Bu qiymətləri $x(t)$ üçün alınmış düsturda yazıb, hesablayaq: $x(99,9) \approx$

$$\approx 12 \cdot 100 - \frac{2 \cdot 8 \cdot 10^3}{12,25} \ln \frac{5e^{0,612} - e^{-0,612}}{4} \approx 1200 - 1013 = 187 \text{ m.}$$

40. Sabit sıxlığa malik, en kəsiyinin sahəsi gerilmə qüvvəsilə mütənasib olan, uclarından asılmış ağır ipin aldığı formanı tapın.

HƏLLİ. Şərtə görə ipin en kəsiyinin sahəsi gerilmə qüvvəsi ilə mütənasibdir. Tutaq ki, ρ -ipin sıxlığı, F -dəyişən en kəsiyin sahəsidir

(şəkil 22). A ilə ipin ən aşağı nöqtəsini işarə edək. İpin $\bar{AB} = S$ hissəsi üç qüvvənin təsiri nəticəsində tarazlıq vəziyyətində olur: 1). A nöqtəsində üfüqi istiqamətdə yönəlmiş H gerilmə, 2). B nöqtəsində toxunan istiqamətində yönəlmiş və ox oxu ilə α bucağı emələ gətirən T gerilmə, 3). İpin $\bar{AB} = S$ hissəsinə uyğun şaquli aşağı yönələn



Şəkil 22.

$$\text{ağırlıq qüvvəsi } P = \int_0^x \rho F dS =$$

$$= \int_0^x \rho F \sqrt{1 + y'^2} dt.$$

Bu qüvvələrin oxlar üzrə proyeksiyaları cəmi sıfır olduğundan

$$\begin{cases} T \cos \alpha - H = 0, \\ T \sin \alpha - \int_0^x \rho F \sqrt{1 + y'^2} dt = 0. \end{cases}$$

$$\text{Buradan } H t g \alpha = \int_0^x \rho F \sqrt{1 + y'^2} dt, \quad y' = t g \alpha, \quad H y' = \int_0^x \rho F \sqrt{1 + y'^2} dt.$$

Bu bərabərlikdən diferensiallamaqla alırıq. $Hy''dx = \rho FdS$. Bütün en kəsikləri üçün sabit olan gerginliyi σ işarə edək. Onda şərtə görə yazmaq olar: $H = F_0\sigma$, $T = F\sigma$. Burada F_0 ilə A nöqtəsində ipin en kəsiyi işarə olunub. Koordinat başlanğıcını A nöqtəsində götürsək, $y'(0) = 0$ olmalıdır. Onda yazı bilərik.

$$T = F\sigma = \frac{H}{\cos\alpha} = \frac{HdS}{dx}, \quad \left(\frac{dx}{dS} = \cos\alpha\right), \quad F = \frac{HdS}{\sigma dx},$$

$$Hy''dx = \rho \frac{H}{\sigma} \cdot \frac{dS}{dx} dS, \quad y'' = \frac{\rho}{\sigma} \left(\frac{dS}{dx}\right)^2$$

Qövsün diferensialı $\frac{dS}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$ olduğundan $y'' = \frac{\rho}{\sigma} (1 + y'^2)$.

Tənliyi tertibini aşağı salmaq yolu ilə həll etsək alırıq:

$$y = -\frac{\sigma}{\rho} \ln \cos\left(\frac{\rho}{\sigma} x + C_1\right) + C_2.$$

Burada $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ başlanğıc şərtlərindən istifadə etsək:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad y = -\frac{\sigma}{\rho} \ln \cos \frac{\rho}{\sigma} x, \quad e^{\frac{\rho y}{\sigma}} \cos \frac{\rho}{\sigma} x = 1.$$

İpin en kəsiyi və sıxlığı sabit olduqda $P = \rho FS$, $y'' = \frac{\rho F}{H} \sqrt{1 + y'^2}$

alınır. Tənliyin $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ başlanğıc şərtlərini ödəyən həlli

$$y = ach \frac{x}{a} - a \text{ olur, } a = \frac{H}{\rho F}.$$

41. Kütləsi m olan riyazi rəqqas ağırlıq qüvvəsinin tə'siri altında şaquli müstəvi üzərində radiusu a olan çevrə qövsü boyunca hərəkət edir. Başlanğıc anda meyil bucağı φ_0 , sür'əti sıfır olduğunu bilərək və müqavimət qüvvəsini nəzərə almamaq şərtlə rəqqasın hərəkət tənliyini və tam dövrünü tapın.

HƏLLİ. Riyazi rəqqas ağırlıq qüvvəsinin tə'siri altında O nöqtəsi ətrafında rəqs edən bərk cismə deyilir (şəkil 23). Rəqqasın ağırlıq mərkəzinin fırlanma nöqtəsinə qədər olan məsafəsini a , çəki-sini $P = mg$ ilə işarə edək.

Tutaq ki, t zaman müddətində rəqqas A nöqtəsindən C nöqtəsinə gəlir, yəni $\overset{\frown}{AC} = S = a\varphi$ qədər yol gedir. Hər bir anda rəqqasın vəziyyəti $\angle AOC = \varphi$ bucağı ilə təyin olunur. C nöqtəsində rəqqasa tə'sir edən sapın \vec{Q} gərilmə qüvvəsi $\vec{N} = mg \cos \varphi$ qüvvəsilə tarazlaşır. Odur ki, $T = mg \sin \varphi$ qüvvəsinin tə'siri nəticəsində rəqqas hərəkət edir. Onda Nyutonun ikinci qanununa əsasən rəqqasın diferensial tənliyi alınır:

$$m \frac{d^2 S}{dt^2} = -mg \sin \varphi.$$

Kiçik rəqslər üçün $\sin \varphi \approx \varphi$ götürmək olar. Onda rəqqasın diferensial tənliyində $S = a\varphi$ və $\sin \varphi = \varphi$ götürsək alırıq:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + k^2 \varphi = 0, \quad k = \sqrt{\frac{g}{a}}.$$

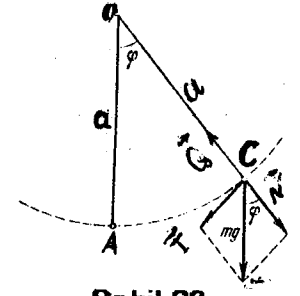
Tənlik sabit əmsallı tənlikdir. Bu tənliyin $r^2 + k^2 = 0$ xarakteristik tənliyin kökləri $r_{1,2} = \pm ik$ olduğundan onun ümumi həlli

$$\varphi(t) = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Buradan $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$ başlanğıc şərtlərinə əsasən $C_1 = \varphi_0$, $C_2 = 0$, $\varphi(t) = \varphi_0 \cos kt$. Rəqsin tam dövrü üçün ala-

$$\text{rıq: } T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

42. Çubuğun sol ucu ($x=0$) fasiləsiz qızdırıldığından temperaturu τ_0 sabit qalır. Furiye qanununa görə istilik çox olan yerdən az olan is-



Şəkil 23.

tiqamətdə vahid zamanda $-k \frac{d\tau}{dx} F$ qədər axır. Burada k -istilikkeçir-

mə əmsalı, F -çubuğun en kəsiyinin sahəsi, $\frac{d\tau}{dx}$ istiliyin axma sür'əti-
dir. Bunları bilərək, çubuqda istiliyin yayılma $\tau(x)$ qanununu tapın.

HƏLLİ. Çubuq öz istiliyini ətraf mühitə verdiyindən tədricən soyu-
yur. İstilik çubuğun daha isti nöqtələrindən soyuq nöqtələrinə keçir. İti-
rilən istiliyin əvəzini çıxmaq üçün çubuğun sol ucu daim qızdırılır.

Tutaq ki, çubuğun sol ucundan x məsafəsində yerləşən nöqtədə
temperaturu $\tau(x)$, $x+dx$ nöqtəsində isə $\tau(x+dx)$ olar. dt
zamanda çubuğun dx elementi $\lambda\tau(x)dA$ qədər istilik itirir. Burada
 dA -çubuğun mühitlə təmasda olan sahəsi, λ -mütənasiblik əmsalıdır.
Çubuğun dt zaman müddətində x və $x+dx$ nöqtələrində itirdiyi is-
tilik miqdarı $Q_1 = -kF\tau'(x)dt$, $Q_2 = -kF\tau'(x+dx)dt$. Temperatur
stasionar olduğundan (yə'ni zamandan asılı olaraq dəyişmir), axan is-
tiliyn miqdarı itirilən istiliyin miqdarına bərabər olar:

$$-kF\tau'(x)dt = -kF\tau'(x+dx)dt + \lambda\tau(x)dA dt.$$

Burada dx sonsuz kiçik kəmiyyət olduğundan $\tau'(x+dx) \approx \tau'(x) +$
 $+\tau''(x)dx$ götürmək olar. Digər tərəfdən $dA = cdx$, c -çubuğun en
kəsiyinin uzunluğudur. Bunları yuxarıdakı bərabərsizlikdə yazıb, sadə-
ləşdirsək

$$kF\tau''(x) = \lambda\tau(x)c$$

bərabərliyini alaraq, $\frac{\lambda c}{kF} = p^2$ götürüb alınan $\tau'' - p^2\tau = 0$ tənliyi həll

edək: Buradan $r^2 - p^2 = 0$ xarakteristik tənliyin köklərinin $r_{1,2} = \pm p$

olduğunu nəzərə alsaq, tənliyin $\tau(x) = C_1 e^{px} + C_2 e^{-px}$ ümumi həlli
alınar. İstiliyin yayılması azalan proses olduğundan və $x \rightarrow \infty$
şərtində (yə'ni çubuğun sol ucundan böyük məsafələrdə) $\tau \rightarrow 0$

olduğunu nəzərə alsaq $C_1 = 0$ götürülməlidir. Onda $\tau(x) = C_2 e^{-px}$:

$x=0$ olduqda $\tau = \tau_0$ olduğundan buradan alırıq. $C_2 = \tau_0$,

$$\tau(x) = \tau_0 e^{-px}.$$

43. $\tau = \tau_0 e^{-px}$ düsturundan istifadə edərək aşağıdakı məsələni həll
edin. Çubuğun bir ucu $100^\circ C$ qədər qızdırılmışdır. Bu ucdan vahid
uzunluqda olan məsafədə çubuğun temperaturu $95^\circ C$ -dir. Həmin uc-
dan 10 vahid uzunluqda olan məsafədə çubuğun temperaturunu tapın.

HƏLLİ. Baxılan halda $\tau_0 = 100^\circ C$ olduğundan $\tau = 100e^{-px}$.

Burada $x=1$ olduqda $\tau = 95^\circ C$ olduğundan: $95 = 100e^{-p}$,
 $e^{-p} = 0,95$, $\tau = 100(0,95)^x$.

$x=10$ olduqda buradan alırıq. $\tau(10) = 100(0,95)^{10} \approx 60^\circ C$.

44. Eyni qaz ilə doldurulmuş müxtəlif Q_1 və Q_2 təzyiqləri altında
olan iki silindrik qab kranlı boru ilə birləşdirilmişdir. Silindrlərin həcm-
ləri uyğun olaraq V_1 və V_2 -dir. Əgər kranı açsaq onda qaz böyük təz-
yiq altında olan qabdan kiçik təzyiq olan qaba axacaq. Qazın t anın-
da axma sür'əti (hər bir t anı üçün) silindrlərdə olan qazın təzyiqlə-
rinin kvadratları fərqi ilə mütənasibdir. Silindrlərdə təzyiqin dəyişmə
qanununu tapın.

HƏLLİ. Tutaq ki, t anında silindrlərdə olan qazın təzyiqləri uy-
ğun olaraq P_1 və P_2 -dir. $P_1 > P_2$ qəbul edək. dt zamanı ərzində bi-
rinci silindrdən ikinciyə kütləsi dM olan qaz axarsa, onun axma sür'-
əti $\frac{dM}{dt}$ olar. Məsələnin şərtinə görə yazsa bilərik.

$$\frac{dM}{dt} = k(P_1^2 - P_2^2). \quad (*)$$

Burada k -mütənasiblik əmsalıdır. Digər tərəfdən dM kütləsi təzyiqi
 P_1 olan silindrdən dt zamanında çıxan qazın M_1 kütləsinə və təz-
yiqi P_2 olan ikinci silindrə daxil olan qazın M_2 kütləsinə bərabərdir.

Qazın sıxlığını δ ilə işarə etsək və onun sabit temperaturda təzyi-
qə nəzərən mütənasib dəyişdiyini, yə'ni $\delta_1 = aP_1$, $\delta_2 = aP_2$ qəbul
etsek (burada a -mütənasiblik əmsalıdır) yazmaq olar:

$$M_1 = \delta_1 V_1 = aP_1 V_1, \quad M_2 = \delta_2 V_2 = aP_2 V_2.$$

Buradan: $dM_1 = -aV_1 dP_1$ (azalır), $dM_2 = aV_2 dP_2$ (artır).

Bunları (*) ifadesinde yazsaq

$$\begin{cases} V_1 dP_1 = -\frac{k(P_1^2 - P_2^2)}{a} dt, \\ V_2 dP_2 = \frac{k(P_1^2 - P_2^2)}{a} dt \end{cases} \quad (**)$$

sistemi alanq. Buradan $V_1 dP_1 + V_2 dP_2 = 0$, $V_1 P_1 + V_2 P_2 = C_1$.

(**) sisteminin birinci tənliyini $P_2 V_2$ -yə, ikinci tənliyini $P_1 V_1$ -ə vurub tərəf-tərəfə çıxsaq alanq:

$$V_1 V_2 \left(P_2 \frac{dP_1}{dt} - P_1 \frac{dP_2}{dt} \right) = -\frac{k}{a} (P_1^2 - P_2^2) (P_2 V_2 + P_1 V_1).$$

Buradan $V_1 V_2 \left(P_2 \frac{dP_1}{dt} - P_1 \frac{dP_2}{dt} \right) = -\frac{k}{a} C_1 (P_1^2 - P_2^2)$ olduğunu və

$x = \frac{P_1}{P_2}$ qəbul etsək, $\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{P_1}{P_2} \right) = \frac{P_2 \frac{dP_1}{dt} - P_1 \frac{dP_2}{dt}}{P_2^2}$ olduğundan alınq:

$$V_1 V_2 P_2^2 \frac{dx}{dt} = -\frac{k}{a} C_1 P_2^2 (x^2 - 1), \quad V_1 V_2 \frac{dx}{dt} = -\frac{k}{a} C_1 (x^2 - 1).$$

Dəyişənləri ayırıb inteqrallasaq alanq:

$$V_1 V_2 \frac{dx}{x^2 - 1} = -\frac{k C_1}{a} dt, \quad \frac{V_1 V_2}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} = -\frac{k C_1}{a} t + C_2.$$

Baxılan məsələ üçün

$$\begin{cases} V_1 P_1 + V_2 P_2 = C_1, \\ \frac{V_1 V_2}{2} \ln \frac{P_1 + P_2}{P_1 - P_2} = -\frac{k C_1}{a} t + C_2 \end{cases}$$

ümumi inteqralı olur. Şərtə görə $t = 0$ olduqda $P_1 = Q_1$, $P_2 = Q_2$ olduğundan

$$C_1 = V_1 Q_1 + V_2 Q_2, \quad C_2 = \frac{V_1 V_2}{2} \ln \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1 - Q_2}.$$

Bunları ümumi inteqralda yazsaq alanq:

$$\begin{cases} V_1 P_1 + V_2 P_2 = V_1 Q_1 + V_2 Q_2, \\ \frac{V_1 V_2}{2} \left(\ln \frac{P_1 + P_2}{P_1 - P_2} - \ln \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1 - Q_2} \right) = \frac{k}{a} (V_1 Q_1 + V_2 Q_2) t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{Q_1 - P_1}{P_2 - Q_2} = \frac{V_2}{V_1}, \\ \ln \frac{(P_1 + P_2)(Q_1 - Q_2)}{(Q_1 + Q_2)(P_1 - P_2)} = \frac{2k}{a V_1 V_2} (Q_1 V_1 + Q_2 V_2) t \end{cases}$$

Burada $Q_1 V_1 + Q_2 V_2 = \alpha$ və $\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1 + Q_2} e^{\frac{2k\alpha}{a V_1 V_2} t} = \beta$ işarə etsək:

$$\begin{cases} P_1 V_1 + P_2 V_2 = \alpha, \\ \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2} = \beta, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1 = \frac{\alpha(1+\beta)}{V_1 + V_2 + (V_1 - V_2)\beta}, \\ P_2 = \frac{\alpha(1-\beta)}{V_1 + V_2 + (V_1 - V_2)\beta} \end{cases}$$

45. Kütləsi m olan maddi nöqtə üfuku istiqamətdə düzxətli hərəkət edir. Bu nöqtəyə təsir edən qüvvə sürətin v_0 olduğu andan başlayaraq keçən zamanın kubu ilə mütənəsbdir (mütənəsblik əmsalı k -dir). Bundan əlavə, nöqtəyə sürətlə zamanın hasili ilə mütənəsb olan əks qüvvə təsir edir (mütənəsblik əmsalı k_1 -dir). Sürətin zamandan asılılığını tapın.

HƏLLİ. $t = 0$ anında maddi nöqtənin sürətinin v_0 olduğunu qəbul etsək şərtə görə maddi nöqtəyə $F_1 = kt^3$ və $F_2 = -k_1 vt$ qüvvələri təsir edir. Onda Nyutonun ikinci qanununa görə yazmaq olar:

$$m \frac{dv}{dt} = kt^3 - k_1 vt.$$

Bu xətti tənlikdir. Onu həll etsək alarıq:

$$v(t) = b(at^2 - 1) + C_1 e^{-at^2}$$

burada $a = \frac{k_1}{2m}$, $b = \frac{2km}{k_1^2}$. $t = 0$ olduqda $v = v_0$ olduğundan

$$v_0 = -b + C_1, \quad C_1 = v_0 + b, \quad v(t) = b(at^2 - 1) + (v_0 + b)e^{-at^2}$$

46. Borucuq şaquli oxla α bucağı əmələ gətirən ox ətrafında sabit ω bucaq sür'ətilə fırlanır. Borucuqda kürəcik sürtünməz hərəkət edir. Başlanğıc anda kürəciyin fırlanma oxu üzərində yerləşdiyi və borucuğun oxunun müsbət istiqamətinə yönəlmiş v_0 sür'ətinə malik olduğunu nəzərə alaraq kürəciyin borucuq boyunca hərəkət qanununu tapın. (Xüsusi hal olaraq $\alpha = \frac{\pi}{2}$ götürün)

HƏLLİ. Kürəciyə hər an ağırlıq qüvvəsi $P = mg$ və mərkəzəqaç-

ma qüvvəsi $F = m\omega^2 r$ tə'sir edir. Burada m - kürəciyin kütləsi, g - sərbəstdüşmə tə'sili, r - kürəciyin fırlanma oxuna qədər olan məsafədir (şəkil 24). Həmin qüvvələrin əvəzləyicisinin ox hərəkət oxuna proyeksiyası

$$R_x = -P \cos \alpha + F \cos(90^\circ - \alpha) = -P \cos \alpha + F \sin \alpha,$$

$$R_x = m(\omega^2 r \sin \alpha - g \cos \alpha).$$

Burada $r = x \sin \alpha$ olduğunu nəzərə alsaq yaza bilərik.

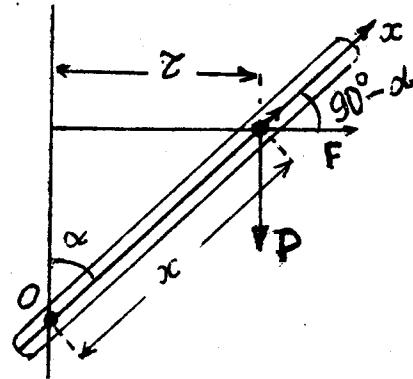
$$R_x = m(x\omega^2 \sin^2 \alpha - g \cos \alpha).$$

Onda Nyutonun ikinci qanununa görə yazmaq olar.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = m(x\omega^2 \sin^2 \alpha -$$

$$-g \cos \alpha). \quad k^2 = \omega^2 \sin^2 \alpha$$

qəbul etsək, bu tənlik



Şəkil 24.

$\frac{d^2 x}{dt^2} - k^2 x = -g \cos \alpha$ şəklinə düşər. Bu sabit əmsallı ikitərtibli bir-cins olmayan diferensial tənlikdir. Onu həll etsək alarıq:

$$x = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt} + \frac{g \cos \alpha}{k^2}.$$

Burada $x(0) = 0$, $x'(0) = v_0$ şərtlərini nəzərə alsaq

$$C_1 = \frac{v_0 k - g \cos \alpha}{2k^2}, \quad C_2 = \frac{v_0 k + g \cos \alpha}{2k^2},$$

$$x = \frac{1}{2k^2} [(v_0 k - g \cos \alpha) e^{kt} - (v_0 k + g \cos \alpha) e^{-kt} + 2g \cos \alpha]$$

($k = \omega \sin \alpha$). Xüsusi halda, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ qəbul etsək buradan alarıq.

$$x = \frac{v_0}{2\omega} (e^{\omega t} - e^{-\omega t}).$$

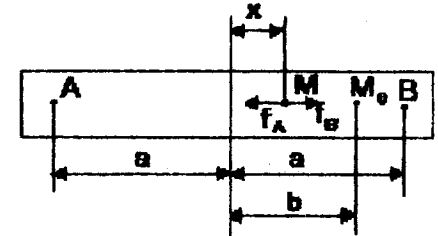
47. Kütləsi m olan M maddi nöqtə aralarındakı məsafə $2a$ olan eynigüclü A və B mənbəyiləri tərəfindən cəzb edilir. Cazibə qüvvəsi M nöqtəsinin mənbəyindən olan məsafəsilə mütənasibdir. Maddi nöqtə başlanğıc anda sakit vəziyyətdə mənbəyiləri birləşdirən xəttin ortasından b məsafədə yerləşmişdir. Nöqtənin hərəkət qanununu tapın.

HƏLLİ. Tutaq ki, t anında maddi nöqtə mərkəzden x məsafəsində yerləşmişdir. Maddi nöqtəyə hər an A və B mənbəyilərindən cazibə qüvvələri tə'sir edir (şəkil 25). Baxılan hal üçün yaza bilərik: $f_A =$

$$= -k(a+x), \quad f_B = k(a-x).$$

Burada k - mütənasiblik əmsalındır. Bu qüvvələrin əvəzləyicisi $R = f_A + f_B = -2kx$ olar.

Məsələnin şərtinə və Nyutonun ikinci qanununa görə yaza bilərik:



Şəkil 25.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -2kx,$$

buradan $r^2 = \frac{2k}{m}$ qəbul etsək alırıq.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + r^2 x = 0, \quad x = C_1 \sin rt + C_2 \cos rt.$$

$t = 0$ olduqda $x = b$, $\frac{dx}{dt} = 0$ olduğunu nəzərə alsaq tapırıq:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = b, \quad x = b \cos rt = b \cos \sqrt{\frac{2k}{m}} t.$$

48. Başlangıç kütləsi M olan damcı sərbəst düşür və bərabər buxarlanaraq hər saniyə öz kütləsini m (q) itirir. Müqavimət qüvvəsi damcının hərəkət sür'əti ilə mütenasibdir. Başlangıç anda damcının sür'ətinin sıfır olduğunu bilərək, düşmə anından başlayaraq onun hərəkət sür'ətinin zamandan asılılığını tapın. Mütenasiblik əmsali $k \neq 2m$.

HƏLLİ. Damcı bərabər buxarlandığından, onun kütləsi t zamanından asılı olaraq $M - mt$ qanunu ilə azalır. t anında onun hərəkətinə $(M - mt)g$ ağırlıq qüvvəsi və $kv(t)$ müqavimət qüvvəsi təsir edir. Kütlə zamandan asılı olduğundan damcının hərəkət qanunu

$$\frac{d}{dt}[(M - mt)v] = (M - mt)g - kv$$

tənliyi ilə verilir. Burada $v(t)$ -damcının sür'ətidir. Buradan alınan

$$(M - mt) \frac{dv}{dt} + (k - m)v = (M - mt)g$$

xətti tənliyi həll edərək alırıq:

$$v(t) = C(M - mt)^{\frac{k}{2m-k}} - \frac{g}{2m-k}(M - mt).$$

$v(0) = 0$ şərtinə əsasən

$$C = \frac{g}{2m-k} M^{\frac{2-k}{m}}, \quad v(t) = \frac{g}{2m-k} (M - mt) \left[\left(1 - \frac{m}{M} t\right)^{\frac{k}{m}-2} - 1 \right].$$

49. Başlangıç kütləsi m_0 (q) olan damcı bərabər m_1 (q/san) sür'ətilə buxarlanır və başlangıç v_0 (sm/san) sür'ətilə etəlet qüvvəsinin təsiri ilə hərəkət edir. Mühitin hərəkətə müqavimət qüvvəsi damcının hərəkət sür'əti və radiusu ilə mütenasib olub, başlangıç anda ($t = 0$) f_0 (dina)-a bərabərdir. Damcının hərəkət sür'ətinin zamandan asılılığını tapın.

HƏLLİ. Damcının kütləsi t zamanından asılı olaraq $m = m_0 - m_1 t$ qanunu ilə azalır. t anında damcının sür'əti $v(t)$ olarsa, mühütün müqavimət qüvvəsi $F(t) = -kv(t)R(t)$ olar, burada k -mütenasiblik əmsali, $R(t)$ isə t anında damcının radiusudur. Damcı buxarlandığından onun radiusu zamandan asılı olaraq dəyişir. Damcının formasının küre olduğunu qəbul etsək, damcının (kürenin) kütləsi üçün alırıq: ($\gamma = 1$ q/sm³ xüsusi çəkisi).

$$m = \gamma v = 1 \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi R^3, \quad R = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3(m_0 - m_1 t)}{4\pi}}$$

Beləliklə, mühütün müqavimət qüvvəsi $F = kv^3 \sqrt[3]{\frac{3(m_0 - m_1 t)}{4\pi}}$ olduğundan hərəkətin diferensial tənliyi

$$\frac{d[(m_0 - m_1 t)v]}{dt} = -kv^3 \sqrt[3]{\frac{3(m_0 - m_1 t)}{4\pi}}$$

şəklində verilməlidir. Buradan

$$-m_1 v + (m_0 - m_1 t) \frac{dv}{dt} = -kv^3 \sqrt[3]{\frac{3(m_0 - m_1 t)}{4\pi}}$$

Bu xətti tənliyi həll edib, $t = 0$ olduqda $F = f_0$, $v = v_0$ olduğunu nəzərə alsaq yazı bilərik:

$$v = \left(1 - \frac{m_1}{m_0} t\right)^{-1} C e^{\frac{3k}{m_1} \sqrt{\frac{3m_0}{4\pi}} \sqrt{1 - \frac{m_1}{m_0} t}}, \quad C = v_0 e^{-\frac{3k}{m_1} \sqrt{\frac{3m_0}{4\pi}}}$$

$$f_0 = kv_0^3 \sqrt{\frac{3m_0}{4\pi}}, \quad k = \frac{f_0}{v_0^3} \sqrt{\frac{4\pi}{3m_0}}$$

$$v = v_0 \left(1 - \frac{m_1}{m_0} t\right)^{-1} e^{-\frac{3f_0}{m_1 v_0} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{m_1}{m_0} t}\right)}$$

50. Mayədə fırlanan cismə təsir edən müqavimət qüvvəsi fırlanmanın bucaq sür'ətilə mütənəsbdir. Cismın 200 dövr/dəq sür'ətlə fırlanmağa başladığı andan bir dəqiqə sonra sür'əti 120 dövr/dəq olarsa, bucaq sür'ətinin zamandan asılılığını tapın.

HƏLLİ. Tutaq ki, t -anında cismın fırlanma bucaq sür'əti $\omega(t)$ (dövr/dəq), $\frac{d\omega}{dt}$ isə bucaq sür'ətinin dəyişməsidir. Onda məsələnin şərtinə əsasən

$$\frac{d\omega}{dt} = -k\omega$$

tənliyi alınır. Burada k -mütənəsblik əmsalındır. Bu tənliyi həll etsək alarıq: $\omega(t) = Ce^{-kt}$. $t = 0$ olduqda $\omega_0 = 200$ dövr/dəq olduğundan

$$C = 200, \quad \omega(t) = 200e^{-kt}$$

$t = 1$ olduqda $\omega = 120$ dövr/dəq olduğunu burada nəzərə alsaq yazıya bilərik:

$$120 = 200e^{-k}, \quad e^{-k} = \frac{3}{5}, \quad \omega(t) = 200(e^{-k})^t = 200\left(\frac{3}{5}\right)^t$$

51. Kütləsi m olan güllə v_0 başlanğıc sür'ətilə üfüqə nəzərən α bucağı altında atılmışdır. Mühütün müqavimət qüvvəsi güllənin sür'ətilə mütənəsbdir. Güllənin hərəkət trayektoriyasını tapın.

HƏLLİ. Güllənin atıldığı nöqtəni koordinat başlanğıcı, güllənin atılma istiqamətinə yönəlmiş üfüqi oxu absis oxu götürək. Güllənin hərəkət trayektoriyasının ixtiyari $M(x, y)$ nöqtəsində ona iki qüvvə: şaquli aşağı yönəlmiş $P = mg$ ağırlıq qüvvəsi və trayektoriyaya toxunan və hərəkətin əksinə yönəlmiş $F = kv$ müqavimət qüvvəsi təsir edir (şəkil 26). Hərəkətin diferensial tənliyi

$$m \frac{d^2 S}{dt^2} = -kv - mg$$

şəklində yazılır. Burada $S(t)$ -güllənin t anında

$$\text{getdiyi məsafə, } v = \frac{dS}{dt}$$

$$\text{sür'əti } a = \frac{d^2 S}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$$

isə tə'cili olur. Əyrinin ixtiyari $M(x, y)$ nöqtəsi

üçün toxunanın absis oxu ilə emələ getirdiyi bucaq φ olarsa, onda

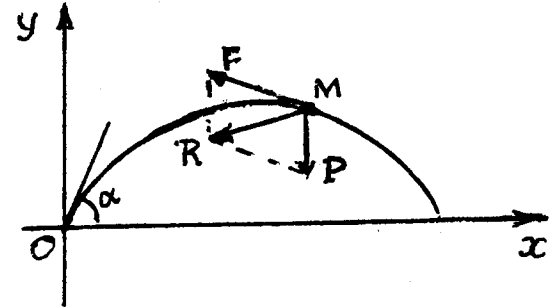
$$\begin{cases} dx = dS \cos \varphi, \\ dy = dS \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{dS}{dt} \cos \varphi, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{dS}{dt} \sin \varphi \end{cases}$$

Buradan $\frac{dS}{dt}$ sür'ətin absis və ordinat oxları üzrə proyeksiyaları

$v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$ olduğundan alınır. Tənliyi sür'ətin koordinat oxlarına proyeksiyalarlı ilə ifadə edək.

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k \frac{dx}{dt}, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = -k \frac{dy}{dt} - mg \end{cases}$$

Bu sistemi ayırı-ayrılıqda həll edib tapırıq:



Şəkil 26.

$$\begin{cases} x(t) = C_1 + C_2 e^{-\frac{k}{m}t}, \\ y(t) = C_3 + C_4 e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}t, \end{cases}$$

Şərtə əsasən $S(0) = 0$, $S'(0) = v_0$ olduğundan, bunları proyeksiyalarla yazsaq $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $x'(0) = v_0 \cos \alpha$, $y'(0) = v_0 \sin \alpha$ alırıq. Bu şərtləri tapılan həldə nəzərə alsaq tapırıq:

$$C_1 = \frac{mv_0}{k} \cos \alpha, \quad C_2 = -\frac{mv_0}{k} \cos \alpha, \quad C_3 = \frac{m^2 g}{k^2} + \frac{mv_0}{k} \sin \alpha,$$

$$C_4 = -\frac{m^2 g}{k^2} - \frac{mv_0}{k} \sin \alpha,$$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{mv_0 \cos \alpha}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right), \\ y(t) = \frac{m}{k^2} (mg + kv_0 \sin \alpha) \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) - \frac{mg}{k}t, \end{cases}$$

Bu, güllənin hərəkətinin parametrik şəkildə tənliyidir. $\frac{m}{k} v_0 \cos \alpha =$

$= a$, $\frac{m}{k^2} (mg + kv_0 \sin \alpha) = b$ işarə etsək alırıq:

$$1 - e^{-\frac{k}{m}t} = \frac{x}{a}, \quad -\frac{k}{m}t = \ln \left(1 - \frac{x}{a} \right), \quad t = -\frac{m}{k} \ln \left(1 - \frac{x}{a} \right),$$

$$y = b \frac{x}{a} + \frac{gm^2}{k^2} \ln \left(1 - \frac{x}{a} \right).$$

52. Kütləsi m olan maddi nöqtə uzunluğu L və kütləsi M olan bircins çubuğun sol ucundan a məsafəsində onun oxunun davamında

yerləşmişdir. Çubuğun və maddi nöqtənin cazibə qüvvəsini hesablayın.

HƏLLİ. Ümumdünya cazibə qanuna əsasən kütlələri m_1 və m_2 olan

aralarındakı məsafə r olan cisimlər bir-birini $F = k \frac{m_1 m_2}{r^2}$ qüvvəsi

ilə cəzb edir. Burada k -cəzbəmə əmsəlidir. Çubuğun dx elementar parçasının maddi nöqtəni cəzb etməsi elementar dF qüvvəsini hesablayaq. Çubuq bircins olduğundan dx elementinin dm_1 kütləsi

$$\frac{dm_1}{M} = \frac{dx}{L}, \quad dm_1 = \frac{M}{L} dx$$

mütənasibdən tapılır. Maddi nöqtə ilə dx arasındakı məsafəni $r = a + x$ götürsək Nyutonun qanununa əsasən yazıb bilərik:

$$dF = k \frac{mM}{L(a+x)^2} dx.$$

Bu tənlik, axtarılan cazibə qüvvəsinin diferensial tənliyidir. Onu inteqrallasaq alırıq:

$$F = -k \frac{mM}{L} \frac{1}{a+x} + C. \quad x=0 \text{ olduqda } F = k \frac{mM}{a^2} \text{ olduğundan}$$

$$C = k \frac{mM}{a^2} \frac{a+L}{L}, \quad F = k \frac{mM}{L} \left(\frac{a+L}{a^2} - \frac{1}{a+x} \right).$$

Xüsusi halda $x = L$ götürsək çubuğun və maddi nöqtənin arasında təsir edən cazibə qüvvəsini alırıq:

$$F = kmM \frac{2a+L}{a^2(a+L)}.$$

3. Elmin və texnikanın müxtəlif sahələrinə aid məsələlər

Materiallar müqavimətindən məlumdur ki, tirin elastikiyyət xəttinin əyilmə radiusu $R = \frac{EJ}{M(x)}$ düsturu ilə təyin olunur, burada E -

elastikiyyət modulu, J - en kəsiyin neytral oxu nəzərən ədalət momenti, $M(x)$ - isə x nöqtəsinə uyğun kəsiyə bir tərəfdən təsir edən xarici qüvvələrin neytral oxu nəzərən əyilmə momentlərin cəmi-

dir. $y = y(x)$ əyrisinin əyilmə radiusu $R = \frac{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$ düsturu ilə

verildiyindən $\frac{y''}{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{M(x)}{EJ}$ əyilmənin diferensial tənliyi olur.

Əyilmə çox kiçik olduqda $(y')^2$ kiçik olduğundan nəzərə alınmır. Odur ki, $y'' = \pm \frac{M(x)}{EJ}$ əyilmənin diferensial tənliyi olur.

1. Əhalinin artım sürəti əhalinin miqdarı ilə mütənasibdir. Əgər başlangıç an kimi qəbul edilmiş anda əhalinin miqdarı A_0 , bir ildən sonra $a\%$ artmışsa, əhalinin A miqdarı ilə t zamanı arasındakı asılılığı tapın.

Azərbaycan əhalisinin 1985-ci il yanvarın 1-nə 7 milyon nəfər olduğunu və 1984-cü ilə nəzərən $3,2\%$ artdığını bilərək, yuxarıdakı şərtlər daxilində, əhalinin 2000-ci il yanvarın 1-nə nə qədər olacağını tapın. (Bakı şəhəri 1,6 milyon, əhalinin artımı 3%).

HƏLLİ. Tutaq ki, t anında əhalinin sayı $A(t)$ qədərdir. Onda əhalinin miqdarının dəyişmə sürəti $\frac{dA}{dt}$ olar. Məsələnin şərtinə görə

$$\frac{dA}{dt} = kA.$$

Burada k - mütənasiblik əmsalındır. Buradan $A = Ce^{kt}$. $t = 0$ olduqda, $A = A_0$ olduğundan $C = A_0$, $A = A_0 e^{kt}$.

Əhalinin bir ildə $a\%$ artdığını qəbul etsək $\left(\frac{aA_0}{100}\right)$ onun bir ildən sonrakı miqdarı $A_0 + \frac{aA_0}{100} = \frac{A_0(100+a)}{100}$ olduğunu nəzərə alsaq ya-

za bilərik:

$$\frac{A_0(100+a)}{100} = A_0 e^k, \quad e^k = \frac{100+a}{100}, \quad A = A_0 \left(\frac{100+a}{100}\right)^t.$$

Alınan düstura əsasən Azərbaycan və Bakının əhalisinin 2000-ci ildə nə qədər olacağını hesablaya bilirik.

a). $A = 7$, $t = 15$, (2000-1985), $a = 3,2\%$,

$$A_{2000} = 7 \left(\frac{100+3,2}{100}\right)^{15} \approx 11,2 \text{ milyon.}$$

b). $A = 1,6$, $t = 15$, $a = 3\%$,

$$A_{2000} = 1,6 \left(\frac{100+3}{100}\right)^{15} \approx 2,49 \text{ milyon.}$$

2. A maddəsi kimyəvi reaksiya nəticəsində B maddəsinə çevrilir. Sabit temperaturda və müəyyən şərtlər daxilində reaksiyanın sürəti qalan A maddəsinin miqdarı ilə mütənasibdir. Reaksiya başlayandan bir saat sonra A maddəsindən $44,8\text{q}$, 3 saatdan sonra isə $11,2\text{q}$ qalmışdır. A maddəsinin reaksiyadan əvvəlki miqdarını və nə qədər -dən sonra həmin maddənin $\frac{1}{64}$ hissəsinin qaldığını təyin edin.

HƏLLİ. A maddəsinin başlangıç anda miqdarını a ilə işarə edək. Reaksiya başlayandan keçən t müddət ərzində alınan B maddəsinin miqdarını $x(t)$ ilə işarə edək. Reaksiyanın sürəti $\frac{dx}{dt}$ olar. t müddəti ərzində A -da qalan maddə $a - x$ olar. Onda reaksiyanın diferensial tənliyini

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)$$

şəklində yazı bilərik. Burada k - mütənasiblik əmsalındır və kimyəvi prosesin növündən, şərtindən asılıdır. Alınan tənliyin həlli

$$x = a - Ce^{-kt}$$

olduğundan $x(0) = 0$ şərtinə əsasən $C = a$, $x = a(1 - e^{-kt})$.

$t = 1$ saat olduqda $a - x = 44,8$, $x = a - 44,8$, $t = 3$ saat olduqda $x = a - 11,2$ olduğundan yazı bilərik:

$$\begin{cases} a - 44,8 = a(1 - e^{-k}), \\ a - 11,2 = a(1 - e^{-3k}) \end{cases}$$

Buradan $e^k = 2$, $a = 89,6$, $x = 89,6(1 - 2^{-t})$. Maddənin qalan

$$\frac{1}{64} \text{ hissəsinin miqdar } a - x = \frac{89,6}{64} \text{ olduğundan } \frac{89,6}{64} = 89,6 \cdot 2^{-t},$$

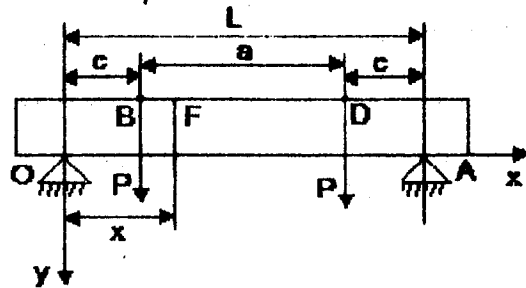
$$2^t = 64, \quad t = 6.$$

3. Dəmiryolu relsləri arasındakı məsafə $a = 1,6$ m-dir. Elektrovozun hər relsə göstərdiyi yük $P = 9$ ton-dur. Dəmiryolu körpüsünün eninə qoyulmuş tirləri aralarındakı məsafə L olan fermalar üzərində qoyulmuşdur. Tirin en kəsiyi sahəsinin neytral oxı nəzərən ətalet momenti $J = 45000 \text{ sm}^4$, elastikiyyət modulu $E = 10^5 \text{ kq/sm}^2$ -dir. Eninə qoyulmuş tirlərin ortasının mümkün olan əyilməsinin maksimum $0,2$ sm olduğunu nəzərə alaraq fermalar arasındakı L məsafəsini tapın.

HƏLLİ. Məsələyə eninə qoyulmuş O və A dayaqları üstündə yerləşən B və D nöqtələrində P qüvvəsi təsir edən tir kimi baxaq (şəkil 27). Koordinat başlanğıcı olaraq O nöqtəsi, ox olaraq OA düz xətti, oy şaquli aşağı yönəlmiş düz xətti götürək. Tirin əyilməsi çox kiçik olduğundan əyilmənin diferensial tənliyini

$$y'' = \pm \frac{M(x)}{EJ} \text{ şəklində}$$

götürmək olar. O və A nöqtələrində dayaqların reaksiyaları $R_O =$



Şəkil 27.

$= R_A = P$ olur. Koordinat başlanğıcından x ($0 < x < c + a$) məsafədə yerləşən BD sahəsindəki F kəsiyi üçün təpənməz oxı nəzərən əyilmə momentləri cəmi $M(x) = P(L - c - x) - P(L - x) = -Pc$ olur. Baxılan halda $y'' < 0$ olduğundan tirin əyilməsinin diferensial tənliyi

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{Pc}{EJ}$$

şəklinə düşər. Bu tənliyi iki dəfə ardıcıl integrallasaq alırıq:

$$y' = -\frac{Pc}{EJ}x + C_1, \quad y = -\frac{Pc}{EJ} \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2.$$

$x = 0$ olduqda $y = 0$, $x = L$ olduqda $y = 0$ sərhəd şərtlərini burada nəzərə alsaq tapırıq: $C_2 = 0$, $C_1 = \frac{PcL}{EJ}$, $y = \frac{Pc}{2EJ}x(L - x)$.

$x = \frac{L}{2}$ olduqda (tirin ortasında) maksimum əyilməni tapırıq:

$$h = \frac{PcL^2}{8EJ}, \quad L = a + 2c \text{ olduğundan buradan alırıq:}$$

$$h = \frac{P}{8EJ} c(a + 2c)^2, \quad 4c^3 + 4ac^2 + a^2c - \frac{8EJh}{P} = 0.$$

Məsələdə verilənlərin ədədi qiymətlərini burada nəzərə alsaq

$$c^3 + 160c^2 + 6400c - 200000 = 0$$

tənliyinin alırıq. $z = \frac{c}{10}$, yəni $c = 10z$ qəbul etsək və tənliyin hər iki

tərəfini 1000-ə ixtisar etsək alırıq. $z^3 + 16z^2 + 64z - 200 = 0$,

$$(z - 2)(z^2 + 18z + 100) = 0, \quad z_1 = 2, \quad z_{2,3} = -9 \pm i\sqrt{19}.$$

$z_1 = 2$ kökünə uyğun $c = 20$. Odur ki,

$$L = 2c + a = 2 \cdot 20 + 160 = 200 \text{ sm} = 2 \text{ m}.$$

4. Düz yoldan dairəvi yola keçən dəmiryolu hissəsinin tənliyini tapın. Keçid əyrilərinin uzunluğu L , dairəvi yolun radiusu r -dir.

HƏLLİ. Keçid əyrisinin $\frac{1}{R}$ əyriliyi müntəzəm olaraq sıfırdan dairəvi hissənin əyriliyinə $\left(\frac{1}{r}\right)$ qədər dəyişir. Ona görə də yazı bilərik:

$\frac{1}{R} = kS$. Burada k -mütənasiblik əmsali, S -keçid əyrisinin başlanğıcından əyrinin ixtiyari $M(x, y)$ nöqtəsinə qədər olan qövsün uzunluğudur. k əmsali $S = L$ olduqda $\frac{1}{R} = \frac{1}{r}$ şərtindən tapılır. $\frac{1}{r} = kL$,

$k = \frac{1}{rL}$. Onda yazı bilərik: $\frac{1}{R} = \frac{S}{rL}$. Keçid əyrisi bütün L boyunca absis oxundan az fərqləndiyindən Ox oxunu L boyunca Oy oxunu

şaquli yuxarı yönəldək. Onda S qövsünün uzunluğunu M nöqtəsinin x absisi ilə əvəz etmək olar. Bu məsələ üçün də bucaq əmsali $k = y'$ çox kiçik olduğundan əyrinin əyriliyi $\frac{1}{R} = |y''|$ kimi götürmək olar. Onda

$$y'' = \frac{x}{rL} \quad (y'' > 0)$$

keçid əyrisinin diferensial tənliyi olur. Tənliyi integrallasaq

$$y' = \frac{1}{rL} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1, \quad y = \frac{1}{6rL} x^3 + C_1 x + C_2.$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \text{ şərtlərinə əsasən } C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad y = \frac{x^3}{6rL}.$$

5. Su axıdılmaq üçün nəzərdə tutulmuş polad boru L uzunluğunda divardan kənara çıxır. Borunun qalınlığı δ sm, daxili diametri d -dir. L uzunluğu nə qədər olmalıdır ki, borunun ucunun əyilməsi h sm olsun.

HƏLLİ. Borunu bərabər paylanmış q (vahid uzunluğa düşən yük) yükü ilə yüklənmiş konsol tir kimi qəbul etmək olar. Borunun divardan ξ məsafədə yerləşən elementar $d\xi$ uzunluğuna $q d\xi$ yükü təsir

edir. Həmin qüvvənin divardan x məsafədə olan N nöqtəsinə nəzərən momenti $q(\xi - x)d\xi$, əyilmə momenti isə (şəkil 28).

$$M = \int_x^L q(\xi - x)d\xi = q \frac{(L - x)^2}{2}.$$

Tirin əyilmə xəttinin diferensial tənliyi

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EJ} \quad (y'' > 0)$$

olduğundan, M -in qiymətini burada yazsaq alırıq:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{q}{2EJ} (L - x)^2$$

Bu tənliyi integrallasaq alırıq:

$$y' = -\frac{q}{2EJ} \frac{(L - x)^3}{3} + C_1, \quad y = \frac{q}{24EJ} (L - x)^4 + C_1 x + C_2.$$

$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$ şərtlərini nəzərə alsaq

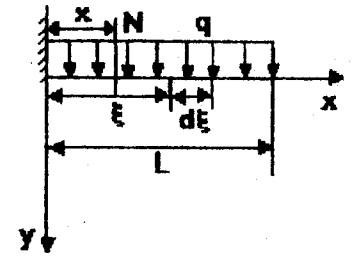
$$C_1 = \frac{qL^3}{6EJ}, \quad C_2 = -\frac{qL^4}{24EJ}, \quad y = \frac{q}{24EJ} (L - x)^4 + \frac{qL^3}{6EJ} x - \frac{qL^4}{24EJ}.$$

Borunun $x = L$ ucunda əyilmə $h = \frac{qL^4}{8EJ}$ olduğundan alırıq:

$$L = \sqrt[4]{\frac{8EJh}{q}}.$$

6. Uzunluğu L olan tir A və B dayaqlarına söykənir. Tirə ümumi çəkisi P olan bərabər paylanmış yük təsir edir. Tirin əyilmə tənliyini və maksimum (h) əyilməsini tapın.

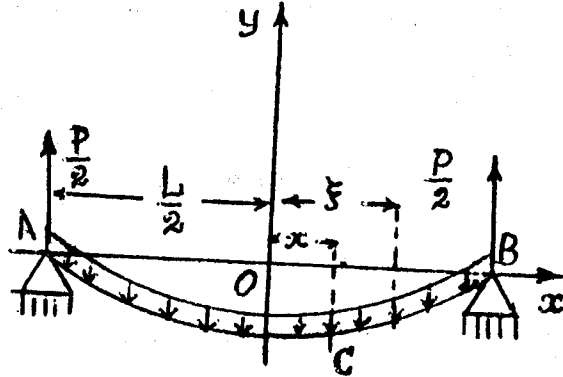
HƏLLİ. Dayaqların reaksiyaları $\frac{P}{2}$ olar. Hər vahid uzunluğa dü-



Şəkil 28.

şən yük $q = \frac{P}{L}$ olar. Koordinat oxları olaraq, AB -dən keçən düz xətt

absis, AB -nin orta nöqtəsindən keçən perpendikulyarı ordinat oxu qəbul edək (şəkil 29). Koordinat başlangıcından sağda x məsafədə yerləşən C kəsiyinə baxaq. Onda C kəsikdən sağda $\frac{P}{2}$



Şəkil 29.

yükünün momenti $M_1 = \left(\frac{L}{2} - x\right) \frac{P}{2}$.

Koordinat başlangıcından $\xi > x$ məsafədə yerləşən $d\xi$ uzunluğunda tirə təsir edən yük $\frac{P}{L} d\xi$, həmin yükün C kəsiyə nəzərən momenti $-(\xi - x) \frac{P}{L} d\xi$ olar. Onda tirin CB hissəsi üçün bütün yükün momenti

$$M(x) = - \int_x^{\frac{L}{2}} (\xi - x) \frac{P}{L} d\xi + \left(\frac{L}{2} - x\right) \frac{P}{2} = \frac{P}{2} \left(\frac{L}{4} - \frac{x^2}{L}\right).$$

Tirin əyilməsinin diferensial tənliyi

$$y'' = \frac{M(x)}{EJ} \quad (y'' > 0)$$

olduğundan (E - elastikiyyət modulu, J - ətalət momentidir)

$$y'' = \frac{P}{2EJ} \left(\frac{L}{4} - \frac{x^2}{L}\right).$$

$$\begin{aligned} \text{Tənliyi inteqrallasaq alırıq: } y' &= \frac{P}{2EJ} \left(\frac{L}{4}x - \frac{1}{L} \cdot \frac{x^3}{3}\right) + C_1, \quad y = \\ &= \frac{P}{2EJ} \left(\frac{L}{8}x^2 - \frac{x^4}{12L}\right) + C_1x + C_2. \end{aligned}$$

Buradan $y'(0) = 0$, $y\left(\pm \frac{L}{2}\right) = 0$ olduğunu nəzərə alsaq tapırıq:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{5PL^3}{384EJ}, \quad y = \frac{P}{2EJ} \left(\frac{L}{8}x^2 - \frac{x^4}{12L}\right) - \frac{5PL^3}{384EJ}.$$

Tirin maksimum əyilməsini tapmaq üçün $x = 0$ (tirin ortası) götürmək lazımdır:

$$h = -\frac{5PL^3}{384EJ}.$$

7. Uzunluğu L , eni b olan tir O və A dayaqlarına söykənir. Tirə səviyyəsi yuxarı dayaq səviyyəsində olan su təbəqəsi təsir edir. Tirin əyilmə tənliyini və maksimum əyilməsini tapın.

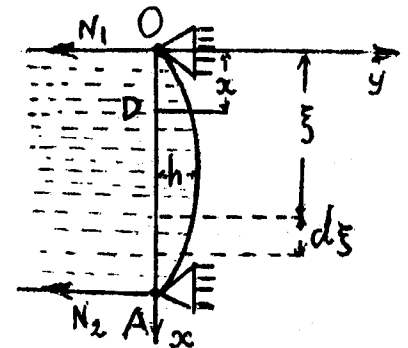
HƏLLİ. Tirin ξ dərinliyində olan $b d\xi$ sahəsini götürək. Onda ξ dərinliyində həmin sahəyə $dQ = b \xi d\xi$ hidrostatik təzyiq təsir edəcək. dQ elementar təzyiqi dayaqlarda

$$\begin{aligned} \text{elementar } dN_1 &= \frac{L - \xi}{L} dQ, \quad dN_2 = \\ &= \frac{\xi dQ}{L}, \quad dN_1 = \frac{(L - \xi)b\xi}{L} d\xi, \end{aligned}$$

$$dN_2 = \frac{b\xi^2}{L} d\xi \text{ reaksiyaları ya-}$$

radacaq (şəkil 30). Buradan $[0, L]$ parçasında inteqrallamaqla alırıq:

$$N_1 = \frac{bL^2}{6}, \quad N_2 = \frac{bL^2}{3}.$$



Şəkil 30.

Elementar $b\xi d\xi$ yükünün koordinat başlangıcından x məsafəsində olan D nöqtəsinə nəzərən momenti $b\xi(\xi - x)d\xi$ olar. Onda D kəsiyi üçün bütün qüvvələrin əyilmə momenti

$$M = b \int_x^L (\xi - x) \xi d\xi - N_2(L - x) = \frac{b}{6} (x^3 + 2L^3 - 3L^2x) -$$

$$-\frac{bL^2}{3}(L - x) = \frac{b}{6} (x^3 - L^2x).$$

Tirin əyilməsinin diferensial tənliyini $y'' = \pm \frac{M(x)}{EI}$ şəkildə verildiyindən baxılan halda ($y'' < 0$)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b}{6EI} (x^3 - L^2x).$$

Tənliyi integrallasaq alarıq:

$$y' = \frac{b}{6EI} \left(\frac{x^4}{4} - \frac{L^2x^2}{2} \right) + C_1, \quad y = \frac{b}{6EI} \left(\frac{x^5}{20} - \frac{L^2x^3}{6} \right) + C_1x + C_2.$$

$x = 0$ olduqda $y = 0$, $x = L$ olduqda $y = 0$ sərhəd şərtlərindən istifadə etsək taparıq:

$$C_2 = 0, \quad C_1 = \frac{7bL^4}{360EI}, \quad y = \frac{b}{360EI} (3x^5 - 10L^2x^3 + 7L^4x).$$

Bu tirin əyilmə tənliyidir. Tirin maksimum əyilməsini tapmaq üçün bu funksiyanın maksimumunu tapmaq kifayətdir. $x = Lt$ əvəzləməsini aparaq. (burada $0 \leq x \leq L$, $0 \leq t \leq 1$). Onda $z(t) = y(Lt) =$

$$= \frac{bL^5}{360EI} (3t^5 - 10t^3 + 7t). \text{ Buradan } z'(t) = \frac{bL^5}{360EI} (15t^4 - 30t^2 + 7) = 0, \quad 15t^4 - 30t^2 + 7 = 0, \quad 15u^2 - 30u + 7 = 0, \quad (u = t^2).$$

$$u_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 105}}{15} = 1 \pm \frac{\sqrt{120}}{15}.$$

$$0 \leq t \leq 1 \text{ olduğundan } u_1 = 1 - \frac{\sqrt{120}}{15}, \quad t_1 = \sqrt{1 - \frac{\sqrt{120}}{15}} \approx 0,519$$

götürülür. $x = Lt$ olduğundan $x \approx 0,519L$ olur. $z''(0,519) < 0$ olduğundan tirin əyilməsi $t \approx 0,519$ qiymətində maksimum olur:

$$y_{\max} = h \approx 0,0065 \frac{bL^5}{EI}.$$

9. Tutaq ki, a miqdarda A maddəsi P və Q maddələrinə parçalanır. Bu maddələrin alınması sür'əti parçalanmış maddənin həmin andaki miqdarı ilə mütenasibdir. t anına qədər alınmış P və Q maddələrinin miqdarı uyğun olaraq $x(t)$, $y(t)$ və $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $x(1) = \frac{3a}{8}$, $y(1) = \frac{a}{8}$ olduğunu bilərək, onların dəyişmə qanununu tapın.

HƏLLİ. t anı üçün A maddəsinin miqdarı $(a - x - y)$ olar. Onda t anında P və Q maddələrinin alınması sür'əti

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k_1(a - x - y), \\ \frac{dy}{dt} = k_2(a - x - y), \end{cases}$$

burada k_1 və k_2 -mütenasiblik əmsallarıdır. Alınan sistemi həll etmək üçün sistemin birinci tənliyini t -yə görə diferensiallayaq və çevirmələr aparaq:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k_1 \left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} \right) = -k_1 \left[\frac{dx}{dt} + k_2(a - x - y) \right],$$

$$y = -\frac{1}{k_1} \frac{dx}{dt} + a - x, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -k_1 \left[\frac{dx}{dt} + k_2a - k_2x + \frac{k_2}{k_1} \frac{dx}{dt} + k_2x - k_2a \right], \quad \frac{d^2x}{dt^2} + (k_1 + k_2) \frac{dx}{dt} = 0.$$

$x = C_1 + C_2 e^{-(k_1+k_2)t}$ alınan tənliyin ümumi həlli olduğundan $y =$

$$= -\frac{1}{k_1} \frac{dx}{dt} + a - x \text{ əsasən } y = a + \frac{k_2}{k_1} C_2 e^{-(k_1+k_2)t} - C_1.$$

C_1 və C_2 sabitlərini $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ başlanğıc şərtlərindən tapırıq.

$$C_1 = \frac{k_1 a}{k_1 + k_2}, \quad C_2 = -\frac{k_1 a}{k_1 + k_2}.$$

$$\begin{cases} x = \frac{k_1 a}{k_1 + k_2} [1 - e^{-(k_1+k_2)t}], \\ y = \frac{k_2 a}{k_1 + k_2} [1 - e^{-(k_1+k_2)t}] \end{cases}$$

Burada $x(1) = \frac{3a}{8}$, $y(1) = \frac{a}{8}$ olduğunu nəzərə alsaq tapırıq:

$$k_1 = \frac{3}{4} \ln 2, \quad k_2 = \frac{1}{4} \ln 2, \quad k_1 + k_2 = \ln 2, \quad e^{k_1+k_2} = 2.$$

$$\begin{cases} x = \frac{3a}{4} (1 - 2^{-t}) = \frac{3a}{4} \left(1 - \frac{1}{2^t}\right), \\ y = \frac{a}{4} (1 - 2^{-t}) = \frac{a}{4} \left(1 - \frac{1}{2^t}\right) \end{cases}$$

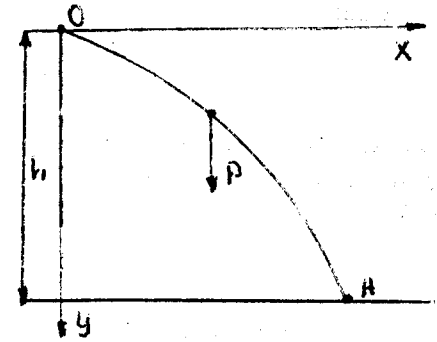
10. Təyyarə yerdən h m hündürlükdə üfüqi istiqamətdə v km/saat sürətlə uçuş. Təyyarədən yükü verilmiş A nöqtəsindən üfüqi olaraq hansı məsafədə atmaq lazımdır ki, yük A nöqtəsinə düşsün. Yükün başlanğıc nisbi sürəti sıfırdır və havanın müqavimət qüvvəsi nəzərə alınmır.

HƏLLİ. Koordinat başlanğıcını yükün atıldığı nöqtədə götürək. Yüke yalnız $P = mg$ ağırlıq qüvvəsi təsir edir. Nyutonun ikinci qanununu tətbiq etsək, yükün koordinat oxlarına görə hərəkətinin diferensial tənliyini alırıq: (şəkil 31)

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = mg \end{cases}$$

Sistemi inteqrallasaq alırıq:

$$\begin{cases} x = C_1 t + C_2, \\ y = \frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4 \end{cases}$$



Şəkil 31

$t = 0$ olduqda $x = 0$, $\frac{dx}{dt} = v$,

$y = 0$, $y' = 0$ olduğundan tapırıq: $C_1 = v$, $C_2 = C_3 = C_4 = 0$,

$$x = vt, \quad y = \frac{gt^2}{2}.$$

Bu sistemdən t -ni yox etsək alırıq: $y = \frac{g}{2} \frac{x^2}{v^2}$, $x = v \sqrt{\frac{2y}{g}}$.

Burada $y = h$ götürsək alırıq: $x = v \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

11. Gedən prosesdə bir maddə başqasına çevrilir və məhsulun əmələ gəlməsi sürəti çevrilən maddenin mövcud miqdarı ilə mütənasib olur (belə hadisəyə birtərtibli proses deyilir). İlk miqdar m_0 olan bir maddə başqa maddəyə çevrilir və alınan məhsuldan dərhal ikinci məhsul hasil olmağa başlayır. Hər iki çevirmə birtərtibli proses kimi baş verir. Mütənasiblik əmsalları birinci prosesdə k_1 , ikinci prosesdə k_2 -dir ($k_1 \neq k_2$). Proses başlayandan t zaman vahidi keçəndən sonra ikinci maddədən ne qədər alınır?

HƏLLİ. Reaksiya başlayandan keçən t müddət ərzində birinci maddədən reaksiya nəticəsində alınan məhsulun miqdarını x ilə işarə edək. Onda t müddəti ərzində birinci maddədən $m_0 - x$ qədər

qalar. Reaksiyanın sürəti $\frac{dx}{dt}$ olduğundan, məsələnin şərtinə görə bi-

rinci maddə üçün

$$\frac{dx}{dt} = k_1(m_0 - x)$$

yazmaq olar. Bu tənliyi həll etməklə birinci maddənin $x(t)$ miqdarını tapırıq. İkinci proses də birtərəfli proses olduğundan onun diferensial tənliyi

$$\frac{dy}{dt} = k_2[x(t) - y]$$

olar. Burada t - zaman, y - ikinci məhsulun miqdarıdır.

$$x(t) = m_0 - Ce^{-k_1 t}$$

birinci tənliyin ümumi həlli olur. $t = 0$ olduqda $x = 0$ olduğundan

$$C = m_0, \quad x(t) = m_0(1 - e^{-k_1 t})$$

$x(t)$ -nin bu qiymətini ikinci tənlikdə yerinə yazsaq

$$\frac{dy}{dt} + k_2 y = m_0 k_2 (1 - e^{-k_1 t})$$

xətti diferensial tənliyini alırıq. Onu həll etsək alırıq:

$$y = m_0 - \frac{m_0 k_2}{k_2 - k_1} e^{-k_1 t} + C e^{-k_2 t}$$

$t = 0$ olduqda $y = 0$ olduğundan

$$C = \frac{m_0 k_1}{k_2 - k_1}, \quad y(t) = m_0 - \frac{m_0}{k_2 - k_1} (k_2 e^{-k_1 t} - k_1 e^{-k_2 t})$$

12. Dairəvi yarpağının sahəsinin böyümə sür'əti yarpağın radiusu və ona düşən işığın miqdarı ilə mütənasibdir. Günəş işığını miqdarı yarpağın sahəsi və şüanın yarpağa nəzərən şaquli yönəlmiş oxla əmələ gətirdiyi bucağın kosinusu ilə mütənasibdir. Əgər səhər saat 6-da yarpağın sahəsi 1600 sm^2 , həmin gün saat 18-də 2500 sm^2 olarsa, yarpağın S sahəsinin t zamandan asılılığını tapın. Günəş şüasının şaquli oxla əmələ gətirdiyi bucaq saat 8-də və 18-də 90° , günorta isə, saat 12-də 0° -yə bərabərdir.

HƏLLİ. t anında yarpağın sahəsini $S(t)$ ilə işarə edək. Onda məsələnin şərtinə əsasən

$$\frac{dS}{dt} = k r Q,$$

burada r - yarpağın radiusu, k - mütənasiblik əmsalı, Q - günəş işığının miqdarıdır. Digər tərəfdən $Q = \gamma S \cos \alpha$, burada γ - mütənasiblik əmsalı, α - günəş şüaları ilə yarpağa perpendikulyar olan düz xətt arasında qalan bucaqdır. Məsələnin verilənlərinə əsasən başlanğıc an olaraq saat 6 qəbul edək. Onda $S(0) = 1600 \text{ sm}^2$, $S(12) = 2500 \text{ sm}^2$ ($t = 12$ saat 18-ə uyğun vaxtdır). $\alpha = \alpha(t)$ xətti, artan funksiyadır və

$$\alpha(0) = -\frac{\pi}{2}, \quad \alpha(6) = 0, \quad \alpha(12) = \frac{\pi}{2}. \quad \text{Odur ki, yazsaq:}$$

$$\alpha(t) = \frac{\pi}{12} t - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{12} (t - 6), \quad Q = \gamma S \cos \frac{\pi}{12} (t - 6).$$

t anında dairəvi yarpağın sahəsi $S(t)$, radiusu r olduğundan

$$r(t) = \sqrt{\frac{S(t)}{\pi}}, \quad \frac{dS}{dt} = \frac{k\gamma}{\sqrt{\pi}} S \sqrt{S} \cos \frac{\pi}{12} (t - 6).$$

Dəyişənləri ayırıb, tənliyi həll etsək alırıq:

$$-\frac{2}{\sqrt{S}} = \frac{12k\gamma}{\pi\sqrt{\pi}} \sin \frac{\pi}{12} (t - 6) + C.$$

Burada $S(0) = 1600$, $S(12) = 2500$ şərtlərini nəzər alsaq tapırıq:

$$C = -\frac{9}{200}, \quad k\gamma = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{2400}, \quad -\frac{2}{\sqrt{S}} = \frac{1}{200} \sin \left[\frac{\pi}{12} (t - 6) \right] - \frac{9}{200},$$

$$S = \frac{160000}{\left[9 - \sin \frac{\pi}{12} (t - 6) \right]^2}.$$

MÜSTƏQİL HƏLL ETMƏK ÜÇÜN MƏSƏLƏLƏR

1. Əyrinin ixtiyari nöqtəsində çəkilən normalın ox oxuna qədər olan

parçasının orta nöqtəsinin $y^2 = ax$ paraboləsi üzərində olduğunu bilərək, ayrinin tapın. Əyri koordinat başlanğıcından keçir.

CAVAB: $\left[y^2 = 4ax + 4a^2 \left(1 - e^{-\frac{x}{a}} \right) \right]$

2. Əyrinin ixtiyari $M(x, y)$ nöqtəsinin OM -radius-vektoru həmin nöqtədə əyriyə çəkilən MP toxunanının və ax oxunun əmələ gətirdiyi üçbucağın sahəsi 2-yə bərabərdir. Əyrinin $A(2; -2)$ nöqtəsindən keçdiyini bilərək onu tapın.

$$[3y^2 + 2xy - 4 = 0].$$

3. İxtiyari nöqtəsində normalaltının uzunluğu 4-ə bərabər olub, $A(-1; 4)$ nöqtəsindən keçən əyrini tapın.

$$[y^2 = 8x + 24].$$

4. Əyriyə çəkilən toxunanın koordinat oxları arasında qalan parçası toxunma nöqtəsində yarıya bölünür. Əyri $(2; 3)$ nöqtəsindən keçir. Bu əyrini tapın.

$$[xy = 6].$$

5. Cismnin hərəkət sür'əti hər anda gedilən yol ilə mütənasibdir. Cismnin ilk 10san. ərzində 100m, 15san. ərzində 200m qol getmişdir. Cismnin t müddətdə nə qədər yol geder?

$$\left[S = 25 \cdot 2^{\frac{t}{5}} \right].$$

6. Düzxətli hərəkətin tə'cili zamanla mütənasibdir. Gedilən yolun zamandan asılılığını tapın. $t = 0$ olduqda $v = 0$, $S = 0$ və $t = 1$ olduqda $S = \frac{1}{3}$ -dir.

$$\left[S = \frac{1}{3} t^3 \right].$$

7. Su ilə dolu silindrik çənin diametri 3m, hündürlüyü 6m-dir. Şaquli

yerləşdirilmiş çənin dibində diametri $\frac{1}{24}$ m olan dairəvi deşik açılmışdır. Suyun çəndən tam boşalma vaxtını tapın.
[$T = 3$ saat 5 dəq.].

8. Cismnin soyuması sür'əti cismnin temperaturu ilə ətraf mühitin temperaturu fərqi ilə mütənasibdir. Havanın temperaturu $20^\circ C$ -dir. Mə'lumdur ki, cism 10 dəqiqədə $100^\circ C$ -dən $70^\circ C$ -ə qədər soyuyur. Cismnin temperaturunun dəyişmə qanununun zamandan asılılığını tapın.

$$\left[\theta = 20 + 80 \left(\frac{5}{8} \right)^{\frac{t}{10}} \right].$$

9. Çəndə tərkibində 10kq duz olan 100 litr məhlul var. Çəndə dəqiqədə 3 litr su vurulur və çəndən 1 litr məhlul axıdılır. Məhlul müntəzəm olaraq qarışdırıldığından məhlulun qatılığı hər yerdə bərabər olur. 1 saat 40 dəqiqədən sonra çəndə nə qədər duz qalar?

$$[2,5 \text{ kq}].$$

10. Sür'əti v , gedilən yol S və zaman t arasındakı asılılıq $v \cos t + S \sin t = 2$ tənliyi ilə verilmişdir. Əgər $t = 0$ olduqda $S = 0$ olarsa, gödülən yolun zamandan asılılığını tapın.

$$S = 2 \sin t + \cos t.$$

NUMUNƏVİ MİSALLAR HƏLLİ

Bu fəsilde yoxlama işlərini və sərbəst çalışmaları yerinə yetirməyə kömək məqsədilə diferensial tənliklər bəhsinə aid nümunəvi misallar həlli verilmişdir.

1. Həllin varlığı, yeganəliyi və təqribi həll

1. $y' = \sqrt{y-x} + 1$ tənliyinin həllinin varlığı və yeganəliyi oblastını tapın.

HƏLLİ. Tənliyin sağ tərəfi $f(x, y) = \sqrt{y-x} + 1$ funksiyası $y \geq x$ yarım müstəvisində təyin olunmuş kəsilməz funksiyadır. Odur ki, bu yarım müstəvisinin ixtiyari nöqtəsindən integral əyrisi keçir, yəni həll var. $f'_y(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{y-x}}$ törəməsi ancaq $y > x$ oblastında kəsilməz olur. Deməli, $y > x$ oblastında həll var və yeganədir. Aydındır ki, $y = x$ düz xətt boyunca $f'_y(x, y)$ törəməsi sonsuzluğa çevrilir. Odur ki, $y = x$ düz xətti üzərində həllin yeganəliyi pozula bilər. $y = x$ funksiyası tənliyin həlli olur. Bu həllin məxsusi həll olduğunu göstərək. Bilavasitə, yoxlamaqla göstərmək olar ki, $y = x + \frac{(x+C)^2}{4}$ funksiyası tənliyin həllidir. $y = x$ həlli üzərində ixtiyari (x_0, x_0) nöqtəsi götürsək, onda bu nöqtədən $y = x$ və $y = x + \frac{(x-x_0)^2}{4}$ həlləri keçir. Deməli, $y = x$ məxsusi həllidir.

2. $y' = x + y^{\frac{5}{3}}$ tənliyinin koordinat başlanğıcı ətrafında həllinin ən çoxu neçə tərtib törəməsi ola bilər.

HƏLLİ. Tənliyin sağ tərəfi $f(x, y) = x + y^{\frac{5}{3}}$ funksiyası xOy müstəvisində təyin olunub, kəsilməzdir, x və y dəyişənlərinə nəzə-

rən kəsilməz $f'_x(x, y) = 1$, $f'_y(x, y) = \frac{5}{3}y^{\frac{2}{3}}$ törəmələri var. La-

kin $f''_{yy}(x, y) = \frac{10}{9}y^{-\frac{1}{3}}$ törəməsi $y = x$ düz xətti boyunca sonsuz-

luğa çevrildiyindən $f(x, y)$ funksiyasının $(0,0)$ nöqtəsi ətrafında ancaq birinci tərtibdən kəsilməz törəmələri olur. Onda həllin hamarlığı haqqındakı teoremə əsasən verilən tənliyin həllinin $(0,0)$ nöqtəsi ətrafında ikinci tərtibə qədər kəsilməz törəmələri var.

3. İzoklin üsulu ilə $y' = (y-1)x$ tənliyinin həllinin təqribi qrafikini qurun.

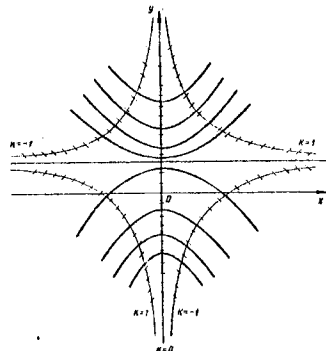
HƏLLİ. $f(x, y) = (y-1)x$ funksiyası xOy müstəvisində təyin olunub, kəsilməzdir və kəsilməz $f'_y(x, y) = x$ törəməsi var. Deməli, xOy müstəvisi üzərində həll var və yeganədir. Bu həllərin təqribi qrafikini izoklin üsulu ilə quraq. $y' = k$ əvəz etsək $(y-1)x = k$ izoklin ailəsinin tənliyi alınar. $k = 0$ uyğun $y = 1$ və $x = 0$ ekstremal izoklinlər alınır. Bu izoklinlər üzərində meydanın istiqaməti Ox oxuna paralel olur. $k = 1$ uyğun $(y-1)x = 1$ və $k = -1$ uyğun $(y-1)x = -1$ izoklinlər üzərində meydanın istiqamətləri 45° və 135° olur. $f(x, y) = (y-1)x > 0$ oblastda, yəni $x > 0$, $y > 1$ və $x < 0$, $y < 1$ oblastlarda integral əyriləri artan, $(y-1)x < 0$ olan oblastda, yəni $x > 0$, $y < 1$ və $x < 0$, $y > 1$ oblastlarda integral əyriləri azalan olur. Odur ki, integral əyriləri $x = 0$ düz xəttini $y > 1$ üçün kəsdikdə minimum, $y < 1$ üçün kəsdikdə isə maksimum qiymətini alır. $y = 1$ düz xətti tənliyin həlli olur. Həll yeganə olduğundan integral əyriləri kəsişmirlər. Integral əyrilərin qabanq və çöküklüyünü tapmaq üçün tənlikdən y'' tapaq:

$$y'' = y - 1 + xy' = y - 1 + x(y-1)x = (y-1)(1+x^2).$$

Buradan $y > 1$ olarsa, $y'' > 0$, $y < 1$ olduqda isə $y'' < 0$ alınar. Deməli, $y > 1$ oblastının da integral əyriləri çökük, $y < 1$ oblastında

isə qəbərli olur. $y = 1$ tənliyini həlli olduğundan integral ayrılıqlarının əylmə nöqtəsi yoxdur (şəkil 32).

4. Eyler sınıq xətlər üsulu ilə $y' = 0,5xy$ tənliyinin $y(0) = 1$ şərtini ödəyən həllinin $[0, 1]$ parçasında $h = 0,1$ addımına uyğun təqribi qiymətlərini tapın.



Şəkil 32.

HƏLLİ. Tənliyin sağ tərəfi $f(x, y) = 0,5xy$ funksiyası bütün müstəvidə kəsilməzdir və kəsilməz $f'_y(x, y) = 0,5x$ törəməsi var. Həllin varlığı və yeganəlik teoreminə əsasən baxılan məsələnin yeganə həlli var. Bu həllin təqribi ədədi qiymətlərini tapmaq üçün $[0, 1]$ parçasının $h = 0,1$ bölgüsünə uyğun $x_0 = 0; x_1 = 0,1; x_2 = 0,2; x_3 = 0,3; x_4 = 0,4; x_5 = 0,5; x_6 = 0,6; x_7 = 0,7; x_8 = 0,8; x_9 = 0,9; x_{10} = 1$ nöqtələrinə baxaq. Axtarılan həllin bu nöqtələrə uyğun təqribi ədədi qiymətləri

$$y_k = y_{k-1} + f(x_{k-1}, y_{k-1})(x_k - x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots$$

düsturları ilə hesablanır. Baxılan misal üçün $x_k - x_{k-1} = h = 0,1$ olduğundan

$$y_k = y_{k-1}(1 + 0,05x_{k-1}), \quad y_0 = 1, \quad k = 1, 2, \dots$$

Buradan ardıcıl $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ yazmaqla tapırıq:

$$y_1 = y_0(1 + 0,05x_0) = y_0 = 1,$$

$$y_2 = y_1(1 + 0,05x_1) = 1(1 + 0,05 \cdot 0,1) = 1,005,$$

$$y_3 = y_2(1 + 0,05x_2) = 1,005(1 + 0,05 \cdot 0,2) \approx 1,015,$$

$$y_4 = y_3(1 + 0,05x_3) \approx 1,015(1 + 0,05 \cdot 0,3) \approx 1,0302,$$

$$y_5 = y_4(1 + 0,05x_4) \approx 1,0302(1 + 0,05 \cdot 0,4) \approx 1,0508,$$

$$y_6 = y_5(1 + 0,05x_5) \approx 1,0508(1 + 0,05 \cdot 0,5) \approx 1,0771,$$

$$y_7 = y_6(1 + 0,05x_6) \approx 1,0771(1 + 0,05 \cdot 0,6) \approx 1,1094,$$

$$y_8 = y_7(1 + 0,05x_7) \approx 1,1094(1 + 0,05 \cdot 0,7) \approx 1,1482,$$

$$y_9 = y_8(1 + 0,05x_8) \approx 1,1482(1 + 0,05 \cdot 0,8) \approx 1,1941,$$

$$y_{10} = y_9(1 + 0,05x_9) \approx 1,1941(1 + 0,05 \cdot 0,9) \approx 1,2478.$$

5. $y' = \sqrt[3]{x} - y^2$, $y(0) = 0$ məsələsi üçün $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ ardıcıl yaxınlaşmaları tapın.

HƏLLİ. Tənliyin sağ tərəfi $f(x, y) = \sqrt[3]{x} - y^2$ funksiyası xOy müstəvisində kəsilməzdir və kəsilməz $f'_y(x, y) = -2y$ törəməsi var. Onda Pikar teoreminə əsasən baxılan məsələnin yeganə həlli var. $f(x, y) = \sqrt[3]{x} - y^2$ funksiyasına $D = \{-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ düzbucaqlıda baxaq. Onda $M = \max_D |f(x, y)| = \max_D |\sqrt[3]{x} - y^2| = 2$, $K = \max_D |f'_y(x, y)| = \max_D |-2y| = 2$. Deməli, $|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq K|y_2 - y_1|$, $K = 2$, yəni $f(x, y)$ funksiyası y argumentinə nəzərən Lipşis şərtini ödəyir. Onda $\alpha = \min\left\{1, \frac{1}{M}\right\} = \min\left\{1, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$ olduğundan baxılan məsələnin $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ parçasında təyin olunmuş yeganə həlli var və bu həlli

$$y_n(x) = y_0 + \int_0^x (\sqrt[3]{s} - y_{n-1}^2(s)) ds, \quad n = 1, 2, \dots$$

ardıcıl yaxınlaşmaların müntəzəm limiti kimi göstərmək olur. $y_0(x) = 0$ qəbul edib, $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ ardıcıl yaxınlaşmaları tapırıq:

$$y_1(x) = 0 + \int_0^x (\sqrt[3]{s} - 0^2) ds = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}},$$

$$y_2(x) = \int_0^x \left(\sqrt[3]{s} - \left(\frac{3}{4} s^{\frac{4}{3}} \right)^2 \right) ds = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} - \frac{27}{176} x^{\frac{11}{3}},$$

$$y_3(x) = \int_0^x \left(\sqrt[3]{s} - \left(\frac{3}{4} s^{\frac{4}{3}} - \frac{27}{176} s^{\frac{11}{3}} \right)^2 \right) ds = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} - \frac{27}{176} x^{\frac{11}{3}} + \frac{27}{704} x^6 - \frac{2187}{433664} x^{\frac{25}{3}}.$$

2. Tənliklərin tipini müəyyənləşdirin və həll edin

1. $y' = xy^2 + 2xy$.

HƏLLİ. Tənlik dəyişənlərinə ayrılandır. Dəyişənlərinə ayıraraq inteqrallayaq:

$$\frac{dy}{y(y+2)} = x dx, \quad \int \frac{dy}{y(y+2)} = \int x dx + \ln C,$$

$$\frac{1}{2} \int \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{y+2} \right] dy = \int x dx + \ln C, \quad \frac{1}{2} [\ln|y| - \ln|y+2|] = \frac{x^2}{2} + \ln C,$$

$$\ln \frac{|y|}{|y+2|} = x^2 + \ln C_1, \quad \frac{y}{y+2} = \frac{e^{x^2}}{C}, \quad y = \frac{2e^{x^2}}{C - e^{x^2}}.$$

2. $\left(x - y \cos \frac{y}{x} \right) dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0.$

HƏLLİ. Verilmiş tənlik bircins olduğundan həll etmək üçün $y = xt$

əvəzləməsini aparaq. Onda yazmaq bilirik: $dy = t dx + x dt$ y və dy -in qiymətlərini verilmiş tənlikdə yazaraq.

$$(x - xt \cos t) dx + x \cos t (x dt + t dx) = 0,$$

$$dx + x \cos t dt = 0, \quad \frac{dx}{x} = -\cos t dt, \quad \int \frac{dx}{x} = -\int \cos t dt + C,$$

$$\ln|x| + \sin t = C, \quad \ln|x| + \sin \frac{y}{x} = C.$$

3. $y' = 2 \left(\frac{y+1}{x+y-2} \right)^2.$

HƏLLİ. Verilmiş tənlikdə $y+1=z$, $x-3=t$ əvəzləməsini aparsaq

$$\frac{dz}{dt} = 2 \frac{z^2}{(t+z)^2}$$

bircins tənliyini alaraq. $z = tu$ əvəzləməsi aparıb, alınan dəyişənlərinə ayrılan tənliyi inteqrallayaq:

$$t \frac{du}{dt} + u = \frac{2u^2}{(1+u)^2}, \quad t \frac{du}{dt} + \frac{u+u^3}{(1+u)^2} = 0, \quad \ln|u| + 2 \arctg u +$$

$$+ \ln|t| = \ln C, \quad ut = Ce^{-2 \arctg u}.$$

Aparadığımız əvəzləmələri nəzərə alıb, x və y dəyişənlərinə keçsək

alaraq: $y+1 = Ce^{-2 \arctg \frac{y+1}{x-3}}.$

4. $x^3(y' - x) = y^2.$

HƏLLİ. Tənliyin ümumiləşmiş bircins olduğunu yoxlayaq. $x \rightarrow tx$, $y \rightarrow t^k y$, $y' \rightarrow t^{k-1} y'$ əvəzləməsi aparaq. Alınan bərabərlikdə t

nin derecelerini berabərləşdirsək: $3+k-1=4=2k$ alınır. Buradan $k=2$ alınır. Deməli, tənlik ümumiləşmiş bircins tənlikdir. Tənlikdə $y=x^2z$ əvəzləməsi aparmaq lazımdır. $y'=2xz+x^2z'$ olduğundan $x^3(2xz+x^2z'-x)=(x^2z)^2$, $2z+xz'-1=z^2$, $xz'=(1-z)^2$, $\frac{dz}{(1-z)^2}=\frac{dx}{x}$, $z=1$. Bu tənliklərə uyğun $\frac{1}{1-z}=\ln xC$ və $y=x^2$ həlləri alınır. $y=x^2z$ əvəzləməsinə əsasən verilən tənliyin $x^2=(x^2-y)\ln xC$ ümumi və $y=x^2$ həlli alınır.

$$5. xy' - 2y = 2x^4.$$

HƏLLİ. Verilmiş xətti tənliyi həll etmək üçün $y=u(x)v(x)$ əvəzləməsini aparaq. Onda yazı bilərik. $y'=u'v+u'v$, $x(u'v+u'v)-2uv=2x^4$, $u(xv'-2v)+xvu'=2x^4$, $xv'-2v=0$, $v=x^2$, $u'=2x$, $u=x^2+C$, $y=x^2(x^2+C)$.

$$6. \frac{dy}{dx} + y \cos x = e^{-\sin x}.$$

HƏLLİ. Verilmiş xətti tənliyi sabitin variasiyası üsulu ilə həll edək. $\frac{dy}{dx} + y \cos x = 0$ bircins tənliyin ümumi həllini tapaq: $y=Ce^{-\sin x}$. $y=C(x)e^{-\sin x}$ əvəzləməsi aparaq. Onda $y'=C'(x)e^{-\sin x} - C(x)\cos x e^{-\sin x}$. y və y' -in qiymətlərini verilmiş tənlikdə yerinə yazırıq:

$$C'(x)e^{-\sin x} - C(x)\cos x e^{-\sin x} + C(x)\cos x e^{-\sin x} = e^{-\sin x},$$

$$C'(x)=1, \quad C(x)=x+C, \quad y=(x+C)e^{-\sin x}.$$

$$7. x \frac{dy}{dx} + y = y^2 \ln x.$$

HƏLLİ. Verilmiş Bernulli tənliyinin həllini $y=u(x)v(x)$ şəklində axtaraq: $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}v + \frac{dv}{dx}u$, $xu \frac{dv}{dx} + xv \frac{du}{dx} + uv = u^2v^2 \ln x$, $v \left(x \frac{du}{dx} + u \right) + xu \frac{dv}{dx} = u^2v^2 \ln x$, $x \frac{du}{dx} + u = 0$, $u = \frac{1}{x}$,

$$x \frac{1}{x} \frac{dv}{dx} = v^2 \frac{1}{x^2} \ln x, \quad x^2 \frac{dv}{dx} = v^2 \ln x, \quad \int \frac{dv}{v^2} = \int \frac{\ln x}{x^2} dx - C,$$

$$\frac{1}{v} = \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} - C, \quad v(x) = \frac{x}{\ln x + Cx + 1}, \quad y = \frac{1}{\ln x + Cx + 1}.$$

$$8. y' + ay(y-x) = 1.$$

HƏLLİ. $y=x$ funksiyası verilmiş Rikkati tənliyinin həllidir. Ona görə də $y=x+z$ əvəzləməsi tənliyi

$$\frac{dz}{dx} + az(x+z) = 0$$

Bernulli tənliyinə gətirir. Bu tənliyi həll etsək, alırıq:

$$z = \frac{e^{-\frac{ax^2}{2}}}{C + a \int e^{-\frac{ax^2}{2}} dx}, \quad y = x + z, \quad y = x + \frac{e^{-\frac{ax^2}{2}}}{C + a \int e^{-\frac{ax^2}{2}} dx}.$$

$$9. (2xy + 3y^2)dx + (x^2 + 6xy - 3y^2)dy = 0.$$

HƏLLİ. $M(x, y) = 2xy + 3y^2$, $N(x, y) = x^2 + 6xy - 3y^2$, $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + 6y$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 6y$, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan, verilmiş

tənlik tam diferensiallı tənlikdir. Odur ki, ümumi həllin düsturuna əsasən:

$$\int_0^x (2\xi y + 3y^2) d\xi + \int_0^y (0^2 + 6 \cdot 0 \cdot \eta - 3\eta^2) d\eta = C,$$

$$x^2 y + 3xy^2 - y^3 = C.$$

$$10. \left(1 - \frac{x}{y}\right) dx + \left(2xy + \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right) dy = 0.$$

$$\text{HƏLLİ. } \frac{\partial}{\partial y} \left(1 - \frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(2xy + \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right) = 2y + \frac{1}{y} + \frac{2x}{y^2}.$$

$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$. Deməli, verilmiş tənlik tam diferensiallı tənlik deyil. Onu tam diferensiallı tənliyə gətirmək üçün inteqrallayıcı vuruğu tapmaq lazımdır:

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{x}{y^2} - 2y - \frac{1}{y} - \frac{2x}{y^2} = -\left(2y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2}\right),$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{-\left(2y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2}\right)}{x\left(2y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2}\right)} = -\frac{1}{x}.$$

Inteqrallayıcı vuruq x dəyişənindən asılı olduğundan

$$\frac{d \ln \mu(x)}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = -\frac{1}{x}, \quad \mu(x) = \frac{1}{x}.$$

Tənliyin hər tərəfini $\frac{1}{x}$ -ə vuraq və alınmış tam diferensiallı tənliyi inteqrallayaq:

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) dx + \left(2y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2}\right) dy = 0,$$

$$\frac{dx}{x} + \left(\frac{1}{y} + 2y\right) dy - \frac{xdy - ydx}{y^2} = 0, \quad d\left[\ln|x| + \ln|y| + y^2 - \frac{x}{y}\right] = 0,$$

$$\ln|xy| + y^2 - \frac{x}{y} = C.$$

$$11. (3x + 2y + y^2) dx + (x + 4xy + 5y^2) dy = 0, \quad \mu = \varphi(x + y^2).$$

$$\text{HƏLLİ. } \frac{\partial M}{\partial y} = 2 + 2y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1 + 4y, \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}. \text{ Deməli,}$$

verilmiş tənlik tam diferensiallı tənlik deyil. Onu tam diferensiallı tənliyə gətirmək üçün inteqrallayıcı vuruğu $\mu = \varphi(x + y^2)$ şəklində axtaraq. $x + y^2 = z$ qəbul etsək $\mu = \varphi(z)$ funksiyasını tapmaq üçün aşağıdakı tənlik alınır:

$$N \frac{d\varphi}{dz} - M \frac{d\varphi}{dz} 2y = \varphi(z) \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right), \quad \frac{d\varphi}{\varphi dz} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N - 2yM},$$

$$\frac{d \ln \varphi}{dz} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N - 2yM}, \quad \frac{d \ln \varphi}{dz} = \frac{2 + 2y - 1 - 4y}{x + 4xy + 5y^2 - 6xy - 4y^2 - 2y^3} = \frac{1 - 2y}{x - 2xy + y^2 - 2y^3} = \frac{1 - 2y}{x(1 - 2y) + y^2(1 - 2y)} = \frac{1}{x + y^2} = \frac{1}{z}.$$

$$\frac{d \ln \varphi}{dz} = \frac{d \ln \mu}{dz} = \frac{1}{z}, \quad d \ln \mu = \frac{dz}{z}, \quad \ln \mu = \ln z, \quad \mu = z = x + y^2.$$

Verilmiş tənliyin hər tərəfini $\mu(x, y) = x + y^2$ inteqrallayıcı vuruğuna vursaq tam diferensiallı tənlik alınır.

$$(3x^2 + 2xy + 4xy^2 + 2y^3 + y^4) dx + (x^2 + 4x^2 y + 6xy^2 +$$

$$+ 4xy^3 + 5y^4) dy = 0,$$

$$\int_0^x (3\xi^2 + 2\xi y + 4\xi y^2 + 2y^3 + y^4) d\xi + \int_0^y 5\eta^4 d\eta = C,$$

$$x^3 + x^2 y + 2x^2 y^2 + 2xy^3 + xy^4 + y^5 = C.$$

$$12. (y')^2 + (\sin x - 2xy)y' - 2xy \sin x = 0.$$

HƏLLİ. Tənlik törəmələrinə nəzərən həll olunmamış tənlikdir. Onu törəməyə nəzərən həll olmuş tənliyə gətirib həll edək:

$$(y')^2 + y' \sin x - 2xyy' - 2xy \sin x = 0, \quad y'(y' + \sin x) -$$

$$- 2xy(y' + \sin x) = 0, \quad (y' + \sin x)(y' - 2xy) = 0, \quad y' + \sin x =$$

$$= 0, \quad y' - 2xy = 0, \quad y = \cos x + C, \quad y = Ce^{x^2}.$$

Verilmiş tənliyin ümumi həllini $(y - \cos x - C)(y - Ce^{x^2}) = 0$ şəklində yazmaq olar.

$$13. y = (y')^2 e^{y'}.$$

HƏLLİ. Törəməyə nəzərən həll olunmamış tənliyi $y' = p$, $y = p^2 e^p$ parametrik şəkildə göstərək. Buradan $dy = y' dx$ münasibətinə əsasən alırıq:

$$p dx = p e^p (2 + p) dp, \quad p [dx - e^p (2 + p) dp] = 0, \quad p = 0, \quad dx =$$

$$= e^p (2 + p) dp, \quad p = 0, \quad y = 0, \quad x = \int e^p (2 + p) dp = 2e^p +$$

$$+ e^p p - e^p + C = e^p (p + 1) + C.$$

Beləliklə, $x = (p + 1)e^p + C$, $y = p^2 e^p$ verilmiş tənliyin parametrik şəkildə ümumi və $y = 0$ həlli var.

$$14. \sqrt{y'^2 + 1} + xy' - y = 0.$$

HƏLLİ. Verilmiş Klero tənliyini $y' = p$, $y = \sqrt{p^2 + 1} + px$ parametrik şəkildə yazaq. Buradan $dy = p dx$ münasibətinə əsasən

$$\text{yaza bilərik: } \left(-\frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}} + x \right) dp = 0, \quad p = C, \quad x = -\frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}}.$$

$$y = \sqrt{C^2 + 1} + Cx \quad \text{Klero tənliyinin ümumi,} \quad x = -\frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}},$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}} \text{ isə parametrik şəkildə məxsusi həllidir.}$$

$$15. y'^2 - 2xy' + y = 0.$$

HƏLLİ. Verilmiş Laqranj tənliyini $y' = p$, $y = 2xp - p^2$ parametrik şəkildə yazıb, $dy = p dx$ münasibətinə əsasən $\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p} x = 2$

xətti tənlik alırıq. Onun $x = \frac{2}{3}p + \frac{C}{p^2}$ ümumi həlli və $p = 0$ həlli var.

dir. $x = \frac{2}{3}p + \frac{C}{p^2}$, $y = \frac{1}{3}p^2 + \frac{2C}{p}$ Laqranj tənliyinin parametrik

şəkildə ümumi və $y = 0$ məxsusi həlli var.

3. Əyrilər ailəsinin və trayektoriyaların diferensial tənliyini tapın

1. $x^2 + y^2 = Cx$.

HƏLLİ. y dəyişəninə x dəyişəninin funksiyası kimi baxıb, verilən bərabərliyin hər tərəfindən x -ə nəzərən törəmə alaq: $2x + 2yy' = C$. C -nin bu qiymətini əyrinin tənliyində yazsaq, ailənin diferensial tənliyi alınır: $x^2 + y^2 = (2x + 2yy')x$, $2xyy' + x^2 -$
 $- y^2 = 0$.

2. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 1$.

HƏLLİ. y dəyişəninə x dəyişəninin funksiyası kimi baxıb, x -ə nəzərən ardıcıl olaraq iki dəfə törəmə alaq: $2(x-a) + 2(y-b)y' = 0$,

$2 + 2y'^2 + 2(y-b)y'' = 0$. Buradan $y-b = -\frac{1+y'^2}{y''}$, $x-a =$

$-(y-b)y' = \frac{(1+y'^2)y'}{y''}$ tapıb, verilən tənlikdə yerinə yazsaq:

$$\frac{[(1+y'^2)y']^2}{(y'')^2} + \frac{(1+y'^2)^2}{(y'')^2} = 1, \quad y''^2 = (1+y'^2)^3.$$

Alınan tənlik verilmiş iki papametrlı ailənin diferensial tənliyi olur.

3. $x^2 + 2ay = a^2$, $\varphi = 90^\circ$.

HƏLLİ. Əvvəlcə ailənin diferensial tənliyini tapaq:

$$2x + 2ay' = 0, \quad a = -\frac{x}{y'}, \quad x^2 - 2\frac{x}{y'}y = \left(-\frac{x}{y'}\right)^2.$$

$$xy'^2 - 2yy' - x = 0.$$

Ailənin ortoqonal trayektoriyasının diferensial tənliyini tapmaq üçün

alınan tənlikdə $y' \rightarrow -\frac{1}{y'}$ əvəzləməsi aparaq. Onda

$$\frac{x}{y'^2} + \frac{2y}{y'} - x = 0, \quad xy'^2 - 2yy' - x = 0.$$

Tənliyi y' -ə nəzərən həll etsək, bircins $y' = \frac{y}{x} \pm \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1}$ tənliyi

alınır. Bu tənliyi həll etsək, $x^2 - 2yC = C^2$ verilən ailə üçün ortoqonal əyrilər olur.

4. $y^2 = 2px$, $\varphi = 60^\circ$.

HƏLLİ. Əvvəlcə ailənin diferensial tənliyini tapaq: $2yy' = 2p$, $y^2 = 2xyy'$, $y = 2xy'$, $k = \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}60^\circ = \sqrt{3}$ olduğundan izoqonal trayektoriyaların diferensial tənliyini tapmaq üçün $y' \rightarrow \frac{y'-k}{1+ky'}$

əvəzləməsini aparaq: $y = 2x \frac{y' - \sqrt{3}}{1 + y'\sqrt{3}}$.

Buradan izoqonal trayektoriyaların diferensial tənliyini $(2x - y\sqrt{3})y' =$
 $= 2x\sqrt{3} + y$ şəklində tapırıq. Alınan tənlik bircinslidir. Onu həll etsək

$$y^2\sqrt{3} - xy + 2x^2\sqrt{3} = Ce^{\frac{6}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}(2y\sqrt{3}-x)}{12x}} \quad \text{ailənin izoqonal tra-}$$

yektoriyalarını tapırıq.

4. Yüksək tərtibli diferensial tənliklər

4.1. Verilən funksiyaların xətti asılılığını araşdırın. a). 1, x , x^2 , x^3 , $x \in (-\infty, +\infty)$.

HƏLLİ. Bu funksiyaların xətti asılı olub-olmamasını müəyyənləşdirmək üçün $\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 = 0$ bərabərliyinə baxaq.

$x=0$ götürsək $\alpha_1=0$ olar. Onda $\alpha_2x + \alpha_3x^2 + \alpha_4x^3 = 0$ alırıq. Bərabərliyin hər tərəfini $x \neq 0$ bölek. $\alpha_2 + \alpha_3x + \alpha_4x^2 = 0$. Burada $x=0$ götürsək $\alpha_2=0$ alırıq. Bu qayda ilə $\alpha_3=\alpha_4=0$.

Beləliklə, alırıq ki, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Deməli, verilmiş funksiyalar xətti asılı deyil.

b). $4-x, 2x+3, 6x+8, x \in (-\infty, +\infty)$.

HƏLLİ. $\alpha_1(4-x) + \alpha_2(2x+3) + \alpha_3(6x+8) = 0$. Buradan

$$(4\alpha_1 + 3\alpha_2 + 8\alpha_3) + (-\alpha_1 + 2\alpha_2 + 6\alpha_3)x = 0.$$

1. x funksiyaları xətti asılı deyil. Onda $4\alpha_1 + 3\alpha_2 + 8\alpha_3 = 0$, $-\alpha_1 + 2\alpha_2 + 6\alpha_3 = 0$ şərti ödənməlidir. Xüsusi halda $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -32$, $\alpha_3 = 11$ ədədləri üçün bu bərabərlikləri ödəyir. Deməli, verilmiş funksiyalar xətti asılıdır.

c). $e^x, xe^x, x^2e^x, x \in (-\infty, +\infty)$.

HƏLLİ. Bu funksiyaların xətti asılı olub, olmamasını Vronski determinatının köməkliliyi ilə araşdırırıq:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & xe^x & x^2e^x \\ e^x & (x+1)e^x & (x^2+2x)e^x \\ e^x & (x+2)e^x & (x^2+4x+2)e^x \end{vmatrix} =$$

$$= e^{3x} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x+1 & x^2+2x \\ 1 & x+2 & x^2+4x+2 \end{vmatrix} = e^{3x} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 2 & 4x+2 \end{vmatrix} =$$

$$= e^{3x} (4x+2-4x) = 2e^{3x} \neq 0.$$

Deməli, verilmiş funksiyalar xətti asılı deyil.

yerləşdirilmiş çənin dibində diametri $\frac{1}{24}$ m olan dairəvi deşik açılmışdır. Suyun çəndən tam boşalma vaxtını tapın.

[$T=3$ saat 5 dəq.].

8. Cismın soyuması sür'əti cismın temperaturu ilə ətraf mühitin temperaturu fərqi ilə mütənasibdir. Havanın temperaturu $20^\circ C$ -dir. Mə'lumdur ki, cism 10 dəqiqədə $100^\circ C$ -dən $70^\circ C$ -ə qədər soyuyur. Cismın temperaturunun dəyişmə qanununun zamandan asılılığını tapın.

$$\left[\theta = 20 + 80 \left(\frac{5}{8} \right)^{\frac{t}{10}} \right]$$

9. Çəndə tərkibində 10 kq duz olan 100 litr məhlul var. Çəndə dəqiqədə 3 litr su vurulur və çəndən 1 litr məhlul axıdılır. Məhlul müntəzəm olaraq qarışdırıldığından məhlulun qatılığı hər yerdə bərabər olur. 1 saat 40 dəqiqədən sonra çəndə nə qədər duz qalar?

[2,5 kq].

10. Sür'əti v , gedilən yol S və zaman t arasındakı asılılıq $v \cos t + S \sin t = 2$ tənliyi ilə verilmişdir. Əgər $t=0$ olduqda $S=0$ olarsa, gödülən yolun zamandan asılılığını tapın.

$$S = 2 \sin t + \cos t.$$

NUMUNƏVİ MİSALLAR HƏLLİ

Bu fəsilə yoxlama işlərini və sərbəst çalışmaları yerinə yetirməyə kömək məqsədilə diferensial tənliklər bəhsinə aid nümunəvi misallar həlli verilmişdir.

1. Həllin varlığı, yeganəliyi və təqribi həll

1. $y' = \sqrt{y-x} + 1$ tənliyinin həllinin varlığı və yeganəliyi oblastını tapın.

HƏLLİ. Tənliyin sağ tərəfi $f(x, y) = \sqrt{y-x} + 1$ funksiyası $y \geq x$ yarıml müstəvisində tə'yin olunmuş kəsilməz funksiyadır. Odur ki, bu yarıml müstəvisinin ixtiyari nöqtəsindən integral əyrisi keçir, yə'ni həll var. $f'_y(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{y-x}}$ törəməsi ancaq $y > x$ oblastında kəsilməz

olur. Deməli, $y > x$ oblastında həll var və yeganədir. Aydındır ki, $y = x$ düz xətt boyunca $f'_y(x, y)$ törəməsi sonsuzluğa çevrilir. Odur ki, $y = x$ düz xətti üzərində həllin yeganəliyi pozula bilər. $y = x$ funksiyası tənliyin həlli olur. Bu həllin məxsusi həll olduğunu göstərək.

Bilavasitə, yoxlamaqla göstərmək olar ki, $y = x + \frac{(x+C)^2}{4}$ funksiyası tənliyin həllidir. $y = x$ həlli üzərində ixtiyari (x_0, x_0) nöqtəsi götürsək, onda bu nöqtədən $y = x$ və $y = x + \frac{(x-x_0)^2}{4}$ həlləri keçir. Deməli, $y = x$ məxsusi həldir.

2. $y' = x + y^{\frac{5}{3}}$ tənliyinin koordinat başlanğıcı ətrafında həllinin ən çoxu neçə tərtib törəməsi ola bilər.

HƏLLİ. Tənliyin sağ tərəfi $f(x, y) = x + y^{\frac{5}{3}}$ funksiyası xOy müstəvisində tə'yin olunub, kəsilməzdir, x və y dəyişənlərinə nəzə

d). Fundamental həlləri $y_1 = x^2$, $y_2 = x^5$ $x \in (0, +\infty)$ olan tənliyin $y(1) = 1$, $y'(1) = -2$ başlanğıc şərtini ödəyən həllini tapın.

HƏLLİ. $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x^2 & x^5 \\ 2x & 5x^4 \end{vmatrix} = 3x^6 \neq 0$, $x \in (0, +\infty)$. Deməli, verilmiş funksiyalar xətti asılı deyil, Bu funksiyalar aşağıdakı tənliyin fundamental həlləri olur.

$$\begin{vmatrix} x^2 & x^5 & y \\ 2x & 5x^4 & y' \\ 2 & 20x^3 & y'' \end{vmatrix} = 0, \quad x^2 y'' - 6xy' + 10y = 0.$$

Onun ümumi həlli $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 x^2 + C_2 x^5$ olduğundan başlanğıc şərtlərinə görə buradan $C_1 + C_2 = 1$, $2C_1 + 5C_2 = -2$, $C_1 = \frac{7}{3}$, $C_2 = -\frac{4}{3}$, $y = \frac{7}{3} x^2 - \frac{4}{3} x^5$.

4.2. Yüksək tərtibli tənliklərin tipini tə'yin edib həll edin. a). $y''' = \sin x - \cos x$.

HƏLLİ. Verilmiş tənlik $y^{(n)} = f(x)$ şəklində olduğundan onu ardıcıl üç dəfə integrallamaq lazımdır.

$$y'' = -\cos x - \sin x + C_1, \quad y' = -\sin x + \cos x + C_1 x + C_2,$$

$$y = \cos x + \sin x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

b). $xy^{IV} - y^{IV} = 0$.

HƏLLİ. Tənliyə axtarılan funksiya və onun üçüncü tərtibə qədər törəmələri daxil olmadığından $y^{IV} = p$ qəbul edək. Onda $y^{IV} = p' =$

$= \frac{dp}{dx}$ olar və verilmiş tənlik $x \frac{dp}{dx} - p = 0$ şəklinə düşər. Buradan

$$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dp}{p} = \int \frac{dx}{x} + \ln C_1, \quad \ln|p| = \ln|x| + \ln C_1, \quad p = xC_1$$

Yani $y^{IV} = C_1 x$. Bu tenliyi ardıcıl dörd defa integrallasaq alarıq:

$$y''' = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2, \quad y'' = \frac{C_1}{6} x^3 + C_2 x + C_3, \quad y' = \frac{C_1}{24} x^4 + C_2 \frac{x^2}{2} +$$

$$+ C_3 x + C_4, \quad y = \frac{C_1}{120} x^5 + \frac{C_2}{6} x^3 + C_3 \frac{x^2}{2} + C_4 x + C_5.$$

c). $yy'' - y'^2 = y^2 \ln y, \quad y > 0.$

HƏLLİ. Tənliyə x dəyişəni aşkar şəkildə daxil olmadığından

$$y' = p(y) \text{ əvəzləməsi aparılır. Onda } y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} [p(y)] =$$

$$= \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dy}{dx}. \quad y' \text{ və } y'' \text{-in qiymətlərini verilmiş tənlikdə yerinə}$$

$$\text{yazaq: } yp \frac{dp}{dy} - p^2 = y^2 \ln y. \text{ Alınan Bernulli tənliyinin ümumi həlli}$$

$$p = \pm y \sqrt{C_1 + \ln^2 y} \text{ olduğundan } y' = \pm y \sqrt{C_1 + \ln^2 y} \text{ tənliyi alınır.}$$

$$\text{Bu tənliyi dəyişənlərinə ayırıb, həll etsək, alarıq: } y = e^{\frac{C_1 e^{2x} - C_1}{2C_2 e^{2x}}}$$

d). $xy'' - y' - x^2 yy' = 0, \quad y(1) = 0, y'(1) = 2.$

HƏLLİ. Verilmiş tənliyi sol tərəfi tam diferensiallı tənliyə gətirməklə həll edək. Hər tərəfi x^2 -na bölək və çevirmə apararaq:

$$\frac{xy'' - y'}{x^2} - yy' = 0, \quad \left(\frac{y'}{x} \right)' - \left(\frac{1}{2} y^2 \right)' = 0, \quad \left(\frac{y'}{x} - \frac{1}{2} y^2 \right)' = 0.$$

$$\text{Axırıncı tənliyi integrallasaq alarıq: } \frac{y'}{x} - \frac{1}{2} y^2 = C_1. \text{ Başlanğıc şərt-}$$

$$\text{lərdən istifadə etsək buradan } C_1 = 2, \quad \frac{y'}{x} - \frac{1}{2} y^2 = 2, \quad 2y' - xy^2 = 4x$$

tənliyini alarıq. Bu tənliyi dəyişənlərinə ayırıb integrallasaq yaza bilə-

$$\text{rik: } \arctg \frac{y}{2} = \frac{x^2}{2} + C_2.$$

$$\text{Burada başlanğıc } y(1) = 0 \text{ şərtindən istifadə etsək } C_2 = -\frac{1}{2},$$

$$\arctg \frac{y}{2} = \frac{x^2 - 1}{2}, \quad y = 2 \operatorname{tg} \frac{x^2 - 1}{2}.$$

e). $y''' - 8y = 0.$

HƏLLİ. Tənlik sabit əmsallı bircins olduğundan xarakteristik tənliyin köməyiylə həll etmək lazımdır. $k^3 - 8 = 0$ xarakteristik tənliyin kökləri $k_1 = 2, k_2 = -1 + i\sqrt{3}, k_3 = -1 - i\sqrt{3}$ olduğundan, verilmiş tənliyin ümumi həlli $y = C_1 e^{2x} + e^{-x} (C_2 \cos \sqrt{3}x + C_3 \sin \sqrt{3}x)$ olur.

f). $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 3.$

HƏLLİ. Tənlik sabit əmsallı olduğundan xarakteristik tənliyini yazıb, həll etmək lazımdır. $k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = 0$ xarakteristik tənliyinin kökləri $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ olduğundan verilmiş tənliyin fundamental həlləri $e^x, xe^x, x^2 e^x$ olar. Onda verilmiş tənliyin ümumi həlli $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x = e^x (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)$. Başlanğıc şərtləri nəzərə alsaq $C_1 = 1, C_2 = 1, C_3 = 0, y = e^x (1 + x)$.

g). $y^{IV} - 2y''' + 2y'' - 4y' + y - 2y = 0.$

HƏLLİ. Sabit əmsallı tənliyin $k^5 - 2k^4 + 2k^3 - 4k^2 + k - 2 = 0$ xarakteristik tənliyin həll edək: $k^4(k-2) + 2k^2(k-2) + (k-2) = 0$, $(k-2)(k^4 + 2k^2 + 1) = 0$, $k-2=0$, $k_1=2$, $k^4 + 2k^2 + 1 = 0$, $(k^2 + 1)^2 = 0$, $k_2 = k_3 = i$, $k_4 = k_5 = -i$. Bu köklərə uyğun fundamental həllər e^{2x} , $\cos x$, $x \cos x$, $\sin x$, $x \sin x$ olduğundan $y = C_1 e^{2x} + (C_2 + C_3 x) \cos x + (C_4 + C_5 x) \sin x$.

h). $x^2 y'' + 2xy' + 6y = 0$.

HƏLLİ. Verilmiş Eyler tənliyini həll etmək üçün $x = e^t$ ($x > 0$) əvəzləməsini aparaq. Onda

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = e^{-t} \frac{dy}{dt}, \quad y'' \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx} \left(e^{-t} \frac{dy}{dt} \right) =$$

$$= \frac{d}{dt} \left(e^{-t} \frac{dy}{dt} \right) \frac{dx}{dt} = e^{-2t} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right).$$

x , y' və y'' -in qiymətlərini verilmiş tənlikdə yazaq.

$$e^{2t} e^{-2t} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) + 2e^t e^{-t} \frac{dy}{dt} + 6y = 0, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + 6y = 0.$$

Alınan sabit əmsallı tənliyi həll edək. $k^2 + k + 6 = 0$, $k_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{23}}{2} i$ olduğundan tənliyin ümumi həlli

$$y = e^{-\frac{t}{2}} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{23}}{2} t + C_2 \sin \frac{\sqrt{23}}{2} t \right).$$

$x = e^t$ olduğundan $t = \ln x$, $e^{-\frac{t}{2}} = (e^t)^{-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}}$ olar. Odur ki,

$$y = x^{-\frac{1}{2}} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{23}}{2} \ln x + C_2 \sin \frac{\sqrt{23}}{2} \ln x \right).$$

4.3. Qeyri-müəyyən əmsallar və sabitlərin variasiyası üsulu ilə həll edin.

a). $y'' - 8y' + 16y = (1-x)e^{4x}$.

HƏLLİ. Əvvəlcə uyğun bircins tənliyin ümumi həllini tapaq. $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$, $(\lambda - 4)^2 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$. Onda bircins tənliyin ümumi həlli $y_b = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x} = e^{4x} (C_1 + C_2 x)$ şəklində olar. $\alpha = 4$ xarakteristik tənliyin iki dəfə təkrarlanan kökü olduğundan xüsusi həll $\tilde{y} = x^2 e^{4x} (Ax + B)$ şəklində axtarılmalıdır. Onda

$$\tilde{y}' = e^{4x} [4Ax^3 + (3A + 4B)x^2 + 2Bx],$$

$$\tilde{y}'' = e^{4x} [16Ax^3 + (24A + 16B)x^2 + (6A + 16B)x + 2B].$$

\tilde{y} , \tilde{y}' , \tilde{y}'' -in qiymətlərini verilmiş tənlikdə yerinə yazıb, sadələşdirək:

$$16Ax^3 + (24A + 16B)x^2 + (6A + 16B)x + 2B - 8[4Ax^3 + (3A + 4B)x^2 + 2Bx] + 16(Ax^3 + Bx^2) = 1 - x.$$

Na'məlum əmsallar üsuluna görə buradan tapa bilərik: $A = -\frac{1}{6}$,

$B = \frac{1}{2}$. Onda xüsusi həll $\tilde{y} = -\frac{1}{6} e^{4x} (x^3 - 3x^2)$. Beləliklə, verilmiş

tənliyin ümumi həlli $y = y_b + \tilde{y} = e^{4x} (C_1 + C_2 x) - \frac{1}{6} e^{4x} (x^3 - 3x^2)$.

b). $y'' + y = x e^x + 2e^{-x}$, $y(0) = y'(0) = 1$.

HƏLLİ. Əvvəlcə uyğun sabit əmsallı bircins tənliyin ümumi həllini tapaq: $y'' + y = 0$, $\lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm i$, $\lambda_1 = -i$, $\lambda_2 = i$. Onda bircins tənliyin ümumi həlli $y_b = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Bircins olmayan tənliyin xüsusi həllini $\tilde{y} = (Ax + B)e^x + Ce^{-x}$ şəklində axtar-

$$\text{malıyq: } \tilde{y}' = Ae^x + (Ax + B)e^x - Ce^{-x} = e^x(Ax + A + B) - Ce^{-x}, \\ \tilde{y}'' = e^x(Ax + 2A + B) + Ce^{-x}.$$

\tilde{y} və \tilde{y}'' -in qiymətlərini verilən tənlikdə yazsaq, namə'lum əmsallar üsuluna əsasən tapanq. $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = 1$. Onda yazı bilə-

$$\text{rik: } \tilde{y} = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)e^x + e^{-x} = \frac{1}{2}(x-1)e^x + e^{-x}. y = y_b + \tilde{y} = C_1 \cos x + \\ + C_2 \sin x + \frac{1}{2}(x-1)e^x + e^{-x} \text{ ümumi həldə } y(0) = 1, y'(0) = 1 \\ \text{başlanğıc şərtlərini nəzərə alsaq: } C_1 = \frac{1}{2}, C_2 = 2.$$

$$y = \frac{1}{2} \cos x + 2 \sin x + \frac{1}{2}(x-1)e^x + e^{-x}.$$

$$\text{c). } y'' + 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}.$$

HƏLLİ. Verilən tənliyin həllinə qeyri-müəyyən əmsallar üsulu tətbiq etmək mümkün olmadığından sabitlərin variasiyası üsulunu tətbiq edək. Əvvəlcə uyğun sabit əmsallı bircins tənliyin ümumi həllini tapaq: $k^2 + 4k + 5 = 0$, $k_{1,2} = 2 \pm i$. Onda bircins tənliyin ümumi həllini

$y_b = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ şəklində yazı bilərik. Bircins olmayan tənliyin həllini $y = e^{2x}[C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x]$ şəklində axtaraq, burada $C_1(x)$ və $C_2(x)$ funksiyalarını ele seçmək lazımdır ki, bu funksiya bircins olmayan tənliyin həlli olsun.

$$\tilde{y}' = e^{2x}[C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x] + C_1(x)(2 \cos x - \sin x)e^{2x} + \\ + C_2(x)(2 \sin x + \cos x)e^{2x}. \text{ Burada } C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 \text{ gö-} \\ \text{türək, onda } y' = C_1(x)(2 \cos x - \sin x)e^{2x} + C_2(x)(2 \sin x + \cos x)e^{2x}.$$

Buradan y'' -i tapıb, verilən tənlikdə yazsaq. $C_1'(x)(2 \cos x - \sin x)e^{2x} +$

$$+ C_2'(x)(2 \sin x + \cos x)e^{2x} = \frac{e^{2x}}{\cos x} \text{ bərabərliyi alınır. Beləliklə,}$$

$C_1'(x)$ və $C_2'(x)$ tapmaq üçün

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0, \\ C_1'(x)(2 \cos x - \sin x) + C_2'(x)(2 \sin x + \cos x) = \frac{1}{\cos x} \end{cases}$$

sistemi alınır. Kramer qaydasına əsasən

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ 2 \cos x - \sin x & 2 \sin x + \cos x \end{vmatrix} = 2 \cos x \sin x + \cos^2 x -$$

$$- 2 \sin x \cos x + \sin^2 x = 1, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ 1 & 2 \sin x + \cos x \end{vmatrix} =$$

$$-\frac{\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x, \Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ 2 \cos x - \sin x & \frac{1}{\cos x} \end{vmatrix} = 1,$$

$$\text{olduğundan: } C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{W(x)} = -\operatorname{tg} x, C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{W(x)} = 1, C_1(x) =$$

$= \ln|\cos x| + C_1, C_2(x) = x + C_2$. Bunları y ifadəsində yerinə yazsaq: $y = e^{2x}[(C_1 + \ln|\cos x|)\cos x + (C_2 + x)\sin x]$ verilmiş tənliyin ümumi həlli olur.

5. Tənliklər sistemini həll edin

$$1. \begin{cases} \dot{x} = y - ax, \\ \dot{y} = x - ay. \end{cases}$$

HƏLLİ. Sistemi yüksək tərtibli tənliyə gətirmək yolu ilə həll edək. Sistemin birinci tənliyinin hər tərəfini t -yə görə diferensiallayaq və

alınan ifadədə sistemi nəzərə alaq: $\ddot{x} = \dot{y} - ax$, $\ddot{x} = (1 + a^2)x - 2ay$. Sistemin birinci tənliyindən $y = \dot{x} + ax$ tapıb, axırıncı bərabərlikdə yazaq: $\ddot{x} = (1 + a^2)x - 2a(\dot{x} + ax)$, $\ddot{x} + 2a\dot{x} + (a^2 - 1)x = 0$. Bu tənlik sabit əmsallı tənlikdir. Onu həll edək. $\lambda^2 + 2a\lambda + a^2 - 1 = 0$ xarakteristik tənliyinin köklərinin $\lambda_1 = -a - 1$, $\lambda_2 = -a + 1$ olduğunu nəzərə alsaq $x(t) = C_1 e^{-(a+1)t} + C_2 e^{(1-a)t}$, $y = \dot{x} + ax = -C_1 e^{-(a+1)t} + C_2 e^{(1-a)t}$.

$$2. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 y, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{y}{t} - xy^2, \end{cases}$$

HƏLLİ. Sistemin birinci integralını tapmaqla həll edək. Sistemin birinci tənliyini y -ə, ikincini x -ə vurub, tərəf-tərəfə toplayaq. Onda

$$y \frac{dx}{dt} + x \frac{dy}{dt} = \frac{xy}{t}, \quad \frac{d}{dt}(xy) = \frac{xy}{t}, \quad xy = C_1 t. \text{ Sistemin birinci tənli-}$$

$$\text{yində } xy = C_1 t \text{ yazsaq alarıq: } \frac{dx}{dt} = x C_1 t, \quad \frac{dx}{x} = C_1 t dt, \quad \int \frac{dx}{x} =$$

$$= C_1 \int t dt + \ln C_2, \quad \ln|x| = C_1 \frac{t^2}{2} + \ln C_2, \quad x = C_2 e^{C_1 \frac{t^2}{2}}. \text{ Digər tərəf-}$$

$$\text{dən } xy = C_1 t, \text{ olduğundan } y = \frac{C_1}{C_2} t e^{-C_1 \frac{t^2}{2}}, \quad C_2 \neq 0.$$

$$3. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z, \\ \frac{dy}{dt} = x + z, \\ \frac{dz}{dt} = x + y, \end{cases}$$

HƏLLİ. Sistemi xarakteristik tənliyin köməyi ilə həll edək. Həlli $x = \alpha e^{\lambda t}$, $y = \beta e^{\lambda t}$, $z = \gamma e^{\lambda t}$ şəklində axtaraq. Onda $\frac{dx}{dt} = \alpha \lambda e^{\lambda t}$, $\frac{dy}{dt} = \beta \lambda e^{\lambda t}$, $\frac{dz}{dt} = \gamma \lambda e^{\lambda t}$. Bu qiymətləri sistemdə nəzərə alaq.

$$\begin{cases} -\lambda \alpha + \beta + \gamma = 0, \\ \alpha + (-\lambda) \beta + \gamma = 0, \\ \alpha + \beta + (-\lambda) \gamma = 0 \end{cases} \quad (*)$$

α , β , γ -ya görə (*) xətti bircins cəbri tənliklər sisteminin sıfırdan fərqli həllinin varlığı üçün

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^3 - 3\lambda - 2) = 0, \quad (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 = 0,$$

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. $\lambda_1 = 2$ kökü üçün (*) sistemine

$$\begin{cases} -2\alpha + \beta + \gamma = 0, \\ \alpha - 2\beta + \gamma = 0, \\ \alpha + \beta - 2\gamma = 0 \end{cases}$$

sistemin uyğun gəlir. $\alpha = 1$ qəbul etsək, $\beta = 1$, $\gamma = 1$ alarıq və həllərdən birini $x_1 = e^{2t}$, $y_1 = e^{2t}$, $z_1 = e^{2t}$ şəklində alarıq. $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -1$ kökləri üçün (*) sistemindən $\alpha + \beta + \gamma = 0$ alırıq (qalan tənliklər birinci tənliyin nəticəsi kimi alınır). Burada $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$ və $\alpha = 0$, $\beta = -1$, $\gamma = 1$ həllərinə baxaq. Onda alarıq: $x_2 = e^{-t}$, $y_2 = 0$, $z_2 = -e^{-t}$, $x_3 = 0$, $y_3 = -e^{-t}$, $z_3 = e^{-t}$. Bu həllərin xətti asılı olmadığını göstərək. Bunun üçün həmin funksiyaların Vronski determinantı sıfırdan fərqli olmalıdır.

$$W(x) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{2t} & e^{2t} & e^{2t} \\ e^{-t} & 0 & -e^{-t} \\ 0 & -e^{-t} & e^{-t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Deməli, bu həllər fundamental həllər sistemi təşkil edirlər. Onda sistemin ümumi həlli $x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}$, $y(t) = C_1 e^{2t} - C_3 e^{-t}$, $z(t) = C_1 e^{2t} - C_2 e^{-t} + C_3 e^{-t}$.

$$4. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + y, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$$

HƏLLİ. Həlli $x = \alpha e^{\lambda t}$, $y = \beta e^{\lambda t}$ şəklində axtaraq. Onda α , β , γ ədədlərini tapmaq üçün

$$\begin{cases} (3 - \lambda)\alpha + \beta = 0, \\ -\alpha + (1 - \lambda)\beta = 0 \end{cases}$$

sisteminə alırıq.

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 2.$$

$\lambda = 2$ qiymətinə uyğun sistem $\alpha + \beta = 0$ olur. Buradan $\beta = -1$ götürsək $\alpha = 1$ alırıq. Onda $x_1 = e^{2t}$, $y_1 = -e^{2t}$ həlli alınır. Bu həll isə xətti asılı olmayan ikinci həlli tapmaq mümkün olmadığından həlli $x_2 = (\alpha + \gamma t)e^{2t}$, $y_2 = (\beta + \omega t)e^{2t}$ şəklində axtaraq. Bu funksiyaları sistemdə nəzərə alsaq, α , β , γ , ω ədədlərini tapmaq üçün $\gamma + \omega = 0$, $\alpha + \beta = \gamma$, $-\alpha - \beta = \omega$ tənlikləri alınır. Burada $\alpha = 1$, $\beta = 0$ götürsək, $\gamma = 1$, $\omega = -1$ alırıq. Bunlara uyğun həll $x_2 = (1 + t)e^{2t}$, $y_2 = -te^{2t}$ olduğundan

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 (1 + t)e^{2t}, \\ y(t) = -C_1 e^{2t} - C_2 t e^{2t}. \end{cases}$$

Başlanğıc şərtlərdən istifadə etsək $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, $x(t) = (1 + t)e^{2t}$, $y(t) = -te^{2t}$.

6. Həllin başlanğıc şərtlərindən və parametrlərdən asılılığı. Qüvvət sırasının köməyi ilə tənliyin inteqrallanması

1. $y' = x + \sin y$ tənliyinin $y(0) = 0$ və $y(0) = 0,01$ şərtlərini ödəyən həllərinin $[0, 1]$ parçasında fərqi qiymətləndirin.

HƏLLİ. Tutaq ki, tənliyin $y(0) = 0$ şərtini ödəyən həlli $\varphi(x)$, $y(0) = 0,01$ şərtini ödəyən həlli isə $\psi(x)$ -dir. Onda bu funksiyalar

$$\text{üçün } \psi(x) = 0,01 + \int_0^x (s + \sin \psi(s)) ds, \quad \varphi(x) = \int_0^x (s + \sin \varphi(s)) ds,$$

$x \in [0, 1]$ inteqral bərabərlikləri ödəyir. Buradan $\psi(x) - \varphi(x) = 0,01 +$

$$\begin{aligned} & + \int_0^x (\sin \psi(s) - \sin \varphi(s)) ds, \quad \sin \psi(s) - \sin \varphi(s) = \\ & = 2 \cos \frac{\psi(s) + \varphi(s)}{2} \sin \frac{\psi(s) - \varphi(s)}{2}, \quad |\sin \psi(s) - \sin \varphi(s)| \leq \\ & \leq 2 \left| \cos \frac{\psi(s) + \varphi(s)}{2} \right| \left| \sin \frac{\psi(s) - \varphi(s)}{2} \right| \leq |\psi(s) - \varphi(s)|. \end{aligned}$$

Onda $|\psi(x) - \varphi(x)| \leq 0,01 + \int_0^x |\psi(s) - \varphi(s)| ds$, $x \in [0, 1]$. Alınan

inteqral bərabərsizliyə Gronuoll bərabərsizliyini tətbiq etsək alırıq:

$$|\psi(x) - \varphi(x)| \leq 0,01e^x \leq 0,01e \leq 0,0272.$$

2. $y' = \frac{2}{y} - 5\mu x$, $y(1) = 2$ məsələsinin həllinin μ parametrinə nəzərən qüvvət sırasına ayrılışın bir neçə həddini tapın.

HƏLLİ. Verilən tənliyi $yy' = 2 - 5\mu xy$ şəklində yazaq və həlli $y = v_0(x) + \mu v_1(x) + \mu^2 v_2(x) + \dots$ şəkildə axtaraq. Bu ayrılışı və $y' = v_0'(x) + \mu v_1'(x) + \mu^2 v_2'(x) + \dots$ törəməni çevrilmiş tənlikdə yazaq:

$$\begin{aligned} (v_0(x) + \mu v_1(x) + \mu^2 v_2(x) + \dots)(v_0'(x) + \mu v_1'(x) + \mu^2 v_2'(x) + \dots) = \\ = 2 - 5\mu x(v_0(x) + \mu v_1(x) + \mu^2 v_2(x) + \dots). \end{aligned}$$

Buradan μ parametrinin eyni dərəcələrinin əmsallarını bərabərləşdir-məklə alırıq:

$$\begin{array}{l|l} \mu^0 & v_0 v_0' = 2, \quad v_0(1) = 2, \\ \mu & v_0 v_1' + v_0' v_1 = -5x v_0, \quad v_1(1) = 0, \\ \mu^2 & v_0 v_2' + v_0' v_2 + v_1 v_1' = -5x v_1, \quad v_2(1) = 0, \\ \dots & \dots \end{array}$$

Alınan tənlikləri ardıcıl olaraq həll edək:

$$v_0 v_0' = 2, \quad v_0(1) = 2, \quad \int v_0 dv_0 = \int 2dx + C,$$

$$v_0^2(x) = 4x + C, \quad v_0^2(1) = 4 + C, \quad C = 0; \quad v_0(x) = 2\sqrt{x},$$

$$v_0(x)v_1' + v_0'(x)v_1 = -5xv_0(x), \quad v_1(1) = 0,$$

$$2\sqrt{x}v_1' + \frac{v_1}{\sqrt{x}} = -10x^{\frac{3}{2}}, \quad v_1' + \frac{v_1}{2x} = -5x.$$

Alınan xətti tənliyin $v_1(1) = 0$ şərtini ödəyən həllini tapsaq: $v_1(x) =$
 $= 2\left(x^{-\frac{1}{2}} - x^2\right)$. $v_0(x)$ və $v_1(x)$ funksiyalarını üçüncü tənlikdə ye-

rinə yazıb sadələşdirək, onda $v_2' + \frac{v_2}{2x} = x^{\frac{5}{2}} - 2 + x^{-\frac{5}{2}}$, $v_2(1) = 0$ xətti tənliyi alınır. Bu tənliyi həll edərək tapırıq:

$$v_2(x) = \frac{1}{4}x^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{3}x - x^{-\frac{3}{2}} + \frac{25}{12}x^{-\frac{1}{2}} \dots$$

Alınan funksiyaların həllin ayrılışında yazsaq alırıq:

$$y = 2\sqrt{x} + 2\mu\left(x^{-\frac{1}{2}} - x^2\right) + \mu^2\left(\frac{1}{4}x^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{3}x + \frac{25}{12}x^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{3}{2}}\right) + \dots$$

3. $y'' - x^2 y = 0$ tənliyinin xətti asılı olmayan həllərini qüvvət sırası şəklində tapın.

HƏLLİ. Baxılan tənlik üçün əmsallar $p(x) = 0$, $q(x) = -x^2$ ana-litik funksiyalardır, yə'ni $x = 0$ nöqtəsi adi nöqtədir. Bu halda tənliyin yığılan qüvvət sırası şəklində həlli var. Tənliyin həllini $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$

qüvvət sırası şəklində axtaraq. Buradan $y' = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}$, $y'' =$

$= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2}$ tapıb, tənlikdə yazaq:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} - \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^{k+2} = 0.$$

Bu bərabərlikdə x dəyişənin eyni dərəcələrinin əmsallarını müqə-

yisə etməklə alırıq:

$$\begin{aligned}
 x^0 \quad & 2 \cdot 1c_2 = 0, \quad c_2 = 0, \\
 x^1 \quad & 3 \cdot 2c_3 = 0, \quad c_3 = 0, \\
 x^2 \quad & 4 \cdot 3c_4 - c_0 = 0, \quad c_4 = \frac{c_0}{4 \cdot 3}, \\
 x^3 \quad & 5 \cdot 4c_5 - c_1 = 0, \quad c_5 = \frac{c_1}{5 \cdot 4}, \\
 x^4 \quad & 6 \cdot 5c_6 - c_2 = 0, \quad c_6 = 0, \\
 x^5 \quad & 7 \cdot 6c_7 - c_3 = 0, \quad c_7 = 0, \\
 x^6 \quad & 8 \cdot 7c_8 - c_4 = 0, \quad c_8 = \frac{c_4}{7 \cdot 8} = \frac{c_0}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8}, \\
 x^7 \quad & 9 \cdot 8c_9 - c_5 = 0, \quad c_9 = \frac{c_5}{8 \cdot 9} = \frac{c_1}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9}, \\
 x^8 \quad & 10 \cdot 9c_{10} - c_6 = 0, \quad c_{10} = 0, \\
 x^9 \quad & 11 \cdot 10c_{11} - c_7 = 0, \quad c_{11} = 0, \\
 x^{10} \quad & 12 \cdot 11c_{12} - c_8 = 0, \quad c_{12} = \frac{c_8}{11 \cdot 12} = \frac{c_0}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12}, \\
 x^{11} \quad & 13 \cdot 12c_{13} - c_9 = 0, \quad c_{13} = \frac{c_9}{12 \cdot 13} = \frac{c_1}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 13}, \\
 \dots & \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

Verilən tənliyin $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ və $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ şərtlərini ödəyən $y_1(x)$ və $y_2(x)$ həllərinə baxaq. Aydındır ki, bu həllər xətti asılı olmayandır. $y_1(x)$ həlli üçün $c_0 = 1$, $c_1 = 0$ olur. Odur ki,

$$y_1(x) = 1 + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^8}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} + \frac{x^{12}}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12} + \dots$$

$y_2(x)$ həlli üçün $c_0 = 0$, $c_1 = 1$ olduğundan

$$y_2(x) = x + \frac{x^5}{4 \cdot 5} + \frac{x^9}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9} + \frac{x^{13}}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 13} + \dots$$

4. $xy'' + 2y' + xy = 0$ tənliyinin həllini ümumiləşmiş qüvvət sırasına ayırmaqla tapın.

HƏLLİ. Verilən tənliyi $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$ şəklində yazsaq

$p(x) = \frac{2}{x}$, $q(x) = 1$ olar. Deməli, $x = 0$ tənliyin məxsusi nöqtəsidir.

Odur ki, həlli $y = x^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ ($c_0 \neq 0$) ümumiləşmiş qüvvət sırası

şəklində tapmaq lazımdır, burada ρ ədədi $\rho(\rho-1) + p_0\rho + q_0 = 0$ tənliyinin həlli kimi tapılır:

$$p_0 = \lim_{x \rightarrow 0} xp(x) = 2, \quad q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 q(x) = 0,$$

$$\rho(\rho-1) + 2\rho = 0; \quad \rho_1 = 0, \quad \rho_2 = -1.$$

Beləliklə, həlli

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad \text{və} \quad y_2(x) = x^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

sıraları şəklində tapmaq lazımdır. Birinci sıra üçün $y_1'(x) =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}, \quad y_1''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} \quad \text{olduğundan}$$

$$x \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} x c_k x^k = 0.$$

Bu bərabərliyi sadələşdirsək alırıq:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) c_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1} = 0.$$

Buradan x dəyişəninin eyni dərəcəli əmsallarını müqayisə etməklə alırıq:

$$\begin{array}{l} x^0 \quad 1 \cdot 2c_1 = 0, \quad c_1 = 0, \\ x^1 \quad 2 \cdot 3c_2 + c_0 = 0, \quad c_2 = -\frac{c_0}{2 \cdot 3} = -\frac{c_0}{3!}, \\ x^2 \quad 4 \cdot 3c_3 + c_1 = 0, \quad c_3 = 0, \\ x^3 \quad 5 \cdot 4c_4 + c_2 = 0, \quad c_4 = -\frac{c_2}{4 \cdot 5} = \frac{c_0}{5!}, \\ x^4 \quad 5 \cdot 6c_5 + c_3 = 0, \quad c_5 = 0, \\ x^5 \quad 6 \cdot 7c_6 + c_4 = 0, \quad c_6 = -\frac{c_4}{6 \cdot 7} = -\frac{c_0}{7!}, \\ \dots \quad \dots\dots\dots \end{array}$$

Burada $c_0 = 1$ qəbul etsək

$$y_1(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

İndi ikinci sıradan törəmələr alıb, tənlikdə yerinə yazaq.

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1}, \quad y_2'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)c_k x^k,$$

$$y_2''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)c_k x^{k+3},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k-1)(k-2)c_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} 2(k-1)c_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0.$$

Alınan ifadəni sadələşdirək:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0.$$

Buradan x dəyişəninə eyni dərəcələrinin əmsalları cəminin sıfıra bərabər olmasından alırıq:

$$\begin{array}{l} x^0 \quad 2 \cdot 1 c_2 + c_0 = 0, \quad c_2 = -\frac{c_0}{2!}, \\ x^1 \quad 3 \cdot 2 c_2 + c_1 = 0, \quad c_3 = -\frac{c_1}{2 \cdot 3} = -\frac{c_1}{3!}, \\ x^2 \quad 4 \cdot 3 c_4 + c_2 = 0, \quad c_4 = -\frac{c_2}{3 \cdot 4} = \frac{c_0}{4!}, \\ x^3 \quad 5 \cdot 4 c_5 + c_3 = 0, \quad c_5 = -\frac{c_3}{4 \cdot 5} = \frac{c_1}{5!}, \\ x^4 \quad 6 \cdot 5 c_6 + c_4 = 0, \quad c_6 = -\frac{c_4}{6 \cdot 5} = -\frac{c_0}{6!}, \\ \dots \end{array}$$

Burada $c_0 = 1$, $c_1 = 0$ qəbul etsək alarıq:

$$y_2(x) = x^{-1} \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right) = \frac{\cos x}{x}$$

Tənlən $y_1(x)$ və $y_2(x)$ həlləri xətti asılı olmadığından $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ tənliyinin ümumi həlli olar.

7. Həllin dayanıqlığı. Məxsusi nöqtə

1. Dayanıqlığın tərifindən istifadə edərək $\dot{x} = -x + t^2$ tənliyinin $x(1) = 1$ şərtini ödəyən həllinin dayanıqlığını araşdırın.

HƏLLİ. Əvvəlcə verilən xətti tənliyi həll edib, onun $x(t) = Ce^{-t} + t^2 - 2t + 2$ ümumi həllini tapanq. Ümumi həldən $x(1) = 1$ şərtini ödəyən həlli tapsaq $\varphi(t) = t^2 - 2t + 2$. Bu həllin dayanıqlığını araşdırmaq üçün ixtiyari $x(1) = \xi$ şərtini ödəyən $\varphi(t, \xi) = (\xi - 1)e^{1-t} + t^2 - 2t + 2$ həllini tapıb, $\varphi(t, \xi) - \varphi(t) = (\xi - 1)e^{1-t}$ fərqi hesablayaq. Alınan fərqin ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün $|\varphi(t, \xi) - \varphi(t)| = |\xi - 1|e^{1-t} < \varepsilon$ şərti bütün $t \geq 1$ ödənməsi üçün kifayətdir ki, $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ götürək. Doğ-

rudan da, $|\xi - 1| < \delta = \varepsilon$ olduqda, $|\varphi(t, \xi) - \varphi(t)| = |\xi - 1|e^{1-t} \leq |\xi - 1| < \delta = \varepsilon$ bərabərsizliyi bütün $t \geq 1$ üçün ödəyir. Buradan dayanıqlığın tərifinə əsasən $\varphi(t) = t^2 - 2t + 2$ həllinin Lyapunov mə'nada dayanıqlı olması alınır.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\varphi(t, \xi) - \varphi(t)| = \lim_{t \rightarrow +\infty} |\xi - 1|e^{1-t} = 0$$

olduğundan baxılan həll Lyapunov mə'nada asimptotik dayanıqlı olur.

2. α -ədədinin hansı qiymətlərində

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + \alpha y, \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$$

sisteminin (0,0) tarazlıq vəziyyəti dayanıqlıdır.

HƏLLİ. Baxılan halda (0,0) həllinin dayanıqlı olması üçün sistemin

$$\begin{vmatrix} -3 - \lambda & \alpha \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 3 - 2\alpha = 0$$

xarakteristik tənliyinin $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{4 + 2\alpha}$ köklərinin həqiqi hissəsi müsbət olmamalı və sıfıra bərabər olan kök təkrar olmamalıdır. Ona görə $4 + 2\alpha \leq 1$ şərti ödənməlidir. Buradan $\alpha \leq -\frac{3}{2}$. Aydın ki,

$\alpha < -\frac{3}{2}$ olarsa, hər iki kökün həqiqi hissəsi mənfi olur. Odur ki, (0,0) həlli asimptotik dayanıqlı olur.

3. $x^{IV} + 7\ddot{x} + 17\ddot{x} + 17\dot{x} + 6x = 0$ tənliyinin $x = 0$ həllinin dayanıqlığını araşdırın.

HƏLLİ. Raus-Qurviç əlamətindən istifadə edərək $x = 0$ həllində dayanıqlığını araşdıraraq. Tənliyin $f(\lambda) = \lambda^4 + 7\lambda^3 + 17\lambda^2 + 17\lambda + 6$, xarakteristik çoxhədliyi üçün Qurviç matrisini yazaq:

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 17 & 17 & 7 & 1 \\ 0 & 6 & 17 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Bu matrisin baş diaqonal minorlarını hesablayaq: $\Delta_1 = 7$, $\Delta_2 =$

$$= \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 17 & 17 \end{vmatrix} = 272, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 17 & 17 & 7 \\ 0 & 6 & 17 \end{vmatrix} = 1440, \quad \Delta_4 = 6\Delta_3 = 8640.$$

$\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$, $\Delta_4 > 0$ olduğundan Raus-Qurviç əlamətinə əsasən $x = 0$ həlli asimptotik dayanıqlı olur.

$$4. \begin{cases} \dot{x} = \frac{3}{4} \sin x - 7y(1-y)^{\frac{1}{3}} + x^3, \\ \dot{y} = \frac{2}{3}x - 3y \cos y - 11y^5 \end{cases} \text{ sisteminin } x = 0, y = 0 \text{ həlli-}$$

nin birinci yaxınlaşmalara nəzərən dayanıqlığını araşdırın.

HƏLLİ. Baxılan sistem üçün birinci yaxınlaşmalar sistemini tapaq. Sistemin sağ tərəfləri $f_1(x, y) = \frac{3}{4} \sin x - 7y(1-y)^{\frac{1}{3}} + x^3$,

$f_2(x, y) = \frac{2}{3}x - 3y \cos y - 11y^5$ funksiyaları üçün

$$a_{11} = f'_{1x}(0, 0) = \frac{3}{4}, \quad a_{12} = f'_{1y}(0, 0) = -7, \quad a_{21} = f'_{2x}(0, 0) = \frac{2}{3},$$

$$a_{22} = f'_{2y}(0, 0) = -3.$$

Onda

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{3}{4}x - 7y, \\ \dot{y} = \frac{2}{3}x - 3y \end{cases}$$

verilən sistemin birinci yaxınlaşmalar sistemi olur. Bu sistemin xarakteristik tənliyini tapıb həll edək.

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{4} - \lambda & -7 \\ \frac{2}{3} & -3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{9}{4}\lambda + \frac{29}{12} = 0, \quad \lambda_{1,2} = -\frac{9}{8} \pm i\sqrt{\frac{221}{192}}.$$

Köklərin həqiqi hissəsi mənfi olduğundan axırıncı sistemin $x = 0, y = 0$ həlli asimptotik dayanıqlıdır. Onda Lyapunovun birinci yaxınlaşmalar əlamətinə əsasən verilən sistemin $x = 0, y = 0$ həlli asimptotik dayanıqlı olur.

5. $\begin{cases} \dot{x} = -x^5 + y, \\ \dot{y} = -x - y^5 \end{cases}$ sisteminin $x = 0, y = 0$ həllinin dayanıqlığını

Lyapunov funksiyalar üsuluna nəzərən araşdırın.

HƏLLİ. Baxılan sistem üçün birinci yaxınlaşmalar sistemi $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x \end{cases}$

olduğundan, bu sistemin $\lambda^2 + 1 = 0$ xarakteristik tənliyinin $\lambda_{1,2} = \pm i$ köklərinin həqiqi hissəsi sıfır olur. Odur ki, birinci yaxınlaşmalara nəzərən sistemin $x = 0, y = 0$ həllinin dayanıqlığı haqqında fikir söyləmək olmur. Lyapunov funksiyası olaraq $v(x, y) = x^2 + y^2$ götürək və bu funksiyanın verilən sisteminə nəzərən törəməsini hesablayaq.

$$\frac{dv}{dt} = 2x(-x^5 + y) + 2y(-x - y^5) = -2(x^6 + y^6).$$

$v(x, y)$ funksiyası müsbət-müəyyən, $\frac{dv}{dt}$ törəməsi isə mənfi-müəyyən olduğundan Lyapunov funksiyalar əlamətinə əsasən sistemin

$x = 0, y = 0$ həlli asimptotik dayanıqlıdır.

6. $\begin{cases} \dot{x} = 2xy - 4y - 8, \\ \dot{y} = 4y^2 - x^2 \end{cases}$ sisteminin məxsusi nöqtələrini tapın və tipini təyin edin.

HƏLLİ. Məxsusi nöqtələri tapmaq üçün

$$\begin{cases} 2xy - 4y - 8 = 0, \\ 4y^2 - x^2 = 0 \end{cases}$$

sistemi həll etmək lazımdır. $(4, 2)$ və $(-2, -1)$ sistemin həlli olduğundan məxsusi nöqtələridir. Bu nöqtələrin tipini təyin etmək üçün

$f_1(x, y) = 2xy - 4y - 8, f_2(x, y) = 4y^2 - x^2$ funksiyalarını bu nöqtələrin ətrafında Teylor düsturuna ayırmaq lazımdır. $(4, 2)$ nöqtəsi üçün $a_{11} = f'_{1x}(4, 2) = 4, a_{12} = f'_{1y}(4, 2) = 4, a_{21} = f'_{2x}(4, 2) = -8, a_{22} = f'_{2y}(4, 2) = 16$ olduğundan bu nöqtənin ətrafında verilən sistemi

$$\begin{cases} \dot{x} = 4(x - 4) + 4(y - 2) + \varphi_1(x, y), \\ \dot{y} = -8(x - 4) + 16(y - 2) + \varphi_2(x, y) \end{cases}$$

şəklində yazmaq olar. Burada $\varphi_k(x, y)$ ifadəsi $r = \sqrt{(x - 4)^2 + (y - 2)^2}$ nəzərən $r \rightarrow 0$ şərtində yüksək tərtibli sonsuz kiçik kəmiyyətdir. Mə'lumdur ki,

$$\begin{cases} \dot{x} = 4(x - 4) + 4(y - 2), \\ \dot{y} = -8(x - 4) + 16(y - 2) \end{cases}$$

sistemi üçün $(4, 2)$ nöqtəsinin tipi, həmi də verilən sistem üçün eyni olur. Axırıncı sistemin xarakteristik tənliyini yazıb, həll edək.

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 4 \\ -8 & 16 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 20\lambda + 96 = 0, \quad \lambda_1 = 8, \quad \lambda_2 = 12.$$

Köklər həqiqi və eyni işarəli olduğundan (4, 2) düyün məxsusi nöqtə olur. (-2, -1) nöqtəsi üçün $a_{11} = f'_{1x}(-2, -1) = -2$, $a_{12} = f'_{1y}(-2, -1) = -8$, $a_{21} = f'_{2x}(-2, -1) = 4$, $a_{22} = f'_{2y}(-2, -1) = -8$,

$$\begin{cases} \dot{x} = -2(x+2) - 8(y+1), \\ \dot{y} = 4(x+2) - 8(y+1), \end{cases} \quad \begin{vmatrix} -2-\lambda & -8 \\ 4 & -8-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 10\lambda + 48 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = -5 \pm i\sqrt{23}.$$

Köklərin həqiqi hissəsi mənfi ədəd olub, kompleks olduğundan (-2, -1) nöqtəsi verilən sistem üçün dayanıqlı fokus olur.

8. Sərhəd məsələsi

1. $y'' + y = 1$ tənliyinin $y(0) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ sərhəd şərtlərini ödəyən həllini tapın.

HƏLLİ. Əvvəlcə verilən tənliyin ümumi həllini tapaq. Bircins tənliyə uyğun $\lambda^2 + 1 = 0$ xarakteristik tənliyin kökləri $\lambda_{1,2} = \pm i$ olduğundan $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ bircins tənliyin ümumi həlli olur. $\tilde{y} = 1$ bircins olmayan tənliyin bir xüsusi həlli olduğundan

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 1$$

tənliyin ümumi həlli olur. C_1 və C_2 sabitləri $y(0) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ sərhəd şərtlərinə əsasən tapılır.

$$C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 + 1 = 0, \quad -C_1 \sin \frac{\pi}{2} + C_2 \cos \frac{\pi}{2} = 1.$$

Buradan $C_1 = -1$, $C_2 = C$ ixtiyari götürsək $y = C \sin x - \cos x + 1$ funksiya verilən tənliyin verilən şərtləri ödəyən həlli olar. C ixtiyari ədəd olduğundan sərhəd məsələsinin sonsuz həlli var.

2. $x^2 y'' - 2y = 0$ tənliyinin $y(1) = 1$ və $\lim_{x \rightarrow \infty} y'(x) = 0$ şərtlərini ödəyən həllini tapın.

HƏLLİ. Verilən Eyler tənliyinin ümumi həllini tapaq. $x = e^t$ ($x > 0$) əvəzləməsini apararaq.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = e^{-t} \frac{dy}{dt}, \quad y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = e^{-t} \frac{d}{dt} \left[e^{-t} \frac{dy}{dt} \right] = e^{-2t} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right).$$

Bunları tənlikdə yazsaq alırıq:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 2y = 0, \quad \lambda^2 - \lambda - 2 = 0, \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2.$$

$$y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} = \frac{C_1}{x} + C_2 x^2.$$

Burada $y(1) = 1$ və $\lim_{x \rightarrow \infty} y'(x) = 0$ şərtlərinə əsasən $C_1 + C_2 = 1$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{C_1}{x} + 2C_2 x \right) = 0. \text{ Deməli, } C_2 = 0, \quad C_1 = 1 \text{ olmalıdır. Beləliklə,}$$

$y = \frac{1}{x}$ baxılan məsələnin həlli olur.

3. $y'' + y = f(x)$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ məsələsinin Qrin funksiya-sını qurun.

HƏLLİ. $y'' + y = 0$ tənliyinin ümumi həlli $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ olduğundan Qrin funksiyası

$$G(x, s) = \begin{cases} C_1 \cos x + C_2 \sin x, & 0 \leq x \leq s, \\ C_3 \cos x + C_4 \sin x, & s \leq x \leq 1 \end{cases}$$

şəklidə axtarılır. $G(x, s)$ funksiyası $x = s$ nöqtəsində kəsilməzdir və $G'_x(s+0, s) - G'_x(s-0, s) = 1$ şərtini ödəyir. Odur ki,

$$\begin{cases} (C_3 - C_1) \cos s + (C_4 - C_2) \sin s = 0, \\ -(C_3 - C_1) \sin s + (C_4 - C_2) \cos s = 1. \end{cases}$$

Buradan $C_3 - C_1 = -\sin s$, $C_4 - C_2 = \cos s$. Deməli,

$$G(x, s) = \begin{cases} C_1 \cos x + C_2 \sin x, & 0 \leq x \leq s, \\ (C_1 - \sin s) \cos x + (C_2 + \cos s) \sin x, & s \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Qrin funksiyası sərhəd şərtlərini ödədiyindən alırıq:

$$\begin{cases} C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 0, & \Rightarrow C_1 = 0; \\ (C_1 - \sin s) \cos 1 + (C_2 + \cos s) \sin 1 = 0, \end{cases}$$

$$C_2 = \frac{\cos 1}{\sin 1} \sin s - \cos s = \frac{\sin(s-1)}{\sin 1}.$$

Bunları Qrin funksiyasının axırıncı ifadəsində yerinə yazsaq

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{\sin x \sin(1-s)}{\sin 1}, & 0 \leq x \leq s, \\ -\frac{\sin s \sin(1-x)}{\sin 1}, & s \leq x \leq 1 \end{cases}$$

axtarılan sərhəd məsələsinin Qrin funksiyası olar.

4. λ -ədədinin hansı qiymətlərində

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(\pi), \quad y'(0) = y'(\pi)$$

sərhəd məsələsinin sıfırdan fərqli həlli var.

HƏLLİ. $\lambda = 0$ olduqda tənliyin həlli $y = C_1 x + C_2$ olduğundan sərhəd şərtlərinə əsasən $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ olur, yəni $\lambda = 0$ məxsusi ədəd olmur. $\lambda < 0$ olduqda tənliyin ümumi həlli $y = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}$ olduğundan sərhəd şərtlərinə əsasən

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}\pi}, \\ -C_1 + C_2 = -C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}\pi}. \end{cases}$$

Buradan $C_1 = C_2 = 0$. Deməli, $\lambda < 0$ olduqda məsələnin sıfırdan fərqli həlli olmur. İndi $\lambda > 0$ üçün tənliyin ümumi həllini tapaq.

$$y = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x.$$

Bu həlli sərhəd şərtlərində yazsaq:

$$\begin{cases} C_1 = C_1 \cos \sqrt{\lambda}\pi + C_2 \sin \sqrt{\lambda}\pi, \\ C_2 = -C_1 \sin \sqrt{\lambda}\pi + C_2 \cos \sqrt{\lambda}\pi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1 - \cos \sqrt{\lambda}\pi) C_1 - C_2 \sin \sqrt{\lambda}\pi = 0, \\ C_1 \sin \sqrt{\lambda}\pi + (1 - \cos \sqrt{\lambda}\pi) C_2 = 0. \end{cases}$$

Alınan sistemin C_1 , C_2 məchullarına nəzərən sıfırdan fərqli həllinin olması üçün

$$\begin{vmatrix} 1 - \cos \sqrt{\lambda}\pi & -\sin \sqrt{\lambda}\pi \\ \sin \sqrt{\lambda}\pi & 1 - \cos \sqrt{\lambda}\pi \end{vmatrix} = 2(1 - \cos \sqrt{\lambda}\pi) = 0.$$

Buradan $\cos \sqrt{\lambda}\pi = 1$; $\sqrt{\lambda}\pi = 2k\pi$; $\lambda_k = (2k)^2$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Bu ədədlər verilən məsələnin məxsusi ədədləri olur. Məxsusi funksiyaları tapmaq üçün bu qiymətləri ümumi həldə yazsaq. Onda

$$y_k(x) = C_{1k} \cos 2kx + C_{2k} \sin 2kx, \quad k = 1, 2, 3, \dots \text{ (burada } C_{1k},$$

C_{2k} ixtiyari ədədlərdir və $C_{1k}^2 + C_{2k}^2 > 0$), məsələnin məxsusi funksiyaları olur.

Yoxlama işlərinin həll nümunələri

1. $xy' + y - 3 = 0$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

HƏLLİ. Verilmiş tənlik xətti olduğundan onu həll etmək üçün $y = u(x)v(x)$ əvəzləməsini aparaq, yəni həlli x -dən asılı iki funksiyanın hasilində axtaraq. Onda alırıq. $y' = u'v + v'u$. y və y'

in qiymətlərini verilmiş tənlikdə yerinə yazaq:

$$x(u'v + v'u) + uv - 3 = 0, \quad u(xv' + v) + xvu' - 3 = 0.$$

$u(x)$ və $v(x)$ funksiyalarını elə seçək ki,

$$xv' + v = 0, \quad xvu' - 3 = 0.$$

Birinci tənliyi dəyişənlərinə ayıraraq həll edək:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = -\ln|x|, \quad v = \frac{1}{x}.$$

v -nin bu qiymətini ikinci tənlikdə nəzərə alaq:

$$x \cdot \frac{1}{x} u' = 3, \quad u' = 3, \quad du = 3dx, \quad u = 3x + C.$$

$u(x)$ və $v(x)$ -in qiymətlərini $y = u(x)v(x)$ əvəzləməsində nəzərə alsaq yazı bilərik:

$$y = \frac{1}{x}(3x + C) = 3 + \frac{C}{x}, \quad y = 3 + \frac{C}{x}.$$

2. $y'' + \frac{1}{x}y' = x^2$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

HƏLLİ. Verilmiş tənlik ikitərtibli xətti bircins olmayan diferensial tənlikdir. $y' = p(x)$ əvəzləməsi aparaq. Onda $y'' = p'(x)$ olduğundan

$$p' + \frac{1}{x}p = x^2.$$

Bu tənlik birtərtibli xətti tənlikdir. Həll üçün sabitin variasiyası üsulunu tətbiq edək. Əvvəlcə $p' + \frac{1}{x}p = 0$ bircins tənliyinin ümumi həllini tapaq.

$$\int \frac{dp}{p} = -\int \frac{dx}{x} + \ln C, \quad \ln|p| = -\ln x + \ln C, \quad p = \frac{C}{x}.$$

Burada C sabitini $C(x)$ kimi qəbul edək və $C(x)$ elə seçək ki,

$$p(x) = \frac{C(x)}{x} \text{ ifadəsi bircins olmayan tənliyin həlli olsun:}$$

$$p'(x) = \frac{C'(x)x - 1 \cdot C(x)}{x^2} = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}.$$

p və p' -in qiymətlərini tənlikdə yerinə yazaq.

$$\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{1}{x} \frac{C(x)}{x} = x^2, \quad \frac{C'(x)}{x} = x^2.$$

Buradan alırıq:

$$\frac{dC}{dx} = x^3, \quad C(x) = \frac{x^4}{4} + C_1.$$

Onda yazı bilərik:

$$p(x) = \frac{1}{x} \left(\frac{x^4}{4} + C_1 \right) = \frac{x^3}{4} + \frac{C_1}{x}.$$

Digər tərəfdən $y' = p$ olduğunu nəzərə alsaq yazmaq olar:

$$y' = \frac{x^3}{4} + \frac{C_1}{x}, \quad dy = \left(\frac{x^3}{4} + \frac{C_1}{x} \right) dx, \quad y = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} + C_1 \ln|x| + C_2.$$

Beləliklə, verilmiş tənliyin ümumi həlli

$$y = \frac{x^4}{16} + C_1 \ln|x| + C_2$$

şəklində tapılır.

3. $y'' - 2y' + 5y = xe^{2x}$ tənliyinin $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ başlanğıc şərtlərini ödəyən həllini tapın.

HƏLLİ. Verilmiş tənlik sabit əmsallı bircins olmayan ikitərtibli xətti diferensial tənlikdir. Belə tənliklərin ümumi həlli bircins tənliyin y_b ümumi həlli ilə bircins olmayan tənliyin \tilde{y} xüsusi həllinin cəminə bərabərdir.

$$y = y_b + \tilde{y}$$

$y'' - 2y' + 5y = 0$ bircins tənliyin ümumi həllini tapaq. Uyğun xarakteristik $k^2 - 2k + 5 = 0$ tənliyinin kökləri $k_{1,2} = 1 \pm 2i$ olduğundan

$y_b = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$ ümumi həlli olur.

$\alpha = 2$ ədədi xarakteristik tənliyin kökü olmadığından verilmiş tənliyin xüsusi həllini

$$\tilde{y} = (Ax + B)e^{2x}$$

şəklində axtarmalıyıq. Onda yazı bilərik:

$$\tilde{y}' = Ae^{2x} + 2(Ax + B)e^{2x} = e^{2x}(2Ax + 2B + A),$$

$$\tilde{y}'' = 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4(Ax + B)e^{2x} = 4e^{2x}(Ax + B + A).$$

\tilde{y} , \tilde{y}' və \tilde{y}'' -in qiymətlərini verilmiş tənlikdə yerinə yazsaq alırıq:

$$5Ax + 2A + 5B = x.$$

Buradan namə'lum əmsallar üsuluna əsasən yazı bilərik:

$$\begin{cases} 5A = 1, \\ 2A + 5B = 0 \end{cases}, \quad A = \frac{1}{5}, \quad B = -\frac{2}{25} \quad \tilde{y} = \frac{1}{5}\left(x - \frac{2}{5}\right)e^{2x}.$$

Beləliklə, verilmiş tənliyin ümumi həlli

$$y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{1}{5}\left(x - \frac{2}{5}\right)e^{2x}$$

şəklində yazılır. $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ başlanğıc şərtlərini axırıncı ifadədə nəzərə alsaq tapırıq:

$$C_1 = \frac{27}{25}, \quad C_2 = \frac{14}{25}, \quad y = \frac{1}{25}e^x(27 \cos 2x + 14 \sin 2x) +$$

$$+ \frac{1}{5}\left(x - \frac{2}{5}\right)e^{2x}.$$

$$4. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 6y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 2y \end{cases}$$

1. Xarakteristik tənliyin köməkliyi ilə sistemin ümumi həllini tapın.
2. Sistemi və onun həllini matris şəklində göstərin.

HƏLLİ. 1. Sistemin həllini $x = k_1 e^{\lambda t}$, $y = k_2 e^{\lambda t}$ şəklində axtaraq. λ ədədi

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 6 \\ 4 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0$$

xarakteristik tənliyin, k_1 və k_2 ədədləri isə

$$\begin{cases} (4 - \lambda)k_1 + 6k_2 = 0, \\ 4k_1 + (2 - \lambda)k_2 = 0 \end{cases}$$

sisteminin sıfırdan fərqli həlli kimi tapılır. Xarakteristik tənliyin $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = -2$ köklərini tapırıq: $\lambda_1 = 8$ kökü üçün sistemi yazıq.

$$\begin{cases} -4k_1 + 6k_2 = 0, \\ 4k_1 - 6k_2 = 0, \end{cases} \quad k_1 = \frac{3}{2}k_2 \quad \text{tapırıq.} \quad k_2 = 2 \quad \text{qəbul etsək} \quad k_1 = 3$$

alırıq. Onda $\lambda_1 = 8$ kökünə uyğun xüsusi həll: $\begin{cases} x_1 = 3e^{8t}, \\ y_1 = 2e^{8t}, \end{cases}$

$$\lambda_2 = -2 \text{ kökü üçün sistem } \begin{cases} 6k_1 + 6k_2 = 0, \\ 4k_1 + 4k_2 = 0, \end{cases} \quad k_1 = -k_2 \quad \text{tapırıq.}$$

$k_2 = 1$ qəbul etsək, $k_1 = -1$ alırıq. Onda $\lambda_2 = -2$ kökünə uyğun xüsusi həll:

$$\begin{cases} x_2 = -e^{-2t}, \\ y_2 = e^{-2t}, \end{cases}$$

Onda sistemin ümumi həllini

$$\begin{cases} x = 3C_1 e^{8t} - C_2 e^{-2t}, \\ y = 2C_1 e^{8t} + C_2 e^{-2t} \end{cases}$$

şəklində yazı bilərik.

2. Verilmiş sistemi və həlli matris formasında yazıq:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3C_1 & -C_2 \\ 2C_1 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{8t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

5. $y' = \frac{x}{y}e^{2x} + y$ tənliyini $y(0) = 1$ və $y(0) = 1,01$ şərtlərini ödəyən $y(x)$ və $\tilde{y}(x)$ həllərini tapıb $|\tilde{y}(x) - y(x)|$ fərqi $[0, 1]$ parçasında qiymətləndirin.

HƏLLİ. Verilən Bernulli tənliyinin ümumi həllini tapaq. $y^2 = z$ əvəzləməsini aparaq. Onda $z' = 2yy'$, $z' = 2y\left(\frac{x}{y}e^{2x} + y\right) = 2xe^{2x} + 2y^2$, $z' - 2z = 2xe^{2x}$. Bu xətti tənliyi həll etsək alarıq:

$$z = Ce^{2x} + x^2e^{2x} = e^{2x}(C + x^2).$$

$y^2 = z$ əvəzləməsini nəzərə alsaq verilən tənliyin ümumi həlli

$$y = e^x \sqrt{x^2 + C}.$$

Onda verilmiş başlanğıc şərtlərini ödəyən

$y(x) = e^x \sqrt{x^2 + 1}$, $\tilde{y}(x) = e^x \sqrt{x^2 + (1,01)^2}$ həlləri alınar.

$$\begin{aligned} \tilde{y}(x) - y(x) &= \left[\sqrt{x^2 + (1,01)^2} - \sqrt{x^2 + 1} \right] e^x = \\ &= \frac{x^2 + (1,01)^2 - (x^2 + 1)}{\sqrt{x^2 + (1,01)^2} + \sqrt{x^2 + 1}} e^x = \frac{2,01 \cdot 0,01}{\sqrt{x^2 + (1,01)^2} + \sqrt{x^2 + 1}} e^x. \end{aligned}$$

Buradan $[0, 1]$ parçası üçün ($0 \leq x \leq 1$)

$$|\tilde{y}(x) - y(x)| \leq \frac{2,01 \cdot 0,01}{2,01} e < 0,03.$$

6. $y' = y + \mu(x + y^2)$, $y(0) = 1$ məsələsi üçün $\frac{\partial y}{\partial \mu} \Big|_{\mu=0}$ törəməsini

tapın.

HƏLLİ. Əvvəlcə baxılan məsələnin $\mu = 0$ üçün həllini tapaq:

$$y' = y, \quad y'(0) = 1, \quad \int \frac{dy}{y} = \int dx + \ln C, \quad \ln|y| = x + \ln C,$$

$$y = Ce^x, \quad C = 1, \quad y = e^x.$$

Onda $u = \frac{\partial y}{\partial \mu} \Big|_{\mu=0}$ funksiyası $\frac{du}{dx} = f'_y[x, y(x), 0]u + f'_\mu[x, y(x), 0]$

tənliyinin $u(0) = 0$ şərtini ödəyən həlli olur. Baxılan halda:

$\frac{du}{dx} = u + x + e^{2x}$, $u(0) = 0$. Bu xətti tənliyin $u(0) = 0$ şərtini ödə-

yən həlli $u(x) = e^{2x} - x - 1$ olduğundan $\frac{\partial y}{\partial \mu} \Big|_{\mu=0} = e^{2x} - x - 1$.

7. $\begin{cases} \dot{x} = -3x - y, \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$ sisteminin dayanıqlı olub-olmadığını araşdırın.

HƏLLİ. Sistemin $\begin{vmatrix} -3-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ xarakte-

ristik tənliyinin kökləri $\lambda_{1,2} = -2$ olduğundan baxılan sistem asimptotik dayanıqlı olur.

8. $\begin{cases} \dot{x} = (x-1)(1-y), \\ \dot{y} = 2-xy \end{cases}$ sisteminin tarazlıq vəziyyətlərini tapın və bi-

rici yaxınlaşmalar üsulu ilə onların dayanıqlılığını araşdırın.

HƏLLİ. Baxılan sistem üçün $f_1(x, y) = (x-1)(1-y)$, $f_2(x, y) =$

$= 2 - xy$. Sistemin tarazlıq vəziyyətləri $\begin{cases} (x-1)(1-y) = 0, \\ 2 - xy = 0 \end{cases}$ sistemi-

nin həlli kimi tapılır. Bu sistemi həll etsək (1, 2) və (2, 1) tarazlıq hallarını tapırıq.

$$(1, 2) \text{ tarazlıq halı üçün } a_{11} = \frac{\partial f_1(1,2)}{\partial x} = -1, \quad a_{12} = \frac{\partial f_2(1,2)}{\partial y} = 0,$$

$$a_{21} = \frac{\partial f_2(1,2)}{\partial x} = -2, \quad a_{22} = \frac{\partial f_2(1,2)}{\partial y} = -1. \text{ Onda verilən sistem}$$

$$\text{üçün } \begin{cases} \dot{x} = -(x-1), \\ \dot{y} = -2(x-1) - (y-2) \end{cases} \text{ birinci yaxınlaşmalar olur. Alınan sis-}$$

tem üçün

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

xarakteristik tənliyinin kökləri $\lambda_{1,2} = -1$ olduğundan (1, 2) tarazlıq vəziyyəti asimptotik dayanıqlı olur.

İndi (2, 1) nöqtəsi üçün birinci yaxınlaşmalar sistemini tapaq.

$$a_{11} = \frac{\partial f_1(2,1)}{\partial x} = 0, \quad a_{12} = \frac{\partial f_1(2,1)}{\partial y} = -1,$$

$$a_{21} = \frac{\partial f_2(2,1)}{\partial x} = -1, \quad a_{22} = \frac{\partial f_2(2,1)}{\partial y} = -2.$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y-1), \\ \dot{y} = -(x-2) - 2(y-1), \end{cases}$$

Buradan

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0, \quad \lambda_1 = -1 - \sqrt{2}, \quad \lambda_2 = -1 + \sqrt{2}.$$

$\lambda_2 = -1 + \sqrt{2} > 0$ olduğundan (2, 1) tarazlıq halı dayanıqsız olur.

$$9. \begin{cases} \dot{x} = -x^3 + y, \\ \dot{y} = -x - y^3 \end{cases} \text{ sisteminin } (0, 0) \text{ tarazlıq vəziyyətinin dayanıqlı-}$$

ğını Lyapunov funksiyalar üsulu ilə araşdırın.

HƏLLİ. Lyapunov funksiyası olaraq $v(x, y) = x^2 + y^2$ götürək və bu funksiyanın verilmiş sistemə nəzərən törəməsini tapaq:

$$\frac{dv}{dt} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2x(-x^3 + y) + 2y(-x - y^3) = -2x^4 + 2xy -$$

$$-2xy - 2y^4 = -2(x^4 + y^4) < 0, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

$v(x, y) = x^2 + y^2$ funksiyası müsbət-müəyyən, $\frac{dv}{dt} = -2(x^4 + y^4)$ törəməsi isə mənfi-müəyyən olduğundan Lyapunov funksiyalar əlamətinə əsasən verilən sistemin (0, 0) tarazlıq vəziyyəti asimptotik dayanıqlı olur.

$$10. \begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = 4x - 3y \end{cases} \text{ sistemi üçün } (0, 0) \text{ məxsusi nöqtənin tipini təyin}$$

edin və onun dayanıqlı olub-olmadığını araşdırın.

$$\text{HƏLLİ. Sistemin } \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \text{ xarakteris-}$$

tik tənliyin kökləri $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$ (köklər kompleks olub, həqiqi hissəsi sıfırdan fərqli) olduğundan (0, 0) fokus nöqtəsi olur. Digər tərəfdən köklərin həqiqi hissəsi mənfi olduğundan (0, 0) nöqtəsi dayanıqlı fokus olur.

$$11. y'' + y = 2x - \pi, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0 \text{ sərhəd məsələsinin həlli tapın.}$$

HƏLLİ. Əvvəlcə verilmiş məsələnin ümumi həllini tapaq. $y'' + y = 0$ bircins tənliyin $k^2 + 1 = 0$ xarakteristik tənliyinin kökləri $k_1 = i$, $k_2 = -i$ olduğundan $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ bircins tənliyin ümumi həlli olur. Bircins olmayan tənliyin bir xüsusi həllini $\tilde{y} = Ax + B$ şəkl-

lində axtaraq. Onda yazı bilərik:

$$\tilde{y}' = A, \quad \tilde{y}'' = 0, \quad Ax + B = 2x - \pi.$$

Buradan alırıq.

$$A = 2, \quad B = -\pi, \quad \tilde{y} = 2x - \pi.$$

Deməli, $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2x - \pi$ verilmiş tənliyin ümumi həlli olur. Burada $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$ sərhəd şərtlərini nəzər alsaq $C_1 = \pi$ tapırıq. Onda $y = 2x - \pi + \pi \cos x + C_2 \sin x$ verilən məsələnin həlli olur. Burada C_2 ixtiyari sabitdir.

12. $y'' = \lambda y$, $y(0) = y'(e) = 0$ məsələsi üçün məxsusi ədədləri və məxsusi funksiyaları tapın.

HƏLLİ. Verilmiş tənliyi $y'' - \lambda y = 0$ şəklində yazıq. Aşağıdakı hallara baxıq:

1). $\lambda = 0$ olduqda $y'' = 0$, $y' = C_1$, $y = C_1 x + C_2$. Buradan $y(0) = 0$ və $y'(e) = 0$ şərtlərinə əsasən: $C_2 = 0$, $C_1 = 0$. Deməli, $\lambda = 0$ olduqda məsələnin sıfırdan fərqli həlli yoxdur. $\lambda = 0$ məxsusi ədəd ola bilməz.

2). $\lambda > 0$ olduqda $y'' - \lambda y = 0$ bircins tənliyinə uyğun $k^2 - \lambda = 0$ xarakteristik tənliyin kökləri $k_1 = -\sqrt{\lambda}$, $k_2 = \sqrt{\lambda}$. Onda $y = C_1 e^{-\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{\sqrt{\lambda}x}$ tənliyin ümumi həlli olur. Buradan $y(0) = 0$, $y'(e) = 0$ sərhəd şərtlərinə əsasən

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ -e^{-\sqrt{\lambda}e} C_1 + e^{\sqrt{\lambda}e} C_2 = 0 \end{cases}$$

sistemi alınır. Alınan xətti bircins cəbri tənliklər sisteminin determinantı

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -e^{-\sqrt{\lambda}e} & e^{\sqrt{\lambda}e} \end{vmatrix} = e^{\sqrt{\lambda}e} + e^{-\sqrt{\lambda}e} > 0$$

olduğundan, $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ olmalıdır. Deməli, $\lambda > 0$ baxılan məsələnin ancaq sıfır həlli var. Yəni $\lambda > 0$ olduqda baxılan məsələnin həlli yoxdur.

3). $\lambda < 0$ olan halda $k^2 - \lambda = 0$ xarakteristik tənliyin kökləri $k_{1,2} = \pm i\sqrt{-\lambda}$ olduğundan

$$y = C_1 \cos \sqrt{-\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{-\lambda}x$$

tənliyin ümumi həlli olur. $y(0) = 0$, $y'(e) = 0$ şərtlərinə əsasən

$$\begin{cases} 1 \cdot C_1 + 0 \cdot C_2 = 0, \\ -\sqrt{-\lambda} C_1 \sin \sqrt{-\lambda}e + \sqrt{-\lambda} C_2 \cos \sqrt{-\lambda}e = 0 \end{cases}$$

sistemi alırıq. Buradan $C_1 = 0$, $C_2 \cos \sqrt{-\lambda}e = 0$, $C_1 = 0$ olduğundan $C_2 = 0$ götürsək, baxılan məsələnin sıfır həlli alınır. Ona görə $C_2 = 1$ qəbul edib, $\cos \sqrt{-\lambda}e = 0$ şərtindən λ ədədini tapmaq lazımdır. Buradan:

$$\sqrt{-\lambda}e = (2k-1)\frac{\pi}{2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$\sqrt{-\lambda} = \frac{\pi}{e} \left(k - \frac{1}{2} \right), \quad \lambda_k = -\frac{\pi^2}{e^2} \left(k - \frac{1}{2} \right)^2, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Onda λ_k ədədlərinə uyğun həll:

$$y_k = \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{e}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Beləliklə, $\lambda_k = -\frac{\pi^2}{e^2} \left(k - \frac{1}{2} \right)^2$, $k = 1, 2, 3, \dots$ ədədləri baxılan

məsələ üçün məxsusi ədədlər, $y_k(x) = \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{e}$, $k = 1, 2, 3, \dots$

isə məxsusi funksiyalardır.

MÜSTƏQİL HƏLL ETMƏK ÜÇÜN MİSALLAR

Varlıq və yeganəlik haqqında teoremi tətbiq edərək aşağıdakı misallar üçün həllin varlıq və yeganəlik oblastını tapın

a). $y' = -x + y^2$,

CAVAB: [Bütün müstəvi].

- b). $y' = 2 + \sqrt[3]{y-2x}$, $[y \neq 2x]$.
 c). $(x-2y)y' = y \ln(x+1)$, $[x \neq 2y, x+1 > 0]$.
 d). $(x-2)y' = 2\sqrt{y-x}$, $[x \neq 2, y > 0]$.
 e). $xy' = y + \sqrt{y^2 - 4x^2}$, $[|y| > 2|x|]$.

Eyler üsulu ilə həll edin

a). Eyler sınıq xətlər üsulu ilə $y' = x + y$ tənliyinin $M(1; 2)$ nöqtəsindən keçən və $h = 0,2$ addımına uyğun $[1; 3]$ parçasında təqribi həllini qurun və $y(3)$ -ü hesablayın. $[y(3) \approx 20,77]$.

b). Eyler sınıq xətlər üsulu ilə $y' = 0,2xy$, $y(0) = 1$ məsələsinin $h = 0,1$ addımına uyğun $[0; 0,9]$ parçasında təqribi həllinin $y(0,9)$ qiymətini hesablayın. $[y(0,9) \approx 1,0741]$.

Aşağıdakı məsələlər üçün $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$ ardıcıl yaxınlaşmaları tapın

- a). $y' = y^2 + 3x^2 - 1$, $y(1) = 1$, $[y_0 = 1, y_1 = x^3]$,
 $y_2 = 1 + x^3 - x + \frac{1}{7}(x^7 - 1)$.
 b). $y' = y + e^{y-1}$, $y(0) = 1$, $[y_0 = 1, y_1 = 1 + 2x]$,
 $y_2 = x + x^2 + 0,5(1 + e^{2x})$.
 c). $y' = y^2 - 4x$, $y(1) = 2$, $[y_0 = 2, y_1 = 2 - 2(x-1)^2]$,
 $y_2 = 2 - 2(x-1)^2 - \frac{8}{3}(x-3)^2 + \frac{4}{5}(x-1)^5$.

Tənliklərin tipini müəyyənləşdirin və həll edin

1. $(1+y)dx - (1-x)dy = 0$, $[(1+y)(1-x) = C]$.
 2. $(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0$, $[x+y = C(1-xy)]$.
 3. $(1+e^x)yy' = e^x$, $\left[\frac{y^2}{2} = \ln(1+e^x) + C\right]$.
 4. $xy' = y^2 - y$, $\left[Cx = \frac{y-1}{y}\right]$.
 5. $\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$, $\left[\sqrt{1-y^2} = \arcsin x + C\right]$.
 $[x = \pm 1, y = \pm 1]$.
 6. $e^{-y}\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = 1$, $[e^x = C(1 - e^{-y})]$.
 7. $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$, $[1 + y^2 = C(1 - x^2)]$.
 8. $(1+2y)xdx + (1+x^2)dy = 0$, $\left[y = \frac{C}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2}\right]$.
 9. $\sec^2 x \operatorname{tg} y dx + \sec^2 y \operatorname{tg} x dy = 0$, $[\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = C]$.
 10. $(\sqrt{xy} - \sqrt{x})dy + ydx = 0$, $[2\sqrt{y} - \ln y + 2\sqrt{x} = C]$.
 11. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$, $[2Cy = C^2x^2 + 1, y = \pm x]$.
 12. $4x^2 + xy - 3y^2 + y'(-5x^2 + 2xy + y^2) = 0$,
 $[(y-x)^8(y-2x)^9 = C(y+2x)^5]$.

13. $y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}, \quad [C(x^2 - y^2) = y^3].$
14. $(y^4 - 3x^2)dy + xydx = 0, \quad [x^2 = y^4 + Cy^6].$
15. $(y - xy')^2 = x^2 + y^2, \quad [C^2x^2 = 1 + 2Cy, \quad C^2 - x^2 = 2Cy].$
16. $3x + y - 2 + y'(x - 1) = 0, \quad [(x - 1)(3x + 2y - 1) = C].$
17. $(3y - 7x + 7)dx - (3x - 7y - 3)dy = 0, \quad [(x + y - 1)^5(x - y - 1)^2 = C].$
18. $(y + y\sqrt{x^2y^4 + 1})dx + 2xdy = 0, \quad [\sqrt{x^2y^4 + 1} = Cy^2 + 1].$
19. $(x + y^3)dx + (3y^5 - 3y^2x)dy = 0, \quad \left[\arg \operatorname{tg} \frac{y^3}{x} = \right.$
 $\left. = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^6) + \ln C \right].$
20. $y \cos x dx + (2y - \sin x)dy = 0, \quad [\sin x + 2y \ln|y| - Cy = 0].$
21. $y' + y^2 = \frac{2}{x^2}, \quad \left[y = \frac{2x^3 - C}{x(C + x^3)} \right].$
22. $y' + 2y = x^2 + 2x, \quad \left[y = Ce^{-2x} + \frac{1}{4}(2x^2 + 2x - 1) \right].$
23. $(x^2 + 2x - 1)y' - (x + 1)y = x - 1, \quad [y = C\sqrt{x^2 + 2x - 1} + x].$
24. $xy' \ln x - y = x^3(3 \ln x - 1), \quad [y = C \ln x + x^3].$
25. $(a^2 - x^2)y' + xy = a^2, \quad [y = C\sqrt{a^2 - x^2} + x].$
26. $y' + y \cos x = \sin x \cos x, \quad y(0) = 1, \quad [y = 2e^{-\sin x} + \sin x - 1].$

27. $3xy' - 2y = \frac{x^3}{y^2}, \quad [y^3 = Cx^2 + x^3].$
28. $x(x^3 + 1)y' + (2x^3 - 1)y = \frac{x^3 - 2}{x}, \quad \left[y = \frac{Cx}{x^3 + 1} + \frac{1}{x} \right].$
29. $x^2y' + 2x^3y = y^2(1 + 2x^2), \quad \left[\frac{1}{y} = Ce^{x^2} + \frac{1}{x} \right].$
30. $(x^2 + y^2 + 1)dy + xydx = 0, \quad [y^4 + 2x^2y^2 + 2y^2 = C].$
31. $x(x - 1)y' + y = x^2(2x - 1), \quad \left[y = \frac{Cx}{x - 1} + x^2 \right].$
32. $(y^2 + x^2 - a)xdx + (y^2 + x^2 + a)ydy = 0, \quad [(x^2 + y^2)^2 - 2a(x^2 - y^2) = C].$
33. $(3y^2 + 2xy + 2x)dx + (6xy + x^2 + 3)dy = 0, \quad [3xy^2 + x^2y + x^2 + 3y = C].$
34. $x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)y' = 0, \quad [x^4 + x^2y^2 + y^4 = C].$
35. $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0, \quad [x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C].$
36. $\left(\frac{\sin 2x}{y} + x \right)dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2} \right)dy = 0, \quad \left[\frac{\sin^2 x}{y^2} + \frac{x^2 + y^2}{2} = C \right].$
37. $(3x^2 - 2x - y)dx + (2y - x + 3y^2)dy = 0, \quad [x^3 + y^3 - x^2 - xy + y^2 = C].$
38. $\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{xdy - ydx}{x^2} = 0, \quad \left[\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{y}{x} = C \right].$

$$39. \frac{2x dx}{y^3} + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0, \quad y(1) = 1, \quad [y = x].$$

$$40. (x^2 + y^2 + 1)dx - 2xydy = 0, \quad \mu = \varphi(x) \quad \left[1 + y^2 - \right. \\ \left. - x^2 = Cx, \quad \mu = \frac{1}{x^2} \right].$$

$$41. (xy^2 + y)dx - xdy = 0 \quad \mu = \varphi(y), \quad \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} = C, \quad \mu = \frac{1}{y^2} \right].$$

$$42. (x + \sin x \sin y)dx + \cos y dy = 0, \quad \mu = \varphi(x), \\ [2e^x \sin y + 2e^x(x-1) + e^x(\sin x - \cos x) = C, \quad \mu = e^x].$$

$$43. (2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0, \quad \mu = \varphi(y), \\ \left[x^2 - \frac{7}{y} - 3xy = C, \quad \mu = \frac{1}{y^2} \right].$$

$$44. y'^2 - (2x + y)y' + (x^2 + xy) = 0, \quad \left[y = \frac{x^2}{2} + C \right].$$

$$45. 4y'^2 - 9x = 0, \quad [(y - C)^2 = x^3].$$

$$46. y'^3 - 2xy'^2 - y' + 2x = 0, \quad [y = x^2 + C, \quad y = \pm x + C].$$

$$47. y'^2 + (x + a)y' - y = 0, \quad \left[y = (x + a)C + C^2, \quad y = a - \frac{x^2}{4} \right].$$

$$48. y' + y = xy'^2, \quad \left[x = \frac{C}{(p-1)^2} + \frac{p - \ln p}{(p-1)^2}, \quad y = p^2 \left(\frac{C}{(p-1)^2} + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{p - \ln p}{(p-1)^2} \right) - p, \quad y = 0, \quad y = x - 1 \Big].$$

$$49. y = x + 2y' - y'^2, \quad \left[y = 2C - \left(C - \frac{x}{2} \right)^2, \quad y = x + 1 \right].$$

$$50. y = xy' + \frac{a}{y'^2}, \quad \left[y = Cx + \frac{a^2}{C^2}, \quad 4y^3 = 27ax^2 \right].$$

$$51. y = xy' + a\sqrt{1 + y'^2}, \quad \left[y = Cx + a\sqrt{1 + C^2}, \quad x^2 + y^2 = a^2 \right].$$

Verilmiş funksiyalar xətti asılıdır mı?

$$1. 1, \quad x, \quad [yox].$$

$$2. x^2 + 2x, \quad 3x^2 - 1, \quad x + 4, \quad [hə].$$

$$3. \sin x, \quad \cos x, \quad [yox].$$

$$4. 1, \quad \arcsin x, \quad \arccos x, \quad [hə].$$

$$5. 1, \quad \cos x, \quad [yox].$$

$$6. e^x, \quad e^{2x}, \quad e^{3x}, \quad [yox].$$

$$7. x, \quad e^x, \quad xe^x, \quad [yox].$$

Fundamental həlləri verilmiş funksiyalar olan diferensial tənlik qurun

$$1. 1, \quad \cos x, \quad [y'' - y' \operatorname{ctgx} = 0].$$

$$2. x, \quad x^2, \quad e^x, \quad [(x^2 - 2x + 2)y'' - x^2 y' + 2xy' - 2y = 0].$$

$$3. e^x, \quad e^{2x}, \quad e^{3x}, \quad [y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0].$$

$$4. 1, \quad e^{-x} \sin x, \quad e^{-x} \cos x, \quad [y''' + y'' - 2y = 0].$$

$$1. y'''y'' = \sqrt{1+y'^2}, \quad \left[y = \pm \left[\frac{1}{6} \sqrt{(x+C_1)^2 - 1} \right]^3 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}(x+C_1) \ln|x+C_1 + \sqrt{(x+C_1)^2 - 1}| + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sqrt{(x+C_1)^2 - 1} + C_2x + C_3 \right].$$

$$2. 2y''' - 3y'' + y' = 0, \quad \left[y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{\frac{x}{2}} \right].$$

$$3. y'' + 3y' = 3, \quad [y = C_1 + C_2e^{-3x} + x].$$

$$4. y'' + 4y = 8 \sin 2x, \quad [y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - 2x \cos 2x].$$

$$5. y''' - 6y' + 25y = 2 \sin x + 3 \cos x, \quad [y = e^{3x}(C_1 \cos 4x + \\ + C_2 \sin 4x) + \frac{1}{102}(5 \sin x + 14 \cos x)].$$

$$6. 2y'' + y' - y = 2e^x, \quad \left[y = C_1e^{-x} + C_2e^{\frac{x}{2}} + 2e^x \right].$$

$$7. y'' - 7y' + 6y = \sin x, \quad \left[y = C_1e^x + C_2e^{6x} + \frac{1}{74}(5 \sin x + 7 \cos x) \right].$$

$$8. x^2y'' + xy' + y = 0, \quad [y = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)].$$

$$9. x^3y''' - 3xy' + 3y = 0, \quad \left[y = C_1x^3 + \frac{C_2}{x} + C_3x \right].$$

$$10. (x+2)^2y'' + 3(x+2)y' - 3y = 0, \quad [y = C_1(x+2)^{-2} + C_2(x+2)].$$

$$11. x^2y'' + 4xy' + 2y = 2 \ln^2 x + 12x, \quad \left[y = \frac{C_1}{x^2} + \frac{C_2}{x} + \ln^2 x - \right. \\ \left. - 3 \ln x + 2x + \frac{7}{2} \right].$$

Ailənin diferensial tənliyini qurun

$$1. y = \sin ax, \quad \left[y' = \frac{\sqrt{1-y^2}}{x} \arcsin y \right].$$

$$2. y^2 + \frac{1}{x} = 2 + Ce^{-\frac{y^2}{2}}, \quad [xyy'(xy^2 + 1) = 1].$$

$$3. y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}, \quad [y'' - y' - 2y = 0].$$

$$4. (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2, \quad [3y'y'' - (1+y'^2)y''' = 0].$$

$$5. \frac{x^2}{C^2} + \frac{y^2}{4} = 1, \quad [-xyy' + y^2 = 4].$$

$$6. \ln \frac{x}{y} = 1 + ay, \quad \left[y = xy' \ln \frac{x}{y} \right].$$

$$7. (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)^2, \quad [yy'^2 + y^2 = 1].$$

$$8. y = ae^{\frac{x}{a}}, \quad [xy' = y \ln y'].$$

$$9. y = A \sin(x+a), \quad [y'' + y = 0].$$

$$10. y = e^x(Ax+B), \quad [y'' - 2y' + y = 0].$$

Ailənin trayektoriyalarını tapın

$$1. x^2 + 4y^2 = a^2, \quad \alpha = 90^\circ, \quad [y = Cx^4].$$

$$\begin{aligned}
2. \quad y^2 &= 4(x-a), \quad \alpha = 90^\circ, \quad \left[y = Ce^{-\frac{x}{2}} \right] \\
3. \quad xy &= a, \quad \alpha = 90^\circ, \quad [y^2 - x^2 = C] \\
4. \quad x^2 + y^2 &= 2ax, \quad \alpha = 90^\circ, \quad [y = C(x^2 + y^2)] \\
5. \quad (2a-x)y^2 &= x^2, \quad \alpha = 90^\circ, \quad [(x^2 + y^2)^2 = C(y^2 + 2x^2)] \\
6. \quad x^2 + y^2 &= 2ax, \quad \alpha = 45^\circ, \quad [x^2 + y^2 = C(y-x)] \\
7. \quad x &= \frac{a}{y}, \quad \alpha = 45^\circ, \quad [y^2 + 2xy - x^2 = C] \\
8. \quad x - y &= x^2 + a^2, \quad \alpha = 45^\circ, \quad [y = \ln x - x + C]
\end{aligned}$$

Qüvvət sırasına ayrılışın bir neçə həddini tapın

$$\begin{aligned}
1. \quad y' &= x^2 - y^2, \quad y(0) = 0, \quad \left[y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{7 \cdot 9}x^7 - \frac{2}{7 \cdot 11 \cdot 27}x^{11} + \dots \right] \\
2. \quad y' &= x^2 y^2 - 1, \quad y(0) = 1, \quad \left[y = 1 - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5} + \dots \right] \\
3. \quad y' &= \frac{1-x^2}{y}, \quad y(0) = 1, \quad \left[y = 1 + 2x - x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + \dots \right] \\
4. \quad y' &= e^y + xy, \quad y(0) = 0, \quad \left[y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^3 + \frac{11x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \right] \\
5. \quad y' &= \frac{xy}{1+x+y}, \quad y(0) = 0, \quad [y = 0]
\end{aligned}$$

$$6. \quad y'' - (1+x^2)y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 2, \quad \left[y = -2 + 2x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{7x^5}{60} - \dots \right]$$

$$7. \quad y'' + xy' - x^2 y = 0, \quad \left[y = C_1 \left(1 + \frac{x^4}{12} + \dots \right) + C_2 \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \dots \right) \right]$$

$$8. \quad y'' = ye^x, \quad \left[y = C_1 \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \dots \right) + C_2 \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \dots \right) \right]$$

$$9. \quad y'' = xyy', \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad \left[y = 1 + x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^4}{4!} + \frac{3x^5}{5!} + \dots \right]$$

$$10. \quad yy'' + y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad \left[y = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{4x^5}{5!} - \frac{16x^6}{6!} + \dots \right]$$

Həllin parametrlə nəzərən qüvvət sırasına ayrılışının bir neçə həddini tapın

$$1. \quad y' = \mu x^2 - y^2, \quad y(1) = 1, \quad \left[y = x^{-1} + 0,2\mu(x^3 - x^{-2}) + \dots \right]$$

$$+ \mu^2 \left(\frac{1}{25} x^{-3} - \frac{1}{18} x^{-2} + \frac{x^2}{50} - \frac{x^7}{225} \right) + \dots \Bigg].$$

$$2. y' = -2y + y^2 e^x, \quad y(0) = 1 + 3\mu, \quad \left[y = e^{-x} + 3\mu + 9\mu^2 (e^x - 1) + \dots \right].$$

Tənliklər sistemini həll edin

$$1. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3 - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 2t, \end{cases} \quad \left[\begin{cases} x = t + C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t \\ y = 1 + C_1 \sin 2t - C_2 \cos 2t \end{cases} \right]$$

$$2. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y, \end{cases} \quad \left[\begin{cases} x = (C_1 - C_2) e^{2t} \cos t - (C_1 + C_2) e^{2t} \sin t \\ y = (C_1 \sin t + C_2 \cos t) e^{2t} \end{cases} \right]$$

$$3. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x - y \\ \frac{dy}{dt} = x - y, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1, \quad \left[\begin{cases} x = e^{-2t} (1 - 2t) \\ y = e^{-2t} (1 + 2t) \end{cases} \right]$$

$$4. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -7x + y \\ \frac{dy}{dt} = -5y - 2x, \end{cases} \quad \left[\begin{cases} x = e^{-6t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t) \\ y = e^{-6t} [(C_1 + C_2) \cos t - (C_1 - C_2) \sin t] \end{cases} \right]$$

$$5. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \cos t \\ \frac{dy}{dt} = x e^{-\sin t}, \end{cases} \quad \left[\begin{cases} x = C_1 e^{\sin t} \\ y = C_1 t + C_2 \end{cases} \right]$$

$$6. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y - z \\ \frac{dy}{dt} = -x + y + z \\ \frac{dz}{dt} = x - z \end{cases}, \quad \left[\begin{cases} x = C_1 + 3C_2 e^{2t} \\ y = -2C_1 e^{2t} + C_3 e^{-t} \\ z = C_1 + C_2 e^{2t} - 2C_3 e^{-t} \end{cases} \right]$$

$$(\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = -1)$$

Dayanıqlığın tərifindən istifadə edərək göstərilən həllin dayanıqlığını araşdırın

$$1. \dot{x} = -x + t^2, \quad x(1) = 1, \quad [\text{dayanıqlı}].$$

$$2. \dot{x} = 2t(x+1), \quad x(0) = 0, \quad [\text{dayanıqsız}].$$

$$3. \begin{cases} \dot{x} = x - 13y \\ \dot{y} = \frac{1}{4}x - 2y, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad [\text{dayanıqlı}].$$

Sıfır həllinin Raus-Qurviç əlamətinə əsasən dayanıqlı olub-olmadığını araşdırın

$$1. y^{IV} + 2y''' + 6y'' + 5y' + 6y = 0, \quad [\text{dayanıqlı}].$$

$$2. y''' + y'' + y' + 2y = 0, \quad [\text{dayanıqsız}].$$

$$3. y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 7y' + 2y = 0, \quad [\text{dayanıqsız}].$$

$$4. y''' + 2y'' + \alpha y' + 3y = 0, \quad \alpha \text{ ədədinin hansı qiymətlərində}$$

$$y = 0 \text{ həlli dayanıqlı olur?} \quad \left[\alpha > \frac{3}{2} \right].$$

$$5. y''' + \alpha y'' + \beta y' + 2y = 0, \quad \alpha \text{ və } \beta \text{ ədədlərinin hansı qiymətlərində } y = 0 \text{ həlli dayanıqlı olur?} \quad [\alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \alpha\beta > 2].$$

Sıfır həllin Lyapunov funksiyalar üsulu ilə
dayanıqlığını araşdırın

6. $\begin{cases} \dot{x} = -5x + y \\ \dot{y} = x - 7y, \end{cases}$ [asimptotik dayanıqlı].

7. $\begin{cases} \dot{x} = 2x \\ \dot{y} = x - 5y, \end{cases}$ [dayanıqsız].

8. $\begin{cases} \dot{x} = -3x - 5y \\ \dot{y} = 2x + 2y, \end{cases}$ [dayanıqlı].

Birinci yaxınlaşmalar üsulu ilə sıfır həllin
dayanıqlığını araşdırın

1. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 8\sin^2 y \\ \dot{y} = x - 3y + 4x^3, \end{cases}$ [dayanıqlı].

2. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y - \sin y^2 \\ \dot{y} = -x - 3y + x \left(e^{\frac{x^2}{2}} - 1 \right), \end{cases}$ [dayanıqsız].

3. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(4y + e^{-3x}) \\ \dot{y} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1 - 6x}, \end{cases}$ [dayanıqlı].

4. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + x^2 + y^2 \\ \dot{y} = -x + 3y + 3x^2, \end{cases}$ [dayanıqsız].

1. $\begin{cases} \dot{x} = y - x^5 \\ \dot{y} = -x - y^5, \end{cases}$ [$v(x, y) = x^2 + y^2$, dayanıqlı].

2. $\begin{cases} \dot{x} = -x - y \\ \dot{y} = 2x^3 - y^3, \end{cases}$ [$v(x, y) = x^4 + y^2$, dayanıqlı].

3. $\begin{cases} \dot{x} = xy - x^3 \\ \dot{y} = -x^2 - y^3, \end{cases}$ [$v(x, y) = x^2 + y^2$, dayanıqlı].

Məxsusi nöqtənin tipini təyin edin

1. $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2x + y, \end{cases}$ [fokus].

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{y - 2x}{2y - 3x},$ [düyün].

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{x - 2y}{3x - 4y},$ [yəhərvəri].

4. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 5y \\ \dot{y} = 2x + 2y, \end{cases}$ [mərkəz].

5. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y \\ \dot{y} = 3x - y, \end{cases}$ [fokus].

6. $\begin{cases} \dot{x} = -x - y \\ \dot{y} = x + 3y, \end{cases}$ [yəhərvəri].

$$7. \begin{cases} \dot{x} = -x + 2y \\ \dot{y} = -x + y, \end{cases} \quad [\text{m\u00f6rk\u00f6z}].$$

S\u00e4rh\u00e4d \u00f6\u00f6rtl\u00e9rini \u00f6d\u00e4y\u00e4n h\u00e4lli tap\u00f4n

$$1. y'' + y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad [y = 1 - \sin x - \cos x].$$

$$2. y'' + y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0, \quad [\text{h\u00e4lli yoxdur}].$$

$$3. y'' - y' - 2y = 0, \quad y'(0) = 2, \quad y(+\infty) = 0, \quad [y = -2e^{-x}].$$

$$4. y^{IV} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = \cos 2x, \quad y(0) = \frac{1}{25}, \quad y(\pi) = \frac{1}{25},$$

$$y'(0) = \frac{2}{15}, \quad y'(\pi) = \frac{2}{25}, \quad \left[y = \frac{2}{75} \sin x + \frac{4}{75} \sin 2x + \frac{1}{25} \cos 2x \right].$$

$$5. y'' - 2y' - 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0, \quad [y = e^{-x}].$$

S\u00e4rh\u00e4d m\u00e9s\u00e4l\u00e9l\u00e9ri \u00fc\u00e7\u00fcn Qrin funksiyas\u00f4n\u00f4n tap\u00f4n

$$1. y'' = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(l) = 0, \quad \left[G(x, s) = \begin{cases} -x, & 0 \leq x \leq s, \\ -s, & s \leq x \leq l \end{cases} \right].$$

$$2. y'' = f(x), \quad y(0) + y(l) = 0, \quad y'(0) + y'(l) = 0,$$

$$\left[G(x, s) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-s) - \frac{1}{4}, & 0 \leq x \leq s \\ -\frac{1}{2}(s-x) - \frac{1}{4}, & s \leq x \leq l \end{cases} \right].$$

$$3. y'' + y = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y(l) = 0,$$

$$\left[G(x, s) = \begin{cases} -\frac{\sin x \sin(l-s)}{\sin l}, & 0 \leq x \leq s \\ \frac{\sin s \sin(l-x)}{\sin l}, & s \leq x \leq l. \end{cases} \right].$$

$$4. x^2 y'' - 2y = f(x), \quad y(1) = 0, \quad y(2) + 2y'(2) = 0,$$

$$\left[G(x, s) = \begin{cases} \frac{1-x^3}{3s^3x}, & 1 \leq x \leq s \\ \frac{1-s^3}{3s^3x}, & s \leq x \leq 2 \end{cases} \right].$$

S\u00e4rh\u00e4d m\u00e9s\u00e4l\u00e9l\u00e9ri \u00fc\u00e7\u00fcn m\u00e9xsusi \u00e4d\u00e4d v\u00e9 m\u00e9xsusi funksiyal\u00e4n tap\u00f4n

$$1. y'' = \lambda y, \quad y'(0) = 0, \quad y'(l) = 0, \quad \left[\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \right.$$

$$\left. y_k = \cos \frac{k\pi x}{l}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \right].$$

$$2. x^2 y'' + \frac{1}{4} y = \lambda y, \quad y(1) = 0, \quad y(e) = 0, \quad \left[\lambda_k = -(k\pi)^2, \right.$$

$$\left. y_k = \sqrt{x} \sin(k\pi \ln x), \quad k = 1, 2, 3, \dots \right].$$

$$3. x^2 y'' = \lambda y, \quad y(1) = 0, \quad y(a) = 0, \quad (a > 1), \quad \left[\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{\ln a}\right)^2 - \frac{1}{4}, \right.$$

$$\left. y_k = \sqrt{x} \sin \frac{k\pi \ln x}{\ln a}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \right].$$

BİRTƏRTİBLİ XÜSUSİ TÖRƏMƏLİ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR

Sərbəst dəyişənlər x_1, \dots, x_n , axtarılan funksiya $z = z(x_1, \dots, x_n)$

və onun $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$ xüsusi törəmələri arasında verilmiş

$$F\left(x_1, \dots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0$$

münasibətinə *birtərtibli xüsusi törəməli diferensial tənlik* deyilir.

n -ölçülü D oblastında təyin olunmuş $z = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ funksiyası üçün

$$F\left(x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n), \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right) = 0$$

bərabərliyi D oblastında x_1, \dots, x_n dəyişənlərinə nəzərən eynilik kimi ödəndikdə, $z = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ funksiyasına D oblastında *xüsusi törəməli diferensial tənliyin həlli* deyilir.

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \sum_{i=1}^n f_i(t, x_1, \dots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

tənliyinə birtərtibli xüsusi törəməli *xətti bircins tənlik* deyilir.

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

sistemine (1) tənliyinin *xarakteristik sistemi* deyilir.

Diferensiallanan və $\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial x_n}$ törəmələrindən heç olmasa biri

sıfırdan fərqli olan $\psi(t, x_1, \dots, x_n)$ funksiyası üçün

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \sum_{i=1}^n f_i(t, x_1, \dots, x_n) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = 0 \quad (3)$$

eyniliyi ödəndikdə, $\psi(t, x_1, \dots, x_n)$ funksiyasına (2) sisteminin *dife-*

rensiillanan inteqralı, $\psi(t, x_1, \dots, x_n) = C$ münasibətinə isə *birinci inteqralı* deyilir.

Sistemin n sayda $\psi_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, \psi_n(t, x_1, \dots, x_n)$ diferensiallanan inteqralı üçün

$$\frac{D(\psi_1, \dots, \psi_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \psi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

olduqda, bu funksiyalar (2) sisteminin *ümumi inteqralları* və (1) xüsusi törəməli tənliyin *fundamental inteqralları* olur.

$\psi_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, \psi_n(t, x_1, \dots, x_n)$ funksiyaları (2) sistemi üçün ümumi inteqral olduqda, istənilən kəsilməz diferensiallanan $\Phi(u_1, \dots, u_n)$ funksiyası üçün

$$z = \Phi(\psi_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, \psi_n(t, x_1, \dots, x_n)) \quad (4)$$

(1) xüsusi törəməli diferensial tənliyin *ümumi həlli* olur. Yəni (1) xüsusi törəməli tənliyin istənilən həllini $\Phi(u_1, \dots, u_n)$ funksiyasını seçməklə almaq olur.

Xüsusi törəməli (1) tənliyinin

$$z(t_0, x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n) \quad (5)$$

şərtini ödəyən həllinin tapılması məsələsinə *Koşi məsələsi* deyilir.

Tutaq ki, ümumi inteqrallar üçün $\psi_i(t_0, x_1, \dots, x_n) = x_i, i = 1, 2, \dots, n$ şərtləri ödənilir. Onda $z = g(\psi_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, \psi_n(t, x_1, \dots, x_n))$ funksiyası Koşi məsələsinin həlli olur.

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1, \dots, x_n, z) \frac{\partial z}{\partial x_i} = b(x_1, \dots, x_n, z) \quad (6)$$

tənliyinə *birtərtibli kvazixətti xüsusi törəməli biferensial tənlik* deyilir.

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, \dots, x_n, z)} = \dots = \frac{dx_n}{a_n(x_1, \dots, x_n, z)} = \frac{dz}{b(x_1, \dots, x_n, z)} \quad (7)$$

simmetrik sistemine (6) tənliyinin *xarakteristik sistemi* deyilir. Simmetrik sistemin $\psi_1(x_1, \dots, x_n, z), \dots, \psi_n(x_1, \dots, x_n, z)$ ümumi inteqralla-

n üçün

$$F(\psi_1(x_1, \dots, x_n, z), \dots, \psi_n(x_1, \dots, x_n, z)) = 0 \quad (8)$$

(8) xüsusi törəməli diferensial tənliyin ümumi həlli olur, burada $F(u_1, \dots, u_n)$ ixtiyari diferensiallanan funksiyadır.

1. 1). $z = x^2 + y^2$, 2). $z = \sin(x^2 + y^2)$, 3). $z = xy$ funksiyalarının

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

tənliyinin həlli olub-olmamasını araşdırın.

HƏLLİ. 1). $z = x^2 + y^2$ funksiyasının $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$ xüsusi törəmələrini tapıb tənlikdə yazaq: $y2x - x2y = 0$. Deməli, $z = x^2 + y^2$ funksiyası tənliyin həlidir.

2). $z = \sin(x^2 + y^2)$ funksiyasının $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \cos(x^2 + y^2)$,
 $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y \cos(x^2 + y^2)$ törəmələrini tənlikdə yazaq:
 $y2x \cos(x^2 + y^2) - x2y \cos(x^2 + y^2) = 0$.

Deməli, $z = \sin(x^2 + y^2)$ funksiyası həll olur.

3). $z = xy$ funksiyası üçün $\frac{\partial z}{\partial y} = x$, $\frac{\partial z}{\partial x} = y$, $y \cdot y - x \cdot x \neq 0$.
 Deməli, $z = xy$ funksiyası tənliyin həlli olmur.

2. $(x + 2y) \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

HƏLLİ. Verilən birinci tənliyin xarakteristik tənliyini yazıb, həll edək:

$$\frac{dx}{x + 2y} = \frac{dy}{-y}, \quad \frac{dx}{dy} + \frac{x}{y} = -2, \quad x = \frac{C}{y} - y, \quad xy + y^2 = C.$$

$\psi(x, y) = xy + y^2$ xarakteristik tənliyin inteqralı olduğundan verilən tənlik üçün $z = \Phi(xy + y^2)$ ümumi həll olur. Burada $\Phi(u)$ ixtiyari diferensiallanan funksiyadır.

3. $xy \frac{\partial z}{\partial x} + (x - 2z) \frac{\partial z}{\partial y} = yz$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

HƏLLİ. Tənlik kvazixətti olduğundan onun xarakteristik sistemi

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{x - 2z} = \frac{dz}{yz}$$

şəklində olur. Bu sistemin ümumi inteqralını tapaq. Birinci və üçüncü bərabərlikdən alıraq:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z}, \quad \ln|z| = \ln|x| + \ln C_1, \quad \frac{z}{x} = C_1.$$

İkinci və üçüncü bərabərliyin sürət və məxrəclərini uyğun olaraq $-y$ və 2 vurub, aşağıdakı kimi çevirmə apararaq:

$$\frac{dx - ydy}{xy - xy + 2yz} = \frac{2dz}{2yz}, \quad dx - ydy - 2dz = 0, \quad d\left(x - \frac{y^2}{2} - 2z\right) = 0,$$

$$x - \frac{y^2}{2} - 2z = C_2, \quad 2x - y^2 - 4z = C_2.$$

Beləliklə, $\psi_1(x, y, z) = \frac{z}{x}$, $\psi_2(x, y, z) = 2x - y^2 - 4z$ funksiyaları xarakteristik sistem üçün ümumi inteqral olur. Odur ki,

$F\left(\frac{z}{x}, 2x - y^2 - 4z\right) = 0$ verilən tənliyin ümumi həlli olur. Burada $F(u_1, u_2)$ ixtiyari diferensiallanan funksiyadır.

4. $\frac{\partial z}{\partial t} + (2e^t - x) \frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $z(0, x) = x$. Koşi məsələsinin həllini ta-

pın.

HƏLLİ. Verilmiş bircins xüsusi töreməli tənliyin xarakteristik tənliyi yazıb, həll edək:

$$\frac{dx}{dt} = 2e^t - x, \quad \frac{dx}{dt} + x = 2e^t.$$

Alınan xətti tənliyin $x(0) = 0$ şərtini ödəyən həllini tapaq: $x = e^t - e^{-t}$. Buradan alınan $\psi(t, x) = (x - e^t)e^t + 1$ integral üçün $\psi(0, x) = x$ şərti ödənilir. Odur ki, $z = \Phi((x - e^t)e^t + 1)$ funksiyası tənliyin ümumi həlli, $z = g(\psi(t, x)) = \psi(t, x) = (x - e^t)e^t + 1$ isə Koşi məsələsinin həlli olur.

5. $\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, $z(0, x, y) = xy$. Koşi məsələsinin həllini tapın.

HƏLLİ. Verilən bircins tənlik üçün xarakteristik sistemi

$$\begin{cases} \dot{x} = 1, \\ \dot{y} = 2 \end{cases}$$

şəklində yazıb, integrallayaq: $x - t = C_1$, $y - 2t = C_2$.

Onda $\psi_1(t, x, y) = x - t$, $\psi_2(t, x, y) = y - 2t$ inteqralları üçün $\psi_1(0, x, y) = x$, $\psi_2(0, x, y) = y$ şərtləri ödənilir. Odur ki, Koşi məsələsinin həlli $z = g(\psi_1(t, x, y), \psi_2(t, x, y)) = \psi_1(t, x, y)\psi_2(t, x, y) = (x - t)(y - 2t)$ olur.

6. $(y - z)\frac{\partial z}{\partial x} + (z - x)\frac{\partial z}{\partial y} = x - y$, $z = y = -x$ məsələsinin həllini tapın.

HƏLLİ. Verilən kvazixətti tənliyin xarakteristik sistemini yazsaq:

$$\frac{dx}{y - z} = \frac{dy}{z - x} = \frac{dz}{x - y}.$$

Birinci və ikinci bərabərlikləri tərəf-tərəfə toplaşaq:

$$\frac{dx + dy}{y - x} = \frac{dz}{x - y}, \quad dx + dy + dz = 0, \quad x + y + z = C_1.$$

Bərabərliklərin sürət və məxrəcini uyğun olaraq x , y və z vurub aşağıdakı kimi çevirmələr aparaq:

$$\frac{xdx + ydy}{xy - xz + yz - yx} = \frac{zdz}{zx - zy}, \quad \frac{xdx + ydy}{yz - xz} = \frac{zdz}{zx - zy},$$

$$xdx + ydy + zdz = 0, \quad d(x^2 + y^2 + z^2) = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = C_2.$$

Xarakteristik sistemin $x + y + z = C_1$, $x^2 + y^2 + z^2 = C_2$ birinci inteqrallarında $z = y = -x$ yazsaq: $x - x - x = C_1$, $x^2 + (-x)^2 + (-x)^2 = C_2$. $x = -C_1$, $3x^2 = C_2$. Buradan x yox etməklə $3C_1^2 = C_2$ alınır. Burada C_1 və C_2 əvəzinə onların ifadələrini yerinə yazsaq:

$$3(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Bu bərabərlik verilən məsələnin həlli olur.

Müstəqil həll etmək üçün misallar

1. a). $z = x^2 - y^2$, b). $z = \cos(x^2 - y^2) + (x^2 - y^2)^2$.

c). $z = (x - y)^2$ funksiyaların hansı $y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ tənliyinin həlli olur? [a), b)].

Ümumi həllini tapın

$$1. \quad y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad \left[z = \Phi(x^2 - y^2) \right].$$

$$2. \quad t\frac{\partial z}{\partial t} + x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad \left[z = \Phi\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right) \right].$$

$$3. y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = x - y, \quad [F(x^2 - y^2, x - y + z) = 0]$$

$$4. \frac{\partial z}{\partial t} + 2 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = txy, \quad \left[z = \frac{t^4}{6} - \frac{t^3}{3}(2y + x) + \frac{t^2 xy}{2} + f(x - 2t, y - t) \right]$$

Verilmiş şərtləri ödəyən həlli tapın

$$1. t \frac{\partial z}{\partial t} - x \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad z(1, x) = 2x, \quad [z = 2tx]$$

$$2. 2\sqrt{t} \frac{\partial z}{\partial t} - x \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad z(1, x) = x^2, \quad [z = x^2 e^{2\sqrt{t}-2}]$$

$$3. x^2 \frac{\partial z}{\partial t} + tx \frac{\partial z}{\partial x} = t, \quad z(0, x) = x^2, \quad \left[x^2 - t^2 - \ln \sqrt{x^2 - t^2} = z - \ln|x| \right]$$

$$4. z \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} = 2xz, \quad x + y = 2, \quad yz = 1, \quad \left[\left((y^2 z - 2)^2 - x^2 + z \right) y^2 z = 1 \right]$$

ƏDƏBİYYAT

1. Баврин И.И., "Высшая математика", М, "Просвещение", 1980г.
2. Berman G.N. "Riyazi analizdən məsələlər", Bakı, "Maarif", 1966-cı il.
3. Виленкин Н.Я., Бохан К.А. и др. "Задачник по курсу математического анализа", часть 2, М, "Просвещение", 1971г.
4. Гутер Р.С., Янпольский А.Р., "Дифференциальные уравнения", М, "Физматгиз", 1962г.
5. Давыдов Н.А., Коровкин П.П., Никольский В.Н. "Сборник задач по математическому анализу", М, "Просвещение", 1964г.
6. Данко П.Е., Попов А.Г., "Высшая математика в упражнениях и задачах", часть 2, М, "Высшая школа", 1967г.
7. Киселев М.А., Краснов Г.И., Макаренко Г.И. "Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям", М, "Высшая школа", 1965г.
8. Матвеев Н.П., "Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям", Минск, "Вышэйшая школа", 1974г.
9. Минорский В.П., "Сборник задач по высшей математике" М, "Наука", 1967г.
10. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. "Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи" М., "Высшая школа" 1989г.
11. Филиппов А.Ф. "Сборник задач по дифференциальным уравнениям" М, "Наука", 1985г.
12. Əhmədov Q.T., Həsənov K.Q., Üaqubov M.H., "Adi diferensial tənliklər", Bakı, "Maarif", 1979-cu il.

M Ü N D Ə R İ C A T

1. Giriş	səh 3
I FƏSİL	
BİRTƏRTİBLİ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR	4
1. Adi diferensial tənliklər. Ümumi anlayışlar və təriflər	4
2. İzoklin üsulu	12
3. Dəyişənlərinə ayrılan diferensial tənliklər	16
4. Bircins diferensial tənliklər	18
5. Bircins tənliyə gətirilə bilən tənliklər	22
6. Ümumiləşmiş bircins diferensial tənliklər	24
7. Tam diferensiallı tənliklər	25
8. İnteqrallayıcı vuruq	28
9. Xətti diferensial tənliklər	30
10. Bernulli tənliyi	36
11. Rikatti tənliyi	38
12. Törəməyə nəzərən həll olunmamış tənliklər	40
13. Lagranj tənliyi	43
14. Klero tənliyi	44
15. Əyrilər ailəsinin diferensial tənliyi. Trayektoriya məsələsi	46
15. 1. Əyrilər ailəsinin diferensial tənliyinin qurulması	46
15. 2. Trayektoriya məsələsi	48
a). Ortoqonal trayektoriya	48
b). İzoqonal trayektoriya	48
16. İrtətibli diferensial tənliyin Eyler və ardıcıl yaxınlaşma üsulu ilə təqribi həlli	51
16. 1. Eyler üsulu	51
17. 2. Ardıcıl yaxınlaşma üsulu	54
Yoxlama sualları	56
Müstəqil həll etmək üçün misallar	57
II FƏSİL	
YÜKSƏK TƏRTİBLİ TƏNLİKLƏR	67
1. İkitərtibli diferensial tənliklər. Koşi məsələsi	67
2. Tərtibi aşağı salına bilən diferensial tənliklər	67
2.1. $y'' = f(x)$ şəklində tənliklər	67

2.2. $y'' = f(x, y')$ şəklində tənliklər	68
2.3. Sərbəst dəyişən aşkar daxil olmayan tənliklər	69
2.4. Axtarılan funksiya və onun törəmələrinə nəzərən bircins tənliklər	71
2.5. Sol tərəfi tam diferensial olan tənliklər	71
2.6. Ümumiləşmiş bircins tənliklər	72
3. İkitərtibli xətti tənliklər	74
3.1. Ümumi anlayışlar	74
3.2. İkitərtibli sabit əmsallı xətti bircins tənliklər	79
3.3. İkitərtibli sabit əmsallı xətti bircins olmayan tənliklər	79
3.4. Sabitlərin variasiyası üsulu	89
4. Yüksək tərtibli sabit əmsallı xətti tənliklər	91
5. Yüksək tərtibli tənliklər haqqında	94
6. Eyler tənliyi	101
7. Diferensial tənliklər sistemi	104
8. Tənliklərin qüvvət sıraları vasitəsilə inteqrallanması	115
9. Həllin dayanıqlığı	121
10. Məxsusi nöqtə	133
11. Sərhəd məsələsi	135
Yoxlama sualları	139
Müstəqil həll etmək üçün misallar	141

III FƏSİL

DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRİN TƏTBİQİNƏ AID MƏSƏLƏLƏR..... 155

1. Həndəsi məsələlər	155
2. Fiziki məsələlər	171
3. Elmin və texnikanın müxtəlif sahələrinə aid məsələlər	225
Müstəqil həll etmək üçün məsələlər	239

IV FƏSİL

NÜMUNƏVİ MISALLAR HƏLLİ

1. Həllin varlığı, yeganəliyi və təqribi həlli	242
2. Tənliklərin tipini müəyyənləşdirin və həll edin	246
3. Əyrilər ailəsinin və trayektoriyaların diferensial tənlikləri tapın	254

4. Yüksək tərtibli diferensial tənliklər	255
4.1. Verilən funksiyaların xətti asılılığını araşdırın	255
4.2. Yüksək tərtibli tənliklərin tipini təyin edib həll edin	257
4.3. Qeyri-müəyyən əmsallar və sabitlərin variasiyası üsulu ilə həll edin	261
5. Tənliklər sistemini həll edin	263
6. Həllin başlanğıc şərtlərindən və parametrlərdən asılılığı. Qüvvət sırasının köməyi ilə tənliyin inteqrallanması	267
7. Həllin dayanıqlığı. Məxsusi nöqtə	273
8. Sərhəd məsələsi	278
Yoxlama işlərinin həll nümunələri	281
Müstəqil həll etmək üçün misallar	291

ƏLAVƏ.

Birtərtibli xüsusi törəməli diferensial tənliklər	308
Müstəqil həll etmək üçün misallar	313
Ədəbiyyat	315

ГУЛИЕВ Х. М., ГАСАНОВ К.К.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ЗАДАЧИ И ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Учебное пособие для ВУЗ-ов, 2001 г.

Учебное пособие посвящено обыкновенным дифференциальным уравнениям и решениям задач и примеров и предназначено для студентов университетов, институтов, научных сотрудников, инженеров, а также для преподавателей, ведущих практические занятия.

В книге даны краткие теоретические сведения по обыкновенным дифференциальным уравнениям, решены многочисленные примеры и задачи, уделено много мест составлению дифференциальных уравнений, касающихся различных областей науки и техники.

Наличие многочисленных задач и примеров для самостоятельных занятий и контрольных вопросов, позволяют пользоваться книгой на практических занятиях и коллоквиумах.

1. ЯГУБОВ М.Г. Профессор БГУ, доктор физико-математических наук
2. СУЛЕЙМАНОВ Дж.Н. Доцент АГПУ, кандидат физико-математических наук

GOULIYEV Kh.M., HASANOV K.G.

**DIFFERENTIAL EQUATIONS, PROBLEMS AND
EXAMPLES WITH ANSWERS**

Training aid for Universities and Colleges, 2001

The book is dedicated to common differential equations and problems solutions and intended to university and college students, scientists engineers and university tutors.

There given a brief theoretical information on common differential equations, answers to many problems and examples and composed a large number of differential equations touching different areas of science and technics.

Critics:

1. **YAQUBOV M.H.** BDU-nun professoru, fizika-riyaziyyat elmləri doktoru
2. **SÜLEYMANOV C.N.** ADPU-nun dosenti, fizika-riyaziyyat elmləri namizədi

**XƏLİL QULİYEV
KAZIM HƏSƏNOV**

DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR.

Məsələ və misallar həlləri ilə.

Ali məktəblər üçün dərs vəsaiti

Nəşriyyatın direktoru
Mətbəənin direktoru
Texniki redaktoru

E.A.Əliyev
S.O.Mustafayev
F.Z.Kərimov

Yığılmağa verilib 05.01.2001. Çapa imzalanıb 25.04.2001.

Formatı 60x90 $\frac{1}{16}$. Ş.ç.v. 20. Ofset kağızı.

Sifariş № 68. Sayı 500 nüsxə. Qiyməti müqavilə ilə.

«Çaşıoğlu» mətbəəsi

Bakı, M.Müşfiq küç. 2a. Tel. 31-28-02