Mövzu 1. Metrik fəza, aksiomları və ona aid misallar.

Fərz edək ki, E$\neq$ø, $R_+ = \{\alpha, \alpha \in R, \alpha \geq 0\}$ mənfi olmayan ədədlər çoxluğudur.

Tərif: $P: E \text{ x } E \to R_+$ inikası aşağıdakı 3 şərti ödədikdə E çoxluğuna metrik fəza deyilir.

$\rho_1)\rho(x,x) = 0 \quad \forall x \in E$ (refleksivlik)

$\rho_2)\rho(x,y) = \rho(y,x) \;\; \forall x,y \in E$ (simmetriklik)

$\rho_3)\rho(x,y) + \rho(y,z) \geq \rho(x,z) \;\; \forall x,y,z \in E$ (üçbucaq xassəsi)

Tərifdən görünür ki, ρ inikası E çoxluğunun $\forall x,y$ elementlərinə qarşı $\rho(x,y) = \alpha \in R_+$ mənfi olmayan həqiqi ədədini qarşı qoyur. Bu həqiqi ədəd ρ_1, ρ_2, ρ_3 xassələrini ödəyərsə, onda deyirlər ki, ρ inikası E çoxluğunda metrika müəyyən edir və ya ρ inikası E çoxluğunda ölçü müəyyənləşdirir.

ρ_1 xassəsi göstərir ki, üst-üstə düşən iki element arasındakı məsafə sıfırdır.

ρ_2 xassəsi göstərir ki, iki müxtəlif nöqtədən hansının birinci seçilməsindən asılı olmayaraq məsafə dəyişmir.

Üçüncü xassə göstərir ki, müxtəlif üç nöqtə seçildikdə bunların ixtiyari ikisinin üçüncü nöqtə ilə əmələ gətirdikləri məsafələrin cəmi həmin nöqtələr arasındakı məsafədən kiçik deyil. Əgər bu nöqtələr bir düz xətt üzərində yerləşməzsə, bir üçbucaq əmələ gətirirlər. Ona görə də ρ_3 xassəsi bəzən üçbucaq xassəsi adlanır. (ŞƏKİL)

Bu halda III xassədə yalnız bərabərsizlik işarəsi qalır.

Əgər x, y, z nöqtələrinin başqa cür yerləşməsi zamanı, yəni üçü də müxtəlif olmaqla bir düz xətt üzərində yerləşdikdə, ikisi üst-üstə düşdükdə və ya üçü də üst-üstə düşdükdə III xassədə yalnız bərabərlik işarəsi qalır.

$\rho_1 - \rho_3$ xassələrinə bəzən metrik fəzanın aksiomları deyilir. x, y, z,... metrik fəzanın nöqtələri, $\rho(x,y)$ ədədi x və y nöqtələri arasındakı məsafə adlanır. Metrik fəzaya aid misallar göstərək:

Misal1. E ədəd oxu olsun, yəni E=R. Burada iki nöqtə arasındakı məsafəni belə təyin edək: $\rho(x,y) = |y - x|$ (ŞƏKİL)

Göstərək ki, belə təyin edilmiş $\rho(x,y)$ funksiyası yuxarıdakı aksiomları ödəyir. I aksiomu yoxlayaq: $\rho_1 : \rho(x,x) = |x - x| = |0| = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \rho_1 -$ödənilir.

İndi II aksiomu yoxlayaq: $\rho(x,y) = |y - x| = |(-1)(x - y)| = |-1||x - y| = |x - y| = \rho(y,x)$ Deməli, ρ_2-ödənilir.

ρ_3 aksiomu yoxlayaq :

$\rho(x,y)=|z-x|=|z-y+y-x|=|(z-y)+(y-x)|\leq|z-y|+|y-z|=\rho(y,z)+\rho(z,y)$

$\rho(x,y)\leq\rho(y,z)+\rho(x,y).$ Odur ki, $\rho_3 -$ ödənilir.

Bu misal göstərir ki, ədəd oxu təyin edilmiş metrikaya nəzərən metrik fəza əmələ gətirir.

Misal2. Fərz edək ki,E çoxluğu Evklid fəzasıdır.
$E=E_n \quad \forall M,N\in E_n \qquad \rho(M,N)=|MN|$. Göstərək ki,bu metrikada ρ_1,ρ_2,ρ_3 xassələri ödənilr. $\quad \rho_1 : M = N \Rightarrow \rho(M,M)=|\overrightarrow{MM}|=|\vec{0}|=0$

$$\rho_2 : M \neq N \Rightarrow \rho(M,N)=|\overrightarrow{MN}|=|-\overrightarrow{NM}|=|(-1)\overrightarrow{NM}|=|\overrightarrow{NM}|=\rho(N,M)\Rightarrow\rho(M,N)=\rho(N,M)$$

$\rho_3 : M, N, K$

$$\rho(M,K)=|\overrightarrow{MK}|=|\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NK}|=\sqrt{(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NM})^2}=\sqrt{\overrightarrow{MN}^2+2\overrightarrow{MN}\,\overrightarrow{NM}\cos(180^0-\hat{N})+\overrightarrow{NK}^2}=$$

$$=\sqrt{|\overrightarrow{MN}|^2-2|\overrightarrow{MN}||\overrightarrow{NK}|\cos\hat{N}+|\overrightarrow{NK}|^2}=\sqrt{|\overrightarrow{MN}|^2-2|\overrightarrow{MN}||\overrightarrow{NK}|+|\overrightarrow{NK}|^2}=$$

$$=\sqrt{\left[|\overrightarrow{MN}|+\left(-|\overrightarrow{NK}|\right)\right]^2}\leq|\overrightarrow{MN}|+|\overrightarrow{NK}|=\rho(M,N)+\rho(N,K)$$ (ŞƏKİL)

$\rho(M,K)\leq\rho(M,N)+\rho(N,K) \qquad \rho_3 -$ödənir.

Bu göstərir ki,n-in istənilən qiymətində Evklid fəzaları metrik fəzalardır. Bu qaydada çoxlu misallar göstərmək olar.

Metrik fəzada bəzi fiqur anlayışlarını verək.

1.Açıq şar: Metrik fəza da elə nöqtələr çoxluğundan ibarətdir ki, onun hər bir nöqtəsi şarın mərkəzi adlanan nöqtədən şarın radiusu adlanan müsbət həqiqi ədəddən kiçikdir. Şarın mərkəzini x_0 –la, radiusunu r ilə və şarı $B(x_0,r)$ ilə göstərək. Açıq şar elə x nöqtələrdən ibarətdir ki, $B(x_0,r)=\{x, |x-x_0|<r\}$, başqa sözlə açıq şarın tənliyi
$\rho(x_0,x)\prec r \quad (\rho(x_0,x)=|x-x_0|$ n=1 olduqda açıq şar açıq intevaldır:]a,b[və ya (a,b) (ŞƏKİL)
n=2 olduqda açıq şar dairənin daxili nöqtələri çoxluğudur.(ŞƏKİL)
n=3 olduqda açıq şar sferanın daxili nöqtələri çoxluğudur.(ŞƏKİL)
Bu qayda ilə çoxlu misallar göstərmək olar.

2.Qapalı şar:Elə nöqtələr çoxluğundan ibarətdir ki, mərkəz adlanan bir nöqtədən onun ixtiyari nöqtəsinə qədər olan məsafə radius adlanan müsbət ədəddən böyük olmur və $\overrightarrow{B(x_0,r)}$ ilə işarə olunur. Tənliyi belədir:

$$\overrightarrow{B(x_0,r)}=\{x,\rho(x_0,x)\leq r\}$$

n=1 olduqda qapalı şar parçanın bütün nöqtələri, n=2 olduqda dairənin nöqtələri, n=3 olduqda kürənin nöqtələri başa düşülür və s.

3. Şar səthi dedikdə qapalı şarın elə nöqtələr çoxluğu başa düşülür ki, onun ixtiyari nöqtəsi ilə şarın mərkəzi arasındakı məsafə radiusuna bərabərdir. Şar səthi $S(x_0, x) = \{x, \rho(x, x_0) = r\}$ tənliyinə malikdir.

Məsələn: n=1 olduqda parçanın uc nöqtələri , n=2 olduqda çevrə, n=3 olduqda sfera səthi və s. başa düşülür.

Qeyd edək ki, açıq şar açıq çoxluqdur. Metrik fəzada açıq çoxluğa tərif vermək mümkündür. Bunun üçün nöqtənin ətrafı anlayışını verək.

4. Nöqtənin ətrafı. Metrik fəzada hər hansı x_0 nöqtəsinin ε ətrafı, mərkəzi $x_0 -$da və radiusu ε ədədinə bərabər olan hər hansı açıq şardır. Nöqtənin ətrafı $B(x_0, \varepsilon)$ kimi işarə olunur.

Metrik fəzada nöqtənin istənilən ətrafı çoxluğa daxil olarsa, onda həmin nöqtə çoxluğun **daxili nöqtəsi** adlanır. Başqa sözlə nöqtənin çoxluğa daxil olan ətrafı varsa, onda bu nöqtə çoxluğun daxili nöqtəsi adlanır. Metrik fəzada çoxluğun daxili nöqtələr çoxluğuna onun **daxili oblastı** adlanır. A çoxluğunun daxili oblastı $\overset{0}{A}$ kimi işarə olunur. $x \in A$ və $B(x, \varepsilon) \subset \overset{0}{A}$ olduğu üçün, buradan görünür ki, çoxluğun daxili oblastı açıq çoxluqdur, çünki o açıq çoxluqların birləş-məsidir.

Metrik fəzada digər çoxluqlara da tərif vermək olar. Çoxluğun sərhəddi qapalı çoxluqdur və s.

Fərz edək $A \subset B$ çoxluğu verilmişdir.B-nin A-da olmayan nöqtələri çoxluğuna A-nın B-yə qədər tamamlayıcısı deyilir.B/A=CA (ŞƏKİL)

Mövzu 2. Topoloji fəzanın aksiomatik tərifi.

Fərz edək χ ≠Ø hər hansı təbiətli nöqtələr oxluğudur.
$T = \{U_1, U_2, ...U_i, ..., U_j ....\}$ χ -dən müəyyən qayda ilə seçilmiş çoxluqlardır.

Tərif: T çoxluqları sistemi aşağıdakı xassələri ödəyərsə, onda deyirlər ki, bu çoxluqlar sistemləri χ çoxluğunda topologiya və topoloji struktura müəyyən edir.

$t_1) \chi \in T$, Ø $\in T$

$t_2)$ istənilən sayda $U_1, U_2, ..., U_i, ...$ çoxluqlarının birləşməsi T-yə daxildir,yəni $U_1 \cup U_2 \cup .... \cup U_i \cup ... \in T$

$t_3)$ sonlu sayda $U_1, U_2, ..., U_k$ çoxluqlarının kəsişməsi T-yə daxildir, yəni $U_1 \cap U_2 \cap .... \cap U_n \in T$

Tərifə görə $t_1 - t_3$ ödəndikdə deyirlər ki, χ -də T tipli topologiya müəyyən edilmişdir. Topologiya müəyyən edilən çoxluğa bəzən topoloji fəza deyilir.Topoloji fəza isə belə işarə olunur: (χ, T). Bu (χ, T) cütü topoloji fəza adlanır. t_1, t_2, t_3 topoloji fəzanın aksiomları χ -in elemenləri topoloji fəzanın elementləridir. T-nin element-ləri açıq çoxluqlar adlanır. Topoloji fəzanın aksiomatik tərifindən göstərmək olar ki, buradakı ilk anlayış açıq çoxluqdur. İlk münasibətlər elementlərin daxil olması, birləşməsi və kəsişməsi anlayışlarıdır. Bu anlayışlar isə riyaziyyatın bütün sahələ-rində ilk anlayışlar kimi müəyyən edilir. Odur ki, Topoloji fəza ən ümumi fəzalar sinifini müəyyən edir. İndi topoloji fəzalara aid bir neçə misallara baxaq:

Misal1. $X=(E,\rho)$ ρ metrikalı fəza olsun. Bu metrik fəzada $B(x_0,r)$ açıq çoxluqlar sistemini yaratdıq. Həmin açıq çoxluqlar sistemini $U_1,U_2,...,U_\lambda ...$ kimi götürsək, onda (E,ρ) fəzası topoloji fəzaya çevrilər.Burada topologiya ρ metrikası vasitəsilə verilir.

Misal 2. $\chi=R^n$ hesabi fəza olsun. $\underbrace{RxRx....xR}_{n}$ burada açıq çoxluqlar sistemi $a_i<x_i<b_i \quad (i=\overline{1,n})$ kimi verilir.

n=1 olduqda: $a_1,<x<b_1$ açıq interval,

n=2 olduqda: $a_1<x_1<b_1/a_2<x_2<b_2$ açıq paraleloqram, (ŞƏKİL)

n=3 olduqda: $a_1<x_1<b_1;a_2<x_2<b_2;a_3<x_3<b_3$ açıq paralelopiped və s.

Açıq çoxluqları bu qayda ilə seçdikdə n ölçülü hesabi fəza topoloji fəzaya çevrilir.

Misal 3. T={ø,x} aydındır ki,bunların birləşməsi

ø $\cup$ ø $=$ ø $\in T$, ø $\cup U=U\in T$, $U\cup U=U\in T$ kəsişməsi

ø $\cap$ ø $=$ ø $\in T$, ø $\cap U=$ ø $\in T$, $U\cap U=U\in T$ daxildir.

$\forall$ X çoxluğunda bu cür seçilən T sistemi burada topologiya müəyyən edir.Belə topologiya **antidiskret topologiya** adlanır.

Misal 4. X hər hansı boş olmayan çoxluq, bunun bütün mümkün alt çoxluqları çoxluğunu $P(x)=T$ işarə edək. Onda aydındır ki, istənilən sayda çoxluqların birləşməsi və kəsişməsi alt çoxluq verəcəkdir. Bu cür topologiya **diskret topologiya** adlanır. $P(x)$-ə həm də nöqtələr aiddir.

Mövzu 3.Əsas topoloji anlayışlar.

Topoloji fəzanın aksiomatikasından istifadə edərək onun bəzi anlayışlarını və ya sadəcə topoloji anlayışları haqqında danışmaq olar.

1. **Tərif 1. Nöqtənin ətrafı**: Əvvəla qeyd edək ki, topoloji fəzanın elementləri nöqtə-lər adlanır. Məsələn: $(\chi,T)x\in\chi$ bunun nöqtəsi adlanır.

Topoloji fəzanın nöqtəsinin ətrafı dedikdə bu nöqtəni daxilinə alan ixtiyari açıq çoxluq başa düşülür. $A\in T$ $x\in A$. A x-in ətrafı olur. (ŞƏKİL)

Bu tərif metrik fəzada nüqtənin ətrafının tərifi ilə uzlaşır. Çünki orada ətraf açıq şar kimi, nöqtə isə şarın mərkəzi kimi başa düşülür. Burada tərif daha ümumidir. Yəni nöqtə ətrafı olan çoxluğun mərkəzi anlayışından uzaqlaşılıb, çünki mərkəz məsafə anlayışı ilə bağlıdır.Topoloji fəzada isə məsafə anlayışı yoxdur. Deməli topoloji fəzada nöqtənin ətrafı həmin nöqtəni öz daxilinə alan ixtiyari açıq çoxluq kimi başa düşülür.

Məsələn: interval özünün bütün nöqtələrinin ətrafı ola bilər. Açıq dairə özünün bütün nöqtələrinin ətrafı həmin dairədir.

Tərif 2. Çoxluğun daxili nöqtələri $\exists x \in A$ nöqtəsi kimi başa düşülür ki, x-in $\forall U_x \in A$ ətrafı olsun. Belə nöqtəyə **daxili nöqtə** deyilir.

Tərif 3. Çoxluğun daxili nöqtələri çoxluğuna onun **daxili oblastı** deyilir.

Bu cür nüqtələr çoxluğuna çoxluğun daxili oblastı deyilir və $\overset{0}{A}$ kimi işarə olunur.

(ŞƏKİL)

Göstərmək olar ki, $\overset{0}{A}$ açıq çoxluqdur $\overset{0}{A} \subset T$ olduğundan $\overset{0}{A} = \{U_x / x \in A\}$ olur. Onda göstərmək olar ki, $\overset{0}{A}$ istənilən sayda ətrafların birləşməsidir. t_2-yə görə belə U_x -lərin birləşməsi $\bigcup_{x \in A} U_x \in T$ olur.

Tərif 4. Çoxluğun xarici nöqtəsi elə nöqtəyə deyilir ki, onun çoxluqla ortaq hissəyə malik olmayan ətrafı olsun, yəni Y nöqtəsi A-nın o zaman xarici nöqtəsi olur ki, $\exists U_y \in T \quad U_y \cap A = ø$ ödənsin. Lakin çoxluğun xarici nöqtəsinə başqa cür də tərif verilir. Bunun üçün çoxluğun **tamamlayıcı çoxluğu** anlayışını verək.

Fərz edək $A \subset B$ çoxluğu verilmişdir. $A \setminus B = CB$ B çoxluğunun A-ya qədər tamamlayıcısı çoxluğu deyilir. Bu A\B; C_AB; CB kimi yazılır. Tamamlayıcı çoxluq anlayışını bildikdən sonra xarici nöqtəyə belə tərif vermək olar.

Tərif 4. Çoxluğun xarici nöqtəsi onun tamamlayıcı çoxluğunun daxili nöqtəsinə deyilir. Deməli, əgər $y \in CA \Rightarrow y \in \overline{\overset{0}{CA}}$.

Tərif 5. Çoxluğun **toxunma nöqtəsi** elə nöqtəyə deyilir ki, onun ixtiyari ətrafı verilmiş çoxluqla ortaq kəsişməyə malik olsun.

Məsələn: X nöqtəsi A çoxluğu üçün toxunma nöqtəsidirsə, $\forall U_x \cap A \neq Ø$ olar. Çoxluğun toxunma nöqtələri çoxluğuna onun **qapayıcısı** deyilir və $\overline{A}$ kimi işarə edilir.

Tərif 6. Çoxluğun **sərhəd nöqtəsi** elə nöqtəyə deyilir ki, onun həm A çoxluğu ilə və həm də CA çoxluğu ilə boş olmayan kəsişmə nöqtəsinə malik olsun. X sərhəd nöqtəsi üçün $U_x \cap A \neq Ø, U_x \cap CA \neq Ø$ ödənilməlidir. Çoxluğun sərhəd nöqtələri çoxluğuna onun **sərhəddi** deyilir və b(A) kimi işarə olunur. Sərhəd nöqtəsi və çoxluğun toxunma nöqtəsi təriflərdən görünür ki, çoxluğun qapayıcı onun daxili ilə sərhəd nöqtələrinin birləşməsidir, yəni $\overline{A} = \overset{0}{A} \cup b(A)$.

Misal. $A = (a,b)$ olarsa, $b(A) = \{a,b\}$ olduğundan $\overline{(a,b)} = (a,b) \cup \{a,b\} = [a,b]$, deməli $\overline{A} = [a,b]$ olar. Analoji yolla göstərmək olar ki, $A = [a,b),\ A = (a,b],\ A = [a,b]$ olduqda $\overline{A} = [a,b]$ olar.

Məlumdur ki, hər bir çoxluğun daxili oblastı, yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi, açıq çoxluqdur. Çoxluğun qapayıcısı **qapalı çoxluq** adlanır. Yəni $A \subset T$ çoxluğu açıqdırsa, $\overline{A}$ çoxluğu qapalı çoxluq olar. $\overline{A}$ çoxluğu qapalıdırsa, onda $\overline{CA} = \overset{0}{\overline{CA}}$ açıq çoxluqdur. Yəni qapalı çoxluğun tamamlayıcısı açıq, açıq çoxluğun qapayıcısı qapalıdır.A çoxluğu istər açıq,istər qapalı olsun onun qapayıcısı qapalı çoxluqdur. Deməli, $\overline{CA}$ çoxluğu $\overline{A}$ -nın sərhəd nöqtələri $\overline{A}$-yə daxildir.Odur ki, $\overline{CA}$ açıq çoxluqdur. A çoxluğu necə olursa olsun CA müəyyən bir çoxluqdur. Lakin onun daxili açıq çoxluqdur. $\overset{0}{\overline{CA}} \in T$ deməli $\overline{CA}$ çoxluğuna A çoxluğunun sərhəd nöqtələri daxil deyil. Qapalı çoxluq haqqında aşağıdakı teorem var.

Teorem: Topoloji fəzada çoxluğun qapalı olması üçün zəruri və kafi şərt onun öz qapayıcısı ilə üst-üstə düşməlidir.

A çoxluğu qapalıdıqsa, $A = \overline{A}$. Yuxarıda qeyd etdik ki, açıq çoxluğun tamamlayıcı-sına qapalı çoxluq deyilir. $A \in T$ CA qapalıdır.

Zərurilik: $A = \overline{A} \Rightarrow CA = \overline{CA}$ $\overline{CA} = \overset{0}{\overline{CA}} \Rightarrow CA = \overset{0}{\overline{CA}} \in T \Rightarrow CA \in T \Rightarrow A$ qapalıdır.

Kafilik: A qapalıdır $\Rightarrow CA \in T \Rightarrow CA = \overset{0}{\overline{CA}} = \overline{CA} \Rightarrow CA = \overline{CA} \Rightarrow A = \overline{A}$.

Göstərdik ki,həqiqətən çoxluq yalnız və yalnız o zaman qapalı olur ki, o öz qapayıcısı ilə üst-üstə düşsün. Bu dediklərimizdən istifadə edərək müxtəlif növ fəzalara baxmaq olar.Lakin əvvəlcə bir neçə tərifə fikir verək.

Tərif: (X,T) topoloji fəzası o zaman **ayrıla bilən** və ya **Xausdorf** fəzası adlanır ki, onun ixtiyari 2 müxtəlif x_1, x_2 nöqtələri üçün ortaq kəsişməyə malik olmayan ətrafları olsun, yəni, elə U_{x_1}, U_{x_2} ətrafları olsun ki, $U_{x_1} \cap U_{x_2} = Ø$ ödənilsin.

Belə fəzalar ayrıla bilən fəzalar adlanır. Buna **misalları** çox göstərmək olar: **ədədi fəzalar, Evklid, afin, proyektiv** və **bütün metrik fəzalar** ayrıla bilən fəzalardır. Çünki bunların ixtiyari iki nöqtəsinin kəsişməyən ətraflarını qurmaq olar.

Başqa bir fəzaya baxaq X topoloji fəzanın örtüyü $\exists\{X_\lambda\}_{\lambda \in I}$ çoxluqlar sisteminə deyilir ki, bu sistemin çoxluqlarının birləşməsi X fəzasını vermiş olsun. $\cup X_\lambda = X \quad X_\lambda \in T$

Tərif :Topoloji fəza o zaman kompakt adlanır ki, o Borel-Lebeq aksiomunu ödəsin və onun hər bir açıq örtüyündən sonlu alt örtük ayırmaq mümkün olsun.

Tərif göstərir ki, kompakt çoxluq Borel-Lebeq aksiomunu ödəyən və sonlu alt örtüyə malik olan çoxluq olmalıdır.

Məsələn: sfera səthini sonlu sayda paraleloqramlarla örtmək olar.

Mövzu 4.Kəsilməz inikaslar.

Topologiyanın əsas inikasını müəyyən etmək üçün kəsilməz inikas əsas rol oynayır. Fərz edək (X,T) (Y,T) kimi 2 topoloji fəza verilmişdir. $f:(X,T)\to(Y,T)$ inikasına baxaq. $f: X \to Y$ inikasası $\forall x \in \chi$ -ə $f(x)=Y$ -nı qarşı qoyur.

Tərif: $x \in X$ nöqtəsində $f: X \to Y$ inikası o zaman kəsilməyən adlanır ki, f(x)-in Y-də hər bir $\forall \vartheta_{f(x)}$ ətrafına görə x-in X-də $\exists U_x$ ətrafı olmalıdır ki, $f(U_x) \in \vartheta_{f(x)}$ ödənsin.

Tərifdən istifadə edərək göstərmək olar ki, inikasın X nöqtəsində kəsilməz olması üçün obraz və proobrazın seçilən ətrafları göstərlən şərti ödəməlidir, yəni obrazın ixtiyari ətrafına görə proobrazın elə ətrafı olmalıdır ki, bu ətraf obrazın ətrafının daxilinə inikas olunsun. Kəsilməzliyin bu tərifi funksiyaların adi kəsilməzli-yindən qüvvətlidir. ε,δ dili ilə deyilmiş kəsilməzliyin X nöqtəsində kəsilməzliyin tərifi ilə bunu müqayisə etsək bu tərif müntəzəm kəsilməzliyə uyğun gəlir. (ŞƏKİL)

Göstərmək olar ki, X-in Y-ə inikasının kəsilməz olması üçün Y-də açıq çoxluğun proobrazı X-də açıq çoxluq olmalıdır.Yəni $f: X \to Y$ $\vartheta \in Y, \vartheta \in T$ $f(U)=\vartheta$,$U \in X, U \in T$ olmalıdır.Y -də $\forall v \in T$ açıq çoxluğunu götürək və $y \in v$ olsun . $f(x)=y.$ X nöqtəsinin X-dəki ətrafını U_x -lə işarə edək. f inikası zamanı $f(U_x)=V_{f(x)} \subset V$ bu münasibəti bütün $x \in U$ çoxluğunun nöqtələri üzrə aparsaq, onda $\bigcup_{x\in U} U_x = U \in T$ olar. Bu zaman $f(U)\subset T$ olar. Kəsilməz inikasiyalara misallar göstərək. Fərz edək $X = \overset{\cup}{AB}$ f isə ortoqonal proyeksiyadır.Bu qaydada göstərmək olar ki, tetraedri müstəvi ilə kəsdikdə alınan inikas kəsilməz inikasdır. Eləcədə çevrə üzərindəki nöqtələri proyeksiyaladıqda bu kəsilməz inikasdır. Kəsilməz inikaslarla bağlı olan başqainikaslar da vardır,bu homeomorf inikaslar-dır.

Homeomorf inikas riyaziyyatın ən ümumi inikasıdır. Bu inikas;n özü də tərsi də kəsilməz olan inikaslara deyilir.

(ŞƏKil)

Tərif. Biyektiv və kəsilməz inikasa homeomorf inikas deyilir.

Homeomorf inikasların həm özü $-f$, həm də tərsi $-f^{-1}$ biyektiv və kəsilməzdir. Bu ən ümumi inikasdır. İki topoloji fəza biyektiv inikasla bir-birinə çevrilən zaman bu fəzalar eyni sturukturaya, eyni xassələrə, yəni eyni həndəsi xassələrə malik olur. Ona görə də topoloji inikasla bir-birinə çevrilən fəzalara topoloji fəzalar deyilir. Çünki f homeomorf inikasıdırsa , f^{-1} homeomorfdur , bu inikasın tərsi də

,hasili də homemorf olduğuna görə $f(X)=Y \Rightarrow X \sim Y$. Topoloji ekvivalentlik də adi ekvivalentlik münasibətini ödəyir(**~**-top).

Topoloji ekvivolentlik də adi ekvivolentlik münasibətini ödəyir.

1.X **~** X (refleksivlik) **2**. X **~** Y $\Rightarrow$ Y **~** X (simmetriklik) 3.(X **~** Y,Y **~** Z) $\Rightarrow$ X **~** Z (tranzitivlik)
Bu onu göstərir ki,topoloji ekvivalentlik adi ekvivalentlik münasibətidir.

Homeomorf inikaslara sonsuz sayda misallar göstərmək olar.

Əgər bu ekvivalentlik münasibətini bütün topoloji fəzalar çoxluğuna $\Omega=\{X,Y,Z,...\}$ təsir etsək, Ω çoxluğu $\Omega/_{\sim}=\{K_1,K_2,...\}$ siniflərinnə bölünəcəkdir. Bu siniflərin hər birinə topoloji tiplər deyilir. Məsələn elleps, çevrə və öz-özünü kəsməyən əyri eyni topoloji tipə mənsubdur. Bütün qabarıq müstəvi çoxluqlar dairə ilə eyni topoloji tipə mənsubdur. Azərbaycan əlifbasında L,M,N,U,S və s. eyni topoloji tipə mənsubdur. Bu qaydada eyni topoloji tipə mənsub olan çoxluqları müəyyən etmək olar. Evklid həndəsəsində öyrəndiyimiz koordinantlar sistemini müstəvinin nöqtələr çoxluğu ilə RxR=R^2 çoxluğunun bir cüt (x,y) ədədləri ilə, eləcə-də fəzanın nöqtələr çoxluğunu $\{M/M \in E_3\}$ $R \times R \times R$ $\{(x,y,z)\}$.

Topoloji çevrilmələr topologiyanın əsas çevrilmələridir. Tərifdən və topoloji inikasın müəyyən edilməsindən gördük ki, bu inikasların həm özü, həm də tərsi topoloji inikaslardır. Başqa sözlə fərz edək $T=\{f,g,h,...\}$topoloji inikaslar çoxluğu verilmişdir. f homeomorf olduğundan $f^{-1} \in T$, $f,g \in T$ olduqda $f \circ g \in T$ və $\exists f(x)=x$ olduqda $f^0 \in T$ olur. Göstərmək olar ki, $f \circ (g \circ h)=(f \circ g) \circ h$. ödənilir. Bunlar onu göstərir ki, T çoxluğu homeomorf çevrilməyə nəzərən qrup əmələ gətirir. Bu qrupun invariantları açıq çoxluqdur və bundan çıxan nəticələrdir. Topolojgiya fənni homeomorf qrup çevrilmələrinin dəyişməyən xasslərini öyrənən həndəsə bölməsidir.

Topoloji fəzalar müxtəlif tipli olur:

1. Ayrıla bilən (Xausdorf) fəzaları elə χ topoloji fəzasına deyilir ki, $\forall x_1,x_2 \in \chi$ $x_1 \neq x_2$ nöqtələrinin kəsişməyən ətrafı olsun. $\exists U_{x_1} \in T, U_{x_2} \in T$ olsun ki, $U_{x_1} \cap U_{x_2} = \text{Ø}$. Məsələn, Fərz edək ki, $\chi = R$ ədəd oxudur.Aydındır ki,ədəd oxunda müxtəlif 2 nöqtə həmişə bu nöqtələrin elə ətrafını tapmaq olar ki,ətraflar kəsişməsin $10^{-7}=a$ $10^{-8}=b$ $10^{-7}+10^{-10}, 10^{-8}+10^{-10}$

(ŞƏKİL)

Deməli ədəd oxunda 2 ədəd arasında sonsuz sayda ədəd tapmaq mümkün olduğuna görə ədəd oxu ayrıla bilən topoloji fəzadır. Məs: *a*=5.1, *b*=5.2 olarsa *a*-nın ətrafı olaraq (5.09,5.11), b-nin ətrafı olaraq (5.19,5.21)seçmək olar. $\chi = R^k$ olduqda k ölçülü ədədi fəza ayrıla bilən fəzanın tərifini ödəyir. Deməli,bütün metrik fəzalar ayrıla bilən fəzalardır. Başqa sözlə Evklid, Afin, proektiv fəzalar və.s ayrıla bilən fəzalardır.

Topoloji fəzanın örtüyü anlayışını verək:

χ topoloji **fəzanın örtüyü** $\exists(X_\lambda)_{\lambda\in y}$ çoxluqları sisteminə deyilir ki, bunlar açıq olmaqla yanaşı χ_λ çoxluğunun kəsişməsi $\chi - i$ versin . $\chi = \chi_1 \cup \chi_2 \cup \ldots \cup \chi_\lambda \cup \ldots$ və χ_λ açıq çoxluq olsun. Bu çoxluğa örtük deyilir. Əgər $(\chi_\lambda)_{\lambda\in y}$ çoxluğunun alt çoxluğu həmin şərti ödəyərsə,onda belə alt çoxluğa alt örtük deyilir.

Tərif: χ topologiyası o zaman **kompak**t adlanır ki, onun hər bir açıq örtüyünün sonlu alt örtüyü olsun.

Deməli, topoloji fəza sonlu örtüyə malik olduqda kompakt adlanır. Bəzən çoxluğun kompakt olması üçün zəruri və kafi şərt kimi onun ixtiyari alt çoxluğunun kompaktlığı qəbul edilir.Yəni χ çoxluğunun ixtiyari alt çoxluğu kompakt olarsa, onda deyirlər ki, χ çoxluğu kompakt çoxluq və kompakt fəzadır. Məsələn: $[a,b]$, (a,b) kompakt çoxluqlardır. $[a,b)$ isə kompakt deyil. Çevrə, sfera, üçbucaq, ixtiyari çoxbucaqlılar kompakt çoxluqlardır.

Göstərmək olar ki, n ölçülü Evklid fəzasında çoxluq yalnız və yalnız o zaman kompakt olur ki,o məhdud və qapalı olsun. Bu mənada (a,b) intervalı Evklid fəzada kompakt deyil.

Çoxluğun örtüyü o zaman **rabitəli** adlanır ki, örtüyün ixtiyari iki çoxluğu kəsişmiş olsun. Əgər belə olmazsa, çoxluq rabitəsiz adlanır. Topoloji fəza o zaman **rabitəli fəza** adlanır ki,onun kəsişməyən hissələri olmasın.Əks halda fəza **rabitəsiz fəza** adlanır. Məsələn:Azərbaycan əlifbasındakı Ü hərfi rabitəsiz 3 hissədən, kiril əlifbasındakı ЫI hərfi rabitəsiz 2 hissədən, T,S,P,E,Q,U,A hərflərinin hamısı rabitəli nöqtələr çoxluğundan ibarətdir.Yer səthindəki quru və eləcədə sulu sahələr çoxluğu rabitəsiz çoxluqdur.

Mövzu5: Çoxobrazlı anlayışı.

Fərz edək (χ,T) topoloji fəza $R^k = \underbrace{R\times R\times\ldots\times R}_{k}$ k ölçülü hesabi fəzadır. $U\in X, U\in T$ $\varphi : U \to R^k$ inikası homeomorf inikas olduqda deyirlər ki, bu inikas U açıq çoxluğunda k ölçülü koordinat şəbəkəsi əmələ gətirir. Bəzən də bu inikas U-da *k* ölçülü koordinant sistemi adlanır və ya φ inikası U-nun k ölçülü koordinant atlası adlanır. $\forall x\in U$ nöqtədirsə, onda $\varphi(x) = (x^1, x^2, \ldots, x^k) \in R^k$ müəyyən edilir, yəni φ inikası hər bir x nöqtəsinə qarşı o nöqtənin obrazının R^k -da koordinatlarını qarşı qoyur və bu koordinatlar $x^1, x^2, \ldots, x^k$ ədədləridir. Ona görə də deyirlər ki, φ inikası U-da koordinat atlası müəyyən edir. (χ,T) topoloji fəzasına o zaman k ölçülü topoloji çoxbucaqlı deyilir ki, bu fəza ayrıla bilən hesabi bazalı fəza olsun və onu k ölçülü koordinat atlasları ilə örtmək mümkün olsun.

Tərifdən görünür ki, " əgər topoloji fəzanın nöqtələrinin ətraflarını k ölçülü xəritələrlə örtmək mümkündürsə, onda bu fəza k ölçülü çoxobrazlı adlanır". Biz əsasən bir və iki ölçülü çoxobrazlılara baxacağıq. Çoxobrazlının ölçüsü olan k ədədi homeomorf inikas zamanı dəyişmir. Çünki, homeomorf inikas qarşılıqlı birqiymətlidir. Odur ki, fəzanın ölçüsü bu inikas zamanı sabit qalır.

Misal 1. X= R^k(k= 1,2...) – eyniyyət çevrilməsi, yəni $\varphi(R^1) = R^1$ $\varphi(R^2) = R^2$. Bu o deməkdir ki, ədəd oxu və ədəd müstəvisi, uyğun olaraq, bir və iki ölçülü çoxobrazlıdır.

Misal 2. Fərz edək γ (O,r) – O mərkəzli və r radiuslu çevrə, (OXY) koordinat sisteminidir. (ŞƏKİL)

(OY) ^ γ = { A,B}, γ \ { A} = U_1 və γ \ { B} = U_2 ilə işarə edək və bele bir inikaslara baxaq:

$\varphi_1 : U_1 \to (OX)$ inikası $\forall M \in U_1$ qarşı $(BM) \cap (OX) = M^1$ nöqtəsini və

$\varphi_2 : U_2 \to (OX)$ inikası isə $\forall N_1 \in U_2$ $(AN) \cap (OX) = N^1$ nöqtəsini qarşı qoysun. Buradan alınır ki, hər bir inikas (OX) oxu üzərindəki koordinat şəbəkəsini U_1 və ya U_2 üzərinə köçürün. Yəni, $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)$ bir nöqtəsi atılmış çevrənin koordinat xəritəsi olur. Göstərmək olar ki, $U_1 \cup U_2 = \gamma$ .Odur ki, U_1 və U_2 açıq çoxluqları γ çevrəsinin açıq ötrükləridir. Örtük sonlu sayda olduğundan γ kompakt çoxluqdur.. Beləliklə, alırıq: çevrə bir ölçülü çoxobrazlıdır.

Analoji yolla isbat etmək olar ki, sfera səthi iki ölçülü çoxobrazlıdır. Bunu isbat etmək üçün sferanın mərkəzindən keçən ekvator müstəvisəni çəkmək, misal 1-dəki kimi U_1 və U_2 açıq çoxluqlarını yaratmaq lazımdır. Bu zaman U_1 və U_2 bir nöqtəsi atılmış sfera səhtləri olur.

İndi **sərhəddi olan səthlərə** baxaq. Fərz edək $R^k = \underbrace{R \times R \times \ldots \times R}_{k}$ hesabı fəza

$R_+^k = \{\alpha \in R^k / \alpha \geq 0\}$ ədədlərdən ibarət hesabı yarımfəzadır. (X, τ) topolozi fəzası o zaman k ölçülü sərhəddi olan çoxobrazlı adlanır ki, onun ixtiyari $\forall x \in X$ nöqtəsinin U_x ətrafı ya R^k ya da R_+^k ilə homeomorf olsun. **Çoxobrazlının R_+^k ilə homeomorf olan nöqtələr çoxluğuna onun sərhəddini deyilir**.

Misal 3. $[a, b]$ parçası sərhəddi a və b olan bir ölçülü çoxobrazlıdır. Eləcə də qapalı şüa A_3-də sərhəddi olan birölçülü çoxobrazlıdır. Bunun sərhəddi nöqtədir. İsbat etmək olar ki, hər bir rabitəli birölçülü sərhəddi olan çoxobrazlı ya parça ya da qapalı şüa ilə homeomorfdur. Nöqtə yalnız özündən ibarət və onun həm sərhəddi , həm də özüdür.

Misal 4. Evklid fəzada ixtiyari qabarıq çoxbucaqlı sərhəddi olan ikiölçülü çoxobrazlıdır . Onun sərhəddi çoxbucaqlının tərəfləridir. Şəkil

Misal 5. Qapalı Evklid yarımmüstəvisi , yəni *a* düz xətti ilə hüdudlanmış yarımmüstəvi sərhəddi olan ikiölçülü çoxobrazlıdır, sərhəddi *a* düz xəttidir. Bu misal kompakt olmayan sərhədli ikiölçülü çoxobrazlılara aiddir.

Misal 6. Fərz edək E_3 Evklid fəzada düzbucaqlı *Oxyz* koordinat sisteminin *Oxy* koordinat müstəvisində ABCD düzbucaqlısı ABCD={M(x,y,0) | |x|≤a,|y|≤b} kimi verilnişdir. Burada a>0, b>0. ABCD düzbucaqlısının AB tərəfi üzərindəki hər bir M(x,b) nöqtəsini DC tərəfinin M´(x,-b) nöqtəsi ilə eyniləşdirək, yəni üst-üstə salaq. M və M´ nöqtələri (Ox) oxuna nəzərən simmetrikdirlər. Başqa sözlə $\overline{AB}$ ilə $\overline{DC}$ -nin nöqtələrini birləşdirək. Onda silindir səthi alırıq. Alınan səth sərhəddi olan çoxobrazlıdır və sərhəddi iki çevrə ilə homeomorfdur. Alınan fiqur əlcək, ruçka adlanır. Bu fiqur ABCD düzbucaqlısının, yuxarıdakı qayda ilə, qarşı tərəflərinin kleylənməsi yolu ilə alınmışdır.

Misal 7. İndi həmin ABCD düzbucaqlısının nöqtələrini başqa cür, ABCD düzbucaqlısının BC tərəfi üzərindəki hər bir M(a,y) nöqtəsini DA tərəfinin M´(-a,-y) nöqtəsi ilə eyniləşdirək, yəni üst-üstə salaq. Bu halda M və M´ nöqtələri O nöqtəsinə nəzərən simmetrikdirlər. Başqa sözlə, yəni M və M´ nöqtələrini düzbucaqlının mərkəzlərinə nəzərən simmetrik olmaqla eyniləşdirək. Bu zaman $\overline{DA}$ ilə $\overline{BC}$-nin nöqtələrini birləşdiririk və alınan səth Mobius vərəqi adlanır. Onun sərhəddi birölçülü kompakt çoxobrazlı əmələ gətirir, deməli çevrə ilə homeomorfdur. Bu fiqur ABCD düzbucaqlısının istiqamətlənmiş $\overline{DA}$. parçasının istiqamətlənmiş $\overline{BC}$ parçası ilə yuxarıdakı qayda ilə kleylənməsi yolu ilə alınmışdır. Şəki

Mövzu 6. Şəbəkəli ayrılış. Çoxobrazlının Eyler xarakteristikası.

Əvvəlcə şəbəkəyə tərif verək. Şəbəkə dedikdə qabarıq çoxbucaqlı ilə homeomorf olan nöqtələr çoxluğu başa düşülür. Çoxbucaqlının təpəsinin obrazına şəbəkənin təpəsi; çoxbucaq-lının tərəfi ilə homeomorf olan nöqtələr çoxluğuna şəbəkənin tərəfi, çoxbucaqlının üzü ilə homeomorf olan nöqtələr çoxluğuna şəbəkənin üzü deyilir. (ŞƏKİL) $\forall ABCDE$ şəbəkə isə A,B,C,D və E nöqtələri şəbəkənin təpələri; $[AB],[BC],[CD],[DE],[EA]$ tərəfləri, ştrixlənmiş sahə şəbəkənin üzü adlanır. Çoxüzlü o zaman $F_1, F_2, \ldots F_k$ şəbəkələrinə ayrılmış hesab olunur ki, aşağıdakı şərtləri ödəsin.

1. $F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_k = X$ (ŞƏKİL)
2. $F_i \cap F_j$={nöqtə (təpə)($i \neq j$ olduqda);tərəf ($i \neq j$ olduqda);ø ($i \neq j$ olduqda)}.

Hər bir şəbəkədə təpələr və tillər vardır. (X,τ) çoxobrazlısında onun hər hansı şəbəkəli ayrılışını k ilə işarə edək. k şəbəkəli ayrılışı zamanı şəbəkələrin təpələri sayını α_0-la, tərəfləri sayını α_1-lə, üzlərin sayını α_2-lə işarə edək.

M əs:əln, şəkil 1-də $\alpha_0 = 5, \alpha_1 = 8, \alpha_2 = 4$, şəkil 2-də $\alpha_0 = 6, \alpha_1 = 9, \alpha_2 = 4$-dur.

$\chi(F) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$ ədədinə çoxobrazlının Eyler xarakteristikası adlanır. Bu Eyler düsturu topoloji çoxüzlünün şəbəkəli ayrılışına da tətbiq edilə bilər.

Misal: yuxarıdakı misal 1-də χ(F) =1 və visal 2-də χ (F)=1-dir.

Məsələn:yuxarıdakı fiqurların Eyler xarakteristikasını hesablayaq:
Tetraedr üçün $\chi(tet) = 4 - 6 + 4 = 2$

$\chi(F) = 7 - 11 + 5 = 1$ $\chi(\overline{F}) = 5 - 8 + 4 = 1$ $\chi(\tau) = 6 - 9 + 4 = 1$

Bu göstərir ki, çoxbucaqlıların hansı üsulla şəbəkələrə aparılışından asılı olmadan Eyler xarakteristikası dəyişmir. Məsələn:dairə üçün başqa şəbəkəli ayrılış götürək.(ŞƏKİL)
$\alpha_0 = 5, \alpha_1 = 12, \alpha_2 = 8$ $\chi(F) = 5 - 12 + 8 = 1$. Bu xassə təsadüfi xarakter olmayıb topoloji xassədir. Yəni isbat etmək olar ki, çoxobrazlının Eyler xarakteristikası onun şəbəkələrə ayrılma qaydasından asılı deyildir. Başqa sözlə Eyler xarakteristikası çoxobrazlının topoloji invariantıdır. Doğurdan da F və F΄ homeomorf olduqda F-in k şəbəkəli ayrılışı F΄-in k΄ şəbəkəli ayrılışına çevirir. İnikas homeomorf olduğundan F-in k şəbəkəli ayrılışındakı $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ ədədləri F΄-in k΄ şəbəkəli ayrılışınadakı $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ ədədlərinə bərabər olarlar. Deməli, χ (F) = χ (F΄) olar. Çoxobrazlılar ümün Eyler mühüm teorem vermişdir. Çoxüzlünün da xarakteristikası χ kimi işarə olunur.

Eyler teoremi:Səthi kürə səthi ilə,üzləri qabarıq çoxbucaqlı ilə homeomorf olan hər bir çoxüzlünün təpələrinin və üzlərinin sayının cəmi onun tilləri sayından 2 vahid artıqdır.

$$\chi(\phi) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2.$$

Bu düstur çoxüzlülər üçündür, onların Eyler xarakteristikasıdır. Bu xassəni sırf topoloji yolla isbat etmək olar.Məsələn:Mobius vərəqinin şəbəkəli ayrılışına baxaq.(ŞƏKİL

Çoxobrazlıların Eyler xarakteristikası bir çox məsələlərdə geniş tətbiq olunur.

Mövzu 7.Oriyentasiyalanan və oriyentasiyalanmayan ikiölçülü çoxobrazlılar.

Oriyentasiya anlayışını bazis vektorların köməyi ilə müəyyən etmişdir.Lakin oriyentasiya anlayışı sırf topoloji termindir.Çoxobrazlının oriyentasiyasını müəyyən etmək üçün onun hər hansı k şəbəkəli ayrılışına baxaq. Əvvəlcə hər hansı şəbəkəni oriyentasiyalaq. Fərz edək ki X-in şəbəkəli ayrılışında hər hansı bir şəbəkəni götürmüşük. F şəbəkəsini oriyentasiyalamaq üçün onun tərəflərini oriyentasiyalayaq. AB tərəfi o zaman oriyentasiyalanmış hesab olunur ki, onun hansı təpə nöqtənin birinci, hansının ikinci olması məlum olsun.(ŞƏKİL)
$AB \Rightarrow A-\mathrm{I}; B-\mathrm{II}$ və $BA \Rightarrow B-\mathrm{I}; A-\mathrm{II}$. kimi müəyyən etsək tərəf oriyentasiyalanmış hesab olunacaqdır. Deməli hər bir tərəfi 2 cür oriyentasiyalamaq olar.Şəbəkənin tərəflərinin birini oriyentasiyaladıqdan sonra bütün şəbəkəni oriyentasiyalamaq olar. Bunun üçün AB tərəfinin hər hansı bir oriyentasiyasını götürürlər. AB-nin II təpə nöqtəsini bununla ortaq təpəyə malik olan o biri tərəf üçün üçün birinci təpə götürürlər və prosesi bu qaydada davam etdirirlər. Aydındır ki hər bir şəbəkəni bu qaydada 2 cür oriyentasiyalamaq olar. F_1 şəbəkəsini oriyetasiyaladıqdan sonra kimi işarə olunur. F_1 şəbəkəsi ilə bir tərəf üzrə qonşu olan şəbəkəni oriyentasiyalayaq. F_2-ni elə oriyentasiyalayaq ki, ortaq tərəf F_1-də bir cür oriyentasiya, F_2-də isə bunun əksi olan oriyentasiyalansın. Deməli, 2 qonşu şəbəkə o zaman eyni oriyentasiyalanmış hesab olunur ki,onların ortaq tərəfi bu oriyentasiya zamanı müxtəlif cür oriyentasiyalanmış olsun. Bütün şəbəkələr oriyentasiyalandıqdan sonra 2 hal ola bilər.
1.Çoxobrazlının bütün şəbəkələri eyni oriyentasiyalana bilər.
2.Çoxobrazlının elə iki qonşu şəbəkəsi tapılar ki,onların ortaq tərəflərini eyni oriyentasiyalamaq mümkün olmur. $F_1, F_2, ..., F_k$

I halda çoxobrazlı oriyentasiyalanan,II halda isə oriyentasiyalanmayan adlanır.

Göstərmək olar ki, çoxobrazlının oriyentasiyalanan olması və ya olmaması onun şəbəkəli ayrılışından asılı deyildir. Doğurdan da fərz edək (X,τ) 2 ölçülü topoloji çoxobrazlıdır.Bunun k şəbəkəli ayrılışını götürək. $f:(X,\tau)\to(Y,\tau)$ homeomorf inikasına baxaq.Göstərək ki,əgər X - oriyentasiyalanandırsa,Y-də oriyentasiyalanandır.X-oriyentasiyalanan deyilsə onda Y-də oriyentasiyalanan deyil. X-in k şəbəkəli ayrılışında, $F_1, F_2, ..., F_s$ şəbəkələri ayrılır.f inikası zamanı $f(F_i)=E_i \in Y$ şəbəkələrinə şevirən inikas homeomorf olduğundan F_i-nin təpələri,tərəfləri, E_i-nin təpələrinə və tərəflərinə inikas olunur.Deməli, F_i-nin oriyentasiyaları E_i-nin oriyentasiyasını müəyyən edir.

Məsələn: $F_i=(A_i, B_i, C_i, D_i)$ kimi şəbəkədirsə,onda $E_i=(A_i, B_i, C_i, D_i)$ kimi şəbəkələrdən ibarət olacaqdır. O deməkdir ki, F_i oriyentasiyalanan olduqda E_i oriyentasiyalanan olur və əgər F_i oriyentasiyalanan deyilsə, E_i-də oriyentasiyalanan olmur.

Beləliklə çoxobrazlının oriyentasiyalanan olub-olmaması onun şəbəkəli ayrılışından asılı deyil.

İndi araşdiraq görək çoxobrazlının oriyenyasiyalanan olub-olmamasını necə müəyyən etmək olur?.Bunun üçün çoxobazlının hər hansı şəbəkəli ayrılışı götürülür. Sonra

$X = F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_s$ şəbəkələri ayrılır.Əvvəl F_i oriyentasiyalanır sonra bununla qonşu olan ortaq tərəfli F_2 və s. Bütün qonşu şəbəkələri bu qaydada oriyentasiyalayırlar. Nəticədə bütün şəbəkələr eyni oriyentasiyalana bilirlərsə, onda çoxobrazlı oriyentasiyalanan olur və bununla da onun oriyentasiyalanması qurtarır. Əgər, sonda bütün şəbəkələr eyni oriyentasiyalana bilmirsə, .yəni elə iki qonşu şəbəkə meydana çıxırki onları eyni oriyentasiyalamaq mümkün olmur,onda çoxbucaqlı oriyentasiyalana bilməyən çoxbucaqlı adlanır.

Məsələn:Tetraedrin oriyentasiyalanan olub-olmamasına baxaq.(ŞƏKİL)

Tetraedr səthi oriyetasiyalanan üçölçülü çoxbucaqlıdır.Tetraedrin sfera daxilinə çəkmək mümkün olduğundan sferanın mərkəzindən $f : S \to T \quad \forall M \in \rho \quad f(M) = M^1 = (OM) \cap T$ Belə inikasla sferanın və tetraedrin nöqtələri arasında topoloji qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaratmaq olur.(ŞƏKİL) Deməli; sfera səthi oriyentasiyalana bilən 2 ölçülü çoxobrazlıdır.

Göstərək ki,Möbius vərəqi səthi oriyentasiyalanan deyil.(ŞƏKİL)

Deməli,burada qonşu tərəf AB ilə DC hər iki şəbəkədə eyni oriyentasiyalanır.Deməli Möbius vərəqi oriyentasiyalanan deyil.

Mövzu 8.İki ölçülü çoxobrazlıların təsnifatı.

İki ölçülü çoxobrazlıların təsnifində, onlarıarın yuxarıdakı dediyimiz xarakteristikalarından istifadə olunur.

S(O,r) - O mərkəzli, r radiuslu sferadır. Bu sferanı $\rho(O,\sigma) < r$ şərtini ödəyən σ müstəvisilə kəsək Onda kəsikdə kiçik çevrə alınır, sfera səthi iki hissəyə parçalanar. σ müstəvisindən sferanın mərkəzi olan tərəfdəki nöqtələr çoxluğu, bu hissəyə (ŞƏKİL).sərhəddi γ çevrəsi olan biryuvalılı və ya birgözlü sfera deyirlər. Bu alınan sfera səthi dairə ilə homeomorfdur. Onun Eyler xarakteristikası $\chi(D) = 5 - 8 + 4 = 1$ olur. İndi sfera səthi üzərində $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_з$ müstəviləri ilə kəsərək seqment səthlərini kənar edək. Onda p yuvalı və ya p gözlü sfera səthi adlanır. Deməli, aldığımız nöqtələr çoxluğu sərhəddi $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_P$ çevrələri olan p yuvalı sfera səthidir.Əgər sfera səthi üzərində iki yuva açsaq, belə səth tor səthi ilə homeomorf olar.(ŞƏKİL). Göstərmək olar ki, sfera səthi üzərindəki hər yuva alınan çoxobrazlının Eyler xarakteristikalarını bir vahid azaldır.Əgər sfera səthi üzərində p sayda yuva açılarsa, onda $\chi(S_з) = 2 - p$ olar. İndi məsələni belə qoyaq. Fərz edək ki, sfera səthi üzərində iki p sayda yuva açılmışdır. Məlumdur ki, silindrin səthi sərhəddi γ_1 və γ_2 olan ikiölçülü çoxobrazlıdır. Əgər iki yuvalı sfera səthi.bir yuvalı dairə ilə homeomorfdur.(Şəkil)

Deməli, sfera üzərində hər bir cüt yuvaya bir əlcək eyniləşdirməklə çox əlcəkli sfera səthini almaq olar. Yuxarıda qeyd etdik ki, cfera səthi üzərində 2p sayda yuva açaq və hər bir yuva ilə bir əlcəyi eyniləşdirsək, onda p əlcəkli sfera səthi alarıq. p əlcəkli sfera səthinin xarakteristikası $\chi(Q_{2p}) = 2 - 2p$ olur.(Şəkillər)

Bu qayda ilə sfera üzərində 2p sayda əlcək açmaq olar.

Sfera səthi üzərində 2p sayda göz açıb, hər cüt gözlə bir əlcək eyniləşdirsək, onda p əlcəkli sfera səthi alarıq. p əlcəkli sfera səthinin Eyler xarakteristikası 2-2p-dir. p əlcəkli sfera sərhəddi olmayan kompakt ikiölçülü çoxobrazlıdır.İndi sfera səhi üzərində 2p-q sayda göz açaq.Onun xarakteristikası $\chi(Q_{2p+q}) = 2 - 2p - q$. 2p sayda gözə p sayda əlcək eyniləşdirsək, onda p əlcəkli q sərhədli kompakt çoxobrazlı alarıq. Bu onu göstırir ki, sərhəddi olmayan iki ölçülü kompakt çoxobrazlılar müəyyənləşdirən $\overline{a_{p,0}}$ tipli çoxobrazlı ilə homeomorf olar. $\chi(\overline{Q}_{p,0}) = 2-2p$

p=0 olduqda adi sfera səthi alınır. p=1 tor səthi alınır. p əlcəkli q sərhədli sfera səthini $\overline{Q}_{p,q}$-lə işarə edək. $\chi(\overline{Q}_{p,q}) = 2-2p-q$ .Yəni müəyyən etmək olar ki, sərhəddi olan hər bir kompakt çoxobrazlı q-nün müxtəlif qiymətlərində $\overline{Q}_{p,q}$ ilə homeomorf olar. Burada p onun cinsi və ya tipi, q isə sərhədlərinin sayıdır.p=q=0 olduqda sfera səthi alınır.p=0,q=1 olduqda bu gözlü sfera səthidir, bu da dairə ilə homeomorfdur.

Bu qaydada oriyentasiyalanan çoxobrazlılar tipləşdirmək olar.Yuxrıdakı metodikadan istifadə edərək oriyentasiyalamayan çoxobrazlıları da tipləşdirmək mümkündür .Belə çoxobrazlıların bəzi formalarını verək.

Sfera səthi üzərində bir göz açıb onun sərhəddini γ –lə işarə edək. Məlumdur ki Möbius vərəqinin sərhəddi qapalı əyridir.Hər bir qapalı əyri çevrə ilə homeomorfdur. Deməli, sfera səthi üzərindəki γ sərhəddini Möbius vərəqinin sərhəddi ilə eyniləşdiririk və ya kleyləyirik.(ŞƏKİL) Bu zaman alına çoxobrazlı oriyentasiyalanmayan olur və $\chi(\psi_1) = 2-1 = 1$ olur.İndi sfera səthi üzərində p sayda göz açaq.Həq gözə Mobius vərəqinin sərhəddini eyniləşdirək.Onda ψ_p oriyantasiyalanmayan p Möbius vərəqli sfera səthi alarıq. $\chi(\psi_p) = 2-p$. İndi sfera üzərində p+1 sayda göz açaq .Onda Q_{p+1} p+1 sayda yuvalı sfera səthi alarıq .Bu sfera səthinin p sayda yuasının sərhəddinə Möbius vərəqini eyniləşdirək, onda bu çoxobrazlının Eyler xarakteridtikası $\chi(\psi_{p+1}) = 1-p$ olur. Beləliklə aşağıdakı nəticəyə gəlirik. Oriyentasiyalanmayan hər bir iki ölçülü çoxobrazlı $\psi_1, \psi_2, \psi_3, ..., \psi_p, ...$ p-nin müxtəlf qiymətlərində ψ_{p+1} ilə homeomorfdur.

Mövzu 9.Möbius vərəqinin və proyektiv müstəvisinin topoloji xassələri.

Əvvəlcə Möbius vərəqini topoloji xassələrinə baxaq.Məludur ki,Möbius vərəqi düzbucaqlının qarşı tərəflərinin tərs qaydada eyniləşdirilməsindən alınır. Möbius vərəqinin sərhəddi qapalı əyridir və çevrə ilə homeomorfdur. Möbius vərəqinin oriyentasiyalanan olub-olmamasını araşdıraq.

Silindir səthini rənglədikdə və bir üz qurtardıqda içəri səthi rənglənməmiş qalır.Yəni silindir səthi iki üzlü səthdir. Möbius vərəqinin bir tərəfindən rəngləməyə başladıqda sonda hər tərəf rənglənmiş olur. Deməli Möbius vərəqi bir üzlü səthdir.

İndi silindir səthini orta xətt boyunca kəsək. Onda iki dənə silindir səthinə parçalanar. Bu işi Möbius vərəqi üzərində gördükdə rabitəli səth alınır. Lakin silindir səthi belə deyil. Bu xassələr Möbius vərəqinə xas olan topoloji xassələrdir.

İndi proyektiv müstəvinin topoloji xassələrini müəyyənləşdirək.Onun bəzi modelləri vardır. İndi sferanın köməyilə verilən başqa bir modelinə baxaq.

Mərkəzi O nöqtəsi olan yarımsfera; O mərkəzli düz xəttlər dəstəsinə baxaq. $L(O) = \{d_1, d_2, .../O \in d_i\}$ Bu düz xəttlər bağlısının düz xəttlərinin bəziləri yarımsferanın yeganə nöqtədə kəsir. Q müstəvisi üzərində olan düz xəttlər isə onu $K, K^1; L, L^1$ kimi 2 diametral əks nöqtələrdə kəsir. Əgər bu diametral əks nöqtələri bir nöqtə kimim götürsək, $(K, K^1) = \overline{K}$; $(A, B) = \overline{A}; (L, L^1) = \overline{L}$ olar.
(ŞƏKİL)

Onda proyektiv müstəvinin yeni modelini almış olarıq. Bu modeldə proyektiv müstəviyə baxaq. Sferanın mərkəzi və $X, Y(X \neq Y)$ nöqtələrindən yeganə müstəvi keçirmək olar. $\pi = (O, X, Y)$ Bu müstəvi sferanı yarımşevrə boyunca kəsər. (ŞƏKİL)

Başqa bir yarımçevrə götürək. γ yarımçevrənin λ üzərindəki G və G^1 nöqtələri diametral əks nöqtələrdir. $(G, G^1) = \overline{G}$. Onda γ qapalı əyridir. $T, T^1 \in Q$ $(T, T^1) = \overline{T}$

Odur ki, γ_1–də qapalı əyridir. Deməli,proyektiv müstəvidə γ_1 və γ düz xəttləri ifadə edir.Əgər γ_1-i öz üzərində hərəkət etdirəcək X-i Y-in üzərinə salsaq onda γ -ni kəsmədən bu yerinə yetirilə bilər.

Deməli,proyektiv müstəvini hər hansı düz xətt boyunca kəsdikdə o rabitəsiz oblastlara bölünmür. Lakin Evklid müstəvisi belə deyil. Evklid müstəvisində müstəvini hər hansı düz xətt vasitəsilə rabitəsiz iki yarımmüstəviyə ayırmaq mümkündür.

Beləliklə alırıq ki:

1.Proyektiv müstəvi sərhəddi olmayan iki ölçülü kompakt çoxobrazlıdır və proyektiv müstəvi çevrə ilə homeomorfdur.

2.Proyektiv müstəvini hər hansı düz xətt boyunca kəsdikdə o rabitəsiz oblastlara bölünmür.

İndi göstərək ki,proyektiv müstəvi oriyentasiyalanmayandır. Bunun üçün onu (MNF) və (PQE) müstəviləri ilə kəsək.Bu zaman alınmış MNEFQP səthi düzbucaqlı ilə homeomorf olar.M və P,N və Q nöqtələrini elə seçmək olar ki, onlar diametral əks nöqtələr olsun. (ŞƏKİL)

MNQP əyrixətli dördbucaqlısının qarşı tərəflərini elə eyniləşdirək ki, $\overline{MN} \equiv \overline{QP}$ yəni $M \equiv Q, N \equiv P$ eyniləşsin.

QBP və MAN qövslərdə göstərilən istiqamətdə eyniləşdirək onda bir Möbius vərəqli sfera səthi alınır.

Deməli,proyektiv müstəvi bu Möbius vərəqli sfera səthidir. Onun Eyler xarakteristikası $\chi(P_2) = 2 - 1 = 1$ .Bu onu göstərir ki,proyektiv müstəvi oriyentasiyalanmayandır.

Mövzu 10.Qabarıq fiqurlar və qabarıq çoxüzlülər.

Qabarıq fiqurlara tərif vermək üçün adətən birinci qabarıq çoxluqlara tərif verilir. Qabarıq çoxbucaqlılar elə fiqurlara deyilir ki,çoxluğun müxtəlif iki nöqtəsi ilə birlikdə həmin nöqtələri birləşdirən bütün düz xətt parçaları da çoxluğa daxil olur. Bu nöqteyi nəzərdən həqiqi ədədlər çoxluğu qabarıq deyil. Müstəvi üçbucağın nöqtələri çoxluğu , silindirin daxili nöqtələri çoxluğu, kosinusun daxili nöqtələri çoxluğu və s.qabarıq çoxluqlqrdır.

Qabarıq çoxluqlara bəzən qabarıq cisim də deyilir. Cisimlərin sərhəddinə qabarıq çoxluq səthidə deyilir. Məsələn: meyvənin, yer kürəsinin, qüllənin səthi və s. bu səthlərin içərisində öz müxtəlifliyi ilə və fərqli xüsusiyyətləri ilə fərqlənənləri var. Qabarıq fiqurun səthinə qabarıq cisimlər deyilir. Deməli,qabarıq fiqur qabarıq cisimlər səthi kimi başa düşülür. Məsələn:gəminin su altında qalan hissəsi, kürə səthi, silindirin yan səthi, konusun yan səthi və s.

Göstərmək olar ki,qabarıq səthlər haqqında aşağıdakı təkliflər doğrudur.

Təklif 1. F qabarıq fiqur, $S \notin F$ hər hansı nöqtə olarsa, $\Phi = \{[SM] M \in F\}$ onda qabarıq fiqur olur. (ŞƏKİL)

Bunu isbst edəndə nəzərə alınır ki, $[SM]$ Parçası qabarıq fiqurdur.F isə qabarıq fiqurların xüsusi qaydada birləşməsi ilə alınmışdır.

Məsələn:Konusun oturacağı ellips və ya dairə, təpəsi S olarsa,qabarıq fiqur əmələ gəlir.

Təklif 2..F qabarıq fiqur $M \in F$,$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{P}$ $\overrightarrow{P} \not\subset F$ olduqda $\Phi = \{[MM'], \overline{MM'} = p, M \in F\}$ olarsa, belə F fiquru qabarıq fiqurdur.

Məsələn:Silindirin alt oturacağı dairə isə onun tilinin müəyyən etdiyi vektor p olduqda təklif 2-yə görə silindirin daxili nöqtələri çoxluğu qabarıq fiqur əmələ gətirir.

İndi **qabarıq çoxüzlülərə** baxaq. Səthi sonlu sayda çoxbucaqlılardan ibarət olan $(F_1, F_2, ..., F_K)$ nöqtələr çoxluğu aşağıdakı iki şərti ödədikdə çoxüzlü adlanır.

1. $F_1 \cup F_2 \cup ..... \cup F_K$ şoxüzlü səthi əmələ gətirsin,
2. $F_i \cup F_j$ nöqtə, yəni təpə, ya tərəf,yəni tərəf (ortaq til) və yaxud boş çoxluq.

Belə şərt ödəndikdə deyirlər ki, səthi çoxüzlü səth olan fiqur alınmışdır.

Məsələn,:tetraedrin səthi, prizmaların səthi, silindirin səthi və s. $F_1 = AA_1B_1B$ (ŞƏKİL)

Eyler isbat etmişdir ki,qabarıq çoxüzlülər üçün təpə, til və üzlərin arasında xüsusi münasibət vardır. Həmin münasibət təpələrin sayı α_0 ,tillərin sayı α_1, üzlərin sayı α_2 olduqda $\chi(\phi) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2$ olur. Bunu bəzən teorem şəklində də söyləmək olur.

Teorem:.Qabarıq çoxüzlünün hər bir üzü qabarıq olduqda onun təpələrinin və tillərinin sayı tərəflərinin sayından iki vahid artıq olur.

Bu teoremdən istifadə edərək Eyler isbat etmişdir ki, ixtiyari sadə çoxüzlülərin Eyler xarakteristikası ikiyə bərabərdir. Bu zaman çoxüzlülər elə çoxbucaqlılara ayrılır ki, həmin çoxüzlü səthin örtüyü həmin çoxbucaqlılar olsun və çoxbucaqlıların ortaq daxili nöqtələri olmasın. Eyler teoremindən istifadə edərək göstərmək olar ki, aşağıdakı təkliflər doğrudur:

1.Qabarıq çoxüzlü sadədir.

2.Qabarıq çoxüzlünün bütün nöqtələri bir yarım fəzada yerləşir.

3.Çoxüzlünün nöqtələri yalnız bir yarım fəzada yerləşirsə, onda bu çoxüzlü qabarıq çoxüzlüdür(Bu təklif zəruridir, kafi deyil).

Mövzu 11.Düzgün və topoloji düzgün çoxüzlülər.

Çoxüzlünün bütün üzləri bir-birinə bərabər çoxbucaqlılardan ibarətdirsə,onda belə çoxüzlü düzgün çoxüzlü adlanır.Belə çoxüzlülər bəzən Evklid çoxüzlülər və ya metrik düzgün çoxüzlülər adlanır.

Tərif:İki çoxüzlünün uyğun üzlərindəki təpələrin sayı və uyğun təpələrdəki tillərin sayı eyni olarsa,onda belə çoxüzlülər topoloji ekvivalent çoxüzlülər adlanır.

Topoloji ekvivalent çoxüzlülər içərisində elələrinə rast gəlmək olur ki,bütün üzləri eyni sayda təpələrdən,bütün çoxüzlü bucaqları eyni sayda müstəvi bucaqlardan əmələ gəlmiş olur.Belə topoloji ekvivolent çoxüzlülərə topoloji düzgün çoxüzlülər deyilir.Bütün üzləri eyni sayda təpələrdən,bütün tilləri eyni sayda üzlərdən əmələ gələn çoxüzlüyə topoloji düzgün çoxüzlü deyilir.

Məsələn:

1) Kubun üzləri dördbucaqlılardır.Deməli bütün üzlərində 4 təpə var.Bütün təpələrdən 3 til çıxır.Ona görə də kub,prizma bir-biri ilə topoloji ekvivolent olur.

2) Üçbucaqlı pramidanın bütün üzləri üçbucaqlardan ibarətdir hər təpədən üç til çıxır.(ŞƏKİL)

Topoloji düzgün çoxüzlüdə bütün tillərin uzunluqları və müstəvi bucaqları bərabər olarsa,Evklid mənada düzgün çoxüzlü adlanır.Çoxüzlülər haqqında teoremdən istifadə edərək onların tiplərini müəyyən etmək olar.Məlumdur ki,çoxüzlü haqqında Eyler teoremi tələb edir ki,çoxüzlünün təpələri və üzləri sayının cəmi onun tilləri sayından 2 vahid artıq olmalıdır.Eyler teoremi α_0-təpələrinin sayı, α_1 – tillərin sayı, α_2 – üzlərin sayı olduqda

$\chi(F)=\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2=2$ kimi ifadə olunur.İndi topoloji düzgün çoxüzlülərin tiplərini müəyyən edək.
Fərz edək F düzğün topoloji çoxüzlüsündə onun hər üzündəki təpələrin sayı S_1 hər çoxüzlü bucaqların sayı n olsun.

Hər üzündəki təhələrin sayı S olduğundan onda α_2 sayda üzdə $\alpha_2\cdot S$ sayda təpə olar və yaxud hər üzündə S sayda til olduğundan bütün tüllərin sayı $\alpha_2\cdot S$ olar. Lakin eyni til eyni üzün üzərində yerləşdiyindən 2 dəfə hesablanır. Deməli, tillərin sayı $X_1=\frac{\alpha_2\cdot S}{2}$ olur. Hər təpədən n sayda til çıxdığından α_0 sayda təpədən $\alpha_0\cdot n$ sayda til çıxar. Lakin hər til 2 təpəni birləşdirdiyindən $\alpha_1=\frac{\alpha_0\cdot n}{2}$

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1&=\frac{\alpha_{2.}S}{2}\\ \alpha_1&=\frac{\alpha_0\cdot n}{2}\end{aligned}\right]\Rightarrow\quad \left.\begin{aligned}\alpha_2&=\frac{2\alpha_1}{S}\\ \alpha_0&=\frac{2\alpha_1}{n}\end{aligned}\right]\frac{2\alpha_1}{n}-\alpha+\frac{2\alpha_1}{S}=2\qquad \begin{aligned}\frac{1}{n}-\frac{1}{2}+\frac{1}{S}&=\frac{1}{\alpha_1}\\ \frac{1}{n}+\frac{1}{S}&=\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha_1}\end{aligned}$$

Sıradan görünür ki, $\frac{1}{n}+\frac{1}{S}>\frac{1}{2}(**)$ .Məlmdur ki,ən kiçik sayda təpələri olan çoxbucaqlı üçbucaqdır. Deməli; $S\geq 3$.Eləcədə çoxüzlü bucağı ən kiçik sayda üzlərin sayı 3 ola bilər $n\geq 3$?.
(**)-dən istifadə etsək. $S\geq 3\Rightarrow n\leq 6,\quad n\geq 3\Rightarrow S\leq 6$
Deməi, s və n $3\leq s\leq 6,\quad 3\leq n\leq 6$ kimi dəyişir.

Beləliklə düzgün çoxüzlünün tilləri aşağıdakı kimi olar. (ŞƏKİL)
(**)-dan göstərmək olar ki, n=s=3,4,5,6 qiymətlərindən yalnız n=3 olduqda bərabərsizlik doğru olur.

1)n=s=3 olduqda. $(*)\Rightarrow\frac{1}{n}=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\rightarrow\alpha_1=6,\alpha_0=\varphi,\alpha_2=\varphi$ Üçbucaqlı piramida(ŞƏKİL)

2)n=3,s=4
$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}>\frac{1}{2},\quad \frac{1}{\alpha_1}=\frac{7}{12}-\frac{1}{2}=\frac{1}{12}\qquad \alpha_1=12,\alpha_2=8,\alpha_0=6.$ Oktaedr (ŞƏKİL)

3)n=3,s=5 , $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{8}{15}>\frac{1}{2},\quad \alpha_1=30,\alpha_0=12,\alpha_2=20.$ İkosaedr .(ŞƏKİL)

4)n=3,s=6 $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}>\frac{1}{2},$ 5)n=5,S=3 . Dodekaedr.(ŞƏKİL)

Beləliklə, isbat etmiş oluruq ki, topoloji düzgün çoxüzlülərin sayı 5-dir. Bunlara uyğun olaraq metrik düzgün çoxüzlülərin sayı da 5-dir. Bu çoxüzlülərin hər birini düzbucaqlı Dekart koordinat sistemində qurmaq, onun səthinin açılışını almaq mümkündür.

İndi düzgün çoxüzlülərin simmetriya elementləri ilə tanış olaq.

Fərz edək ki, F hər hansıçoxüzlüdür. F çoxüzlünü öz-özünə çevirən çevrilmələrə baxaq.Yəni elə çevrilmələrə ki, f(F)=F olsun. F çoxüzlüsünü öz-özünə çevirən çevirmələr çoxluğunu D_F –lə işarə edək, yəni $D_F=\{f_1, f_2,..., f_k,..., g, h,...\}$ F çoxüzlüsünü öz-özünə çevirən çevirmələr çevirmələr çoxluğudur. D_F-ə bəzən F çoxüzlüsünün simmetriya elementləri çoxluğu da deyiirl. Çoxüzlünün simmetriya elementləri hansılardır?

Məsələn: Düzgün üçbucaq götürək. Bu üçbucağın hündürlüyünü ətrafında 180^0 döndərməklə üçbucaq özü ilə üst-üstə düşür. Eləcə də bərabərtərəfli üçbucağın medianlarının kəsişmə nöqtəsi ağırlıq mərkəzi olarsa, bu üçbucağın O mərkəzindən 120^0,240^0,360^0 dərəcə döndərməklə öz-özünün üzərinə salmaq olar. Deməli, adi çəkilən ÇEVRİLMƏLƏR simmetriya ementləridir . Çoxüzlünün simmetruya elementləri necə təyin olunur?

Çoxüzlünün 4 simmetriya elementi vardır.

1.O nöqtəsinə nəzərən F çoxüzlüsünün simmetriya çevrilməsi zamanı çoxüzlü çevirsək öz üzərinə düşərsə, onda F çoxüzlüsünə O nöqtəsinə nəzərən simmetrik çoxüzlü deyilir və O nöqtəsinə simmetriya mərkəzi adlanır.

Deməli, çoxüzlünün I növ simmetriya çevrilməsi-mərkəzi və ya nötəyə nəzərən simmetriyadır.

Məsələn:1- kub,2- paralelopipedlər dioqonalların kəsişmə nöqtəsinə nəzərən simmetrikdir.3-İkosaedr üçün elə bir nöqtə var ki, o həmin nöqtəyə nəzərən simmetrikdir.

2. F fiqurunu σ müstəvisinə nəzərən əks etdirildikdə öz üzərinə düşürsə, σ müstəvisinə F fiqurunun simmetriya müstəvisi adlanır. σ –ya simmetriya müstəvisi deyilir.

Deməli müstəviyə nəzərən simmetriya çoxüzlünün simmetriya elelmentlərindən biridir.

Məsələn:kvadratın dioqonallarından keçən müstəvi onun simmetriya müstəvisidir.

3. d düz xətti F çoxüzlüsünün n tərtibdən simmetriya düz xətləri adlanır o zaman ki, d düz xətti ətrafında F-i $\frac{2\pi}{n}$ bucağı qədər döndərdikdə özünün üzərinə düşür.

Məsələn: tetraedrin təpəsindən və qarşı üzünün ağırlıq mərkəzindən keçən düz xətt üç tətibdən simmetriya oxudur. Çünki, (SO) düz xətti ətrafında 120^0 döndərdikdə tetraedr öz üzərinə düşür. (ŞƏKİL)

Deməli, düz xətt ətrafında n-inci tərtibdən dönmə çevrilməsi çoxüzlünün simmetriya elementinə daxildir.

4. Dönməli simmetriya çevrilməsi belə başa düşülür. F fiquru hər hansı düz xətt ətrafında $\alpha = \frac{\pi}{n}$ bucağı qədər dönməklə yanaşı bu düzxəttə perpendikulyar müstəviyə nəzərən simmetrya çevrilməsində iştirak edir. Bu zaman d düz xətti F fiqurunun dönməli simmetriya düz xətti adlanır. F fiquru d düz xətti ətrafında $\alpha = \frac{\pi}{n}$ bucağı qədər dönməklə ona nəzərən simmetriya qədər iştirak edərsə və bu zaman öz üzərinə düşürsə fiqurun belə çevrilməsi dönməli simmetriya çevrilməsi adlanır.

Beləliklə, D_F çoxluğu eyniyyət çevrilməsi, mərkəzi simmetriya, müstəviyə nəzərən simmetriya, düz xəttə nəzərən simmetriya və dönmlyə simmetriyaya çevrilmələrindən ibarətdir. Bu adlarını çəkdiklərimiz çevrilmələr çoxüzlünün simmetriya elementləri adlanır. Əgər D_F-də yalnız eyniyyət çevrilməsi varsa və eyniyyət çevrilməsindən fərqli heç bir çevrilmə yoxsa, onda F fiquru qeyri-simmetrik adlanır. Əgər D_F -də eyniyyət çevrilməsindən fərqli çevrilmə varsa, onda çoxüzlü simmetrik çoxüzlü adlanır. Düzgün çoxüzlünün simmetriya elemntlərinin aşağıdakı xassələri vardır:

1. F düzgün çoxüzlüsündə O mərkəzdirsə, onda burada mərkəzi simmetriya vardır. $O : \forall D_F \in f, f(O) = O$

F düzgün çoxüzlüsünün ixtiyari simmetriya çevrilməsi zamanı O mərkəzi invariant qalır. Doğurdan da düzgün çoxüzlünün xaricinə çəkilmiş S(O,r) sferası O mərkəzinə nəzərən simmetrikdir. Deməli sferanın mərkəzi həmdə düzgün çoxüzlünün mərkəzi olar. Əks halada ziddiyyət alınardı.

2. Düzgün çoxüzlünün simmetriya mərkəzi varsa, onun bütün elementlərini O mərkəzini üzərində saxlayır.Doğurdana da düzgün çoxüzlünün simmetriya elementləri mərkəzli simmetriya və müstəviyə nəzərən simmetriyadır. Mərkəzli simmetriya mərkəzinə görə müstəviyə nəzərən simmetriya müstəviyə görə aparılır.

Fərz edək ki,d n-ci tərtibdən simmetriya elementidir, onda $f \in D_F$

$f(d) = d$ olar. $f(O) = O \Rightarrow O \in d$

3.Düzgün çoxüzlülərin bütün simmetrik çevrilmələri zamanı $\forall f \in D_F$ olduqda,yəni $f(F)=F$, $f(O)=O$ tərpənməz qalır.
Düzgün çoxüzlülərin simmetriya elementləri dedikdə mərkəzi simmetriya müstəviyə nəzərən simmetriya,d düz xəttləri ətrafında n tərtibdən dönmə simmetriyası (dönmə bucağı $\varphi = \frac{2\pi}{n}$)və güzgüvari simmetriya çevrilməsidir.
Axırıncı çevrilmə d düz xəttləri ətrafında 2n tərtibdən ($\varphi = \frac{2\pi}{2n}$) dönmə çevrilməsi və d düz xəttinə perpendikulyar olan müstəviyə nəzərən simmetrik çevrilmələr hasilinə bərabərdir.Bu çevrilmələrin hər biri düzgün çoxüzlülərin simmetriya elemenləri çoxluğuna daxildir.
Düzgün çoxüzlünün simmetriya elementlərinin sayı haqqında aşağıdakı teorem vardır:
Teorem:F düzgün çoxüzlüsünün çoxüzlü bucaqlarındakı müstəvi bucaqlarının sayını 2 misli onun simmetrya elemntlərinin sayının göstərir.Başqa sözlə,düzgün çoxüzlünün simmetriya elementlərinin sayı onun təpədəki bütün müstəvi bucaqlarının iki misli qədərdir.
Düzgün çoxüzlüləri tipləşdirən zaman qeyd eləmişdik ki,hər çoxüzlü bucaqda 3 sayda müstəvi bucaq vardır,təpələrin sayı α_0 isə bütün müstəvi bucaqlarının sayı α_0 S-dir.D_F-in elementlərin sayı $2\alpha_0$ S- dir.
Fərz edək təpələrin birindəki müstəvi bucaq $\angle ABC$ -dir.Çoxüzlü düzgün olduğuna görə onun bütün müstəvi bucaqları bir-birinə bərabərdir.Yəni başqa bir təpədəki bucaq $\angle A^1B^1C^1$ olarsa,onda birinci müstəvi bucağını ikinci müstəvi bucağına çevirən hərəkət çevrilməsi olacaqdır. Bu hərəkət çevrilməsi iki dənədir. $f_1(\angle ABC) = \angle A^1B^1C^1$, $f_2(\angle ABC) = \angle C^1B^1A^1$

$f_1 : [A \to A^1,\ B \to B^1,\ C \to C^1$ $\qquad$ $f : [A \to C^1,\ B \to B^1,\ C \to A^1$

Deməli hər bir müstəvi bucağına görə 2 hərəkət çevrilməsi vardır. Bütün müstəvi bucaqların sayı $\alpha_0 \cdot s$ S olduğuna görə(α_0 təpələrin sayı, s hər təpədəki müstəvi bucaqlarının sayıdır) D_F-in elementlərinin sayı $2\alpha_0 \cdot s$ olar. Bu qayda ilə teoremdən istifadə edərək istənilən çoxüzlünün simmetriya elemenləri sayını müəyyənləşdirmək olar.

Mövzu 12.Skalyar arqumentli vektor funksiya.

Fərz edək ki, J ədədi oblastdır. $t \in J$ həqiqi ədədlərdir. Fəzada $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k},)$ koordinanat sistemini götürək. $J \xrightarrow{\text{hom}} E_3$, $\forall t \in J$ $\quad f(t) = M(t) \in E_3$.

Əgər M-lə koordinat başlanğıcını birləşdirsək,onda $\overrightarrow{OM} = \vec{O}(t)$ alarıq. Deməli, F homeomorfizmin köməyilə skalyar arqumenli vektor funksiyalar almaq mümkündür. Məsələn: fizikada sürət, təcil və qüvvə - $\vec{\vartheta}, a, \vec{F}$ hamısı t skalyar arqumentindən asılıdırlar.

Səthlər xətlər nəzəriyyəsi skalyar arqumentli funksiyalarından istifadə olunur. Əvvəlcə $\vec{\vartheta}(t)$ funksiyası ilə tanış olaq. $|\vec{\vartheta}(t)|$ uzunluğu vektorun uzunluğu kimi təyin olunur. $|\vec{\vartheta}(t)|$ ədədi t-nin müəyyən qiymətində sonsuz kiçilən olarsa, onda $\vec{\vartheta}(t)$ sonsuz kiçilən vektor funksiyası adlanır. $\vec{a} = const$ sabit vektor olarsa, $|\vec{\vartheta}(t) - \vec{a}| \to 0$ olduqda $\lim\limits_{t\to 0} \vec{\vartheta}(t) = a$ olur.

Bu təriflərdən istifadə edərək $t=t_0$ nöqtəsində $\vec{\vartheta}(t)$ funksiyanın kəsilməzliyini vermək olar. Bir dəyişənli funksiyalarda olduğu kimi burada da $|t - t_0| \to 0$ olduqda

$\left|\vec{\vartheta}(t)-\vec{\vartheta}(t_0)\right| \to 0$ oolarsa, onda $\vec{\vartheta}(t)$ funksiyasına t=t_0 nöqtəsində kəsilməz funksiya adlanır və $\lim\limits_{t\to t_0}\vartheta(t)=\vartheta(t_0)$ kimi işarə olunur.

Fərz edək $\vec{\vartheta}(t)$ funksiyasına $t+\Delta t$ arqument artımı vermişik, onda vektor funksiyanın artımı $\vec{\vartheta}(t+\Delta t)-\vec{\vartheta}(t)=\Delta\vec{\vartheta}(t)$ olar. Əgər $\dfrac{\vec{\vartheta}(t+\Delta t)-\vec{\vartheta}(t)}{\Delta t}=\dfrac{\Delta\vec{\vartheta}(t)}{\Delta t}$ kəsri $\Delta t\to 0$ olduqda sonlu həqiqi, müəyyən qiymət alarsa, həmin qiymətə $\vec{\vartheta}(t)$ vektor funksiyasının t nöqtəsindəki törəməsi deyilir və belə işarş olunur:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\vartheta}(t)}{\Delta t}=\frac{d\vec{\vartheta}(t)}{dt}=\vec{\vartheta}'(t)$$

Təridən istifadə edərək aşağıdakıları göstərmək olar.

$1^0.\left[\vartheta(t)\pm w(t)\right]'=\vartheta'(t)\pm w'(t),$ $\qquad$ $2^0.\left[\vartheta(t)w(t)\right]'=\vartheta'(t)w(t)+\vartheta(t)w'(t)$

$3^0.\left[\vec{\vartheta}(t),\vec{w}(t)\right]'=\left[\vec{\vartheta}'(t),\vec{w}(t)\right]+\left[\vec{\vartheta}(t),\vec{w}'(t)\right]$

4^0.Əgər f=f(t) funksiyadırsa, $\left[f(t)\vec{\vartheta}(t)\right]'=f'(t)\vec{\vartheta}(t)+f(t)\vec{\vartheta}(t)$

Bu xassələrin hər birini 3 ölçülü fəzada bazis seçərək vektor funksiyanın ayrılışından istifadə edərək göstərmək olar. Əgər $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ koordinanat sistemi götürsək, $\vec{\vartheta}(t)$ funksiyası $\vec{\vartheta}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ olar. Burada $\vec{\vartheta}(t)(x(t),y(t),z(t))$ koordinantlardır.

Əgər t-yə artım versək, $\vec{\vartheta}(t+\Delta t)=x(t+\Delta t)\vec{i}+y(t+\Delta t)\vec{j}+z(t+\Delta t)\vec{k}$

$\Delta\vec{\vartheta}=\vec{\vartheta}(t+\Delta t)-\vec{\vartheta}(t)=\Delta x\vec{i}+\Delta y\vec{j}+\Delta z\vec{k}$ Əgər t-yə bölsək, $\dfrac{\Delta\vec{\vartheta}}{\Delta t}=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i}+\dfrac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j}+\dfrac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k}$

$\Delta t\to 0$ limitə keçsək, $\vec{\vartheta}'(t)=x'(t)\vec{i}+y'(t)\vec{j}+z'(t)\vec{k}$

Axırıncı münasibət göstərir ki, vektor funksiyanın diferensialının olması üçün onun koordinanatları olan skalyar funksiyaların hər biri diferensialının funksiyalar olmalıdır. Bunun tərsi də doğrudur x(t),y(t),z(t) finksiyalarının hər biri diferesiallanan olarsa, onda koordinanatları bu funksiyalar olan $\vec{\vartheta}(t)$ vektor funksiyası da diferensialının olar. Bundan istifadə edərək funksiyaların törəməsini ifadə edən yuxarıdakı 1^0-4^0 xassələrini göstərmək mümkündür.

Bu qayda ilə vektor funksiyaların II,III və.s. istənilən k tərtibdən törəmələrini almaq olar. Məlumdur ki, funksiyanın diferensialı ilə törəməsi arasında $df=f'dx$ kimi əlaqə vardır.

Vektor funksiyalara da bu qaydanı tətbiq etmək olar.Yəni,

$dx=x'dti,\ dy=y'dt\,j,\ dz=z'dtk$ olduğuna görə $d\vec{\vartheta}(t)=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}$ olar.

Bu münasibətdən istifadə edərək istənilən vektor funksiyanın diferensialını təyin etmək olar və vektor funksiyanın xassələrini almaq mümkündür. .Eləcə də II,III və.s. k tərtibdən diferensiallara baxmaq olar.

Skalyar arqumentli vektor funksiyanın bu xassələrindən istifadə edərək gələcəkdə əyrilərin xassələrini almaq mümkündür.

Mövzu 13.Fəzada əyri xətt anlayışı.

Adətən əyri təsəvvürünü yaradan müxtəlif obyektlər əyrini təsəvvür etməyə imkan verir. Məsələn:rəngli tüstü buraxan təyyarənin hərəkəti uzaqdan müşahidə edildikdə əyri anlayışı verir, qumlu səhrada həşəratların izləri coğrafi xəritələrdə müxtəlif cərəyanların hərəkət istiqamətini göstərən qrqfiklər əyri xətt verir və.s. Bunlar əyri haqqında ilkin təsəvvürləri yaradır.

Elementar əyri dedikdə, adətən, ya düz xətt, ya düz xətt parçası, ya da qapalı şüa başa düşülür.

Tərif: Elementar əyrinin 3 ölçülü Evklid fəzasına homeomorf təsvirinə **sadə əyri** deyilir.

Əgər $t \in z$ olarsa, onda alınmış inikas 3 ölçülü fəzada nöqtə verər. Bu zaman $f(t) = M(t)$ olur/ (ŞƏKİL)

Əgər $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t)$ olarsa, bu vektor-funksiya M nöqtəsinin **radius -vektoru** adlanır.Əlbəttə t dəyişdikcə M(t) əyrisi γ əyrisini əmələ gətirir. $\vec{r}(t)$ 3 ölçülü Evklid fəzasında verildiyindən fəza koordinat sistemində onun

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \quad (1)$$

ayrılışını yazmaq olar. Bu zaman $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ koordinatları adlanırlar

Nə zaman f inikası sadə əyri müəyyən edir? Əyrinin nöqtələrinə görə onu tpləşdirmək olar. Sonlu və ya hesabi sayda elementar əyrilərdən əmələ gələn nöqtələr çoxluğuna **əyri və ya əyri xətt** deyilir.

Əyri o zaman sadə əyri adlanır ki,onun bütün nöqtələri elə ətrafa malik olsun ki, bu ətraf düz xətlə və ya açıq intervalla homeomorf olsun. Belə nöqtələrə onun daxili nöqtələri deyilir.

Elementar əyrinin sərhəd nöqtələri elə nöqtələrə deyilir ki, bunun qapalı yarım interval ilə homeomorf olan ətrafı olsun. Həndəsədə adətən sadə əyrilər və elementar əyrilər öyrənilir.(ŞƏK)

Şəkildəki əyrinin M_0-dan başqa bütün nöqtələri sadə əyrinin nöqtələrini ödəyir. İstənilən ətrafı bu intervalla inikas oluna bilməz.

Sadə əyrilər məxsusi nöqtələrə malik olmayan əyrilərə deyilir.

Hamar əyri dedikdə elə əyrilər başa düşülür ki,onun hər bir nöqtəsinin radius -vektorunu **x(t),y(t),z(t)** koordinantlarının özləri və I,II,...,k-cı tərtib törəmələri kəsilməz olsun. Başqa sözlə, γ əyrisi o zaman k tərtib dən hamar əyri adlanır ki,onun radius vektorunun koordinantları olan x(t),y(t),z(t) həm özləri,həm də k-cə tərtibdən törəmələri kəsilməz olsunlar. Bu zaman $\gamma \in C^k$ (k-tam ədəd) belə yazırlar. Lazım gəldikdə k-cı tərtibdən hamarlıq şərti həm də $x'(t), y'(t), z'(t)$ funksiyalarının da hamıs eyni zamanda sıfır olmaması şərtini də daxilinə alır.

Beləliklə, nəticəyə gəlirik ki, γ əyrisinin k tərtibdən hamar olması üçün onun ixtiyari nöqtəsinin radius vektorunun özü və k-cı tərtibə qədər törəmələri kəsilməz olmaqla yanaşı $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$ olmalıdır. Əslində $\vec{r}\,'(t) \neq 0 \to rang(x'(t), y'(t), z'(t)) = 1$.Bu isə $(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 \neq 0$ deməkdir. Həndəsədə adətən,tələb olunan tərtibə qədər hamar əyrilər öyrənilir. Bəzən **hissə-hissə hamar əyrilərə** baxılır. Əyri o zaman hissə-hissə hamar əyri adlanır ki, onun hissələri hamar əyrilər olsun. Əgər hissələr k tərtibdən hamardırsa, onda əyri k tərtibdən hamar əyri adlanır. Hissələrin kəsişmə nöqtələrində bu şərt pozula bilər.

Fərz edək γ əyrisi $f(J)=\gamma$ inikası yaratmışdır.J ədədini oblastını hər hansı h oblastı ilə J' çevirmək olar. $h: J \to J'$.Əgər $t \in J, \tau \in J'$ onda $t=h(\tau)$ yəni $\vec{r}=\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ vektor funksiyasında t dəyişəni $h(\tau)$-la əvəz olunur. $\vec{r}=\vec{r}(t)=\vec{r}(h(\tau))=\vec{\tilde{r}}(\tau)$

Bu zamanbelə olar: $x(t)\to\tilde{x}(\tau),\quad y(t)\to\tilde{y}(\tau),\quad z(t)\to\tilde{z}(\tau)$

Fərz edək $x(t)=t^2+t+1,^2$.Yeni $t=\tau$ dəyişəninə keçsək, $\tilde{x}(\tau)=\tau^4+\tau^2+1$

$$\bar{r}(t)=\bar{r}'(h(\tau))=\frac{d\bar{r}}{dt}\frac{dt}{dt}=\frac{d\bar{r}}{dt}h'(\tau),\ x'(t)=x'(h(\tau))=\frac{dx}{dt}h'(\tau), y'(t)=\frac{dy}{dt}h'(\tau),\quad z'(t)=\frac{dz}{dt}h'(\tau)$$

Yəni bir dəyişəndən başqasına keçdikdə yeni funksiyanın törəməsi bütün funksiyaları dəyişir.Məlumdur ki, hələ Evklid 2300 il bundan əvvəl qeyd etmişdir ki,səthin sərhəddi əyridir.Lakin məlumdur ki,səth qeyri-məhdud nöqtələr çoxluğundan ibarətdir. Səthin kəsişməsi əyri üzrə yerinə yetirilir.

Məsələn: Sfera səthi ilə müstəvi böyük və ya kiçik çevrələr üzrə kəsişir. Deməli əyrini iki səthin kəsişməsi kimi vermək olar. $\begin{cases}\phi_1(x,y,z)=0\\ \phi_2(x,y,z)=0\end{cases}$ Əyri bu şəkildə verildikdə onun hamarlığı necə müəyyən edilir?

Qeyri-aşkar funksiyalar haqqında mövcud teoremə əsasən yuxarıdakı sisteminin hamar əyri ifadə etməsi üçün ϕ_1 və ϕ_2 funksiyaları dəyişənlərə nəzərən kəsilməz olmalı, xüsusi törəmələrə malik olmalı və $rang\begin{pmatrix}\frac{\partial\phi_1}{\partial x} & \frac{\partial\phi_1}{\partial y} & \frac{\partial\phi_1}{\partial z}\\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial\phi_2}{\partial y} & \frac{\partial\phi_2}{\partial z}\end{pmatrix}=2$ olmalıdır. Əgər bu şərt ödənilərsə,onda elə nöqtə var ki,bu nöqtənin yaxın ətrafında qeyri-aşkar funksiyaları həll edərək, $\begin{cases}y=f(x)\\ z=g(x)\end{cases}$ şəklinə gətirmək mümkündür.Əgər belədirsə onda x=t kimi qəbul etsək y=f(t),z=g(t) və $\vec{r}(t)=(t,f(t),g(t))$ olar.Yuxarıdakı matrisin rangının ikiyə bərabər olması şərti x,y,z dəyişənlərinin asılı olması şərti ilə ekvivolentdir

Mövzu 14.Əyrinin toxunan vektoru və toxunan düz xəttinin tənliyi.

Fərz edək, $\gamma\in C^k(k\ge 1)$ hamar əyrisi verilmişdir.Bunun hər hansı M nöqtəsində $M\in\gamma$ toxunan vektoru anlayışını verək. Əyrinin parametrik tənliyi aşağıdakı kimidir:

$$\bar{r}=\bar{r}(t)(1)\Rightarrow\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)(1')\\ z=z(t)\end{cases}\qquad \bar{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$$

Aydındır ki,M t-dən asılıdır.M-dən fərqli $t+\Delta t$ parametrinə uyğun $M(t+\Delta t)=M$,nöqtəsini götürək (MM_1) kəsəndir.Aydındır ki,əgər fəzada $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ koordinant sistemini götürsək bu koordinant sistemində $\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM_1}$ M və M_1-in radius vektorlarıdır.(ŞƏKİL)

Kəsənin istiqamətverici vektoru $\overrightarrow{MM_1}$ -i təyin edək. $\Delta OMM_1 \Rightarrow \overrightarrow{MM_1}=\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM}=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)=\Delta\vec{r}$ .Deməli, $\overrightarrow{MM_1}=\Delta\vec{r},\Delta t$ -yə bölsək $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t}$ alarıq.İndi əyri üzərində M_1 nöqtəsini M-ə yaxınlaşdıraq.Onda $\overrightarrow{MM_1}$ kəsəni M-in ətrafında fırlanaraq MT toxunan vəziyyətinə düşür. $M_1\to M$ olduqda $\overrightarrow{OM_1}\to\overrightarrow{OM}$ olur.Buradan alarıq: $\vec{r}(t+\Delta t)\to r(t)\Rightarrow\Delta t\to 0$.

Beləliklə $M_1\to M\Rightarrow\Delta t\to 0$.İndi görək kəsənin yönəldici vektoru bu zaman nəyə yaxınlaşır?

$\lim\limits_{\Delta t\neq 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\lim\limits_{M_1\to M}\frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t}$ (MT) toxunanının yönəldici vektoru $\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{r}'\Rightarrow(MT)=[M,\vec{r}']$.

Beləliklə, göstərmiş oluruq ki,aşağıdakı təklif doğrudur.Hamar əyrinin hər bir nöqtəsində onun toxunanı vardır.Bu toxunanın istiqamətverici vektoru radius vektorunun həmin nöqtədəki törəməsinə bərabərdir.Əgər t parametri əvəzinə $t=h(\tau)$ münasibətilə τ parametrinə keçsək, $\vec{r}=\vec{r}(t)=\vec{r}(h(\tau))$ alarıq. $\frac{d\vec{r}}{d\tau}=\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{d\tau}$ və ya $\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\vec{r}}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}$ yəni yeni parametrlər $\vec{r}$ -in törəməsi,köhnə parametrlər r-in törəmələri ilə kolleniardır. $\overrightarrow{r'_\tau}=\overrightarrow{r'_t}\frac{dt}{d\tau}$.

Parametrin dəyişəndən asılı olaraq toxunanın istiqamətverici vektoru dəyişmir.Parametr dəyişdikdə istiqamətverici vektoru bununla kolleniar olan vektora çevrilir.Əyrinin tənlikləri (1) kimi verilmişsə toxunan düz xəttin tənliyini aşağıdakı kimi yazmaq olar.

$(MT)=[M,r'],\ M_0(x_0,y_0,z_0)=(x(t_0),y(t_0),z(t_0)),\ \left.\frac{dr}{dt}\right|_{M_0}=x'(t)|_{t_0}i+y'(t)|_{t_0}j+z'(t)|_{t_0}k$

Onda düz xəttin tənliyi: $\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}$ şəklində olar.

Mövzu 15.Əyri qövsün uzunluğu və təbii parametr.

Fərz edək hamar əyri $\gamma\in C^k(k\geq 1)\vec{r}=\vec{r}(t)(1)$ tənliyi ilə verilmişdir. γ -nın üzərində M_1,M_2 kimi 2 nöqtə qeyd edək.(ŞƏKİL)

Məlumdur ki, qövsün uzunluğu aşağıdakı düsturla hesablanır

$$s=\int_z^t\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt$$

Buradan görünür ki, $s\neq 0, s>0,\ s=s(t)$

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}dt$$

burada s=s(t) funksiyası s(t)>0 artan funksiyalara əsasən funksiyanın varlıq oblastında onun tərs funksiyası olsun.s=s(t), t=t(s).

Deməli, s=s(t) funksiyasınında qövs uzunluğu həqiqi *t* parametrindən, t=t(s) isə s-dən asılı olur. Əgər t-nin bu ifadəsini (1)-də yerinə yazsaq.

$$\bar{r}=\bar{r}(t(s))=(x(t(s)),y(t(s)),z(t(s))) \qquad (2)$$

$$\begin{cases} x=x(t(s))=\tilde{x}(s) \\ y=y(t(s))=\tilde{y}(s) \\ z=z(t(s))=\tilde{z}(s) \end{cases} \qquad (2')$$

Qövsün uzunluğu parametr götürüldükdə ona təbii parametr deyilir.Yəni parametr əyrini özü ilə bilavasitə əlaqədardır.(2) və (2’) tənliklərinə əyrinin təbii parametrlə yazılmış tənlikləri deyilir.Əyrinin təbii parametrlərlə tənlikləri yazıldıqda bir çox hesab məsələləri asanlaşır. Bunu aşağıda görəcəyik.

Mövzu 16. Əyrinin əyriliyi və buruqluğu.

Fərz edək hər hansı γ əyrisi $\gamma\in C^k\,(k\geq 3)$ qövs uzunluğu parametrlə,yəni təbii parametrlə tənliyi verilmişdir.

$$d\,\bar{r}=\bar{r}(S) \qquad (1)$$

$\vec{r}=(x(s),y(s),z(s))$. Yuxarıda göstərdik ki, əgər t parametrilə götürsək, alarıq:

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}=\sqrt{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2}=\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| \qquad \frac{ds}{dt}=\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$$

s= t götürsək, onda $\frac{ds}{ds}=\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right|\Rightarrow\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right|=1$, yəni əyrinin radius vektorunun təbii parametrə görə törəməsi ort vektor verir. Əyrinin radius vektorunun birinci tərtib törəməsi onun toxunan düz xəttinin yönəldəci vektorunu verir. İndi də alırıq ki, (Şəkil)

$$\frac{d\vec{r}}{ds}=\vec{\tau} \qquad (2)$$

toxunan ort vektor adlanır. $\vec{\tau}^{\,2}=1$ $\vec{\tau}$ vektoruna M nöqtəsində əyrinin toxunan **ort vektor**u deyilir. $\vec{\tau}^{\,2}=1$-in s-ə görə törəməsini alaq.

$$\frac{d}{ds}\left(\vec{\tau}^{\,2}\right)=\frac{d1}{ds}=0 \quad 2\vec{\tau}\frac{d\vec{\tau}}{ds}=0\Rightarrow\vec{\tau}\perp\frac{d\vec{\tau}}{ds}$$

$\frac{d\vec{\tau}}{ds}=\vec{N}$ işarə olunarsa, $\vec{N}$ vektoru $\vec{\tau}$ vektoruna ortoqonaldır. Adətən toxunan vektora ortoqonal olan vektor normal vektor adlanır. Odur ki, $\overrightarrow{N}$ -ə **əyrinin baş normal vektoru** deyilir. $d_2=\left[M,\vec{N}\right]$ düz xəttinə **baş normal düz xətt**i deyilir. $\vec{N}$ -in uzunluğunu *k* ilə işarə edək

$\left|\vec{N}\right| = k$ k-ya əyrinin əyriliyi deyilir. $\frac{1}{k} = \rho$ -ya əyrinin əyrilik radiusu deyilir. $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \vec{N}$ və $\left|\vec{N}\right| = k \Rightarrow \frac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|} = \vec{\nu}$ $\vec{\nu}^2 = 1$ vektoru ortnormal vektor adlanır. $\vec{N} = k\vec{\nu}$. Onda

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{\nu} \qquad (3)$$

$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$ deməli baş normal vektor $d_2 = \left[M_{0,}\vec{\nu}\right]$ kimi yazıla bilər.

$$\frac{x - x_0}{\left.\frac{d^2x}{ds^2}\right|_{t-t_0}} = \frac{y - y_0}{\left.\frac{d^2y}{ds^2}\right|_{t-t_0}} = \frac{z - z_0}{\left.\frac{d^2z}{ds^2}\right|_{t-t_0}} \qquad (d_2)$$

(1)-in sağ tərəfində əyrinin əyriliyi k iştirak edir.k-nın təyinindən görünür ki, $k \geq 0$ olan,k=0 olan hala baxaq.Daha doğrusu aşağıdakı teoremi isbat edək.

Teorem:Əyrinin əyriliyinin sıfır olması üçün zəruri və kafi şərt onun sadə əyri olması-dır, yəni düz xətt və ya düz xətt hissəsindən ibarət olmasıdır.

İsbatı (1)-ə görə k=0 olarsa, $(1) \Rightarrow \quad \frac{d\vec{\tau}}{ds} = 0 \quad \vec{\tau} = \vec{p} \quad \vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds} \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{p}$ inteqrallasaq,

və ya $\vec{r} = \vec{p}s + \vec{p}_0$ vektori şəkildə, $\begin{cases} \bar{x} = p_1 s + p_{01} \\ \bar{y} = p_2 s + p_{02} \\ \bar{z} = p_3 s + p_{03} \end{cases}$ kimi parametrik şəkildə və

$\frac{x - p_{01}}{p_1} = \frac{y - p_{02}}{p_2} = \frac{z - p_{03}}{p_3}$ kimi kanonik şəkildə alarıq. Bu isə düz xətt tənliyidir.

Tərsini fərz edək. $\gamma : \vec{r} = \vec{c}s + \vec{p}$ tənliyi ilə verilir. Mühakiməni sondan əvvələ aprsaq,

$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{c}, \quad \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = 0 \Rightarrow \quad , k\vec{\nu} = 0 \Rightarrow k = 0$ Beləliklə teorem isbat olunur.

İndi əyri ilə bağlı başqa bir ort vektor təyin edək . $\vec{\beta} = [\vec{\tau}, \vec{\nu}]$ $\vec{\beta}$ -ya binormal vektor deyilir Buradan görünür ki, $\left|\vec{\beta}\right| = |\vec{\tau}| \cdot |\vec{\nu}| \sin\left(\vec{\tau} \wedge \vec{\nu}\right) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

Deməli, $\vec{\beta}$ ort vektordur. Bu $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$ vektorlarına əsasən M nöqtəsində də $R_M = \left(M, \vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}\right)$ kimi reper düzəldək. Bu reper mütəhərrik reper adlanır. Nöqtə əyri üzərində yerini dəyişdikdə bu reper də əyri boyunca yerini dəyişir.Ona görə də bu reperə bəzən əyrinin mütəhərrik üçüzlüsü deyilir. $d_3 = \left[M, \vec{\beta}\right]$ düz xəttinə əyrinin binormal düz xətti deyilir. Binormal düz xəttlərin tənliyini yazmaq üçün $\vec{\beta}$ -nin kooordinantlarını təyin etmək lazımdır. Məlumdur ki, $\vec{\beta} = [\vec{\tau}, \vec{\nu}]$ və $\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau} = \left(x_s', \quad y_s', \quad z_s'\right), \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \, \mathrm{II} \, \vec{\nu} = \left(x_s'', \quad y_s'', \quad z_s''\right)$ olduğundan, d_3 binormalının kanonik tənliyi belə yazılar:

$$\frac{x - x_0}{\left.\begin{vmatrix} z_s' z_s' \\ x_s' z_s' \end{vmatrix}\right|_{t=t_0}} = \frac{y - y_0}{\left.\begin{vmatrix} z_s' x_s' \\ z_s'' x_s'' \end{vmatrix}\right|_{t=t_0}} = \frac{z - z_0}{\left.\begin{vmatrix} x_s' y_s' \\ x_s'' y_s'' \end{vmatrix}\right|_{t=t_0}} (d_3)$$

M nöqtəsindəki üçüzlü üç müstəvi əmələ gətirir. Onların xüsusi adları vardır:

$\pi_1 = \left[M, \vec{\tau}, \vec{\nu}\right]$-çoxtoxunan müstəvi.

$\pi_2 = \left[M, \vec{\nu}, \vec{\beta}\right]$-normal müstəvi.

$\pi_3 = \left[M, \vec{\beta}, \vec{\tau}\right]$-düzləndirici müstəvi adlanır.

Beləliklə aşağıdakı nəticələrə gəldik: Fəza əyrisinin hər bir nöqtəsində mütəhərrik üçüzlü , bunun üç ort vektorları və üç üzü vardır. İndi bu $\bar{\tau}, \bar{v}, \bar{\beta}$ ort vektorların qövs uzunluöuna görə törəmələrini təyin edək. Məlumdur ki, $\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{\tau} = \bar{r};\quad \frac{d\bar{\tau}}{ds} = k\bar{v};\quad \bar{v}^2 = 1$ Törəməsini alsaq, $2\bar{v}\cdot\frac{d\bar{v}}{ds} = 0 \Rightarrow \bar{v} \perp \frac{d\bar{v}}{ds}$. Odur ki, $\frac{d\vec{v}}{ds}$-in açılışında $\vec{v}$ iştirak etməz. Onda ayrılış belə olar:

$$\frac{d\bar{v}}{ds} = \lambda\bar{\tau} + \chi\bar{\beta} \quad (*)$$

Əmsalları təyin edək. Bilirik ki, $\bar{\tau}\bar{v} = 0,\quad \frac{d\bar{\tau}}{ds}\bar{v} + \bar{\tau}\frac{d\bar{v}}{ds} = 0,\quad k\bar{v}\cdot\bar{v} + \bar{\tau}(\lambda\bar{\tau} + \chi\bar{\beta}) = 0,\qquad k + \lambda = 0\ (**)$

(*) münasibətində bunu nəzərə alsaq,

$$\frac{d\bar{v}}{ds} = -k\bar{\tau} + \chi\bar{\beta} \quad (4)$$

düsturunu alarıq. χ -ya əyrinin buruqluğu deyilir. İndi $\frac{d\vec{\beta}}{ds}$-i təyin edək.

$$\frac{d\bar{\beta}}{ds} = \frac{d}{ds}\left[\bar{\tau}, \bar{v}\right] = \left[\frac{d\bar{\tau}}{ds}, \bar{v}\right] + \left[\bar{\tau}, \frac{d\bar{v}}{ds}\right] = \left[k\bar{v}, \bar{v}\right] + \left[\bar{\tau}, -k\bar{\tau} + \chi\bar{\beta}\right] = \left[\bar{\tau}, \chi\bar{\beta}\right] = \chi\left[\bar{\tau}, \bar{\beta}\right] = -\chi\bar{v}$$

$$\frac{d\bar{\beta}}{ds} = -\chi\bar{v} \qquad (5)$$

(1),(2) və (3) düsturlarını sistem şəklində yazaq.

$$\begin{cases} \frac{d\bar{\tau}}{ds} = k\bar{v} \\ \frac{d\bar{v}}{ds} = -k\bar{\tau} + \chi\bar{\beta} \\ \frac{d\bar{\beta}}{ds} = -\chi\bar{v} \end{cases} \qquad (6)$$

Bu düsturlar $(M, \vec{\tau}, \vec{v}, \vec{\beta})$ mütəhərrik üçüzlüsünün bazis vektorlarının törəmə düsturlarıdır. Bu törəmə düsturları təbii parametrə görə aparılır. (6)-ya Seqre-Frene düsturları deyilir.Yəni əyrinin toxunan, normal və binormal vektorlarının qövs uzunluqlarına görə törəmələrinin özləri üzrə ayrılışının düsturlarıdır. Bunlar əyrinin diferensial tənlikləri adlanır. Bu tənliklərə fikir verdikdə görünür ki, əgər k əyrilik, χ buruqluq məludursa, bu diferensial tənlikləri həll edərək əyrinin tənliklərini yazmaq olar. Burada k(s)>0 şərtini ödəməlidir. Bunun tərsi də vardır. Yəni, əgər əyrinin $\bar{r} = \bar{r}(s)$ təbii parametrlərlə tənlikləri verilərsə, onun əyrilik və buruqluqlarını s-dən asılılıqlarını təyin etmək olar. Deməli, k(s) (k(s)>0) və χ (s) kimi iki funksiya verildikdə $\bar{r}(s)$ təyin olunur və tərsinə $\bar{r}(s)$ vektor-funksiyası verildikdə k(s), χ (s) skalyar funksiyaları təyin olunur. Odur ki,

$$\begin{cases} k = k(s), k(s) > 0 \\ \chi = \chi(s) \end{cases} \qquad (7)$$

bu (7) tənliklərinə əyrinin təbii tənlikləri deyilir.

Əyrilik və buruqluğun verilməsi ilə əyri təyin olunur. Buna görə də əyrinin əyrilik və buruqluğunun təyininə baxaq.

Teorem:Əyrinin müstəvi əyrisi olması üçün zəruri və kafi şərt onun buruqluğunun 0-a bərabər olmasıdır.

$$\left.\begin{array}{l}\gamma \subset \sigma \Rightarrow \chi = 0 \\ \chi = 0 \Rightarrow \gamma \subset \sigma\end{array}\right\} \Rightarrow \gamma \subset \sigma \Leftrightarrow \gamma = 0$$

İsbatı: Seqre-Frenenin III düsturuna görə

Məlumdur ki, $\frac{d\bar{\beta}}{ds} = \chi\bar{\nu}, \chi = 0 \Rightarrow \frac{d\bar{\beta}}{ds} = 0 = \bar{\beta} = \bar{b}(\bar{b} = const)$ Onda

$$\frac{dx}{ds}b_1 + \frac{dy}{ds}b_2 + \frac{dz}{ds}b_3 = 0, \qquad xb_1 + yb_2 + zb_3 = c$$

Bu göstərir ki, $\gamma \subset \sigma$.

Tərsinə, verilənə görə $\gamma \subset \sigma; \sigma$ -ni elə seçmək olar ki, $\sigma = (OXY)$ onda γ -nin təbii şklildə $x = x(s),\ y = y(s),\ z = 0$ və ya $\vec{r} = (x(s), y(s), 0)$ olar. Onda $\tau = (x', y', 0), \vec{\nu} = (x'', y'', 0)$ kimi təyin olunar. Deməli, $\vec{\beta} = (0,0,\begin{vmatrix} x' \, y' \\ x'' \, y'' \end{vmatrix})$ olar.

lar. (5)-də yerinə yazsaq $\chi = 0$ tapılar.

Mövzu17.Əyrilik və buruqluğun təbii parametrlə ifadəsi.

Təbii parametrlərlə əyrinin buruqluğunu müəyyən edək. Məlumdur ki,

$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}$ $\quad \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = k\vec{\nu}$. $\quad \frac{d^3\vec{r}}{ds^3}$ – ni təyin edək.

$$\frac{d^3\vec{r}}{ds^3} = \frac{dr}{ds}\vec{\nu} + k\left(-k\tau^3 + \chi\vec{\beta}\right) = -k^2\vec{r} + \frac{dk}{ds}\vec{\nu} = k\chi\vec{\beta}$$

$\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \frac{d^3\vec{r}}{ds^3}$ -nin qarışıq hasilinə baxaq. $\left(\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right) = \left(\vec{\tau}, k\vec{\nu}, -k^2\vec{\tau} + \frac{dk}{ds}\vec{\nu} + k\chi\vec{\beta}\right)$,

$$\left(\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right) = \left(\vec{\tau}, k\vec{\nu}, k\chi\vec{\beta}\right) = k^2\chi\left(\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}\right) = k^2\gamma$$

$$\left(\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right) = k^2\chi \qquad k = \left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right| = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| \ (*) \qquad \chi = \frac{\left(\vec{r}\,'', \vec{r}\,'', \vec{r}\,'''\right)}{\left|\vec{r}\right|^2} \quad (**)$$

(*) və (**) düsturları əyrilik və buruqluğun təbii parametrlərlə ifadəsidir.

İsbat etmişik ki, əgər əyrinin buruqluğu sıfıra bərabərdirsə, yəni müstəvi əyrisinin Seqre- Frene düsturları aşağıdakı kimi yazılır.

$$\left\{\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}, \quad \frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{\nu}, \quad \frac{d\vec{\nu}}{ds} = k\vec{\tau}\right.$$

Müstəvi əyri üçün Seqre- Frene düsturlarıdır.

Mövzu 18. İxtiyari parametrlə əyriliyin, buruqluğun və mütəhərrik üçüzlünün bazis vektorinin ifadəsi.

Fərz edək ki, $\gamma \in c^{\kappa}(k \geq 3)$ əyrisi

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \qquad (1)$$

tənlikləri ilə verilmişdir. Parametr ixtiyari t parametridir. Əyri belə verildikdə $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$ vektorlarını, eləcə də κ, γ əyrilik və buruqlarını təyin edək. Qövs uzunluğu düsturundan bilirik ki, $\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$ radius vektorunun t parametrinə görə törəməsini $\vec{r}'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$ kimi i.arə edək. Onda alırıq ki, $\frac{ds}{dt} = |\vec{r}'|$. Məlumdur ki,

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \qquad \vec{\tau} = \vec{r} \cdot \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|} \qquad \textbf{Deməli, } \vec{\tau} = \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|} \qquad (a)$$

İndi $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$-ni müəyyən edək.

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{\tau} \cdot \frac{ds}{dt}\right) = \frac{d\vec{\tau}}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \vec{\tau} \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = k\vec{\nu}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \vec{\tau}\,\frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{\tau}\,\frac{d^2 s}{dt^2} + k\vec{\nu}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

$\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]$ vektorial hasilini hesablayaq.

$$\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right] = \left[\vec{r}', \vec{r}''\right] = \left[\vec{\tau}|\vec{r}'|, \vec{\tau}\,\frac{d^2 s}{dt^2} + k\vec{\nu}|\vec{r}'|^2\right] = \left[\vec{\tau}|\vec{r}'|, k\vec{\nu}|\vec{r}'|^2\right] =$$

$$= k|\vec{r}'|^3[\vec{\tau}, \vec{\nu}] \Rightarrow \left[\vec{r}', \vec{r}''\right] = k|\vec{r}'|^3 \cdot [\vec{\tau}, \vec{\nu}] = k|\vec{r}'|^3 \vec{\beta}, \quad \left[\vec{r}', \vec{r}''\right] = k|\vec{r}'|^3 \vec{\beta} \qquad (*)$$

Buradan görünür ki, $\vec{\beta}$ vetoru $\left[\vec{r}', \vec{r}''\right]$ vektoru ilə kollineardır. Odur ki, $\vec{\beta}$ vetorunu $\left[\vec{r}', \vec{r}''\right]$-in ort vektoru kimi təyin etmək olar. Yəni,

$$\vec{\beta} = \frac{\left[\vec{r}', \vec{r}''\right]}{\left|\left[\vec{r}', \vec{r}''\right]\right|} (b), \;\; onda \;\; \vec{\nu} = [\vec{\beta}, \vec{\tau}] \; (v) \;\; olar.$$

Beləliklə, (a),(b),(v) düsturları **mütəhərrik bazis vektorlarının ixtiyari parametrlə** ifadələrini verir

İndi əyrilik və buruqluğun ixtiyari parametrlə ifadələrini müəyyən edək.(*) lüsturundan istifadə etsək, hər iki tərəfdəki vektorların uzunluqlarını təyin edək.

$$\left|\left[\vec{r}'\vec{r}''\right]\right| = |k|\left|\vec{r}\right|^3\left|\vec{B}'\right| \Rightarrow k\left|\vec{r}'\right|^3 = \left|\left[\vec{r}'\vec{r}''\right]\right| \Rightarrow k = \frac{\left|\left[\vec{r}'\vec{r}''\right]\right|}{\left|\vec{r}'\right|^3} \qquad k = \frac{\left|\left[\vec{r}'\vec{r}''\right]\right|}{\left|\vec{r}'\right|^3} \qquad (2)$$

Bu düstur əyrinin **əyriliyinin** ixtiyari parametrlə ifadəsini təyin etməyə imkan verir.

İndi əyrinin **buruqluğunun ixtiyari** parametrlə ifadələrini müəyyən edək Bunun üçün əyrinin radius vektorun t parametrinə görə III tərtib törəməsini təyin edək.

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt}=\vec{\tau}\frac{ds}{dt}=\vec{\tau}\left|\vec{r}'\right| \ , \ \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{\tau}\frac{d^2s}{dt^2}+k\vec{v}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

$$\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)=\frac{d}{dt}\left(\vec{\tau}\frac{d^2s}{dt^2}+k\vec{v}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right)=p\vec{\tau}+q\vec{v}+k\frac{ds}{dt}\frac{d\vec{v}}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=$$

$$=p\vec{\tau}+q\vec{v}+k\left(\frac{ds}{dt}\right)^3\left(-k\vec{\tau}+\chi\vec{\beta}\right)\Rightarrow\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}=p'\vec{\tau}+q'\vec{v}+k\chi\left(\frac{ds}{dt}\right)^3\vec{\beta}$$

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt},\frac{d^2\vec{r}}{dt^2},\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right)=\left(\vec{r}',\vec{r}'',\vec{r}'''\right)=\left(\vec{\tau}\left|\vec{r}\right|,\vec{\tau}\frac{d^2s}{dt^2}+k\vec{v}\left|\vec{r}'\right|^2,p'\vec{q}+q'\vec{\vartheta}+k\chi\left|\vec{r}'\right|^3\vec{\beta}\right)$$

Qarışıq hasilin xassəsindən istifadə edərək kollinear vektorun qarışıq hasili sıfır oldugunu nəzər alsaq

$$\left(\vec{r}',\vec{r}'',\vec{r}'''\right)=\left(\vec{\tau}\left|\vec{r}'\right|\right),k\vec{v}\left|\vec{r}'\right|^2,k\chi\left|\vec{r}'\right|^3\vec{\beta}=k^2\chi\left|\vec{r}\right|^6\left(\vec{\tau},\vec{v},\vec{\beta}\right)=k^2\chi\left|\vec{r}'\right|^6$$

(*) düsturunu kvadrata yüksəldək.

$$k^2\left|\vec{r}'\right|^6=\left[\vec{r}',\vec{r}''\right]^2, \quad onda \quad \left(\vec{r}',\vec{r}'',\vec{r}'''\right)=\left[\vec{r}',\vec{r}''\right]^2\chi \quad olar.$$

$$\chi=\frac{\left(\vec{r}',\vec{r}'',\vec{r}'''\right)}{\left[\vec{r}',\vec{r}''\right]^2}(3)$$

(3) düsturu fəza əyrisinin **buruqluğun ixtiyari** parametrlə ifadəsini verir.

Mövzu 19.Vintvari xətt və onun əyrilik və buruqluğunun hesablanması.

Bəzən elə əyrilərə rast gəlmək olur ki,onlar bir ox ətrafında fırlanmaqla yanaşı həmin oxa paralel istiqamətdə yerdəyişmə nəticəsində alınır.Belə əyriyə Vintvari əyri və ya Vintvari xətt deyilir.Vintvari əyrinin parametrik tənliyini yazmaq üçün fərz edək əyri müstəvi üzərindəki hər hansı nöqtədən başlayaraq hərəkət etdirək.

Fərz edək hər hansı M nöqtəsi verilir.Müstəvi üzərində P nöqtəsini müəyyən edir.(ŞƏKİL) $M(x,y,z), P\in(OXY)$ olarsa P(x,y,o)ilk vəziyyətdən dönmə bucağı t olarsa,

$$\begin{cases} x=a\cos\varphi \\ y=a\sin\varphi \end{cases}$$

Deməli, P-nin koordinantları O-nun ətrafında $t\prec\varphi$ bucağı qədər dönmədə alınan dönmə bucağının nöqtə həm də $(OO')II(MP)$ paralel istiqamətdə fırladan və t-lə mütənasib olduğuna görə

$$z=\left|MP\right|=bt, b=const, \qquad a=const, \qquad \begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \\ z=bt \end{cases} \qquad (1)$$

şəklində olar.Əgər bunu O-da $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ şəklində götürsək:

$$\overrightarrow{OM}=\vec{r}(t)=x'(t)\vec{i}+y'(t)\vec{j} \quad (1').$$

(1) və ya (1’) vintvari əyrinin parametrik tənlikləri adlanır.Parametrik tənliklərə görə vintvari xəttin bir çox xsslərini onun hər bir nöqtəsində mütəhərrik üçüzlü.

$$r' = \frac{dr}{dt} = -a\sin t i + a\cos t j + bk = (-a\sin t, a\cos t, b), \qquad |r'| = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\tau = \frac{r'}{|r'|} = \frac{-a\sin t i + a\cos t j + bk}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Törəmə alsaq,

$$\vec{r}'' = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(-a\sin t\vec{i} + a\cos t\vec{j} + b\vec{k}\right)\vec{r}^{\,a} = a\cos t\vec{i} - a\sin t\vec{j} = (-a\cos t, a\sin t, O)$$ alarıq.

$$\beta = \frac{[r', r'']}{|[r', r'']|}$$

$$[r'r''] = \left(\begin{vmatrix} a\cos t & b \\ -a\sin t & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b & -a\sin t \\ 0 & -a\cos t \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -a\sin t & -a\cos t \\ -a\cos t & -a\sin t \end{vmatrix}\right) = \left(ab\sin t, -ab\cos t, a^2\right)$$

$$|[r'r'']| = \sqrt{a^2b^2 + a^4} = a\sqrt{a^2+b^2}, \qquad \beta = \frac{\left(ab\sin t, -ab\cos t, a^2\right)}{a\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{(b\sin t, -b\cos t, a)}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Bundan sonra əyrinin ortnormal vektorunu təyin etmək olar.Bunun üçün

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dt}\frac{dt}{ds^2} = \frac{-a\sin t i + a\cos t j + bk}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \frac{d\tau}{ds} = k\nu$$

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{d\tau}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{-a\cos t i - a\sin t j}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad k\nu = \frac{-a\cos t i - a\sin t j}{a^2+b^2}$$

$$k = |k\nu| = \frac{|-a\cos t i - a\sin t j|}{a^2+b^2}, \qquad k = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Beləliklə alarıq ki,vintvari əyrinin əyriliyi sabitdir.

$$P(x, y, o), \qquad OP = xi + yj + 0k, \qquad OP = a\cos t i + a\sin t j, \qquad k\nu = \frac{-a\cos t i - a\sin t j}{a^2+b^2}$$

Buradan görünür ki, $k\vec{\nu} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(-\cos t\vec{i} - \sin t\vec{j}\right)$ olur.

$$\vec{\nu} = -\cos t\vec{i} - \sin t\vec{j}$$

Yəni vintvari əyrinin normal art vektoru $\overrightarrow{OP}$ vektoru ilə əks istiqamətdədir. $\overrightarrow{OP}\vec{\omega}\vec{\nu}$ Həm də $|\overrightarrow{OP}| \succ a|\vec{\nu}|$ olur. $\overrightarrow{OP} \perp \vec{k}$ olduğundan onda vintvari əyrinin ixtiyari nöqtəsində onun art normal vektoru oxuna perpendikulyardır.

Əyrinin buruqluğunu hesablamazdan qabaq $\vec{\tau}\vec{k} = \varphi$ ilə işarə edək və bu bucağı hesablayaq.İki vektor arasındakı bucaq düsturuna görə

$$\cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = const$$

Deməli,vintvari əyrinin başqa bir xassəsi alındı.Bu xassədən alınır ki,vintvari əyrinin toxunan ort vektoru ilə onun arasındakı bucaq həmişə sabit qalır.

$$r' = (-a\sin t, a\cos t, b)$$

$$r'' = (-a\cos t, -a\sin t, o)$$

$$r''' = (a\cos t, -a\cos t, o)$$

Vintvari əyrinin buruqluğunu təyin edək.Bunun üçün $\gamma = \frac{(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''')}{[\vec{r}', \vec{r}'']^2}$ düsturundan istifadə edək.

$$(r'r''r''') = \begin{vmatrix} -a\sin t & -a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & o \\ a\sin t & -a\cos t & o \end{vmatrix} = b\begin{vmatrix} -a\cos t & -a\sin t \\ a\sin t & -a\cos t \end{vmatrix} = a^2 b$$

$$k = \frac{|[r'r'']|}{|r'|^3} = |[r'r'']| = |r'|^3, k = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^3 = a(a^2+b^2)$$

$$[r'r'']^2 = a^2(a^2+b^2)^2, \quad \gamma = \frac{a^2 b}{a^2(a^2+b^2)} = \frac{b}{a^2+b^2}$$

Mövzu 20. Skalyar arqumentli iki dəyişənli vektor funksiya.

Fərz edək ədədi D oblastı verilmişdir.D oblastının ixtiyari parametrləri (u,v) nöqtəsindən asılıdır. (u,v) nöqtəsini 3 ölçülü Evklid fəzaya inikas etdirsək bir nöqtə alırıq. Deməli,

$$f :\to E_3, f(u,v) = M$$

Əgər (u,v) bütün D oblastının dəyişənləridirsə, onda M nöqtələri çoxluğu müəyyən bir ϕ fiqurunu verər.Aydındır ki, M nöqtəsi u və v nöqtələrindən asılı olar. yəni $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(u,v)$
skalyar arqumentli vektor funksiya müəyyən edər. İndi skalyar arqumentli iki dəyişənli vektor funksiyaların bəzi xassələri ilə tanış olaq. $(u_0, v_0) \in D$ nöqtəsinin yaxın ətrafında $|\vec{r}(u,v)|$ sıfra yaxınlaşarsa,bu funksiya sonsuz azalan vektor funksiya deyilir və belə yazılır.

$\lim\limits_{(u,v)\to(u_0,v_0)} \vec{r}(u,v) = \vec{o}$ Əgər $\lim\limits_{(U,\vartheta)\to(U_0,\vartheta_0)} \vec{r}(u,v) = \vec{r}(u_0,v_0)$ olarsa,onda deyirlər

ki, $\vec{r}(u,v)$ funksiyası $(u_0,v_0) \in D$ nöqtəsinin yaxın ətrafında kəsilməzdir. Əgər $\vec{r}(u,v)$ funksiyası $(u_0,v_0) \in D$ nöqtəsinin yaxın ətrafında kəsilməz olmaqla arqumentlərin sonsuz kiçilən arqumentlərinə qarşı dayanıqlı olarsa,onda bu funksiyanın hər bir arqumentə görə törəməsini təyin etmək olar.

$u = u + \Delta u, v = v,$ $\qquad$ $r(u+\Delta u, v) - r(u,v) = \Delta r_u(u,v)$

$r(u, v+\Delta v) - r(u,v) = \Delta r_\vartheta(u,v),$ $\qquad$ $r(u+\Delta u, v+\Delta v) - r(u,v) = \Delta r(u,v)$

Fərz edək, I arqumentə nəzərən funksiya artımı $\frac{\Delta r_u}{\Delta u}$,eləcə də $\frac{\Delta r_\vartheta}{\Delta v}$ vektor funksiyalar uyğun olaraq $\Delta u \to 0, \Delta v \to 0$ olduqda sonlu müəyyən həqiqi limitə malik olarsa,həmin limitə göstərilən arqumentlərə nəzərən vektor funksiyalarının törəməsi deyilir.Yəni

$$\lim_{\Delta U\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta u} = \lim_{\Delta U\to 0}\frac{r(u+\Delta u, v) - r(u,v)}{\Delta u} = \frac{dr}{du} = \frac{\partial r}{\partial u} = r_u$$

Eləcə də

$$\lim_{\Delta\vartheta\to 0}\frac{\Delta \bar r}{\Delta v}=\lim_{\Delta\vartheta\to 0}\frac{\bar r(u,v+\Delta v)-\bar r(u,v)}{\Delta v}=\frac{\partial \bar r}{\partial v}=\bar r_v$$

v dəyişəninə görə funksiyanın xüsusi törəməsi var. Biz bu xüsusi törəmə anlayışına başqa tərəfdən də yanaşa bilərik. Fərz edək vektor funksiyada arqumentlərin biri qeyd edilmişdir.

$$\bar r=\bar r(u,v);v=v_0=const$$

$\bar r=(u,v)$ funksiyası yalnız u-dan asılı olacaqdır. $\bar r=(u,v)=\bar r^*(u)$

Aydındır ki, $R(u)=\bar r^*(u)=\bar r(u,v_0)$ funksiyası fəzada hər hansı əyri müəyyən edir.Onun hər hansı nöqtəsində toxunan vektor müəyyən etmək üçün

$$\frac{d\bar R}{du}=\frac{d\bar r^*}{du}=\frac{d\bar r(u,v_0)}{du}=\bar r_u$$

Deməli, dəyişənlərin birini qeyd etməklə alınan əyrinin toxunan vektoru yeni alınan funksiyanın o biri dəyişəninə görə törəməsi, verilən funksiyanın xüsusi törəməsini müəyyən edir.

Bunları $(O,\vec i,\vec j,\vec k)$ koordinant sistemində də vermək olar. Onda aydındır ki, skalyar arqumentli vektor funksiyanın koordinantları adlanan

$\bar r(u,v)=x(u,v)\bar i+y(u,v)\bar j+z(u,v)\bar k$ kimi ayrılışa malikdir.Burada

$$x=x(u,v),\quad y=(u,v),\qquad z=z(u,v)$$

$\bar r(u,v)$ -nin diferensiallanma qaydalarından istifadə olunur.Əgər

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{(u,v)\to(u_0,v_0)}x(u,v)=a_1\\ \lim\limits_{u,v)\to(u_0,v_0)}y(u,v)=a_2\\ \lim\limits_{(u,v)\to(u_0,v_0)}z(u,v)=a_3\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{(u,v)\to(u_0,v_0)}\bar r(u,v)=\bar a=\alpha_1\bar i+\alpha_2\bar j+\alpha_3\bar k$$

Beləliklə, iki dəyişəndən asılı skalyar arqumentli vektor funksiyasının xassələrini almaq üçün iki dəyişəndən asılı 3 skalyar funksiyanın xassələrindən istifadə etmək lazımdır.Bu zaman

$d\bar r=dx\bar i+dy\bar j+dz\bar k$

$$\bar r_u=\frac{\partial x(u,v)}{\partial u}\bar i+\frac{\partial y(u,v)}{\partial u}\bar j+\frac{\partial z(u,v)}{\partial u}\bar k,\ \bar r_v=\frac{\partial x(u,v)}{\partial v}\bar i+\frac{\partial y(u,v)}{\partial v}\bar j+\frac{\partial z(u,v)}{\partial v}\bar k$$

Yəni, $\bar r_u=x_u\bar i+y_u\bar j+z_u\bar k,\qquad \bar r_\vartheta=x_\vartheta\bar i+y_\vartheta\bar j+z_\vartheta\bar k$ olar.

Bunların hər birini ayrı-ayrı isbat etmək üçün vektor funksiyanın yuxarıdakı ayrılışından istifadə olunur.

Göstərmək olar ki, ikidəyişəndən asılı skalyar arqumentli vektor funksiyanın,xassələri burada da ödənilir. $\bar r=\vec r(u,v)$ funksiyasının diferensiallanması skalyar arqumentli funksiyaların diferensiallanma xassələrindən fərqlənmir. Burada həmdə aşağıdakı kimi hərəkət etmək olar. Məsələn: $\bar r=\vec r(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ olrsa,

$$d\vec r=\frac{\partial\vec r}{\partial x}dx+\frac{\partial\vec r}{\partial y}dy+\frac{\partial\vec r}{\partial z}dz\quad olar\,/$$

Onda aşağıdakını alarıq:

$$\begin{cases} dx(u,v) = x_u du + x_\vartheta dv; i, \\ dy(u,v) = y_u du + y_\vartheta dv; \; j, \\ dz(u,v) = z_u du + z_\vartheta dv; k \end{cases}$$

Vurub tərəf-tərəfə toplasaq:

$$d\bar{r} = dx\bar{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} = \bar{i}(x_u du + x_v dv) + \bar{j}(y_u du + y_v dv) + \bar{k}(z_u du + z_v dv) =$$

$$= \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} dv = \bar{r}_u du + \bar{r}_\vartheta dv, \qquad d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv$$

İki dəyişənli skalyar arqumentli vektor funksiyanın tam diferensialı ilə bu düsturu müqayisə etsək onlar arasında oxşarlıq olduğunu görərik.

Beləliklə ikidəyişəndən asılı skalyar arqumentli vektor funksiyaların diferensiallanması skalyar dəyişənli funksiyaların diferensiallanmasına analojidir.

Mövzu 21. Səth haqqında anlayış. Səthin parametrik tənlikləri.

Hələ Evklid 2300 il bundan əvvəl səthə tərif verməyə çalışmışdır. O, qeyd etmişdir ki, səth elə həndəsi varlıqdır ki, onun yalnız eni və uzunluğu var. Başqa bir tərifdə səthin sərhəddi xətt olduğu və xətt üzərində kəsişdiyi müəyyən edilir. Bu o dövr üçün məğbul olsa da müasir riyaziyyat üçün qüsurdur.

Səth nədir? Qumlu səhralar səthi, dənizin səthi, uçan mərminin səthi və.s. Bu kimi obyektlərdir. Səthə mükəmməl tərif vermək üçün homeomor inikas anlayışından və ikiölçülü oblastlarından istifadə olunur.

Fərz edək ki, D müəyyən bir ikiölçülü ədədi oblastıdır. D oblastı bütün müstəvidən, ya qapalı yarım müstəvidən və ya düzbucaqlıdan ibarət ola bilər. Bunlar elementar səth adlanır. Elementar səthlərin 3 ölçülü Evklid fəzasına homeomorf inikası səth anlayışına gətirir. $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right) \in E$ reperdir $f: D \to E_3$ qarşı $M(u,v)$ nöqtəsini müəyyən edir.

$\overline{OM} = \vec{r}(u,v)$ M nöqtəsinin radius vektoru adlanır. $D \ni (u,\upsilon) u,\upsilon \in R$. Onda

$$M, M(u,\upsilon), \quad \overrightarrow{OM} = \vec{r}(u,\upsilon) \qquad (1\ )$$

olur. E_3-də olduğundan $\vec{r}(u,\upsilon) = x(u,\upsilon)\vec{i} + y(u,\upsilon)\vec{j} + z(u,\upsilon)\vec{k}$ ayrılışına malikdir və ya

$$\begin{cases} x = x(u,\upsilon) \\ y = y(u,\upsilon) \; (1) \\ z = z(u,\upsilon) \end{cases}$$

Koordinantlarla səthin tənliyi adıanır. (1) tənliyi nə zaman səth müəyyən edir ? .Aydındır ki, u və υ müxtəlif qiymətlər aldıqda M nöqtəsi də müxtəlif olur və bir çoxluğa çevrilir.

Deməli, $\begin{cases} u = u_0 \\ \upsilon = \upsilon_0 \end{cases}$ olarsa, $\vec{r}(u_0, \upsilon_0)$ bu nöqtə verər. Eləcə də $\begin{cases} u \\ \upsilon = \upsilon_0 \end{cases}$ dəyişən onda $\bar{r}(u, v_0)$ əyri verər. $\begin{cases} u = u_0 \\ v \end{cases} \Rightarrow \bar{r}(u_0, v)$ əyri verər. səthi

Deməli, $\vec{r}(u,v)$ funksiyaları həmişə ikidəyişəndən asılı olmalıdır. Bu o deməkdir ki,səthin hər bir nöqtəsinin $\exists B(M,\varepsilon)$ ətrafı olmalıdır ki, bu ətraf ya açıq dairə ilə,ya da açıq yarımdairə ilə homeomorf olsun. Əgər nötənin ətrafı açıq dairə ətrafı ilə homeomorfdursa bu nöqtəyə səthin daxili nöqtəsi deyilir. Əgər açıq yarımdairə ilə homeomorfdursa buna səthin sərhəd nöqtəsi deylir. Əgər D oblastına nəzərən müstəvi götürsək, onda səthi bütün daxili nöqtələrdən ibarət olar. D oblastı əvəzinə qapalı yarım müstəvi götürsək, ϕ səthi sərhəddi düz xətt ilə homeomorf olar. Nəhayət, əgər D oblastı düzbucaqlı şəklində ədədi oblasdırsa onda ϕ səthi çevrə ilə homeomorf olar. İndi hamar sətləri və ya səthlərin nə zaman hamar olmasını müəyyən edək.

Yuxarıda qeyd etdik ki,əgər u və ya v-nin biri sabit olarsa, onda tənlik əyri xətt müəyyən edir. Əgər ikisi də sabit olarsa, tənlik onda nöqtə müəyyən edilər. Odur ki, bunların ikisini dəyişən hesab edirik. Əyrilərdə olduğu kimi səthlərdə də müəyyən xassəyə malik olan səthlər hamar səthlər adlanır. Məsələn:dənizin səthi hamar səthdir.Həndəsə kursunda, adətən,hamar səthlər öyrənilir. (1) tənliyi ilə ifadə olunmuş səthin hamar səth olmasını müəyyənləşdirək.

Mövzu 22.Fəzada səthin parametrik tənlikləri və hamar səthlər.

Fərz edək ϕ səthi fəzada $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ sistemində

$$r = r(u,v) \qquad (1)$$

$$x = x(u,v),\ \ y = y(u,v),\quad z = z(u,v) \qquad (1') \qquad \vec{r}(u,\vartheta) = x(u,\vartheta)\vec{i} + y(u,\vartheta)\vec{j} + z(u,\vartheta)\vec{k} \ \ (1'')$$

prametrik tənlikləri verilmişdir. Səthin nə zaman (1) tənlikləri ilə təyin olunmasını müəyyənləşdirək. Aydındır ki, $\left.\begin{aligned} u = u_0 = const \\ v = \vartheta_v = const \end{aligned}\right\}$ olduqda $f(u_0,v_0) = M_0$ olur və (1) tənlikləri yalnız bir nöqtə müəyyən edir. $J \to (u,\upsilon)$ dəyişmə oblastında $(u,\upsilon) \to (u_0,\upsilon_0)$ nöqtəsindən ibarət olur. Səthin öyrənilməsi bir nöqtə ilə deyil, səthin bütün nöqtləri ilə aparılır. Odur ki, (1) parametrik tənliklərində u və v müəyyən müstəvi oblastında dəyişənlərdir. İndi fərz edək ki, $u \in J_1, \upsilon = \upsilon_0 = const,\quad \bar{r}(u,\upsilon) = \bar{\rho}(u)$ olar. Məlumdur ki, parametrlərdən asılı hər bir vektor funksiyası fəzada əyri müəyyən edir, yəni $\vec{r}(u,\upsilon_0)$ əyri verir. Eləcə də $u = u_0 = const, \bar{r}(u_0,\upsilon) = \bar{R}(\upsilon)$ fuksiyası da əyridir.

Deməli,(1) parametrik tənliklərdə həm u, həm də υ dəyişəni müəyyən ədəd aralıqda dəyişməlidir.Yəni hər ikisi elementar ədədi aralıqların nöqtələri olmalıdır.

$$d\bar{r} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}du + \frac{\partial \bar{r}}{\partial \upsilon}d\upsilon, \qquad d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_\upsilon d\upsilon$$

Belə səthlərin hamarlıq anlayışını müəyyən edək. Adətən həndəsədə hamar səthlər öyrənilir. Əvvəlcə hamar səthlərə tərif verək.

Tərif: ϕ səthi o zaman iki tərtibdən hamar səth adlanır ki, $\bar{r} = \bar{r}(u,\upsilon)$ vektor funksiyalarının özlğri və bu funksiyanın k tərtibə qədər xüsusi törəmələri kəsilməz olsunlar və (*) ödənsin

$$rang\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_\upsilon & y_\upsilon & z_\upsilon \\ & & \end{pmatrix} = 2 \quad (*)$$

Tərifə görə $\phi \in C^k$, yəni (1) tənliklərinin özləri və 1,2,..., k tərtibdən xüsusi törəmələri hamar funksiya olsun. Bu zaman aşağıdakı şərtlər ödənilməlidir.

1. $\bar{r}(u,\upsilon) = (x(u,\upsilon), y(u,\upsilon), z(u,v))$ funksiyaları, törəmələri

$$\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial \upsilon}, \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial \upsilon^2}, ..., \frac{\partial^k x}{\partial u^k}; \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial \upsilon}, \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial \upsilon^2}, ..., \frac{\partial^k z}{\partial u^k}, \frac{\partial^k z}{\partial \upsilon^k}; \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial \upsilon}, \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial \upsilon^2}, ..., \frac{\partial^k z}{\partial u^k}, \frac{\partial^k z}{\partial \upsilon^k}$$

funksiyaları kəsilməz olmalıdırlar. Həm də (*) münasibəti ödənilməlidir. Bu səthlər daxilində (1) parametrik tənliklərini müəyyən etdiyi ϕ səthi k tərtibdən hamar səth adlanır. Parametrik tənliklərlə verildikdə səthin hamarlığı yuxarıdakı qaydada təyin olunur.

Əgər ϕ səthinin tənliyi, məsələn:z=f(x,y)–aşkar şəkildə verilərsə, onda onun hamarlığını təyin etmək üçün tənliyini $r(u,\upsilon)=(u,\upsilon,\ f(u,\upsilon))$ və ya $x=u,\ y=\upsilon,\ z=(u,\upsilon)$ şəklinə gətirmək lazımdır. Bu zaman $\phi\in C^k \Rightarrow f(x,y),\ f_x',\ f_y',\ f_x'',\ f_y'',...,\ f_x^{(k)},\ f_y^{(k)}$ funksiyaları kəsilməz olmalıdırlar.(*) münasibəti öz-özünə ödənilir, yəni $rang\begin{pmatrix}1 & 0 & f_x' \\ 0 & 1 & f_y' \\ & & \end{pmatrix}=2$ olur.

Ola bilər ki **səth qeyri aşkar funksiya** vasitəsilə verilmiş olsun, yəni səthin tənliyi F(x,y,z)=0 şəklində verilsin. Məsələn: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Onda $\phi(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ olar. Səthin tənliyir qeyri aşkar funksiya vasitəsilə verildikdə onun hamarlığı necə müəyyən olunur? Səthin tənliyi qeyri aşkar şəkildə verildikdə

$rang\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)=1$ (**) və k-ci tərtibə qədər törəmələr kəsilməz olmalıdır. (**) münasibəti göstərir ki, $\phi(x,y,z)$ funksiyası törəmələrə malik olmalıdır.

f(x,y,z)=0 tənliyinin səth ifadə etməsi üçün heç olmasa,dəyişənlərin biri müəyyən bir oblasta dəyişməlidir. Bu qayda ilə müxtəlif səthlərin hamarlığını müəyyən etmək olar. Göstərmək olar ki, əgər səthin tənlikləri (1) şəklində verilmişsə, $h: D\to D';(u,\upsilon)\subset D';(\alpha,\beta)\subset D$ olarsa, $u=h_1(\alpha,\beta)$ və $v=h_2(\alpha,\beta)$ olur. Belə yeni daxil edilmlş dəyişənlər hamarlığın tərifini keyfiyyətcə dəyişmir, çünki $rang\begin{pmatrix}x_\alpha & y_\alpha & z_\alpha \\ x_\beta & y_\beta & z_\beta\end{pmatrix}=2$ şərtini yeni dəyiənlər ödəyir. Bu zaman $\bar r=\bar r(u,\upsilon)=\bar r(h,(\alpha,\beta),h_2(\alpha,\beta))$ və $\frac{\partial r}{\partial u}=\frac{\partial r}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial u}+\frac{\partial r}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial u}$ olur.

İndi səth üzərində **əyri xətli koordinant şəbəkəsi** ayrılışını verək.

Fərz edək ϕ səthi $\bar r=\bar r(u,\upsilon)$ parametrik tənlikləri ilə verilmişdir. Əgər $(u,\upsilon)\in D,\ \upsilon=\upsilon_0=const,\ \bar r=\bar r(u,u_0)=\bar\rho(u)$ olarsa, onda **u-əyriləri** alınır. Analoji olaraq $\vec r(u_0,\upsilon)=\vec R(\upsilon)$ əyriləri **v-əyriləri** adlanırlar. Bu əyrilər səthlər üzərində **koordinant əyriləri** və ya əyrixətli koordinant şəbəkəsi adlanır.

Şəbəkədə $(u)\cap(\upsilon)=M$ müəyyən edir və $d\vec r=\vec r_u du+\vec r_\upsilon d\upsilon$ olur. Koordinant şəbəkəsinin hər bir nöqtəsində (u) və (v) əyrilərinə toxunanlar çəkmək mümkündür. Əyrilərə çəkilən bu toxunanlar səthlər nəzəriyyəsində mühüm əhəmiyyət kəsb edirlər.

Mövzu 23 Səthin toxunan müstəvisi və normalı

Fərz edək $\phi \in C^k$ $(k \geq 1)$ və parametrik tənliyi

$\vec{r} = \vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ (1) $\quad rang\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = 2 \quad (*)$

$\overrightarrow{r_u} = (x_u, y_u, z_u),\ \overrightarrow{r_v} = (x_v, y_v, z_v)$ $\left(\overrightarrow{r_u}, \overrightarrow{r_v}\right)$ sistemi xətti asılı deyil. $\left(M, \overrightarrow{r_u}, \overrightarrow{r_v}\right)$ $\begin{cases} \overrightarrow{r_u}(u) \\ \overrightarrow{r_v}(v) \end{cases}$ - əyrilərinə xətti vektor deyilir. $T_M = \left[M, \overrightarrow{r_u}, \overrightarrow{r_v}\right]$- səthin M nöqtəsindən toxunan müstəvisi deyilir. İsbat edək ki, aşağıdaki teorim doğrudur.

Teorim:S əthin hər hası M nöqtəsindən keçən və səth üzərində yerləşən bütün əyrilərin toxunan düz xətləri çoxluğu toxunan müstəvi əmələ gətirir.

Doğrudanda $\left(\overrightarrow{r_u}, \overrightarrow{r_v}\right)$ sistemin xəti asılı olmadığından bu sistem vektor fəza əmələ gətirir. Bu bəzən $\left(\overrightarrow{r_u}, \overrightarrow{r_v}\right)$ vektorunun xətti örtüyü adlanır.

$\forall \gamma \subset \phi,\ M \in \gamma,\ \gamma : u = u(t),\ v = v(t)\ \gamma \subset \phi$ olduğu üçün $\gamma : \vec{r}(u(t), v(t)) = \vec{R}(t)$

$\frac{dR^2}{dt} = \vec{\rho} = \frac{\delta \vec{r}}{\delta u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\delta \vec{r}}{\delta v} \cdot \frac{dv}{dt} = \overrightarrow{r_u} u' + \overrightarrow{r_v} v' \Rightarrow \vec{\rho} = \overrightarrow{r_u} u' + \overrightarrow{r_v} v' \quad d = \left[M, \vec{\rho}\right],\ \vec{\rho} // T_M$ bu onu göstərirki, səth üzərində M nöqtəsindən keçən ixtiyari əyrininin toxunan düz xətləri toxunan müstəviyə paralel olur. Bunun tərsi də doğrudur yəni toxunan müstəvi üzərində hər bir əyrinin toxunan vektoru ola bilər .Məsələn səth üzərində $\vec{a} = \alpha \overrightarrow{r_u} + \beta \overrightarrow{r_v}$ götürsək

$\alpha = \alpha(t),\ \beta = \beta(t)$ təniliklәri $\begin{cases} \alpha(t) = u \\ \beta(t) = v \end{cases}$ olarsa, bu səth üzərində əyri verər.

Onun toxunanları $\vec{a} -$a bərabər olar. Beləliklə, görürük ki, M nöqtəsindən səthə toxunan bütün düz xətlər toxunan müstəvi üzərindədi M nöqtəsindən səthə toxunan düz xətin tənliyini yazaq. $T_M = \left[M, \overrightarrow{r_u}, \overrightarrow{r_v}\right] \forall \mathrm{P}(x, y, z)$ $\quad T_M : \left[\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{r_u}, \overrightarrow{r_v}\right] = 0$

$$\begin{vmatrix} x - x & y - y & z - z \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$ səthin M nöqtəsindən toxunan tənliyi adlanır.

Səthin normal vektoru

Səthin hamarlığının tərifindən gördük ki, $\overrightarrow{r_u} = \lambda \overrightarrow{r_v}$ $\quad \vec{N} = \left[\overrightarrow{r_u}, \overrightarrow{r_v}\right]$vektoruna N nöqtəsindən səthin normal vektoru deyilir. $d = \left[M, \vec{N}\right]$ düz xətlə səthin normal düz xətti deyilir səthin normal düz xəttini tənliyini yazaq: $\frac{x-x_0}{N_1/M_0}=\frac{y-y_0}{N_2/M_0}=\frac{z-z_0}{N_3/M_0}$

$$\vec{N}=[\vec{r}_u,\vec{r}_v]=\left(\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v\end{vmatrix}\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v\end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v\end{vmatrix}\right)/M_0$$

Misal: verilən səthin toxunan müstəvisi və normal düz xəttinin tənliyini yazmalı

$$\bar{r}=(u\cos v, u\sin v b),\ b=const$$

$$\bar{r}_u=(\cos v,\ \sin v,\ 0),\quad \bar{r}_v=(-u\sin v, u\cos v, b)$$

$$[\vec{r}_u,\ \vec{r}_v]=\left(\begin{vmatrix}\sin v & 0\\ u\cos v & b\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0 & \cos v\\ b & -u\sin v\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\cos v & \sin v\\ -u\sin v & u\cos v\end{vmatrix}\right)=(b\sin v,\ -b\cos v,\ u)$$

$$\vec{N}=(b\sin v,\ -b\cos v,\ u)/(N_0,M_0)$$

$$T_M=\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ \cos v_0 & \sin v_0 & 0\\ -u_0\sin v_0 & u_0\cos v_0 & b\end{vmatrix}=0\ (x-x_0)b\sin v_0-(y-y_0)b\cos v_0+v_0(z-z_0)=0$$

$$d:\frac{x-x_0}{b\sin v_0}=\frac{y-y_0}{-b\cos v_0}=\frac{z-z_0}{u_0}$$

$$x_0=x(u_0,v_0)=u_0\cos v_0\quad u_0\sin v_0=y_0=y(u_0,v_0)\quad z_0=z(u_0,v_0)=bv_0$$

Məsələ: $M_0(x_0,y_0,z_0)$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ elipsoidinin toxunan müstəvisinin təliyini yazmalı.

Həlli:

Mövzu 24. Səthin I kvadratik forması

Səthlər nəzəriyəsində və səhtin diferensial həndəsədə səthin kvadratik formaları mühüm rol oynayır .

Əvvəlcə səthin I kvadratik formasına baxaq. Fərz edək səth

$$\phi\notin C^k\ (k\geq 2),\quad r=r(u,v)\quad (1)$$

parametrik tənliyi ilə verilmişdir. Dəyişənlərə artım verək: $\bar{r}(u+\Delta u,v+\Delta v),\ \Delta\bar{r}=\bar{r}(u+\Delta u,v+\Delta v)-\bar{r}(u,v)$, $d\vec{r}=\vec{r}_u du+\vec{r}_v dv$ səth üzərində M nöqtəsindən yaxın M´ nöqtəsinə keçən zaman radius vektorunun alınan tam diferesialıdır.

Tərif :Sətin radius vektorunun bir tərtibdən tam diferensialını skalyar kvadratına səthin I kvadratik forması deyilir.

$$\varphi_1 = \left(d\vec{r}\right)^2 \quad \varphi_1 = \left(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv\right)^2 = \overline{r^2}_u (du)^2 + 2\vec{r}_u\vec{r}_v dudv + \vec{r}_v (dv)^2$$

Bu ifadəyə səthin I kvadratik forması deyilir. Burada

$$\overline{r^2}_u = g_{11}, \qquad \overline{r^2}_v = g_{22}, \qquad \overline{r_u r_v} = \overline{r_v r_u} = g_{12} = g_{21} \qquad (2)$$

kimi işarələsək

$$\varphi_1 = g_{11}(du)^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}(dv)^2 \quad (3)$$

ifadəsinə səthin I kvadratik forması deyilir. $g_{ij}\,(i, j = 1{,}2) -$ ədədləri I kvadratik formanın əmsalları adlanır və $\overline{r_u r_v} = \overline{r_v r_u} = g_{12} = g_{21}$ kimidir.

I kvadratik formanın əmsalları hansı şərtləri ödəyir?

$(2_1) \Rightarrow g_{11} > 0$ və $(2_2) \Rightarrow g_{22} > 0$ $\quad \vec{N} = \left[\vec{r}_u, \vec{r}_v\right]$ qəbul etdiyimiz işarənin həndəsi mənasını müəyənləşdirək. $\vec{N} = \left[\vec{r}_u, \vec{r}_v\right]$ vektoru sıfırdan fərqli oldu ğundan onun uzunluğnu hesablayaq:

$$\overline{N^2} = \left[\vec{r}_u, \vec{r}_v\right]^2 = \left[\vec{r}_u, \vec{r}_v\right] \cdot \left[\vec{r}_u, \vec{r}_v\right] = \begin{vmatrix} \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u & \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v \\ \vec{r}_v \cdot \vec{r}_u & \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = g_{11}g_{22} - g^2_{12}$$

$$\overline{N^2} = g_{11}g_{22} - g^2_{12}, \quad g_{11}g_{22} - g^2_{12} > 0 \quad N \neq 0 \Rightarrow |N| > 0.$$

Beləliklə aşağıdakı nəticəyə gəlirik.

Nəticə: I kvadratik formanın I və III əmsalları müsbət ədətlərdir və

I kvadratik formanın əmsallarından düzəldilmiş $G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$ matrisinin determinantı

$$\det G = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = g_{11}g_{22} - g^2_{12} > 0$$

G matrisinin determinantına I kvadratik formanın **diskirminantı** deyilir. Deməli, sətin I kvadratik formasını I, III əmsalları və diskirminantı müsbətdi.

Bunlar səthin I kvadratik formasının əmsalları üzərində qoyulan şərtdir.

25-ci mühazir**ə.** Səthin 1 kvadratik formasının tətbiqləri.

Səthin 1 kvadratik formasının 1 tətbiqini yuxarıda normal vektorun uzunluğunun təyinində göstərdik.

1. Səthin normal vektorunun uzunluğunun təyini.

$$\overrightarrow{N^2} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v]^2 = [\vec{r}_u, \vec{r}_v] \cdot [\vec{r}_u, \vec{r}_v] = \begin{vmatrix} \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u & \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v \\ \vec{r}_v \cdot \vec{r}_u & \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = g_{11} g_{22} - g^2_{12}$$

$$\overrightarrow{N^2} = g_{11} g_{22} - g^2_{12} \quad , g_{11} g_{22} - g^2_{12} > 0 \quad , \vec{N}^2 = g = g_{11} \cdot g_{22} - g^2_{12} \Rightarrow |\vec{N}| = \sqrt{g}$$

yəni , səthin normal vektorunun uzunluğu onun I kvadratik formasının diskriminantının kvadrat kökünə bərabərdir.

2. Səth üzərindəki əyri qövsünün uzunluğu:

Fərz edək $\gamma \in \phi, \gamma : u = u(t), v = v(t)$ $\gamma : \vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$ $t = \alpha, [\alpha, t] \forall M_1 M_2$ -nin uzunluiğunu təyin edək.

$$uz\, M_1 M_2 = \int_\alpha^t \left| \frac{dr}{dt} \right| dt; \qquad \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du} \cdot \frac{du^\alpha}{dt} + \frac{dr}{dv} \cdot \frac{dv}{dt}, \frac{dr}{dt} = r_n \cdot \frac{du}{dt} + r_v \frac{dv}{dt},$$

$$\left| \frac{dr}{dt} \right| = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt} \right)^2} = \sqrt{(r_n u' + r_v v')^2}$$

$$\left| \frac{dr}{dt} \right| = \sqrt{(\vec{r}_u u' + \vec{r}_v v')^2} = \sqrt{g_{11} (u')^2 + 2 g_{12} u' v' + g_{22} (v')^2}$$

$$S = uz. M_1 M_2 = \int_t^\alpha \sqrt{g_{11} (u')^2 + 2 g_{12} u' v' + g_{22} (v')^2}\, dt$$

Bu düstur səth üzərində əyri qövsünün uzunluğu düsturudur və S=S(t) kimi təyin olunur. Diferensiallasaq, alarıq:

$$ds = \sqrt{g_{11} (u')^2 + 2 g_{12} u' v' + g_{22} (v')^2}\, dt \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \sqrt{g_{11} (u')^2 + 2 g u' v' + g_{22} (v')^2}$$

Axırıncı düstur göstərir ki, səth üzərində əyri qövsünün uzunluğunu hesablamaq üçün səthin I kvadratik formasının əmsalları məlum olmalıdır. Səth üzərində I kvadratik forma metrika müəyyən etdiyindən bəzən ona səthin metrikası və ya metrik forması deyilir.

Məlumdur ki, hər bir həndəsə öz çevrilməsi və metrikası ilədigərlərindən fərqlənir. Məsələn, Ekvilid həndəsəsi, hiporbolik həndəsə, sferik həndəsələrin çevrilmələrinə və məsafənin təyin edilməsinə əsaslanır.

3. Səth üzərində iki əyri arasında bucağın təyini

Səthin I kvadratik formadan istifadə edərək səth üzərində iki əyri arasında bucağı təyin etmək olar. Fərz edək səth üzərində $\gamma_1, \gamma_2 \in \phi,$ əyriləri verilmişdir.

$$\gamma_1 \cap \gamma_2 = M, \varphi = (\gamma_1 \wedge \gamma_2), \varphi = (d\vec{r} \wedge \delta\vec{r})$$

Məlumdur ki, iki əyri arasındakı bucaq onların toxunanları arasındakı bucağa deyilir. I əyri üzrə diferensialı $d\vec{r}$ ilə, II əyri üzrə diferensialı isə $\delta\vec{r}$ ilə işarə edək.

$$\gamma_1 : r(u_1(t), v_1(t)), \quad \gamma_2 : r(u_2(t), v_2(t)); \qquad , dr \cdot \delta r = |dr| : |\delta r| \cos u,$$

$$d\vec{r} = \vec{r}_n + \vec{r}_v dv \qquad \delta\vec{r} = \vec{r}_u \delta v + \vec{r}_v \delta_v$$

$$\cos u = \frac{d\vec{r} \cdot \delta\vec{r}}{|d\vec{r}| \cdot |\delta\vec{r}|} = \frac{(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)(\vec{r}_n \delta_u + \vec{r}_v \delta_v)}{\sqrt{(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)^2}\sqrt{(\vec{r}_v \delta_u + \vec{r}_v \delta_v)^2}}$$

$$\cos u = \frac{g_{11} du\delta u + g_{12}(du\delta v + dv\delta u) + g_{22} dv\delta v}{\sqrt{g_{11}(du)^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}(dv)^2}\sqrt{g_{11}(\delta u)^2 + 2g_{12}\delta u\delta v + g_{22}(\delta v)^2}}$$

Bu düsturdan görünür ki, səth üzərində iki əyri qövs arasındakı bucağı təyin etmək üçün səthin I kvadratik formasının əmsalları məlum olmalıdır. Bu düsturu səth üzərindəki əyri xətli kordinant şəbəkəsinin xətləri arasındakı bucağın təyininə tətbiq edək.

$$u : u = const \qquad (\gamma_1) \qquad v : v = const \quad (\gamma_2)$$

$$dv = 0, \qquad \delta u = \gamma \ \cos u = \frac{g_{12} du\delta v}{\sqrt{g_{11}(du)^2}\sqrt{g_{22}(\delta v)^2}} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \Rightarrow \cos u = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}$$

sətt üzərindəki əyrixətli koordinant xətləri arasındakı bucaq düsturudu. Əgər

$$(u)+(v) \Rightarrow (u)^\wedge(v) = 90^0 \quad \cos 90^0 = 0 \Rightarrow g_{12} = 0\,.$$

Buradan alınırki, sətt üzərindəki əyrixətli koordinat xətləri bir-birinə perpendikulyar olduqda səthin I kvadratik formasının koordinatları arasındakı bucaq bərabər olur.

$$g_{12} = 0 \Rightarrow \cos\varphi = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} = 0 \Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow (u)^\wedge(v) = 90^0 \qquad (u)\perp(v)$$

Səth üzərindəki əyri xətli kordinat şəbəkəsini əyrilərinin ortoqonal olması üçün səthi I kvadratik formasının xətləri arasındakı bucağın 0 bərabər olması həm zəruri, həm də kafidir.

4. Səth üzərindəki oblastın sahəsinin təyini.

Səth üzərində $D \in \phi$ oblasdı verildikdə D oblastının sərhəddi çevrə ilə homomorfdursa , onda onun sahəsini təyin etmək üçün Qrin düsturlarından istifadə olunur. Belə oblastın sahəsinin tənliyi $z = f(x, y)$ şəklindədirsə , onda

$$S(F) = \iint_D \sqrt{1 + (f_x')^2 + (f_y')^2}\,dxdy$$

olur.Səthin radiusu vektorun bir tənliyi şəklində verildiyini fərz etsək oda bu düstur

$$S(F) = \iint_D \sqrt{g}\,dudv = \iint_D \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}}\,dudv$$

səthin 1 kvadratik formasını tətbiqi sonrakı movzuda daha geniş izah olunur. Səthin kvadratik fomasına aşağıdakılar aidir :

1.Səthin normal vektorunun uzunluğunun tapılmasında ;

2. Səth üzərində əyri qovsünun uzunluğunun hesablanmasında;

3. Səth üzərindəki 2 qovs arasınadkı bucağın hesablanmasıda;

4. Səth üzərindəki hamar oblasdın hesablanmasında.

26-cı mühazirə. Səthin 2 kvadratik forması.

Səthin əsas kvadratik formalarından biridə onun II kvadratik formasıdı. Bunun üçün əvvəlcə səthin ort normal fektoru anlayışını verək.

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) \in c^k \ (k \geq 3) \quad (1) \quad d\vec{r} = \vec{r_u}du + \vec{r_v}dv$$

Onda, alarıq: $$\vec{N} = [\vec{r_u}, \vec{r_v}], \vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{|[\vec{r_u}, \vec{r_v}]|}{\sqrt{g}} \quad \vec{n} = \frac{[\vec{r_u}, \vec{r_v}]}{\sqrt{g}}$$

Tərif: Səthin radius vektorunu iki tərtib diferensiyalın ort normal vektoru üzərindəki izinə səthin 2 kvadratik forması deyilir.

$$\varphi_2 = d^2\vec{r} \cdot \vec{n}$$

$$d^2\vec{r} = d(d\vec{r}) = d(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv) = d(\vec{r}_u du) + d(\vec{r}_v dv) = d\vec{r}_u du + \vec{r_u} d(du) + d\vec{r}_v dv + \vec{r}_v d(dv)$$

$$d\vec{r}_u = \frac{\delta \vec{r}_u}{\delta u} du + \frac{\delta \vec{r}_v}{dv} dv \quad d\vec{r}_v = \frac{\delta \vec{r}_v}{\delta u} du + \frac{\delta \vec{r}_v}{\delta v} dv$$

kimi yazıla bilər. Xüsusi törəmələri aşağıdakı kimi işarə edək

$$\frac{\delta \vec{r}_u}{\delta u} = \vec{r}_{uu}, \ \frac{\delta \vec{r}_u}{\delta v} = \vec{r}_{uv}, \ \frac{\delta \vec{r}_v}{\delta u} = \vec{r}_{vu}, \ \frac{\delta \vec{r}_v}{\delta u} = \vec{r}_{vv},$$

$\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} = \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}$ olduğuna görə $\vec{r}_{uv} = \vec{r}_{vu}$ və $d(du) = d^2u$, $d(dv) = d^2v$ olar. Onda

$$d^2\vec{r} = (\vec{r}_{uu}du + \vec{r}_{uv}dv)du + \vec{r}_u d^2u + (\vec{r}_{uv}du + \vec{r}_{vv}dv)dv + \vec{r}_v d^2v \quad \text{və ya}$$

$$d^2\vec{r} = \vec{r}_{uu}(du)^2 + 2\vec{r}_{uv}dudv + \vec{r}_{vv}(dv)^2 + \vec{r}_u d^2u + \vec{r}_v d^2v$$

kimi yazılar. Səthin II kvadratik formasını hesablamq üçün axırıncınun hər iki tərəfini $\vec{n}$-vektoruna skalyar vuraq: Onda alarıq:

$$\varphi_2 = \vec{n}d^2\vec{r} = \vec{n}\left[\vec{r}_{uu}(du)^2 + 2\vec{r}_{uv}dudv + \vec{r}_{vv}(dv)^2 + \vec{r}_u d^2u + \vec{r}_v d^2v\right] \quad \text{və ya}$$

$$\varphi_2 = (\vec{n} \cdot \vec{r}_{uu})(du)^2 + 2(\vec{n} \cdot \vec{r}_{uv})dudv + (\vec{n} \cdot \vec{r}_{vv})(dv)^2.$$

$$\begin{cases} h_{11} = \bar{n} \cdot \bar{r}_{uu} \\ h_{22} = \bar{n} \cdot \bar{r}_{vv} \\ h_{12} = \bar{n} \cdot \bar{r}_{uv} \end{cases} \qquad (2)$$

işarələmələrini qəbul edək və sonuncuda yerinə yazsaq

$$\varphi_2 = h_{11}(du)^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}(dv)^2 \qquad (3)$$

kimi səthin iki kvadratik formasının ifadəsini alarıq.

Deməli, səthin ikinci kvadratik forması səthin radius-vektorunun II tərtibdən xüsusi törəmələri və normal vektor vasitəsi ilə təyin edilir. I kvadratik forma isə yanlız radius vektorlarını I tərtibdən xüsusi törəmələri ilə təyin edilmişdir. (2) düsturlarını təkmilləşdirməyə çalışsaq $\vec{n} = \frac{\left[\vec{r}_u, \vec{r}_v\right]}{\sqrt{g}}$,olduğundan $h_{11} \frac{\left[\vec{r}_u, \vec{r}_v\right] \cdot \vec{r}_{uu}}{\sqrt{g}} = \frac{\left(\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_{uu}\right)}{\sqrt{g}}$ olar.

Deməli,
$$\begin{cases} h_{11} = \dfrac{\left(\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_{uu}\right)}{\sqrt{g}} \\ h_{12} = h_{21} = \dfrac{\left(\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_{uv}\right)}{\sqrt{g}} \\ h_{22} = \dfrac{\left(\vec{r}_u, \vec{r}_v \overrightarrow{rvv}\right)}{\sqrt{g}} \end{cases} \qquad (4)$$

düsturları səthin II kvadratik formasının əmsallarını müəyyən etməyə kömək edir. Burada səthin normal vektoru iştirak etmir, yalnız səthin radius-vektorunun I və II tərtibdən xüsusi törəmələri iştirak edir.

Səthin II kvadratiq formasının əmsallarının başqa bir düsturla da ifadə etmək olar: Məlumdur ki, $\vec{n} \cdot \vec{r}_u = \vec{n} \cdot \vec{r}_v = 0$ hər birinin u və v dıyişənlşrinə görə xüsusi törəmələrini alaq. Onda aşağıdakıları yazmaq olar:

$$\bar{n} \cdot \bar{r}_{uu} + \bar{n}_u \cdot \bar{r}_{uv} = 0 \Rightarrow \bar{n} \cdot \bar{r}_{uu} = -\bar{n}_u \cdot \bar{r}_{uv}, \; \bar{n}_v \cdot \bar{r}_u + \bar{n} \cdot \bar{r}_{uv} = 0 \Rightarrow \bar{n} \cdot \bar{r}_{uv} = -\bar{n}_v \cdot \bar{r}_u$$

$$\bar{n}_u \cdot \bar{r}_v + \bar{n} \cdot \bar{r}_{vu} = 0 \Rightarrow \bar{n} \cdot \bar{r}_{vu} = -\bar{n}_u \cdot \bar{r}_v \quad \bar{n}_v \cdot \bar{r}_v + \overline{nr}_{vv} = 0 \Rightarrow \overline{nr}_{vv} = -\bar{n}_v \cdot \bar{r}_v$$

(2) düsturlarına görə yazmaq olar:

$$h_{11} = -\bar{n}_u \cdot \bar{r}_u h_{12} = -\bar{n}_v \cdot \bar{r}_u = -\bar{n}_u \cdot \bar{r}_v h_{22} = -\bar{n}_v \cdot \bar{r}_v \qquad (5)$$

(5) düsturları səthin II kvadratik formasının əmsallarının ifadəsini verir. Bu düsturun o birilərindən fərqi ondadir ki, burada radius vektorun və ort normalın I tərtib törəməsindən istifadə olunur. Səthlər nəzəriyəsində hər 3 düsturdan istifadə olunur.

Misal: $\vec{r} = (u\cos v, u\sin v, bu)$ səthinin II kavadratik formasını hesablayın .

Həlli: $\bar{r}_u=(\cos v,\sin v,b)$, $\bar{r}_v=(-u\sin v,u\cos v,b)$

,

$\bar{r}_{uu}=(0,0,0)$, $\bar{r}_{uv}=(-\sin v,\cos v,0)$, $\vec{r}_{vv}=(-u\cos v,-u\sin v,0)$

$$g_{11}=1,\ g_{12}=0, g_{22}=a^2+b^2, g=a^2+b^2, h_{11}=0\begin{vmatrix}\cos v & \sin v & 0\\ -u\sin v & u\cos v & b\\ -\sin v & \cos v & 0\end{vmatrix}=-b,$$

$$h_{12}=-\frac{b}{\sqrt{u^2+b^2}},\quad \begin{vmatrix}\cos v & \sin v & 0\\ -u\sin v & u\cos v & b\\ -u\cos v & -u\sin v & 0\end{vmatrix}=-b\cdot 0\Rightarrow h_{22}=0\quad \varphi_2=-\frac{bdudv}{\sqrt{u^2+v^2}}.$$

27-ci mövzu. Səth üzərində əyrinin normal əyriliyi.

Fərz edək $\phi\in C^k$ $(k\geq 3)$ səthinin $\vec{r}=\vec{r}\ (u,v)$ parametrik tənlikləri ilə verilmişdir. Bu səth üzərində hər hansı $\gamma\in\phi$ əyrisini götürək. Əyrinin tənlikləri $\gamma: u=u(s),\quad v=v(s)$ kimi təbi parametirlərlə verilmişdir. Onda səth üzərində əyrinin tənlikləri $\vec{r}=\vec{r}\ (u(s),\ v(s))$ kimi ifadə olunar. Əyrinin t.bii bilirik ki, $\frac{d\bar{r}}{ds}=\bar{\tau}$ əyrinin toxunan ort vektorudur.

$$\vec{r}=(u,v)\quad \frac{d\vec{r}}{ds}=\vec{r}_u\frac{du}{ds}+\vec{r}_v\frac{dv}{ds}$$

indi $\frac{d\vec{r}}{ds}=k\vec{v}$ təyin edək. $\bar{v}$ normal ort vektor, k-isə γ-nın normal əyriliyidir. $\vec{\tau}=\vec{r}_u\frac{du}{ds}+\vec{r}_v\frac{dv}{ds}$

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds}=\frac{d}{ds}\left(\vec{r}_u\frac{du}{ds}\right)+\frac{d}{ds}\left(\vec{r}_v\frac{dv}{ds}\right)=\frac{d\vec{r}_u}{ds}\frac{du}{ds}+\vec{r}_u\frac{d}{ds}\left(\frac{du}{ds}\right)+\frac{d\vec{r}_u}{ds}\frac{dv}{ds}+\vec{r}_v\frac{d}{ds}\left(\frac{dv}{ds}\right)$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds}=\left(\frac{\delta\vec{r}_u}{\delta u}\frac{du}{ds}+\frac{\delta\vec{r}_v}{\delta v}\frac{dv}{ds}\right)\frac{du}{ds}+\vec{r}_u\frac{d^2u}{ds^2}+\left(\frac{\delta\vec{r}_u}{\delta u}\frac{du}{ds}+\frac{\delta\vec{r}_v}{\delta v}\frac{dv}{ds}\right)+\frac{dv}{ds}+\vec{r}_v\frac{d^2v}{ds^2}$$

$$\frac{d\vec{r}}{ds}=\left(\vec{r}_{uu}\frac{du}{ds}+\vec{r}_{uv}\frac{dv}{ds}\right)\frac{du}{ds}+\left(\vec{r}_{uv}\frac{du}{ds}+\vec{r}_{uv}\frac{dv}{ds}\right)\frac{dv}{ds}+\vec{r}_u\frac{d^2u}{ds^2}+\vec{r}_v\frac{d^2v}{ds^2}$$

$$k\vec{v}=\vec{r}_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2\vec{r}_{uv}\frac{du}{ds}\cdot\frac{dv}{ds}+\vec{r}_{vv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2+\vec{r}_u\frac{d^2u}{ds^2}+\vec{r}_v\frac{d^2v}{ds^2}\qquad (*)$$

Səthin M nöqtəsində ort normal vektoru $\vec{n} = \frac{[\vec{r_u}, \vec{r_v}]}{\sqrt{g}}$ olduğu məlumdur. Odur ki, axırıncı bərabərliyin hər tərəfini $\vec{n}$ ort vektoruna skalyar vuraq.

$$(k\vec{v})\vec{n} = (\vec{n} \cdot \vec{r_{uu}})\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2(\vec{n} \cdot \vec{r_{uv}})\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + (\vec{n} \cdot \vec{r_{uv}})\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + (\vec{n} \cdot \vec{r_u})\frac{d^2u}{ds^2} + (\vec{n} \cdot \vec{r_v})\frac{d^2v}{ds^2}$$

$(k\vec{v}) \cdot \vec{n} = k_n$ ilə işarə edək. k_n səth üzərindəki əyrini normal əyrilik vektorunu həmin nöqtədən səthin normal vektorunun üzərindəki izidir. Ona görədə həmin izin k_n qiymətinə səth üzərindəki əyrinin normal əyriliyi deyilir.

Əgər $(\vec{n} \wedge \vec{v}) = \theta$ olarsa, onda $k_n = \cos\theta$ bəzən bu teorim Menye teoremi adlanır. Menye teoremi səth üzərindəki əyrinin əyriliyi ilə onun normal əyriliyi arasında əlaqə yaradır. Əgər $\theta = 0^0,\ 180^0$ olarsa onda $k_n = k_1 = \pm k$ hər iki halda $|k_n| = k$ burada nəticə olaraq çıxır ki, səth üzərindəki əyrinin normal ort vektoru səthin həmin nöqtədəki normal vektoru ilə üst-üstə düşərsə ,ona əyrini normal əyriliyi ekstremal qiymətlər alır. Yəni əgər $\vec{n}\ \omega\ \vec{v}$ olarsa $k_n = k,\quad \vec{n}\ \overline{\omega}\ \vec{v}$ olarsa , $k_n = -k$ qalan hallarda $-1 < \cos\theta < 1$ olar. Deməli onda $-k \le k_n \le k$ alınır.

Bu o deməkdir ki, səth üzərində verilmiş nöqtədən keçən bütün əyrilərin içərisində elə iki əyri var ki bunların birinin normal ort vektoru həmin nöqtədəki səthin normalı ilə eyni istiqamətli, ikincinin normal ort vektoru isə həmin nöqtədə səth normalının əks istiqaməti üzrə yönəlmiş olur. Normal əyrilik ekstermal qiymətlər almadıqda bu qimətlərin arasında dəyişir.

İndi səthin normal əyriliyinin ümumui şəkildə düsturunu müəyyən edək. (*) ifadəsini ort normal vektora skalyar vurub I və II kvadratik formaların əmsalları düsturlarından istifadə etsək, belə yazmaq olar. $k_n = h_{11}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2h_{12}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + h_{22}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$ və ya

$$k_n = \frac{h_{11}(du)^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}(dv)^2}{ds^2} \qquad k_n = \frac{h_{11}(du)^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}(dv)^2}{g_{11}(du)^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}(dv)^2} \quad (**)$$

səth üzərindəki əyrini normal əyrilik düsturudur. Bu düsturdan görünür ki, sürətdə ikinci kvadratik formanın məxrəcdə birinci kvadratik formanın əmsalları var. du:dv və ya dv:du səth üzərindəki əyrinin toxunan vektorunun istiqamətini müəy-yən edir.

Deməli, əyrinin normal əyriliyi yaınız verilmiş nöqtədəki əyrinin toxunan vektorunun istiqamətindən aslıdı. Fərz edək ki, dv≠0, onda (**) münasibətinin sürət və məxrəcini $(dv)^2$ bölsək $\left(\frac{du}{dv}=\lambda\right)$ kimi işarələsək, $k_n=\frac{h_{11}\lambda^2+2h_{12}\lambda+h_{22}}{g_{11}\lambda^2+2g_{12}\lambda+g_{22}}$ kimi alarıq. Bu düsturdan gğrünür ki, səth üzərindəki əyrinin normal əyriliyi ancaq əyriyə toxunanın istiqamətverici vektorundan aslıdır.

Nəticə: Əgər səth üzərində M nöqtəsindən keçən $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3.....$ eyni toxunan vektorlarına malikdirsə onda, bunların hər biri üçün k_n qiymıəti eyni olur. Başqa sözlə, səth üzərində verilmiş nöqtədə eyni toxunan vektora malik olan bütün əyrilərin normal əyrilikləri eyni olur.

Toxunan vektor dəyişdikcə əyrinin normal əyriliyi də əyişir, yuəni normal əyriliyin qiyməti toxunanın istiqaməti ilə təyin olunur.

28-ci mövzu. Səth üzərində əyrinin əyrilik indikatriası və səth üzərində nöqtələrin təsnifi.

Fərz edək Φ səthi ən azı 3 tərtibdən hamar səthdir. İsbat etdik ki, Səth üzərində əyrinin nornal əyriliyi $k_n=\frac{\varphi_2}{\varphi_1}=\frac{h_{11}(du)^2+2h_{12}dudv+h_{22}(dv)^2}{g_{11}(du)^2+2g_{12}dudv+g_{22}(dv)^2}$ ilə hesablanır. Əgər, $h_{11}=h_{12}=h_{22}=0\Rightarrow k_n=0$ Lakin, məlumdur ki, bu o zaman olar ki, əyri düz xəttə çevrilmiş olsun. Odur ki, fərz edək bu əmsallardan heç olmasa biri sıfırdan fərqlidir. Verilmiş M nöqtəsində buna T_m toxunan müstəvisini keçirək. Aşkardır ki, Səth üzərində yerləşən və M-dən keçən $\gamma_1,\gamma_2,....,\gamma_i,...$ əyrilərinin toxunma vektorları T_m üzərində olacaqdır. Həmin toxunan vektorlar $\gamma_1-\overrightarrow{a_1},\ \gamma_2-\overrightarrow{a_2},.....,\gamma_i-\overrightarrow{a_i},.....$ olsun. $\overrightarrow{a_i}//T_m$ hər bir əyrini üşün əyriliklər uyğun olaraq $\gamma_1-k_1,\ \gamma_2-k_2,.....,\gamma_i-k_i.....$ olsun. T_m üzərində $\gamma_1,\gamma_2,....,\gamma_i,...$ əyrilərinin ort vektorları istiqamətində M-dən başlayaraq $MP=\frac{\vec{\tau}}{\sqrt{|k_n|}}$ parçalarını ayıraq. $\overrightarrow{MP}$ vektorunu $\vec{\tau}$-nun əks istiqamətində də ayıraq, yəni $MP=\pm\frac{\vec{\tau}}{\sqrt{|k_n|}}$. P nöqtələri çoxluğunu müəyyən edək: T_m üzərində $\left(M,\overrightarrow{r_u},\ \overrightarrow{r_v}\right)$ afin sistemi vardır, onların koordinatları P(x,y) olsun. $\overrightarrow{MP}=x\overrightarrow{r_u}+y\overrightarrow{r_v},\ \vec{\tau}=\overrightarrow{r_u}\frac{du}{ds}+\overrightarrow{r_v}\frac{dv}{ds},$

$$x\vec{r}_u + y\vec{r}_v = \pm\frac{\vec{r}_u\frac{du}{ds} + \vec{r}_v\frac{dv}{ds}}{\sqrt{|k_n|}}$$ Məlumdur ki, $(\vec{r}_u, \vec{r}_v)$ sistemi xətti asılı deyil. $$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{k_n}}\frac{du}{ds} \\ y = \frac{1}{\sqrt{k_n}}\frac{dv}{ds} \end{cases}$$

Beləliklə, normal əyrilik dusturundan istifadə edərək, T_m üzərindəki P nöqtəsinin kordinatlarını təyin etmiş olarıq. Məlumdur ki,

$$k_n = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = h_{11}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2h_{12}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + h_{22}^2\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 \quad \begin{cases} \frac{du}{ds} = x\sqrt{|k_n|} \\ \frac{dv}{ds} = y\sqrt{|k_n|} \end{cases}$$ yerinə yazsaq,

$$k_n = h_{11}x^2|k_n| + 2h_{12}xy|k_n| + h_{22}y^2|k_n|, \quad h_{11}x^2 + 2h_{12}xy + h_{22}y^2 = \pm 1$$

Beləliklə, $P(x, y) \in T_m$ belə bir tənliyi ödəyir, şərtə görə h_{ij} -da biri sıfırdan fərqlidir. Bu tənlik, səthin verilmiş nöqtəsində **əyrilik indikatrisası** adlanır. Bunu fransız alimi Düpen kəşf etdiyinə görə bəzən **Düper indikatrisası** da adlanır.
Bu indikatrisasından istifadə edərək səth nöqtələrnin təsnifini verə bilərik.
$h = h_{11}h_{22} - h_{12}^2$ II kvadratik formasının diskiriminantıdır. Yuxarıdakı tənlik
$h < 0$ olduqda hiperbola əyrisini verir. Belə səth nöqrəsinə hiperbolik nöqtə adı verilir.
$h > 0$ olduqda ellips əyrisini müəyyən edir. Belə nöqtə. elliptik nöqtə adlanır.
h=0 olduqda parabola əyrisini müəyyən edir. Səthin belə nöqtəsi parabolik nöqtə adlanır.

Ellipsoid üzərindəki nöqtələr elliptik nöqtələr, hiperboloid üzərindəki nöqtələr hiperbolik nöqtələrdir, eləcə də ellipik paraboloid və hiperbolik paraboloid üzərindəki nöqtələrhiparbolik nöqtələrdir.

29-cu mövzu. Səthin **baş istiqamətləri.**

Müstəvidə iki tərtibli xətlərin baş istiqamətləri olduğu kimi səth üzərində də əyrilərin baş istiqamətlərindən danışmaq olar. Gördük ki, səthin hər bir nöqtəsində əyrilik indikatriası vardır. Əyrilik indikatriası ellips, hiperbola, parabola əyrisi ola bilər. Başqa sözlə səth üzərindəki nöqtə elliptik, parabolik, hiperbolik tipə aid ola bilər.

Tərif. Səth üzərindəki nöqtədə əyrilik indikatriasının baş istiqamətlərinə həmin nöqtədə səthin baş istiqamətləri deyilir.

Aydındır ki, əyri ellips və ya hiperbola tiplidirsə, onun iki müxtəlif baş istiqamətləri olur.

Parabola tipli nöqtələrdə səthin bir baş istiqaməti olur.

Əyrilik indikatriası çevrə olduqda çevrənin sonsuz sayda baş istiqamət-ləri olduğuna görə həmin nöqtədə əyrinin baş istiqamətləri sonsuz sayda olur.

Əyrinin iki istiqaməti o zaman qoşma adlanır ki, onlar bir-birinə ortoqonal və əyrilik indikatriasına nəzərən qoşma olsunlar.

Fərz edək M nöqtəsində əyrilik indikatriasın iki istiqamətini seçmişik. Bunların qoşma olması üçün

1). $d\vec{r} \perp \delta\vec{r} \Rightarrow d\vec{r} \cdot \delta\vec{r} = 0$,yəni ortoqonal olmalıdırlar.

2). γ indikatrisasina nəzərən qoşma olmalıdırlar, yəni $d\bar{n} \cdot \delta\bar{r} = 0$ və ya $d\,\bar{r} \cdot \delta\bar{n} = 0$ olmalıdır.

Bu iki şərtdən istifadə edərək səth üzərində iki istiqamətin bir-birilə qoşmalığı üçün riyazi ifadəni almaq olar.

Əvvəlcə 1,2 şərtlərini açıq şəkildə yazaq. Səth tənliyi belədir:

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v), \quad d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv, \quad \delta\vec{r} = \vec{r}_u \delta u + \vec{r}_v \delta v, \quad \delta\vec{n} = \vec{n}_u \delta u + \vec{n}_v \delta v$$

kimi yazsaq (1) və (2) şərtlərindən alarıq:

$$\left(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv\right)\left(\vec{r}_u \delta u + \vec{r}_v \delta v\right) = 0$$
$$\left(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv\right)\left(\vec{n}_u \delta u + \vec{n}_v \delta v\right) = 0$$

Bu iki şərtdən istifadə edərək səthin üzərindəki əyrinin istiqamətinin baş istiqaməti olması düsturunu almaq olar.

30-cu mövzu. **Rodriq düsturu.**

Rodriq düsturunu səth üzərində verilmi. Iki istiqamətin baş istiqamət olması şərtini müəyyən edən düsturu ifadə edir.

Rodriq fransız riyaziyyatçısıdır. Rodriq düsturu aşağıdakı teorem şəkilində verilir.

Rodriq teoremi: Səth üzərindəki $d\vec{r}$ istiqamətinin baş istiqaməti olması üçü $d\vec{n} = -kd\vec{r}$ ödənməsi həm zəruri, həm də kafidir.

Zəruriliyim isbatı: Fərz edək $d\vec{r}$ baş istiqamətdir. Onda baş istiqamətin tərifinə görə $d\vec{r} \cdot \delta\vec{r} = 0$ olmalıdır. $\vec{n}^2 = 1$ olduğuna görə $2\bar{n}d\bar{n} = 0 \Rightarrow \bar{n} \perp d\bar{n}$ alınır, həm də məlumdur ki, $\vec{n} \perp T_m$. Buradan alırıq ki, $d\vec{n} // T_m$ yəni, normalın diferensialı toxunan müstəvi üzərində yerləşir. Bu isə $d\vec{n} = \lambda d\vec{r}$ olduğunu göstərir.·

Bu münasibət onun nəticəsidir ki, $d\vec{r}$ baş istiqamət olduqda $d\vec{r}\cdot\delta\vec{r}=0$ şərti ödənir. Lakin, $d\vec{n}\cdot\delta\vec{r}$ münasibətindən $d\vec{n}=\lambda d\vec{r}$ $d\vec{n}\delta\vec{r}=\lambda d\vec{r}\delta\vec{r}$ alınır. $d\vec{n}\cdot\delta\vec{r}=0$ $d\vec{n}\delta\vec{r}-\lambda d\vec{r}\delta\vec{r}=0$ $(d\vec{n}-\lambda d\vec{r})\delta\vec{r}=0\Rightarrow d\vec{n}=\lambda d\vec{r}$.

Göstərmək olar ki, $\lambda=-k$ olar. Qövs uzunluğu s olarsa, $\frac{dn}{ds}=\lambda\frac{d\bar{r}}{ds}$

oklar. Buradan $\frac{dn}{ds}\cdot\frac{dr}{ds}=\lambda\left(\frac{dr}{ds}\right)^2$ yazmaq olar. Səth üzərindəki əyrinin normal əyriliyinin düsturu $k_n=\frac{h_{11}(du)^2+2h_{12}dudv+h_{22}(dv)^2}{ds^2}$ olduğuna görə $-\lambda=k$ və $d\vec{n}=-kd\vec{r}$. Rodriq düsturu isbat olundu.

Kafiliyin isbatı: Fərz edək Rodriq düsturu doğrudur , yəni, $d\vec{n}=-kd\vec{r}$-. Məlumdur ki, $dr,\ \delta r\ //T_m$ müstəvisi üzərində $d\vec{r}$ -ə görə $\exists\delta\vec{r}$ toxun vektoruna malik əyri seçmək olar ki, $d\vec{r}\cdot\delta\vec{r}=0$ ödənsin, yəni toxunan müstəvi üzərində verilmiş əyri ilə ortoqanal toxunana malik olan əyri götürək. Rodriq düsturunun hər tərəfini $\delta\vec{r}$-ə vuraq. $d\vec{n}\delta\vec{r}-\lambda\delta\vec{r}\delta\vec{r}=0$ $d\vec{n}\cdot\delta\vec{r}=0$. Bu göstərir ki, həqiqətən $\delta\vec{r}$ istiqaməti qoşmalıq şərtini ödəyir.

Demək, kafilik isbat olundu.,yəni $d\vec{n}=-kd\vec{r}$ olduqda $d\vec{r}$-in istiqaməti baş istiqamət olur.

31-ci mövzu. Səthin baş əyriləri.

Əvvəlki mövzuda göstərdik ki, $d\vec{n}=-kd\vec{r}$ olduqda səth üzərindəki əyrinin $d\vec{r}$ istiqaməti baş istiqamət üzrə olur. Səth hamar olduqda hər bir nöqtə eyni və ya müxtəlif baş istiqamətlər vardır. Bunun üçün Rodriq düsturundan istifadə edək. Rodriq düsturunun sağ və sol tərəfini açıq şəkildə

yazaq: $dn=\frac{\delta n}{\delta u}du+\frac{\delta n}{\delta v}dv=n_u du+n_v dv$

$d\vec{r}=\overrightarrow{r_u}du+\overrightarrow{d_v}dv$ $v\overrightarrow{n_u}du+\overrightarrow{n_v}dv=-k\left(\overrightarrow{r_u}du+\overrightarrow{r_v}dv\right)$

Hər iki tərəfi əvvəlcə $\overrightarrow{r_n}$-ya, sonra isə $\overrightarrow{r_v}$-ə skaliyar vuraq:

$$\begin{cases}\left(\overrightarrow{r_u}\cdot\overrightarrow{n_u}\right)du+\left(\overrightarrow{r_u}\cdot\overrightarrow{n_v}\right)dv=-k\left(\overrightarrow{r_u}^2du+\overrightarrow{r_u}\overrightarrow{r_v}dv\right)\\ \left(\overrightarrow{r_v}\cdot\overrightarrow{n_u}\right)du+\left(\overrightarrow{r_v}\cdot\overrightarrow{n_v}\right)dv=-k\left(\overrightarrow{r_u}\cdot\overrightarrow{r_v}+\overrightarrow{r_v}^2dv\right)\end{cases}$$

I və II kvadratik formanın əmsallar düsturundan istifadə edərək sistemi belə yazaq: $\begin{cases} -h_{11}du - h_{12}dv = -k(g_{11}du + g_{12}dv) \\ -h_{12}du - h_{22}dv = -k(g_{12}du + g_{22}dv) \end{cases} \Rightarrow \dfrac{h_{11}du + h_{12}dv}{h_{12}du + h_{22}dv} = \dfrac{g_{11}du + g_{12}dv}{g_{12}du + g_{22}dv}$

Kəsrdən qurtarmaq üçün vurub açsaq,

$$(h_{11}du + h_{12}dv)(g_{12}du + g_{12}dv) - (h_{12}du + h_{22}dv)(g_{11}du + g_{12}dv) = 0$$

$$(h_{11}g_{12} - h_{12}g_{11})(du)^2 + (h_{11}g_{22} + h_{12}g_{22} - h_{12}g_{12} - g_{11}h_{22})dudv + (h_{12}g_{22} - h_{22}g_{12})(dv)^2 = 0$$

$$(h_{11}g_{12} - h_{12}g_{11})(du)^2 + (h_{11}g_{22} - h_{22}g_{12})dudv + (h_{12}g_{22} - h_{22}g_{12})(dv)^2 = 0 \quad (*)$$

Bu tənlik Rodriq düsturunun nəticəsidir.

Deməli, bu tənlikdə *du:dv* və ya *dv:du* istiqaməti baş istiqamət müəyyən edir. Aydındır ki, ya $du \neq 0$ və ya $dv \neq 0$-dır.

Fərz edək, $dv \neq 0$ onda $(*)$–un hər tərəfini *dv*-yə bölək $\left(\dfrac{du}{dv}\right) = \lambda$ onda

$$\underbrace{(h_{11}g_{12} - h_{12}g_{11})}_{A}\lambda^2 + \underbrace{(h_{11}g_{22} - h_{22}g_{11})}_{B}\lambda + \underbrace{(h_{12}g_{22} - h_{22}g_{12})}_{C} = 0 \quad (**)$$

bu tənliyin λ-ya görə kvadrat tənliyi olduğunu nəzərə alaraq əmsalların heç olmas biri sıfırdan fərqli olduqda həllini müəyyən etmək olar. Əgər $h_{11}g_{12} - h_{12}g_{11} = 0$ olarsa $(*)$ -un hər tərəfini $(du)^2$ -ya bölərdik.

$$A(du)^2 + Bdudv + C(dv)^2 = 0$$

Onda $(*)$ tənliyi *dv:du* və ya *du:dv* istiqamətini müəyyən edən diferensial tənliyə çevrilir. Bu tənliyin inteqral əyriləri verilmiş nöqtədən küçən baş istiqamətli əyriləri müəyyən edir. Bu əyrilərə səthin baş **ə**yrilik x**ə**tl**ə**ri deyilir. Səthin baş əyrilik xətləri $(*)$ tənliyi ilə təyin olunur. Qeyd edək ki, əgər A=0, C=0, olarsa, onda tənlik Bdudv=0 şəklinə düşur bu zaman $\gamma_i : \begin{cases} du = 0 \\ dv \neq 0 \end{cases}$ $\gamma_2 : \begin{cases} du \neq 0 \\ dv = 0 \end{cases}$ əyriləri alınır. Əgər A və ya C sıfırdan fərqli olsa, onda $(*)$-un λ_1, λ_2 kimi $\left(\dfrac{du}{dv}\right)_1, \left(\dfrac{du}{dv}\right)_2$ qiymətli iki həlli olur. Bu həllərin hər biri səth üzərində baş istiqaməti müəyyən edir. Deməli ümumiyyətlə səth üzərində iki baş istiqamət vardır. Bu baş istiqamət üst-üstə düşər və ya müxtəlif ola bilər. Əgər $(*)$-da əmsallar 0 olarsa, onda ixtiyari *du* və *dv* istiqamətləri $(*)$ tənliyini oyrənir. Yəni səthin sonsuz sayda baş istiqaməti olur. Yuxarıda qeyd etmişik ki, belə səth nöqtələri ombrik nöqtələr adlanır. Bu zaman Düpen indikatrisası çevrə olur. Bu axırıncı hala diqqətlə baxaq. Qeyd etdik ki,

$A = h_{11}g_{12} - h_{12}g_{11}$

$B = h_{11}g_{22} - h_{22}g_{11}$ olduqda səth üzərindəki hər bir nöqtədə sonsuz sayda baş

$C = h_{12}g_{22} - h_{22}g_{12}$

istiqaməti olur ki, $\left.\begin{array}{l}\dfrac{h_{11}}{g_{11}}=\dfrac{h_{12}}{g_{12}}\\ \dfrac{h_{11}}{g_{11}}=\dfrac{h_{22}}{g_{22}}\\ \dfrac{h_{12}}{g_{12}}=\dfrac{h_{22}}{g_{22}}\end{array}\right] \Rightarrow \dfrac{h_{11}}{g_{11}}=\dfrac{h_{12}}{g_{12}}=\dfrac{h_{22}}{g_{22}}$ Yəni səthin I və II kvadratik formalarının uyğun əmsalları mütənasib olmalıdır. Ombrik nöqtələrdə səthin baş istiqaməti sonsuz sayda olur.Buradan belə nəticə çıxır ki, səthin baş istiqaməti sonsuz sayda olan nöqtələrdə I və II kvadratik formanın əmsalları mütənasib olur. Ümumi halda səth üzərində iki baş istiqamətvardır. Baş istiqamət üzrə olan əyrilərin normal əyriliyinə nöqtədə səthin baş əyrilikləri deyilir. Baş əyriliklər k_1 və k_2 ilə işarə olunur. $k_n=\dfrac{\varphi_2}{\varphi_1}$ normal əyrilik düsturunu çıxaran zaman $k_n=k\cos\theta$ Menye düsturunu olmış olarıq. Bu zaman isbat etdik ki, $-k\le k_n\le k$.

Deməli, sistemin verilmiş nöqtədən keçən əyrilərin normal əyrilikləri içərisində ən böyük və ən kiçik iymətlər alan səthlərin əyrilikləri vardır. Həmin əyrilərə səthin verilmiş nöqtədə əyrilik xətləri deyilir. $k_1=k$, $k_2=-k$

Həmin əyriliklərin normal əyriliklərinə verilmiş nöqtədə səthin baş əyrilikləri detilir. Əgər, k və -k olan əyriliklər baş istiqamətə yönəlmişsə, onda bu əyrilər baş əyriliklər olur. Lakin ola bilsin ki, əyriliklərin istiqaməti baş istiqamət olmasın. Eyler isbat etmişdir ki, səth üzərində verilmiş nöqtədən ixtiyari əyrinin normal əyriliyi k_n və həmin nöqtədə baş əyriliyi k_1 və k_2 olarsa onda, $k_n=k_1\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta\Rightarrow k_n=k_2(k_1-k_2)\cos^2\theta$ olar.

Bu düstur Menye teoreminin başqa şəkildə yazılışlarıdır. $\sin^2\theta\ge 0$ $\cos^2\theta\ge 0$ $\Rightarrow k_1>k_2$ olduqda $k_n\le k_1,\ k_n\ge k_2$ və $k_1,\le\ k_n\le k_2$ olar.

Bu o deməkdir ki, səth üzərində verilmiş əyrinin baş istiqaməti ndə uyğun əyriliyi həmin nöqtədən keçən digər əyrilərin normal əyrinin ekstremal qiymətləridir. Səth üzərində baş istiqaməti $(*)$ ilə əyrilik xəttinin tənliyini $(**)$ ilə yazılır.

32-ci mövzu. **Səth üzərində asimptotik xəttlər.**

$\gamma\subset\phi\subset c^k$ $(k\ge 3)$ səthi üzərində əyrinin normal əyriliyi sıfıra bərabər olan istiqamətlərə onun asimptotik istiqaməti deyilir. Məlumdur ki,səth üzərindəki əyrinin normal əyriliyi $k_n=\dfrac{h_{11}(du)^2+2h_{12}dudv+h_{22}(dv)^2}{g_{11}(du)^2+2g_{12}dudv+g_{22}(dv)^2}$ düsturu ilə hesablanır. Əgər $k_n=0$ olarsa, $h_{11}(du)^2+2h_{12}dudv+h_{22}(dv)^2=0$ (*) alınar.

(*) tənliyi ilə təyin olunan istiqamət səthin asimptotik istiqaməti adlanır. Səthin asimptotik istiqamətinin olub-olmamasını və olma şərtlərini müəyyən edək. $(*)$-u ödəyən $du:dv$ və ya $dv:du$ istiqaməti əyrinin asimptotik istiqamətini müəyyən edək. (*) tənliyini belə yazaq:

$$h_{11}\left(\frac{du}{dv}\right)^2+2h_{12}\left(\frac{du}{dv}\right)+h_{22}=0 \qquad \frac{du}{dv}=\mu \qquad h_{11}\mu^2+2h_{12}\mu+h_{22}=0 \qquad (**)$$

Bu tənlik səthin asimptotik istiqamətini müəyyən edən tənlikdir. Məlumdur ki, əgər səth müstəvi deyilsə onun iki kvadratik formasının əmsalları sıfırdan fərqlidir.

a) $h_{11}=h_{12}=h_{22}=0$ olarsa, onda $(*)$və ya $(**)$ tənliyi $\frac{du}{dv}=\mu$ ödənir. Bu halda verilmiş nöqtədə sonsuz sayda asimptotikistiqamət vardır. $h_{11}=h_{12}=h_{22}=0$ olan səthlər müstəvi səthlərdir. Müstəvi üzərində olan hər bir xətt onun asimptotik istiqamətidir.

b) $h=h_{11}\cdot h_{22}-h_{12}^2$ səthin II kvadratik formanın diskiriminantıdır. $h\neq 0$ olarsa onda, səthin verilmiş nöqtəsində iki müxtəlif asimptotik istiqaməti olur.

b_1) $h>0$ olduqda $(**)$ tənliyinin diskiriminantı sıfırdan kiçik olur. Bu zaman $\mu_1\neq\mu_2$, μ_1 və μ_2 xəyali olur. Bu halda verilmiş nöqtədə səthin həqiqi asimptotik istiqaməti olmur.

b_2)$h<0$ olanda $h_{11}\cdot h_{22}-h_{12}^2<0$ olur. $\mu_1\neq\mu_2$ həqiqi olur. Bu halda səthin iki həqiqi asimptotik istiqaməti olur. Onlar $(**)$ tənliyinin həlli ilə tapılır. Həmin asimptotik istiqaməti olan əyrilərin tənliyi isə $(*)$ diferensial tənliyinin həlli ilə tapılır.

c) h=0 olarsa $\mu_1=\mu_2$, bu halda səthin üst-üstə düşən asimptotik istiqamət alınır. Bu halda səthin verilmiş nöqtəsində bir asimptotik istiqamət olar. $\frac{h_{11}}{h_{12}}=\frac{h_{12}}{h_{22}}=t \qquad h_{11}=t\,h_{12}, \qquad h_{12}=t\,h_{22}, \qquad h_{11}=t^2h_{22}$

a,b,c halları göstərir ki, səthin asimptotik istiqaməti ya sonsuz sayda, ya iki müxtəlif həqiqi, ya üst-üstə düşən bir həqiqi və yaxud iki müxtəlif xəyali ola bilər.

Səthin asimptotik istiqaməti iki tərtibli əyrilərin asimptotik istiqamət lərinin səth üzərindəki analoqlarıdır.

Səth üzərində əyrilik və asimptotiklik xətlərin tətbiqi göstərir ki, bu əyrilərin təyin edilməsi adi diferensial tənliklərin həlli ilə sistematik bağlıdır.

Bir misala baxaq:

Misal: Helikoid səthi üçün $\bar{r} = (u\cos v, u\sin v, bv)\ \ b = const$ əyrilik xəttinin və asimptotik xəttin tənliyini yazmalı.

Həlli: $\bar{r} = (u\cos v, u\sin v, bv)\ \ b = const$

$$\bar{r}_n = (\cos v,\ \ \sin v,\ \ 0) \Rightarrow g_{11} = 1\ \ \bar{r}_v = (-u\sin v, u\cos v, b) \Rightarrow g_{22} = u^2 + b^2,\ \ g_{12} = 0$$

$$\overrightarrow{r_{uu}} = (0,0,0) \Rightarrow h_{11} = 0\quad \overrightarrow{r_{uv}} = (-\sin v,\ \ \cos v,\ \ 0),\qquad \overrightarrow{r_{vv}} = (-u\cos v,\ \ -u\sin v, 0)$$

$$\begin{vmatrix} \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & b \\ -u\cos v & -u\sin v & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow h_{22} = 0\quad h_{12} = \frac{(r_u\ r_v\ r_{uv})}{\sqrt{g}} = \begin{vmatrix} \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & b \\ -\sin v & \cos v & 0 \end{vmatrix} = \frac{-b}{\sqrt{u^2+b^2}}$$

,

Asimptotik xətlərin tənlikləri belə təyin edilir:

$$h_{11}(du)^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}(dv)^2 = 0$$

$$\frac{-2b}{\sqrt{u^2+b^2}}dudv = 0 \Rightarrow \qquad du = 0\quad \begin{cases} u = const \\ v = vt \end{cases} \text{ və ya } \begin{cases} u = ut \\ v = v_0 \end{cases}$$

Əyrilik xətlərini təyin edık, onun tənliyi belə yazılar:

$$A(du)^2 + Bdudv + C(du)^2 = 0$$

$$A = \begin{vmatrix} h_{11} & g_{11} \\ g_{12} & h_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-b}{\sqrt{g}} & 0 \end{vmatrix} = \frac{b}{\sqrt{g}}$$

$$B = h_{11}g_{22} - h_{22}g_{11} = 0,\ C \quad = h_{12}g_{22} - h_{22}g_{22} = \frac{-b}{\sqrt{g}}(u^2+b^2)A \quad = \frac{b}{\sqrt{g}}$$

$$\frac{b}{\sqrt{g}}(du)^2 - \frac{b(u^2+b^2)}{\sqrt{g}}(dv)^2 = 0 \qquad (du)^2 = (u^2+v^2)(dv)^2 \qquad (dv)^2 = \left(\frac{du}{\sqrt{u^2+b^2}}\right)^2$$

$$dv = \pm\frac{du}{\sqrt{u+b^{2^2}}} \qquad v = \pm\int\frac{du}{\sqrt{u^2+b^2}} = \pm arctg\frac{u}{b}$$

$$\gamma_1 : v = arctg\frac{u}{b}\ \text{ vəya }\ u = btgv \qquad \gamma_2 :\ v = -arctg\frac{u}{b}\ \text{ və ya }\ u = -btgv$$

33-cü mövzu. Səthin tam və orta əyriliyi.

Səthin tam əyriliyinin xassəsinə aid əsas işlər və görülən işlərin yekununu ifadə edən teorem Qausa məxsusdur. Lakin əvvəlcə səthin tam və orta əyriliklərini müayyən edək.

Rodriq düsturundan istifadə edərək, səthin hər hansı nöqtəsindən keçən əyrinin baş əyriliklərini təyin etmək olar. Əvvəlki mövzuda qeyd etmişik ki, Rodriq düsturundan istifadə edərək, səthin baş əyriliklərini təyin etmək olar.

Fərz edək $\phi \in C^k \ (k \geq 3), \quad \bar{r} = \bar{r}(u,v)$ (1)

Rodriq düsturu $d\bar{n} = -kd\bar{r}$. Burada $d\bar{r}$ – vektorunun istiqaməti baş istiqamət olmasını bilirik. Rodriq düsturunu açıq şəkildə yazaq. Onda,

$$\vec{n}_u \cdot du + \vec{n}_v \cdot dv = -k\left(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv\right)$$

Hər tərəfi skaliyar olaraq $\vec{r}_u$ və $\vec{r}_v$ vektorlarına vuraq.

$$\begin{cases} \left(\vec{n}_u \cdot \vec{r}_u\right)du + \left(\vec{r}_u \cdot \vec{n}_v\right)dv = -k\left(\vec{r}_u^{\,2} du + \vec{r}_u \vec{r}_v dv\right) \\ \left(\vec{n}_v \cdot \vec{r}_v\right)du + \left(\vec{r}_v \cdot \vec{n}_v\right)dv = -k\left(\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v du + \vec{r}_v^{\,2} dv\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -h_{11}du - h_{12}dv = -k\left(g_{11}du + g_{12}dv\right) \\ -h_{12}du - h_{22}dv = -k\left(g_{12}du + g_{22}dv\right) \end{cases}$$ *du* və *dv*-yə görə qruplaşdırsaq,

$$\begin{cases} \left(h_{11} - k\,g_{11}\right)du + \left(h_{12} - k\,g_{12}\right)dv = 0 \\ \left(h_{12} - k\,g_{12}\right)du + \left(h_{22} - k\,g_{22}\right)dv = 0 \end{cases}$$

du və *dv*-yə görə bircins tənliklər sistemi alinir. *du:dv* və ya *dv:du* səthin baş istiqamətini bildirir. Onları təyin etmək ümün sistemin determinantı sıfır olmalıdır, yəni

$$\begin{vmatrix} h_{11} - kg_{11} & h_{12} - kg_{12} \\ h_{12} - kg_{12} & h_{22} - kg_{22} \end{vmatrix} = 0$$ və ya $\left(h_{11} - kg_{11}\right)\left(h_{22} - kg_{22}\right) - \left(h_{12} - kg_{12}\right)^2 = 0$, və yaxud

$$h_{11}h_{22} + k^2 g_{11}g_{22} - kg_{11}h_{22} - kh_{11}g_{22} - h_{12}^2 + 2kh_{12}g_{12} - k^2 g_{12}^2 = 0$$

Sadələşdirsək

$$k^2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2) + k(2h_{12}g_{12} - g_{11}h_{22} - h_{11}g_{22}) + (h_{]11}h_{22} - h_{12}^2) = 0 \quad (1)$$

Bu tənliyin k_1 və k_2 kökləri səthin baş əyrilikləridir.

Tərif 1. Səthin baş əyriliklərinin hasilinə səhin tam əyriliyi deyilir.

Tərif 2. Səthin baş əyriliklərinin cəminin yarısına səhin orta əyriliyi deyilir.

Deməli, səhin tam əyriliyini $K= k \cdot k_2$, orta əyriliyini isə $H = \dfrac{k_1 + k_2}{2}$ kimi yazmaq olar. Axırıncı tənlikdən k_1 və k_2 baş əyriliklərini təyin etmək olar. Viyet teoremindən istifadə etsək

$$K = \frac{h}{g} = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \quad (2) \qquad H = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} g_{11} & h_{12} \\ g_{12} & h_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} h_{11} & g_{12} \\ h_{12} & g_{22} \end{vmatrix} \right) \quad (3)$$

alarıq. Səthin tam əyrilik düsturunun köməyilə səth nöqtələrini təsnif etmək olar. Doğurdan da (2) düsturunda $g>0$ olduğundan tam əyriliyin işarəsi II kvadratik formanın diskriminantının, yəni *h*-ın işarəsindən asılıdır. Başqa sözlə

h>0 olduqda K>0 olur, yəni nöqtə elliptik olur,

h<0 olduqda K<0 olur, yəni nöqtə hiperbolik olur,

h=0 olduqda K=0 olur, yəni nöqtə parabolik olur.

Göstərmək olar ki, səthin sadə səth olması üçün onun tam və orta əyriliklərinin sıfıra bərabər olası həm zəruri, həm də kafidir.

34-cü mövzu. Sabit əyrilikli səthlər.

$\phi \in C^k \ (k \geq 3), \quad \bar{r} = \bar{r}(u,v)$ (1) səthi o vaxt sabit əyrilikli səth adlanır ki, tam əyriliyi sabit olsun. Belə nəticə çıxır ki, müstəvidə K=0 olduğu üçün müstəvi sabit əyrilikli səthdir. Eləcə də silindr, konik səth və s.sabit əyrilikli səthlərdir. Başqa misallar da vardır.

İndi fırlanma səthləri içərisində sabit əyrilikli səthin olması şərtini müəyyən edək. Fırlanma səthinin parametrik tənliyini götürək:

$\bar{r} = \bar{r}(u,v) = (u\cos\varphi, u\sin\varphi, f(u))$ olduğundan:

$$\bar{r}_u = (\cos\varphi, \sin\varphi, f'(u)), \quad \bar{r}_\varphi = (-u\sin\varphi, u\cos\varphi, 0),$$

$$\bar{r}_{uu} = (0,0,f''(u)), \quad \bar{r}_{u\varphi} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \quad \bar{r}_{\varphi\varphi} = (-u\cos\varphi, -u\sin\varphi, 0)$$

olduğundan

$$g_{11} = 1 + (f')^2, g_{12} = 0, g_{22} = u^2; \quad h_{11} = \frac{uf''(u)}{\sqrt{u^2(1+(f')^2}}, h_{12} = 0, h_{22} = \frac{u^2 f'(u)}{\sqrt{u^2(1+(f')^2}}$$

$g_{12} = h_{12} = 0$ olduğundan koordinat xətləri olan paralellər və meridianlar əyrilik xətləridir. I və II kvadratik formanın əmsallarına əsasən səthin tam əyriliyini tapmaq olar:

$$K = \frac{h_{11} h_{22} - h_{12}^2}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} = \frac{f' \cdot f''}{u(1+(f')^2)^2} \qquad (*)$$

Fırlanma səthininsinifinə daxil olan bəzisəthlərə baxaq:

1) Sfera. Sfera səthi: meridianı $z^2 + u^2 = a^2,\ z = \pm\sqrt{a^2 - u^2},\ f(u) = \sqrt{a^2 - u^2}$

Meridian yalnız müsbət işarə ilə götürülmüşdür. Törəmələr alsaq:

$f'(u) = -\frac{u}{\sqrt{a^2 - u^2}},\quad f''(u) = -\frac{u^2}{(a^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}}$ olarsa (*) düsturuna .sasən $K = \frac{1}{a^2}$ olar. Bu onu göstərir ki, sfera sabit əyrilikli səthlər sinfinə daxildir.

2) Psevdosfera. Məlumdur ki, traktrisa əyrisinin oxy ətrafında fırlanmasından alınan səthdir. Parametrik şəkildə tənliyi belədir:

$$z = a(\ln tg\frac{t}{2} + \cos t),\ u = a\sin t,\ a = const$$

Törəmələri təyin edək.

$$z_t' = a\frac{\cos^2 t}{\sin t},\quad u_t' = a\cos t,\quad f' = \frac{z_t'}{u_t'} = ctgt,\quad f'' = \frac{df'}{du} = \frac{d(\frac{df'}{dt})}{u_t'} = -\frac{1}{a\sin^2 t\cos t}.$$

(*) düsturuna .sasən $K = -\frac{1}{a^2}$ olar. Bu onu göstərir ki, psevdosfera da sabit əyrilikli səthlər sinfinə daxildir.

3) Helikoid. Helikoid səthinin tam və orta əyriliyini təyin edək. Onun parametrik tənliyi $\vec r = (u\cos t, u\sin t, bv), b > 0$ kimi olduğundan törəmələri təyin edək:

$$\vec r_u = (\cos v, \sin v, 0),\quad \vec r_v = (-u\sin v, u\cos v, b),$$

$$\vec r_{uu} = (0,0,0), \vec r_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0),\quad \vec r_{vv} = (-u\cos v, -u\sin v, 0)$$

İndi helikoid səthinin I və II kvadratik formalarının əmsallarını təyin edək:

$$g_{11}=1,\ g_{12}=0,\ g_{22}=u^2+b^2,\ h_{11}=0, h_{22}=0,\ h_{12} = -\frac{b}{\sqrt{u^2 + b^2}}$$

Onda səthin tam və orta əyriliklərıbelə tətin olunarlar:

$$K = -\frac{b^2}{(u^2 + a^2)^2},\qquad H = 0.$$

Adətən orta əyriliyi sıfır olan səthlər minimal cəth adlanırlar. Deməli, helikoid səthi minimal səthdir.

35-ci mövzu. Səthin daxili həndəsəsi haqqında anlayış.

Səthin , yalnız I kv. formasının əmsallari vasitəsilə təyin və izah olunan nassələr, düsturlar, təkliflər və anlayışlar məcmuu səthin daxili həndəsəsini əmələ gətirir. Bu tərif göstərir ki, səthin daxili həndəsəsi, başqa sözlə, I kv. formanın həndəsəsidir. Məsələn, səth üzərindəki əyri qövsünün uzunluğu düsturu, səth üzərindəki iki əyri arasındakı bucağın təyini düsturu, əyrixətli koordinat şəbəkəsinin əyriləri arasındakı bucaq və onların ortoqonallığının müəyyən edilməsi , səth üzərindəki əyrixətli oblastın sahəsinin tğyini, səthin normal vektorunun uzunluğunun təyini və s.kimi məsələlər səthin daxili həndəsəsinə daxil olan məsələlərdəndir. Sonralar səthin daxili həndəsəsinə aid olan digər düstur və anlayışlarla da tanış olacağıq. Bunun üçün bəzi hazırlıq işləri lazımdır.

Fərz edək Evklid fəzada $F \subset E_3$ səthinin parametrik tənliyi $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ kimi verilmişdir. u və v səth üzərində əyrixətli koordinatlardır. $M \in F$ nöqtəsində (u) və (v) xətlərinə çəkilən toxunan vektorları $\vec{r}_u = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ və $\vec{r}_v = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial vc}$ kimi işarə edək. Aydındır ki, $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ vektorları xətti asılı deyillər. Çünki, $\vec{N} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v]$ vektoru səthin normal vektoru olduğundan, $\vec{N} \neq \vec{0}$ şərtini ödəyir. Odur ki, $\vec{n} = \dfrac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{\left|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]\right|}$ vektoru səthin ort normal vektoru adlanır. Bu vektor M nöqtəsində səthin $T_M = (M, \vec{r}_u, \vec{r}_v)$ toxunan müstəvisinə perpendikulyardır. Odur ki, $\vec{r}_u \perp \vec{n}$, $\vec{r}_v \perp \vec{n}$ və ya $\vec{n} \cdot \vec{r}_u = 0$, $\vec{n} \cdot \vec{r}_v = 0$ olar.

$F \subset E_3$ səthinin hər hansı M nöqtəsində $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ və $\vec{n}$ vektorlarının köməyilə $R_M = (M, \vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{n})$ lokal atin reperini düzəldək. Bu reper fəza əyrilərinin mütəhırrik reperinin səth üzərində analoqu hesab oluna bilər. Səthlər nəzəriyyəsində $R_M = (M, \vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{n})$ reperinin böyük əhəmiyyəti və tətbiqləri vardır. Səthin radius-vektorunun u və v dəyişənlərinə görə II tərtib törəmələrinin $R_M -$ in bazis vektorları üzrə ayrılışları bu tətbiqin nəticəsidir.

36-cı mövzu. Qausun törəmə düsturları

$\phi \in C^k \ (k \geq 3), \quad r = r(u,v)$ səthi üzərində mütəhərrik, yəni M nöqtəsilə yerini dəyişən $R_M = (M, \vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{n})$ reperini götürək. Afin reperin bazis vektorlarının xüsusi törəmələrinin həmin bazis vektorlar üzrə ayrılışları Qausun törəmə düsturları adlanır. İndi həmin düsturları yazaq və ayrılış əmsallarını hesablayaq.Bu düsturlar iki növdür:

-Reperin $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ bazis vektorlarının II tərtib törəmələrinin ayrılışları,

- Reperin $\vec{n}$ ort normal bazis vektorlarının I tərtib törəməsinin ayrılışı.

Bu ayrılışlar uyğun olaraq I və II növ törəmə düsturları adlanırlar.

I növ törəmə düsturları belədir:

$$\vec{r}_{uu} = \Gamma^1_{11}\vec{r}_u + \Gamma^2_{11}\vec{r}_v + \lambda_{11}\vec{n} \qquad (1)$$

$$\vec{r}_{uv} = \Gamma^1_{12}\vec{r}_u + \Gamma^2_{12}\vec{r}_v + \lambda_{12}\vec{n} \qquad (2_1)$$

$$\vec{r}_{vu} = \Gamma^1_{21}\vec{r}_u + \Gamma^2_{21}\vec{r}_v + \lambda_{21}\vec{n} \qquad (2_2)$$

$$\vec{r}_{vv} = \Gamma^1_{22}\vec{r}_u + \Gamma^2_{22}\vec{r}_v + \lambda_{22}\vec{n} \qquad (3)$$

II növ törəmə düsturları isə belədir:

$$\vec{n}_u = \alpha^1_1\vec{r}_u + \alpha^2_1\vec{r}_v + \lambda_1\vec{n} \qquad (4_1)$$

$$\vec{n}_v = \alpha^1_2\vec{r}_u + \alpha^2_2\vec{r}_v + \lambda_2\vec{n} \qquad (4_2)$$

$\Gamma^1_{11}, \Gamma^2_{11}, \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{21}, \Gamma^2_{12}, \Gamma^2_{21}, \Gamma^1_{22}, \Gamma^2_{22}$ I növ Kristofel əmsalları adlanırlar və $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}, \lambda_1, \lambda_2, \alpha^1_1, \alpha^2_1, \alpha^1_2, \alpha^2_2$ ilə birlikdə ayrılış əmsallarıdır

Oeyd edək ki, $\vec{r}_{uv} = \vec{r}_{vu}$ olduğu üçün (2_1) və (2_2) eynidirlər. Odur ki, $\Gamma^1{}_{12} = \Gamma^1{}_{21}, \ \Gamma^2{}_{12} = \Gamma^2{}_{21}$ və həm də $\lambda_{12} = \lambda_{21}$ olar. . Bu əmsalları səthin kvadratik formalarının əmsallarının köməyi ilə təyin etmək olar.

$\vec{n}^2 = 1$ oldugu üçün $\vec{n} \cdot \vec{n}_u = \vec{n} \cdot \vec{n}_v = 0$ olar. Odur ki, (4) düsturlarında $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ olar. (3) düsturlarının hər iki tırıflərini skalyar $\vec{n}$ vektoruna vursaq $\vec{r}_u \perp \vec{n}, \ \vec{r}_v \perp \vec{n}$ olduğu üçün $\lambda_{11} = h_{11}, \lambda_{12} = \lambda_{21} = h_{12}, \lambda_{22} = h_{22}$ kimi təyin edilər.

İndi Kristofel əmsallarını təyin edək.

(1)-in hər iki tərəfini əvvəlcə $\vec{r}_u$, sonra $\vec{r}_v$ vektorlarına ckalyar vuraq:

$$\begin{cases} \vec{r}_{uu}\vec{r}_u = \Gamma^1_{11}\vec{r}_u \cdot \vec{r}_u + \Gamma^2_{11}\vec{r}_v \cdot \vec{r}_u + \lambda_{11}\vec{n} \cdot \vec{r}_u \\ \vec{r}_{uu}\vec{r}_v = \Gamma^1_{11}\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v + \Gamma^2_{11}\vec{r}_v \cdot \vec{r}_v + \lambda_{11}\vec{n} \cdot \vec{r}_v \end{cases} \qquad (1')$$

(1´) sistemində sağ tərəfdə $\vec r_u \perp \vec n,\ \vec r_v \perp \vec n$ olduğunu nəzərə alıb, I kvadratik formanın əmsalları düsturundan istifadə etsək belə alarıq:

$$\begin{cases} \vec r_{uu}\vec r_u = \Gamma_{11}^1 g_{11} + \Gamma_{11}^2 g_{12} \\ \vec r_{uu}\vec r_v = \Gamma_{11}^1 g_{21} + \Gamma_{11}^2 g_{22} \end{cases} \quad (1´´)$$

Sistemi həll edərək $\Gamma_{11}^1, \Gamma_{11}^2$ əmsallarını təyin etmək olar.

(2_1)-in hər iki tərəfini əvvəlcə $\vec r_u$, sonra $\vec r_v$ vektorlarına ckalyar vuraq:

$$\begin{cases} \vec r_{uv}\vec r_u = \Gamma_{12}^1 \vec r_u \cdot \vec r_u + \Gamma_{12}^2 \vec r_v \cdot \vec r_u + \lambda_{12}\vec n \cdot \vec r_u \\ \vec r_{uv}\vec r_v = \Gamma_{12}^1 \vec r_u \cdot \vec r_v + \Gamma_{12}^2 \vec r_v \cdot \vec r_v + \lambda_{12}\vec n \cdot \vec r_v \end{cases} \quad (2´_1)$$

(2_1´) sistemində sağ tərəfdə $\vec r_u \perp \vec n,\ \vec r_v \perp \vec n$ olduğunu nəzərə alıb, I kvadratik formanın əmsalları düsturundan istifadə etsək belə alarıq:

$$\begin{cases} \vec r_{uv}\vec r_u = \Gamma_{12}^1 g_{11} + \Gamma_{12}^2 g_{12} \\ \vec r_{uv}\vec r_v = \Gamma_{12}^1 g_{21} + \Gamma_{12}^2 g_{22} \end{cases} \quad (2_1´´)$$

Sistemi həll edərək $\Gamma_{12}^1, \Gamma_{12}^2$ əmsallarını təyin etmək olar.

(3)-ün hər iki tərəfini əvvəlcə $\vec r_u$, sonra $\vec r_v$ vektorlarına ckalyar vuraq:

$$\begin{cases} \vec r_{vv}\vec r_u = \Gamma_{22}^1 \vec r_u \cdot \vec r_u + \Gamma_{22}^2 \vec r_v \cdot \vec r_u + \lambda_{22}\vec n \cdot \vec r_u \\ \vec r_{vv}\vec r_v = \Gamma_{22}^1 \vec r_u \cdot \vec r_v + \Gamma_{22}^2 \vec r_v \cdot \vec r_v + \lambda_{22}\vec n \cdot \vec r_v \end{cases} \quad (3´)$$

(3´) sistemində sağ tərəfdə $\vec r_u \perp \vec n,\ \vec r_v \perp \vec n$ olduğunu nəzərə alıb, I kvadratik formanın əmsalları düsturundan istifadə etsək belə alarıq:

$$\begin{cases} \vec r_{vv}\vec r_u = \Gamma_{22}^1 g_{11} + \Gamma_{22}^2 g_{12} \\ \vec r_{vv}\vec r_v = \Gamma_{22}^1 g_{21} + \Gamma_{22}^2 g_{22} \end{cases} \quad (3´´)$$

Sistemi həll edərək $\Gamma_{22}^1, \Gamma_{22}^2$ əmsallarını təyin etmək olar. Məlumdur ki,

$$\vec r_u^{\,2} = g_{11},\quad \vec r_u \cdot \vec r_v = g_{12},\quad \vec r_v^{\,2} = g_{22}$$

düsturları vardır. Bunların hər birindən əvvəlcə *u* dəyişəninə, sonra isə *v* dəyişəninə görə xüsusi törəmə alaq və (1´´), (2_1´´), (3´´) sistemlərinin sol tərəflərindəki skalyar hasilləri təyin edək . Onda alarıq:

$$\vec r_u^{\,2} = g_{11} \Rightarrow 2\vec r_u \cdot \vec r_{uu} = \partial_u g_{11} \Rightarrow \vec r_u \cdot \vec r_{uu} = \frac{1}{2}\partial_u g_{11} \qquad (*)_1$$

$$\vec r_u^{\,2} = g_{11} \Rightarrow 2\vec r_u \vec r_{uv} = \partial_v g_{11} \Rightarrow \vec r_u \vec r_{uv} = \frac{1}{2}\partial_v g_{11} \qquad (*)_2$$

$$\vec{r}_v^{\,2} = g_{22} \Rightarrow 2\vec{r}_v\vec{r}_{uv} = \partial_u g_{22} \Rightarrow \vec{r}_v\vec{r}_{uv} = \frac{1}{2}\partial_u g_{22} \qquad (*)_3$$

$$\vec{r}_v^{\,2} = g_{22} \Rightarrow 2\vec{r}_v\vec{r}_{vv} = \partial_v g_{22} \Rightarrow \vec{r}_v\vec{r}_{vv} = \frac{1}{2}\partial_v g_{22} \qquad (*)_4$$

$$\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = g_{12} \Rightarrow \vec{r}_{uu} \cdot \vec{r}_v + \vec{r}_u \cdot \vec{r}_{vu} = \partial_u g_{12} \Rightarrow \vec{r}_{uu} \cdot \vec{r}_v = \partial_u g_{12} - \frac{1}{2}\partial_v g_{11} \qquad (*)_5$$

$$\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = g_{12} \Rightarrow \vec{r}_{uv} \cdot \vec{r}_v + \vec{r}_u \cdot \vec{r}_{vv} = \partial_v g_{12} \Rightarrow \vec{r}_{vv} \cdot \vec{r}_u = \partial_v g_{12} - \frac{1}{2}\partial_u g_{22} \qquad (*)_6$$

$(*)_1$-$(*)_6$ qiymətlərini (1´´), (2$_1$´´) , (3´´) sistemlərinin sol tərəflərində yerinə yazıb, alınan tənliklərdən $\Gamma_{11}^1, \Gamma_{11}^2, \Gamma_{12}^1 \Gamma_{21}^1, \Gamma_{12}^2, \Gamma_{21}^2, \Gamma_{22}^1, \Gamma_{22}^2$ I növ Kristofel əmsallarını təyin etmək olar.

Məsələn, (1´´)-in sol tərəfində $(*)_1$ və $(*)_5$ –i nəzərə alsaq,

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2g}\begin{vmatrix} \partial_u g_{11} & g_{12} \\ 2\partial_u g_{12} - \partial_v g_{11} & g_{22} \end{vmatrix}; \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2g}\begin{vmatrix} g_{11} & \partial_u g_{11} \\ g_{12} & 2\partial_u g_{12} - \partial_v g_{11} \end{vmatrix}$$

kimi təyin edilə bilər. Analoli yolla, (2$_1$´´)-in sol tərəfində $(*)_2$ və $(*)_3$ –ü nəzərə alsaq, Γ_{12}^1 , Γ_{12}^2 aşağıdakı kimi təyin olunar.

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2g}\begin{vmatrix} \partial_v g_{11} & g_{12} \\ \partial_u g_{22} & g_{22} \end{vmatrix}; \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2g}\begin{vmatrix} g_{11} & \partial_v g_{11} \\ g_{12} & \partial_u g_{22} \end{vmatrix}.$$

Həmin yolla (3´´)-in sol tərəfində $(*)_4$ və $(*)_6$ –i nəzərə alsaq, Γ_{12}^1 , Γ_{12}^2 aşağıdakı kimi təyin olunar:

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2g}\begin{vmatrix} 2\partial_v g_{12} - \partial_v g_{11} & g_{12} \\ \partial_v g_{22} & g_{22} \end{vmatrix}; \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2g}\begin{vmatrix} g_{11} & 2\partial_v g_{12} - \partial_v g_{11} \\ g_{12} & \partial_v g_{22} \end{vmatrix}$$

Beləliklə, İ növ Kristofel əmsalları təyin edilmiş olur. Göründüyü kimi bu əmsallar səthin daxili həndəsəsinə aiddir. Qeyd edək ki, (1´´), (2$_1$´´) , (3´´) düsturlarının sol tərəfindəki skalyar hasillər II növ Kristofel əmsalları adlanırlar. $(*)_1$-$(*)_6$ düsturlarından görünür ki, II növ Kristofel əmsalları da səthin daxili həndəsəsinə daxil olan anlayışlardır.

37-ci mövzu. Tam əyrilik haqqında Qaus teoemi

Teorem. k tərtibdən hamar səthin tam əyriliyi yalnız I kvadratik formanın əmsalları və n törəmələri ilə ifadə olunur.

Teoremdən görünür ki, səthin tam əyriliyi səthin daxili həndəsəsinə daxildir.

İsbatı. $\phi \in C^k \quad (k \geq 3), \quad r = r(u,v)$ səthi üzərində mütəhərrik, yəni M nöqtəsilə yerini dəyişən $R_M = (M, \vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{n})$ reperini götürək və (1)-(4) törəmə düsturlarını müəyyən edək.Teoremi isbat etmək üçün $\vec{r}_{uuv} = \vec{r}_{uvu}$ bərabərliyindən istifadə olunur. $\vec{r}_{uu} = \Gamma^1_{11}\vec{r}_u + \Gamma^2_{11}\vec{r}_v + \lambda_{11}\vec{n}$, $\vec{r}_{uv} = \Gamma^1_{12}\vec{r}_u + \Gamma^2_{12}\vec{r}_v + \lambda_{12}\vec{n}$ ifadələrinin I-dən *v*-yə görə,II-dən *u*-ya görə xüsusi törəmə alıb, bazis vektorlara nəzərən qruplaşdırma aparırıq. Sonra $\vec{r}_{uuv} = \vec{r}_{uvu}$ bərabərliyindən $\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{n}$ vektorlarının bazis əmələ gətirdiyinə görə onların uyğun əmsallarını bərabər götürürük.